

ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΥΡΙΔΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

1



Η έννοια της πραγματικής συνάρτησης

Η έννοια της συνάρτησης είναι, ίσως, η πιο σημαντική έννοια των Μαθηματικών.

Και αυτό γιατί μέσω αυτής δηλώνουμε τον τρόπο εξάρτησης ενός μεγέθους από κάποιο άλλο.

Έτσι, αν για παράδειγμα έχουμε δύο μεγέθη x , y τα οποία συνδέονται με τη σχέση $y = 3x$, λέμε ότι το y είναι συνάρτηση του x . Παραδείγματα σύνδεσης δύο μεγεθών έχουμε δει μέχρι τώρα πολλά όπως στην περίπτωση του εμβαδού E ενός τετραγώνου το οποίο είναι συνάρτηση της πλευράς του x αφού ισχύει $E = x^2$. Έτσι σε κάθε $x > 0$ που εκφράζει το μήκος της πλευράς ενός τετραγώνου αντιστοιχίζεται το μέγεθος E που εκφράζει το εμβαδό αυτού του τετραγώνου. Μάλιστα πολλές φορές, για να δώσουμε έμφαση στο γεγονός ότι το E είναι συνάρτηση του x , αντί να γράφουμε απλά $E = x^2$ γράφουμε $E(x) = x^2$.

Με τον όρο συνάρτηση θα εννοούμε μια διαδικασία (κανόνα), με την οποία κάποιοι πραγματικοί αριθμοί x αντιστοιχίζονται σε κάποιους πραγματικούς αριθμούς y κάτω από κάποιες προϋποθέσεις.

Οπότε, η περιγραφή μιας συνάρτησης προϋποθέτει γνώση αυτής της διαδικασίας καθώς επίσης και του συνόλου A που περιέχει όλες τις τιμές που μπορεί να πάρει το x .

Έχουμε λοιπόν τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός (συνάρτησης)

Έστω A ένα υποσύνολο του \mathbb{R} . Ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A** μια διαδικασία (κανόνα) f , με την οποία **κάθε** στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε **ένα μόνο** πραγματικό αριθμό y . Το y ονομάζεται **τιμή της f στο x** και συμβολίζεται με $f(x)$.

Βασικές επισημάνσεις

- Για να εκφράσουμε τη διαδικασία αυτή γράφουμε

$$f : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \rightarrow f(x).$$

- Το γράμμα x , που παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του A λέγεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ το γράμμα y , που παριστάνει την τιμή της f στο x , λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.

- Για να δηλώσουμε ότι μία συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο A , γράφουμε $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

Για παράδειγμα, αν για μια συνάρτηση f έχουμε $f : (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ τότε το πεδίο ορισμού της f είναι το διάστημα $A = (0,1)$.

- Το πεδίο ορισμού A μιας συνάρτησης f συνήθως συμβολίζεται με D_f .
- Θα ασχοληθούμε μόνο με συναρτήσεις που το πεδίο ορισμού τους είναι **διάστημα ή ένωση διαστημάτων**.
- Όταν θα λέμε ότι «**Η συνάρτηση f είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο B** », θα εννοούμε ότι το B είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της.

Παράδειγμα

Η συνάρτηση $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ έχει πεδίο ορισμού το \mathbb{R} . Οπότε όταν λέμε ότι η f είναι ορισμένη στο B μπορεί το B να είναι το \mathbb{R} ή το $(-\infty, 1]$ ή το $[2, 5]$ ή οποιοδήποτε άλλο υποσύνολο του \mathbb{R} .

Συντομογραφία συνάρτησης

Για να οριστεί μία συνάρτηση f αρκεί να δοθούν δύο στοιχεία:

- το πεδίο ορισμού της και
- η τιμή της, $f(x)$ για κάθε x του πεδίου ορισμού της.

Βασική επισήμανση

Όταν αναφερόμαστε σε μία συνάρτηση f δίνοντας μόνο τον τύπο της, τότε θεωρούμε συμβατικά ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών x , για τους οποίους το $f(x)$ έχει νόημα.

