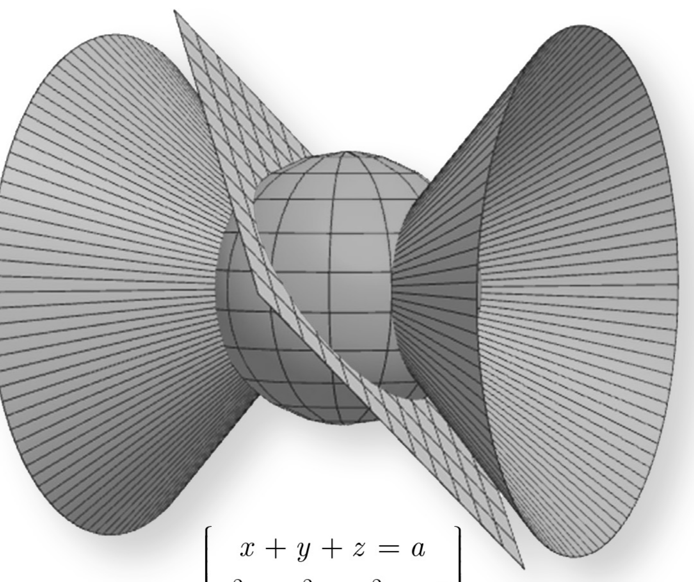
Δημήτρης Ντρίζος

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΡΟΜΕΣ



$$\begin{Bmatrix} x+y+z=a \\ x^2+y^2+z^2=\beta \\ xy=z^2 \end{Bmatrix}$$

Θέματα για μια Εισαγωγή στα Διαγωνιστικά Μαθηματικά

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΤ

1. Στοιχεία Άλγεβρας

1.1 Ταυτότητες

1. Για όλους τους $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ ισχύουν οι ταυτότητες:

    i. $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

    ii. $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

    iii. $\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta)$

    iv. $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$

    v. $(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$

    vi. $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)\cdot(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$

    vii. $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)\cdot(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$

    viii. $(\alpha+\beta)^4=\alpha^4+4\alpha^3\beta+6\alpha^2\beta^2+4\alpha\beta^3+\beta^4$

    ix. $(\alpha-\beta)^4=\alpha^4-4\alpha^3\beta+6\alpha^2\beta^2-4\alpha\beta^3+\beta^4$

    x. $\alpha^\nu-\beta^\nu=(\alpha-\beta)(\alpha^{\nu-1}+\alpha^{\nu-2}\beta+\cdots+\alpha\beta^{\nu-2}+\beta^{\nu-1})$, όπου ν θετικός ακέραιος με $\nu\geq 2$.

    xi. $(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha$

xii. $$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha\right)$$
$$=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right]$$

(*Ταυτότητα Euler*)

xiii. Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$, τότε $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$

xiv. Αν $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$, τότε $\alpha+\beta+\gamma=0$ ή $\alpha=\beta=\gamma$

(*Συνέπειες της ταυτότητας Euler*)

xv. $$(\alpha+\beta+\gamma)^3=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$$

2. $$\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(x^2+y^2\right)=(\alpha x+\beta y)^2+(\alpha y-\beta x)^2$$

(*Ταυτότητα Lagrange*)

3. $$4\alpha^4+\beta^4=\left(2\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\right)\left(2\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\right)$$
$$=\left((\alpha-\beta)^2+\alpha^2\right)\left((\alpha+\beta)^2+\alpha^2\right)$$

(*Ταυτότητα Marie – Sophi Germain*)

Παραδείγματα 1.1.1

Παράδειγμα 1

Αν για τους διαφορετικούς ανά δύο ακέραιους α,β,γ ισχύει $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $2\alpha^4+2\beta^4+2\gamma^4$ είναι τετράγωνο ακεραίου.

Απάντηση

Λόγω της ταυτότητας Euler από την υπόθεση παίρνουμε $\alpha+\beta+\gamma=0$

Εφαρμόζοντας την ταυτότητα

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha$$

για $\alpha^2,\beta^2,\gamma^2$ αντί των α,β,γ αντίστοιχα, παίρνουμε

$$\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)^2=\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+2\left(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2\right).$$

