1.8

ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

ΕΚΠ - ΜΚΔ ακέραιων ρητών παραστάσεων

ΕΚΠ - ΜΚΔ

Βασικά στοιχεία θεωρίας

1. Πως βρίσκουμε το ΕΚΠ και το ΜΚΔ αριθμών;

Απάντηση

Για να βρούμε το ΕΚΠ και το ΜΚΔ δύο ή περισσότερων αριθμών, αρχικά τους αναλύουμε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

- Το **ΕΚΠ** είναι το γινόμενο των κοινών και μη κοινών παραγόντων με τον μεγαλύτερο εκθέτη.
- Το **ΜΚΔ** είναι το γινόμενο των **κοινών παραγόντων** με τον **μικρότερο** εκθέτη.

Παράδειγμα: Να βρείτε το ΕΚΠ και το ΜΚΔ των αριθμών 180, 270 και 450.

Λύση

Αρχικά αναλύουμε τους αριθμούς σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

270	2
135	3
45	3
15	3
5	5
1	

450	2
225	3
75	3
25	5
5	5
1	

Άρα έχουμε:

$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ $270 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5$ $450 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

Οπότε,

$$\text{ΕΚΠ}(180, 270, 450) = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 = 2700$$

(Γινόμενο κοινών και μη κοινών παραγόντων με τον μεγαλύτερο εκθέτη)

$$\text{ΜΚΔ}(180, 270, 450) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90$$

(Γινόμενο κοινών παραγόντων με τον μικρότερο εκθέτη)

2. Πως βρίσκουμε το ΕΚΠ και το ΜΚΔ δύο ή περισσότερων αλγεβρικών παραστάσεων;

Απάντηση

Αρχικά αναλύουμε τις παραστάσεις σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

- Το **ΕΚΠ** είναι το γινόμενο των κοινών και μη κοινών παραγόντων με τον μεγαλύτερο εκθέτη.
- Το **ΜΚΔ** είναι το γινόμενο των **κοινών παραγόντων** με τον **μικρότερο** εκθέτη.

Παράδειγμα: Να βρείτε το ΕΚΠ και το ΜΚΔ των μονωνύμων $\alpha^3\beta^5\gamma^2$, $\alpha^3\beta^2\gamma$, $\alpha^4\beta^6\gamma^4$.

Λύση

$$\text{ΕΚΠ} = \alpha^4\beta^6\gamma^4 \qquad \text{ΜΚΔ} = \alpha^3\beta^2\gamma$$

Παρατηρήσεις – Σχόλια

- Στο εξής θα ασχοληθούμε σε ακέραιες αλγεβρικές παραστάσεις με θετικούς συντελεστές.
- Ως αριθμητικό παράγοντα του ΕΚΠ θα θεωρούμε το ΕΚΠ των αριθμητικών παραγόντων των παραστάσεων.
- Ως αριθμητικό παράγοντα του ΜΚΔ θα θεωρούμε το ΜΚΔ των αριθμητικών παραγόντων των παραστάσεων.

Παράδειγμα: Να βρείτε το ΕΚΠ και το ΜΚΔ των παρακάτω αλγεβρικών παραστάσεων:

$$3x^3(x+2)^2(x-5)^4,\ 6(x+2)(x+5)^3,\ 9(x-2)^2(x-5).$$

Λύση

$$\text{ΕΚΠ} = 18(x+2)^2(x-5)^4 \qquad \text{ΜΚΔ} = 3(x+2)(x-5)$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΜΕ ΑΠΛΑ ΒΗΜΑΤΑ

Πως βρίσκουμε το ΕΚΠ και το ΜΚΔ πολυωνύμων;

ΒΗΜΑ 1: Παραγοντοποιούμε κάθε πολυώνυμο.

ΒΗΜΑ 2: Βρίσκουμε το ΕΚΠ και το ΜΚΔ των αριθμητικών παραγόντων.

ΒΗΜΑ 3: Γράφουμε ΕΚΠ και ΜΚΔ λαμβάνοντας υπόψιν ότι:

ΕΚΠ: Είναι το γινόμενο των κοινών και μη κοινών παραγόντων με τον μεγαλύτερο εκθέτη.

ΜΚΔ: Είναι το γινόμενο των κοινών παραγόντων με τον μικρότερο εκθέτη.