Για παράδειγμα, όταν δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-2}$ χωρίς να αναφέρεται το πεδίο ορισμού της, τότε θεωρούμε ότι αυτό είναι το σύνολο $A = [2, +\infty)$, αφού το $f(x)$ έχει νόημα για εκείνα τα x , ώστε

$$x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2 \Leftrightarrow x \in [2, +\infty).$$

Υπενθυμίζουμε ότι:

- Κάθε παρονομαστής οφείλει να είναι διαφορετικός του μηδενός.
- Κάθε υπόρριξη ποσότητα οφείλει να είναι μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός.
- Κάθε λογαριθμητέα ποσότητα οφείλει να είναι μεγαλύτερη του μηδενός.

Οπότε, αν $A(x)$ είναι αλγεβρική παράσταση που ορίζεται σε όλο το \mathbb{R} έχουμε:

Συνάρτηση	Εύρεση πεδίου ορισμού
$f(x) = \frac{1}{A(x)}$	$A(x) \neq 0$
$f(x) = \sqrt{A(x)}$	$A(x) \geq 0$
$f(x) = \ln A(x)$	$A(x) > 0$

Πεδίο ορισμού βασικών συναρτήσεων

Συνάρτηση	Πεδίο ορισμού
$f(x) = x^v, v \in \mathbb{N}^*$	$A = \mathbb{R}$
$f(x) = x^{-v}, v \in \mathbb{N}^*$	$A = \mathbb{R}^*$
$f(x) = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}_+^* - \mathbb{Z}$	$A = [0, +\infty)$
$f(x) = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}_-^* - \mathbb{Z}$	$A = (0, +\infty)$
$f(x) = \sqrt[v]{x}, v \in \mathbb{N}^* - \{1\}$	$A = [0, +\infty)$
$f(x) = \eta\mu x$	$A = \mathbb{R}$
$f(x) = \sigma\upsilon\nu x$	$A = \mathbb{R}$
$f(x) = \varepsilon\phi x$	$A = \mathbb{R} - \left\{ \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \right\}$
$f(x) = \sigma\phi x$	$A = \mathbb{R} - \{ \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z} \}$
$f(x) = e^x$	$A = \mathbb{R}$
$f(x) = \alpha^x, 0 < \alpha \neq 1$	$A = \mathbb{R}$
$f(x) = \ln x$	$A = (0, +\infty)$

Βασική επισήμανση

Η περιγραφή μιας συνάρτησης μπορεί να γίνει με έναν τύπο ο οποίος δεν είναι απαραίτητα ενιαίος αλλά πολλαπλός.

Παράδειγμα

Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$$

περιγράφεται με έναν διπλό τύπο. Από τον τύπο της f προκύπτει ότι η f ορίζεται για $x < 0$ δηλαδή, στο διάστημα $(-\infty, 0)$ και για $x > 1$ δηλαδή, στο διάστημα $(1, +\infty)$. Άρα, το πεδίο ορισμού της είναι το σύνολο $A = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$. Επίσης, ισχύει

$$f(x) = x^2, \text{ όταν } x < 0 \text{ και } f(x) = 2x, \text{ όταν } x > 1.$$

**Πρόταση μελέτης**

Όλες οι λυμένες ασκήσεις και από τις ασκήσεις για λύση οι:

1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 18, 20, 24, 25, 26, 29, 31, 32, 34.

**Λυμένες ασκήσεις****▣ Εύρεση πεδίου ορισμού**

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4x+3}$

ii) $f(x) = \frac{1}{|x|-3}$

iii) $f(x) = \sqrt{4-x}$

iv) $f(x) = \frac{x}{2\eta\mu x - 3}$.

Λύση

i) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f αποτελείται από εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$, ώστε

$$x^2 - 4x + 3 \neq 0.$$

Η εξίσωση $x^2 - 4x + 3 = 0$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 4$ και ρίζες τις $x_1 = 1$ και $x_2 = 3$. Άρα,

$$D_f = \mathbb{R} - \{1, 3\} = (-\infty, 1) \cup (1, 3) \cup (3, +\infty).$$

ii) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f αποτελείται από εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$, ώστε $|x| - 3 \neq 0$. Όμως, $|x| - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ ή $x = 3$.

Επομένως, $|x| - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$ και $x \neq 3$. Άρα, $D_f = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$

iii) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f αποτελείται από εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$, ώστε

$$4 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 4.$$

Επομένως, $D_f = (-\infty, 4]$.

iv) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f αποτελείται από εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$, ώστε

$$2\eta\mu x - 3 \neq 0. \text{ Όμως, } 2\eta\mu x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2\eta\mu x = 3 \Leftrightarrow \eta\mu x = \frac{3}{2}, \text{ αδύνατη αφού}$$

$$\eta\mu x \in [-1, 1] \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } \frac{3}{2} > 1.$$

Επομένως $2\eta\mu x - 3 \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και συνεπώς $D_f = \mathbb{R}$.