Οπότε,

$$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4=\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)^2-2\left(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2\right)=$$

$$=\left[\left(\underbrace{\alpha+\beta+\gamma}_{=0}\right)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\right]^2-2\left(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2\right)$$

$$=4(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\left(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2\right)$$

$$=4\left(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+2\alpha\beta^2\gamma+2\beta\gamma^2\alpha+2\gamma\alpha^2\beta\right)-2\alpha^2\beta^2-2\beta^2\gamma^2-2\gamma^2\alpha^2$$

$$=2\alpha^2\beta^2+2\beta^2\gamma^2+2\gamma^2\alpha^2+8\alpha\beta^2\gamma+8\beta\gamma^2\alpha+8\gamma\alpha^2\beta$$

$$=2\left(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2\right)+8\alpha\beta\gamma\left(\underbrace{\alpha+\beta+\gamma}_{=0}\right)$$

$$=2\alpha^2\beta^2+2\beta^2\gamma^2+2\gamma^2\alpha^2$$

$$=\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)^2-\alpha^4-\beta^4-\gamma^4$$

Βρήκαμε, $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4=\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)^2-\alpha^4-\beta^4-\gamma^4$.

Οπότε $2\alpha^4+2\beta^4+2\gamma^4=\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)^2$, που είναι τετράγωνο ακεραίου.

Παράδειγμα 2

Αν για τους μη μηδενικούς και διαφορετικούς ανά δύο πραγματικούς αριθμούς α,β,γ ισχύει $\alpha+\beta+\gamma=0$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{2\alpha^2+\beta\gamma}+\frac{1}{2\beta^2+\gamma\alpha}+\frac{1}{2\gamma^2+\alpha\beta}=0$$

Απάντηση

Επειδή οι παρονομαστές εμφανίζονται με κυκλική εναλλαγή των α,β και γ, εργαζόμαστε αρχικά με τον πρώτο παρονομαστή, $2\alpha^2+\beta\gamma$.

Έχουμε

$$\alpha+\beta+\gamma=0\Leftrightarrow\gamma=-\alpha-\beta\Leftrightarrow\beta\gamma=-\alpha\beta-\beta^2\Leftrightarrow2\alpha^2+\beta\gamma=2\alpha^2-\alpha\beta-\beta^2$$

Άρα, $2\alpha^2+\beta\gamma=\alpha^2-\beta^2+\alpha^2-\alpha\beta=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)+\alpha(\alpha-\beta)=$

$$=(\alpha-\beta)(2\alpha+\beta)=(\alpha-\beta)\left(\alpha+\underbrace{\alpha+\beta}_{=-\gamma}\right)=(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)$$

Βρήκαμε ότι $2\alpha^2+\beta\gamma=(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)$, οπότε με κυκλική εναλλαγή των α,β,γ για τους δύο άλλους παρονομαστές παίρνουμε

$$2\beta^2+\gamma\alpha=(\beta-\gamma)(\beta-\alpha) \quad \text{και} \quad 2\gamma^2+\alpha\beta=(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)$$

Έτσι, το 1ο μέλος της αποδεικτέας, $\dfrac{1}{2\alpha^2+\beta\gamma}+\dfrac{1}{2\beta^2+\gamma\alpha}+\dfrac{1}{2\gamma^2+\alpha\beta}$, γίνεται

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\alpha^2+\beta\gamma}+\frac{1}{2\beta^2+\gamma\alpha}+\frac{1}{2\gamma^2+\alpha\beta}=\\
&=\frac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{1}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}+\frac{1}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\\
&=\frac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}-\frac{1}{(\beta-\gamma)(\alpha-\beta)}+\frac{1}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}\\
&=\frac{(\beta-\gamma)-(\alpha-\gamma)+(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)}=0
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 3

Αν για τους μη μηδενικούς αριθμούς α,β,γ ισχύει

$$\alpha\beta^2\gamma^2+\beta\gamma^2\alpha^2+\gamma\alpha^2\beta^2=0,$$

να αποδείξετε ότι: $\dfrac{\beta\gamma}{\alpha^2}+\dfrac{\gamma\alpha}{\beta^2}+\dfrac{\alpha\beta}{\gamma^2}=3$

Απάντηση

Είναι

$$\alpha\beta^2\gamma^2+\beta\gamma^2\alpha^2+\gamma\alpha^2\beta^2=0 \Leftrightarrow \alpha\beta\gamma(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)=0 \overset{\alpha\beta\gamma\neq0}{\Leftrightarrow} \beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta=0$$

Εφαρμόζοντας τη συνέπεια της ταυτότητας Euler

“Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$, τότε $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$ ”,