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

ΕΚΠ – ΜΚΔ μονωνύμων

Παράδειγμα 1 : Να βρείτε το ΕΚΠ και το ΜΚΔ των παρακάτω μονωνύμων:

$$12x^3y^7z^5\,,\ 18x^5y^5z^5\,,\ 9x^4y^3z^6$$

ΛΥΣΗ

Αρχικά βρίσκουμε το ΕΚΠ και το ΜΚΔ των συντελεστών των μονωνύμων.

$$12 = 2^2 \cdot 3 \qquad 18 = 2 \cdot 3^2 \qquad 9 = 3^2$$

Οπότε,

$$\text{ΕΚΠ}(12,18,9) = 2^2 \cdot 3^2 = 36 \qquad \text{ΜΚΔ}(12,18,9) = 2 \cdot 3 = 6$$

Στα κύρια μέρη των μονωνύμων παρατηρούμε ότι:

- Το x υπάρχει σε όλα τα μονώνυμα με μεγαλύτερο εκθέτη το 5 και μικρότερο το 3.
- Το y υπάρχει σε όλα τα μονώνυμα με μεγαλύτερο εκθέτη το 7 και μικρότερο το 3.
- Το z υπάρχει σε όλα τα μονώνυμα με μεγαλύτερο εκθέτη το 6 και μικρότερο το 5.

Οπότε,

$$\text{ΕΚΠ} = 36x^5y^7z^6 \qquad \text{ΜΚΔ} = 6x^3y^3z^5$$

ΕΚΠ – ΜΚΔ πολυωνύμων

Παράδειγμα 2 : Να βρείτε το ΕΚΠ και το ΜΚΔ των παρακάτω αλγεβρικών παραστάσεων:

$$2x^3-4x^2+2x,\ 4x^4-4x^2,\ 6x^3-6x^2.$$

ΛΥΣΗ

Αναλύουμε τις παραστάσεις σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

- $2x^3-4x^2+2x=2x\left(x^2-2x+1\right)=2x(x-1)^2$
- $4x^4-4x^2=4x^2\left(x^2-1\right)=4x^2(x-1)(x+1)$
- $6x^3-6x^2=6x^2(x-1)$

Οπότε,

$$\text{ΕΚΠ}=12x^2(x-1)^2(x+1) \qquad \text{ΜΚΔ}=2x(x-1)$$

Παράδειγμα 3 : Να βρείτε το ΕΚΠ και το ΜΚΔ των παρακάτω αλγεβρικών παραστάσεων:

$$3\left(\alpha^4-\alpha^2\right)\left(\alpha^2+4\alpha+4\right),\quad \left(\alpha^2+2\alpha+1\right)(3\alpha+6)^2,\quad 3(\alpha+2)^3\left(\alpha^2+\alpha\right)$$

ΛΥΣΗ

Παραγοντοποιούμε τις παραστάσεις και τις αναλύουμε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

- $3\left(\alpha^4-\alpha^2\right)\left(\alpha^2+4\alpha+4\right)=3\alpha^2\left(\alpha^2-1\right)(\alpha+2)^2=3\alpha^2(\alpha-1)(\alpha+1)(\alpha+2)^2$
- $\left(\alpha^2+2\alpha+1\right)(3\alpha+6)^2=(\alpha+1)^2\left[3(\alpha+2)\right]^2=(\alpha+1)^2\cdot 3^2(\alpha+2)^2=9(\alpha+1)^2(\alpha+2)^2$
- $3(\alpha+2)^3\left(\alpha^2+\alpha\right)=3(\alpha+2)^3\alpha(\alpha+1)=3\alpha(\alpha+2)^3(\alpha+1)$

Οπότε,

$$\text{ΕΚΠ}=9\alpha^2(\alpha-1)(\alpha+1)^2(\alpha+2)^3 \qquad \text{ΜΚΔ}=3(\alpha+1)(\alpha+2)^2$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΕΚΠ – ΜΚΔ μονωνύμων

1. Να βρείτε τα ΕΚΠ και ΜΚΔ των μονωνύμων:

α) $x^3,\ x^5,\ x^7$

β) $7x^4,\ 14x^3,\ 21x^5$

γ) $10x^8,\ 5x^4,\ x^6$

δ) $8x^4,\ 4x^3,\ 12x^7$

2. Να βρείτε τα ΕΚΠ και ΜΚΔ των μονωνύμων:

α) $6\alpha^3\beta^2,\ 18\alpha^5\beta^4,\ \alpha^7\beta$

β) $15\alpha\beta\gamma^9,\ 45\alpha^4\beta^4\gamma^4,\ 30\alpha^7\beta^6\gamma^5$

γ) $2\alpha^9\beta^3\gamma^6,\ 4\alpha^7\beta^5,\ 6\alpha^8\beta^4\gamma^5$

δ) $22\alpha^8\beta^7\gamma^5,\ 11\beta^7\gamma^8,\ 33\alpha^4\beta^6$

ΕΚΠ – ΜΚΔ πολυωνύμων

3. Να βρείτε τα ΕΚΠ και ΜΚΔ των πολυωνύμων:

α) $2\alpha^2-2\alpha,\ 2\alpha^2-4\alpha+2,\ 2\alpha^2-8$

β) $3\alpha^2-18\alpha+27,\ 3\alpha^2-9\alpha,\ 2\alpha^4-18\alpha^2$

γ) $2x^2-50,\ 4x^2+20x,\ 2x^2+20x+50$

δ) $3x^2-27,\ 6x^2-18x,\ 9x^3-54x^2+81x$