2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{|x|-1}}$

ii) $f(x) = \ln(16 - x^2)$

iii) $f(x) = \ln(e^x - 1)$

iv) $f(x) = \sqrt{1 - \ln x}$.

Λύση

i) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f αποτελείται από εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$, ώστε

$$|x| - 1 > 0 \Leftrightarrow |x| > 1 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ή } x > 1.$$

Επομένως, $D_f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

ii) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f αποτελείται από εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$, ώστε

$$16 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow x^2 < 16 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} < \sqrt{16} \Leftrightarrow |x| < 4 \Leftrightarrow -4 < x < 4.$$

Επομένως, $D_f = (-4, 4)$.

iii) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f αποτελείται από εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$, ώστε

$$e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0.$$

Επομένως, $D_f = (0, +\infty)$.

iv) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f αποτελείται από εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$, ώστε

$$\begin{cases} x > 0 \\ 1 - \ln x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \leq \ln e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \leq e \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \leq e$$

Επομένως, $D_f = (0, e]$.

3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x) = \frac{\sqrt{8-x^3}}{x}$

ii) $f(x) = \frac{x \ln x}{1-x}$

iii) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x} - x\right)$

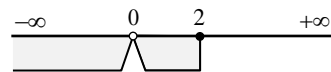
iv) $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$.

Λύση

i) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f αποτελείται από εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$, ώστε

$$\begin{cases} 8 - x^3 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 \leq 8 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 \leq 2^3 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

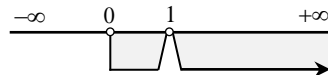
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (0, 2].$$



Επομένως, $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, 2]$.

ii) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f αποτελείται από εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$, ώστε:

$$\begin{cases} x > 0 \\ 1 - x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0, 1) \cup (1, +\infty).$$



Επομένως, $D_f = (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

iii) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f αποτελείται από εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$, ώστε:

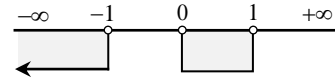
$$\frac{1}{x} - x > 0 \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{x} > 0 \Leftrightarrow x(1-x^2) > 0.$$

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται το πρόσημο της παράστασης $x(1-x^2)$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
x	-		-		+
$1-x^2$	-		+		-
$x(1-x^2)$	+		-		-

Οπότε, $x(1-x^2) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$.

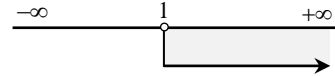
Επομένως, $D_f = (-\infty, -1) \cup (0, 1)$.



iv) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f αποτελείται από εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$ ώστε:

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ \ln x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \ln x > \ln 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$$

Επομένως, $D_f = (1, +\infty)$.



4. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x) = \begin{cases} -2x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$

ii) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & 1 < x \leq 4. \end{cases}$

Λύση

i) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f αποτελείται από εκείνα τα x ώστε $x \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0]$ καθώς επίσης και από όλα τα x ώστε $x > 0 \Leftrightarrow x \in (0, +\infty)$.

Δηλαδή,

$$D_f = (-\infty, 0] \cup (0, +\infty) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

Σχόλιο

Το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης πολλαπλού τύπου, προκύπτει από την ένωση των συνόλων ορισμού της με βάση τους περιορισμούς για το x σε κάθε κλάδο της.

- ii) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f αποτελείται από εκείνα τα x ώστε $x < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0)$ καθώς επίσης και από όλα τα x , ώστε

$$1 < x \leq 4 \Leftrightarrow x \in (1, 4].$$

Δηλαδή, $D_f = (-\infty, 0) \cup (1, 4]$.

▣ Τιμές συνάρτησης – Εύρεση παραμέτρων

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + \alpha x}{x - \alpha}$ τέτοια, ώστε $f(1) = -3$.