για $\beta\gamma,\gamma\alpha,\alpha\beta$ αντί των α,β,γ αντίστοιχα, παίρνουμε

$$(\beta\gamma)^3+(\gamma\alpha)^3+(\alpha\beta)^3=3(\beta\gamma)(\gamma\alpha)(\alpha\beta) \Leftrightarrow \beta^3\gamma^3+\gamma^3\alpha^3+\alpha^3\beta^3=3\alpha^2\beta^2\gamma^2$$

Με διαίρεση των μελών της ισότητας $\beta^3\gamma^3+\gamma^3\alpha^3+\alpha^3\beta^3=3\alpha^2\beta^2\gamma^2$ δια του $\alpha^2\beta^2\gamma^2\neq0$, παίρνουμε $\dfrac{\beta\gamma}{\alpha^2}+\dfrac{\gamma\alpha}{\beta^2}+\dfrac{\alpha\beta}{\gamma^2}=3$.

Παράδειγμα 4

Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ είναι ακέραιος.

Απάντηση

Θέτουμε $x=\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$

Οπότε, $x+\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}=0$, δηλαδή $x+\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}+\left(-\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\right)=0$.

Επομένως, σύμφωνα με τη συνέπεια της ταυτότητας Euler ισχύει:

$$x^3+\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)^3+\left(-\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\right)^3=3\cdot x\cdot\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)\cdot\left(-\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\right)$$

$$\Leftrightarrow x^3+\sqrt{5}-2-\left(\sqrt{5}+2\right)=-3\cdot x\cdot\sqrt[3]{\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}+2\right)}$$

$$\Leftrightarrow x^3-4=-3x\sqrt[3]{\left(\sqrt{5}\right)^2-2^2}\Leftrightarrow x^3-4=-3x\sqrt[3]{5-4}$$

$$\Leftrightarrow x^3+3x-4=0\Leftrightarrow x^3-x+4x-4=0$$

$$\Leftrightarrow x\left(x^2-1\right)+4\left(x-1\right)=0\Leftrightarrow x\left(x-1\right)\left(x+1\right)+4\left(x-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x-1\right)\left(x^2+x+4\right)=0\Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x^2+x+4=0$$

$\Leftrightarrow x=1$ (η εξίσωση $x^2+x+4=0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες, επειδή έχει αρνητική διακρίνουσα).

Επομένως, $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=1$

Παράδειγμα 5

Να αποδείξετε ότι: $\sqrt[3]{\sqrt{50}+7}-\sqrt[3]{\sqrt{50}-7}-2=0$

Υπόδειξη

Εργαστείτε ανάλογα προς το προηγούμενο παράδειγμα 4.

1.2 Η Απόλυτη τιμή

Ορισμός 1.2.1 Η απόλυτη τιμή κάθε πραγματικού αριθμού α συμβολίζεται με $|\alpha|$ και ορίζεται από τον τύπο:

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha\ , & \text{αν} \quad \alpha \geq 0 \\ -\alpha\ , & \text{αν} \quad \alpha < 0 \end{cases}$$

Η γεωμετρική εκδοχή της απόλυτης τιμής

Θεωρούμε δύο πραγματικούς αριθμούς α και β οι οποίοι παριστάνονται στον άξονα των πραγματικών αριθμών με τα σημεία A και B αντίστοιχα.

Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB λέγεται **απόσταση** των αριθμών α και β, συμβολίζεται με $d(\alpha,\beta)$ και είναι ίση με $|\alpha-\beta|$.

Είναι δηλαδή, $d(\alpha,\beta)=|\alpha-\beta|$.

Σχόλιο: Σύμφωνα με αυτή τη γεωμετρική εκδοχή, η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού α είναι η απόσταση του α από την αρχή 0 του άξονα των πραγματικών αριθμών, δηλαδή $|\alpha|=|\alpha-0|=d(\alpha,0)$.

Συνέπειες

Για όλους τους $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ισχύουν

- $|\alpha-\beta|=|\beta-\alpha|$
- $|-\alpha|=|\alpha|$
- $|\alpha|=|\beta| \Leftrightarrow \alpha=\beta$ ή $\alpha=-\beta$
- $-|\alpha|\leq\alpha\leq|\alpha|$
- $|\alpha|^2=\alpha^2$

Αν $x\in\mathbb{R}$ και $\theta>0$, τότε

- $|x|=\theta \Leftrightarrow x=\theta$ ή $=-\theta$
- $|x|<\theta \Leftrightarrow -\theta<x<\theta$
- $|x|>\theta \Leftrightarrow x<-\theta$ ή $x>\theta$

Ιδιότητες

- $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$
- $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}, \ \beta \neq 0$
- $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$
- $\big||\alpha| - |\beta|\big| \leq |\alpha \pm \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

Παραδείγματα 1.2.2

Παράδειγμα 1

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύει

$$x^2 - 4x + y^2 + 10y + 20 = 0 \text{, τότε:}$$

α. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία μεταβάλλονται οι x και y και να αποδείξετε ότι $y < x$.

