

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και G είναι μία παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, να δείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = G(\beta) - G(\alpha).$$

(10 μονάδες)

A2. Θεωρήστε τον ισχυρισμό:

Για οποιοδήποτε συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, αν ισχύει $f(x) \cdot g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε είναι:

$$f(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ ή } g(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να απαντήσετε αν είναι σωστό ή λάθος και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(5 μονάδες)

A3. Να απαντήσετε με Σωστό ή Λάθος.

α) Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , με $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η C_f βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της με εξαίρεση το σημείο επαφής κάθε εφαπτομένης με την C_f .

Σ - Λ

(2 μονάδες)

β) Η συνάρτηση $f(x) = |x - 1|$ έχει κρίσιμο σημείο.

Σ - Λ

(2 μονάδες)

γ) Για οποιαδήποτε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $O(0, 0)$ και $A(1, 2)$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

Σ - Λ

(2 μονάδες)

δ) Αν οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες και ισχύει $f'(x) = g'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε είναι βέβαιο ότι $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Σ - Λ

(2 μονάδες)

ε) Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η $f(x)$ έχει παράγουσα στο \mathbb{R} τη μη σταθερή συνάρτηση $F(x)$, τότε είναι βέβαιο ότι η $f(2x)$ έχει παράγουσα την $F(2x)$ στο \mathbb{R} .

Σ - Λ

(2 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \alpha x + \beta - \frac{e^{x+1}}{e^x + 1}$, της οποίας η γραφική παράσταση έχει, στο $-\infty$, ασύμπτωτη την ευθεία $(\varepsilon): y = x + 2$.

B1. Να δείξετε ότι $\alpha = 1, \beta = 2$. (6 μονάδες)

B2. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. (6 μονάδες)

B3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x + 2 - f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
Να δείξετε ότι η g έχει αντίστροφη συνάρτηση και να ορίσετε την g^{-1} . (8 μονάδες)

B4. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int_1^e \frac{1}{g(\ln x)} dx$. (5 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} (x-1)e^x, & x \leq \kappa \\ x^2 - 1, & x > \kappa \end{cases}$,

η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = \kappa$.

Γ1. Να δείξετε ότι: $\kappa = 0$. (6 μονάδες)

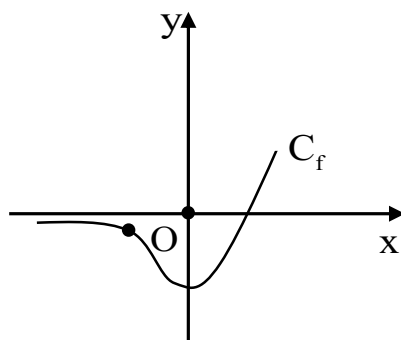
Γ2. Να μελετηθεί η f και η f' ως προς τη μονοτονία.
Να βρείτε (αν υπάρχει) σημείο καμπής της C_f . (6 μονάδες)

Γ3. i) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f και να δείξετε ότι υπάρχει $\alpha \in (-1, 0)$ τέτοιο ώστε η f να ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θ. Rolle στο διάστημα $\left[\alpha, \frac{1}{2}\right]$.

ii) Να βρείτε το $\beta > -1$, ώστε $e^{4\beta f(x)+3\beta} + (\beta+1)^{-4f(x)-3} \geq 2$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$.

(4+4 μονάδες)

Γ4. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = -1$.



(5 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x + x^2$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = -x^4 + 4x - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει σε ένα ακριβώς σημείο $x_0 \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ (ολικό) ελάχιστο.

ii) Να βρεθεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x))}{4x^2 e^{-2x} + 4x e^{-x} + 1}$.

(4+4μονάδες)

Δ2. Να μελετηθεί η g ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρεθεί το σύνολο τιμών της g .

(3 μονάδες)

Δ3. Να δείξετε ότι υπάρχει $\alpha \in (0, 1)$, ώστε οι εφαπτόμενες των C_f και C_g στα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\alpha, g(\alpha))$ αντίστοιχα να μην συμπίπτουν και να είναι παράλληλες

(7μονάδες)

Δ4. Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης

$$e^{g(x)} + 2g(x) = e^{f(x_0)} + 2f(x_0),$$

όπου x_0 η θέση του ελαχίστου της f .

(7 μονάδες)