Να βρείτε:

- i) την τιμή του α
- ii) το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

Λύση

$$\begin{aligned} \text{i) Έχουμε } f(1) = -3 &\Leftrightarrow \frac{1^2 + \alpha \cdot 1}{1 - \alpha} = -3 \Leftrightarrow 1 + \alpha = -3(1 - \alpha) \\ &\Leftrightarrow 1 + \alpha = -3 + 3\alpha \Leftrightarrow 2\alpha = 4 \Leftrightarrow \alpha = 2. \end{aligned}$$

- ii) Για $\alpha = 2$ έχουμε

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x - 2}.$$

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f αποτελείται από εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$, ώστε

$$x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2.$$

Επομένως, $D_f = \mathbb{R} - \{2\} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2\alpha x & , x \leq 0 \\ \ln x - \alpha x & , x > 0 \end{cases}$ τέτοια, ώστε

$$f(-1) = f(1).$$

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και την τιμή του α .
- ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -x$.

Λύση

i) Η συνάρτηση f ορίζεται για κάθε $x \leq 0$ και για κάθε $x > 0$. Επομένως,

$$D_f = (-\infty, 0] \cup (0, +\infty) = \mathbb{R}.$$

Επίσης,

$$f(-1) = f(1) \Leftrightarrow (-1)^2 + 2\alpha(-1) = \ln 1 - \alpha \cdot 1 \Leftrightarrow 1 - 2\alpha = 0 - \alpha \Leftrightarrow \alpha = 1.$$

ii) Αντικαθιστώντας στον τύπο της f την τιμή του α που βρήκαμε στο ερώτημα ii)

$$\text{προκύπτει } f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x \leq 0 \\ \ln x - x, & x > 0 \end{cases}.$$

Οπότε:

- Αν $x \leq 0$, η εξίσωση $f(x) = -x$ ισοδύναμα γράφεται

$$x^2 + 2x = -x \Leftrightarrow x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -3, \text{ δεκτές.}$$

- Αν $x > 0$, η εξίσωση $f(x) = -x$ ισοδύναμα γράφεται

$$\ln x - x = -x \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \ln 1 \Leftrightarrow x = 1, \text{ δεκτή.}$$

Επομένως, $f(x) = -x \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = -3$ ή $x = 1$.

7. Να βρείτε τις τιμές του λ για τα οποίες η συνάρτηση

$$f(x) = \ln(x^2 + 2x + \lambda)$$

έχει πεδίο ορισμού το \mathbb{R} .

Λύση

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το \mathbb{R} αν και μόνο αν ισχύει

$$x^2 + 2x + \lambda > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Η παράσταση $x^2 + 2x + \lambda$ είναι τριώνυμο 2^{ου} βαθμού με $a = 1 > 0$ και διακρίνουσα $\Delta = 4 - 4\lambda$. Οπότε, η σχέση (1) αληθεύει αν και μόνο αν $\Delta < 0$ δηλαδή,

$$4 - 4\lambda < 0 \Leftrightarrow -4\lambda < -4 \Leftrightarrow 4\lambda > 4 \Leftrightarrow \lambda > 1.$$

Σημείωση

Ένα τριώνυμο

$$ax^2 + bx + \gamma, \quad a \neq 0$$

για να παίρνει μόνο θετικές τιμές για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θα πρέπει $a > 0$ και $\Delta < 0$.

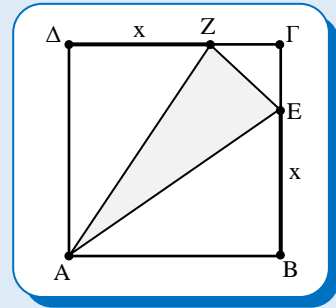
Γενικά ένα τριώνυμο

$$ax^2 + bx + \gamma, \quad a \neq 0$$

διατηρεί το πρόσημο του a για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν έχει διακρίνουσα $\Delta < 0$.

▣ Κατασκευή συνάρτησης σε πρόβλημα

8. Στο διπλανό σχήμα το ισοσκελές τρίγωνο AEZ , με $\text{AE} = \text{AZ}$, είναι εγγεγραμμένο σε τετράγωνο ABΓΔ με πλευρά $\text{AB} = 4$. Να εκφράσετε ως συνάρτηση του $x \in (0, 4)$ την περίμετρο P του τριγώνου AEZ .



Λύση

Το AE είναι η υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ABE .

Οπότε, με βάση το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε

$$\text{AE}^2 = \text{AB}^2 + \text{BE}^2 = 4^2 + x^2 = 16 + x^2.$$

Επομένως,

$$\text{AE} = \sqrt{16 + x^2}.$$

Το EZ είναι η υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου EΓZ .

Οπότε, με βάση το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε

$$\text{EZ}^2 = \text{EΓ}^2 + \text{ΓZ}^2 = (4 - x)^2 + (4 - x)^2 = 2(4 - x)^2.$$

Επομένως,

$$\text{EZ} = \sqrt{2(4 - x)^2} = \sqrt{2} \cdot |4 - x| = \sqrt{2}(4 - x),$$

αφού $x < 4 \Leftrightarrow 4 - x > 0$.

Άρα, η περίμετρος του τριγώνου AEZ είναι

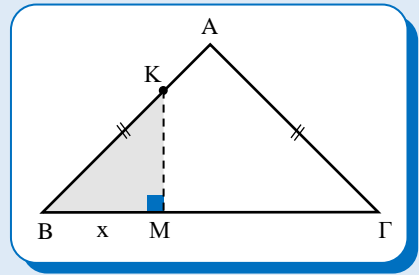
$$P(x) = \text{AE} + \text{AZ} + \text{EZ} = 2\text{AE} + \text{EZ},$$

αφού $\text{AZ} = \text{AE}$.

Δηλαδή,

$$P(x) = 2\sqrt{16 + x^2} + \sqrt{2}(4 - x), \quad x \in (0, 4).$$

9. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με υποτεινούσα $B\Gamma$ μήκους 4cm . Να εκφράσετε το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου χωρίου ως συνάρτηση του $x = BM$ όταν το M διαγράφει το εσωτερικό της $B\Gamma$ και $MK \perp B\Gamma$.



Λύση

Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με βάση τη $B\Gamma$. Οπότε, το ύψος του $A\Delta$ είναι και διάμεσος. Είναι φανερό, ότι όταν το M διαγράφει το $B\Delta$ το γραμμοσκιασμένο χωρίο είναι το ορθογώνιο τρίγωνο BMK (Σχήμα 1) ενώ όταν το M διαγράφει το $\Delta\Gamma$ το γραμμοσκιασμένο χωρίο είναι το τετράπλευρο $BMKA$ (Σχήμα 2).

Διακρίνουμε λοιπόν, δύο περιπτώσεις:

- Αν το M διαγράφει το $B\Delta$, τότε $0 < x \leq 2$ και το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$\begin{aligned} E(x) &= (BMK) = \frac{1}{2}(BM)(MK) \\ &= \frac{1}{2}x \cdot x = \frac{1}{2}x^2, \end{aligned}$$

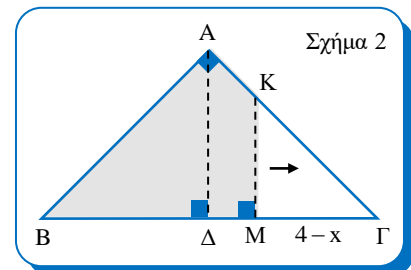
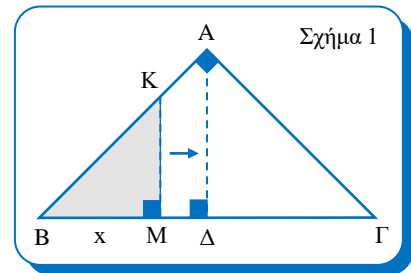
αφού το ορθογώνιο τρίγωνο BMK είναι ισοσκελές διότι $\hat{B} = 45^\circ$ και συνεπώς $\hat{K} = 45^\circ$.

- Αν το M διαγράφει το $\Delta\Gamma$, τότε $2 < x < 4$ και το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$\begin{aligned} E(x) &= (BMKA) = (AB\Gamma) - (M\Gamma K) \\ &= \frac{1}{2}(AB)(A\Gamma) - \frac{1}{2}(M\Gamma)(MK) \\ &= \frac{1}{2}(AB)^2 - \frac{1}{2}(4-x)^2 \\ &= 4 - \frac{1}{2}(4-x)^2, \end{aligned}$$

αφού με βάση το Πυθαγόρειο θεώρημα, στο τρίγωνο $AB\Gamma$, προκύπτει ότι

$$(AB)^2 + (A\Gamma)^2 = (B\Gamma)^2 \Leftrightarrow 2(AB)^2 = 4^2 \Leftrightarrow (AB)^2 = 8.$$



Τελικά,

$$E(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & 0 < x \leq 2 \\ 4 - \frac{1}{2}(4-x)^2, & 2 < x < 4. \end{cases}$$

▣ Γενικές ασκήσεις

10. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση

$$(f(x))^3 + 4f(x) = x - 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης f .

Λύση

Η δοθείσα σχέση ισοδύναμα γράφεται

$$f(x) \left[(f(x))^2 + 4 \right] = x - 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{x-2}{(f(x))^2 + 4} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

αφού

$$(f(x))^2 + 4 > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Έχουμε λοιπόν:

- $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{(f(x))^2 + 4} = 0 \Leftrightarrow x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$
- $f(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{(f(x))^2 + 4} < 0 \Leftrightarrow x-2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$
- $f(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{(f(x))^2 + 4} > 0 \Leftrightarrow x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2.$

Σχόλιο

Η δοθείσα σχέση είναι ισοδύναμη με τη σχέση

$$f(x) = \frac{x-2}{(f(x))^2 + 4}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Οπότε, για να βρούμε τις ρίζες και το πρόσημο της $f(x)$ αρκεί να βρούμε τις ρίζες και το πρόσημο της παράστασης

$$\frac{x-2}{(f(x))^2 + 4}.$$




Ερωτήσεις «Σωστό ή Λάθος»

- Έστω A ένα υποσύνολο του \mathbb{R} . Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A μια διαδικασία (κανόνα) f με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα τουλάχιστον πραγματικό αριθμό y .
- Όταν λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα μη κενό σύνολο B εννοούμε πάντα ότι το B είναι το πεδίο ορισμού της f .
- Όταν για μια συνάρτηση f γράφουμε $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ δηλώνουμε ότι η f έχει πεδίο ορισμού το A .
- Για να ορίσουμε μια συνάρτηση f αρκεί να δώσουμε το πεδίο ορισμού της A και την τιμή της $f(x)$ για κάθε $x \in A$.
- Για κάθε συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει η συνεπαγωγή:
Αν $x_1 = x_2 \in A$ τότε $f(x_1) = f(x_2)$.
- Για κάθε συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει η ισοδυναμία $x_1 = x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$.
- Έστω συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$, τότε κατ' ανάγκη ισχύει $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- Έστω συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $f(x_1) \neq f(x_2)$, τότε $x_1 \neq x_2$.
- Η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $[0, +\infty)$.



Ασκήσεις για λύση

▣ Εύρεση πεδίου ορισμού

-  1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

Βλέπε
λυμένη
1

i) $f(x) = x^2 - 3x + 4$


ii) $f(x) = \frac{2x}{x-5}$

iii) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-3x}$

iv) $f(x) = \frac{x}{x^3-8}$

v) $f(x) = \frac{1}{x^3-4x}$

vi) $f(x) = \frac{x+3}{x^4-x}$.

 7. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

Βλέπε
λυμένη
2

i) $f(x) = x - \ln x$

ii) $f(x) = \ln(x - 2)$

iii) $f(x) = \ln(49 - x^2)$

iv) $f(x) = \ln(x^2 - 4x)$

v) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

vi) $f(x) = \ln|x|$.

8. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x) = \ln(|x| - 1)$

ii) $f(x) = \ln(2 - \sqrt{x})$

iii) $f(x) = \ln(|x| - x)$

iv) $f(x) = \ln(|x| + x)$.


 9. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x-1}-2}$

ii) $f(x) = \frac{2x+5}{\sqrt{3-x}+1}$

iii) $f(x) = \frac{4x}{e^x - 2}$

iv) $f(x) = \frac{x^2+1}{\ln x - 1}$.

 10. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

Βλέπε
λυμένη
3

i) $f(x) = \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$


ii) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)$

iii) $f(x) = \ln(e^x - e^{-x})$

iv) $f(x) = \ln(\ln x)$

v) $f(x) = \sqrt{-\ln x}$

vi) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

 11. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

Βλέπε
λυμένη
4

i) $f(x) = \begin{cases} 4x, & x \leq 1 \\ x^2 + 3x, & 1 < x < 4 \end{cases}$

ii) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & -1 \leq x \leq 1 \\ e^x - 1, & x \geq 2 \end{cases}$

iii) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$

iv) $f(x) = \begin{cases} \eta\mu x, & x \leq 0 \\ x+1, & 1 \leq x < 2 \end{cases}$.