β. Σύμφωνα με τη γεωμετρική εκδοχή της απόλυτης τιμής, να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης $|y - x|$.

Να βρείτε, επίσης, τις τιμές των x και y για τις οποίες η παράσταση $|y - x|$ παίρνει την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της;

Απάντηση

α. $x^2 - 4x + y^2 + 10y + 20 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+5)^2 = 9$, (1)

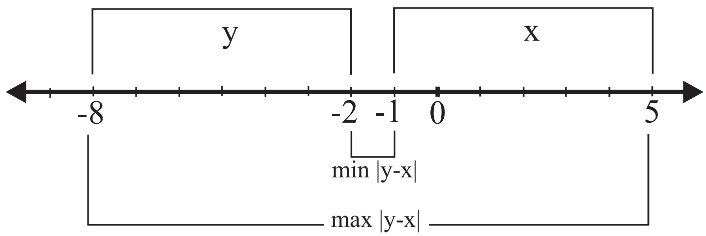
Από την (1) για τους μη αρνητικούς προσθετέους $(x-2)^2$ και $(y+5)^2$ προκύπτει $(x-2)^2 \leq 9$ και $(y+5)^2 \leq 9$. Οπότε $|x-2| \leq 3$ και $|y+5| \leq 3$.

$$|x-2| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x-2 \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 5 \ , \quad (2)$$

$$|y+5| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq y+5 \leq 3 \Leftrightarrow -8 \leq y \leq -2 \ , \quad (3)$$

Από τις (2) και (3) έχουμε $y \leq -2 < -1 \leq x$, άρα $y < x$.

β. Το y διατρέχει το κλειστό διάστημα $[-8,-2]$, ενώ το x διατρέχει το κλειστό διάστημα $[-1,5]$.



Από το σχήμα γίνεται φανερό ότι η ελάχιστη απόσταση των y και x, δηλαδή η ελάχιστη τιμή της παράστασης $|y-x|$, ισούται με $-1-(-2)=1$ και αυτό επιτυγχάνεται όταν το y είναι το -2, ενώ το x είναι το -1.

Δηλαδή $\min|y-x|=1$, όταν $y=-2$ και $x=-1$.

Ανάλογα βρίσκουμε ότι $\max|y-x|=13$ και αυτό επιτυγχάνεται όταν $y=-8$ και $x=5$.

Παράδειγμα 2

Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=\dfrac{\sqrt{x^2+40x+400}}{x+20}+\dfrac{\sqrt{x^2-12x+36}}{x-6}$ για τις διάφορες τιμές του $x\in\mathbb{R}-\{-20,6\}$.

Απάντηση

Έχουμε

$$A=\frac{\sqrt{(x+20)^2}}{x+20}+\frac{\sqrt{(x-6)^2}}{x-6} \Leftrightarrow A=\frac{|x+20|}{x+20}+\frac{|x-6|}{x-6}$$

Παίρνοντας υπόψη τις τιμές του x που μηδενίζουν τα απόλυτα αλλά και το σύνολο στο οποίο ορίζεται η παράσταση A, θα απαλείψουμε τα απόλυτα διακρίνοντας τις περιπτώσεις: $x<-20$, $-20<x<6$, $x>6$

- Αν $x<-20$, τότε και $x<6$, άρα $x+20<0$ και $x-6<0$, οπότε $|x+20|=-(x+20)$ και $|x-6|=-(x-6)$. Τότε $A=-2$.
- Αν $-20<x<6$, τότε $x+20>0$ και $x-6<0$, άρα $|x+20|=x+20$ και $|x-6|=-(x-6)$. Τότε $A=0$.

- Αν $x>6$, τότε και $x>-20$, άρα $x-6>0$ και $x+20>0$, οπότε $|x-6|=x-6$ και $|x+20|=x+20$. Τότε $A=2$.

  Δηλαδή, $A=\begin{cases} -2 \ , & \text{αν} \quad x<-20 \\ 0 \ , & \text{αν} \quad -20<x<6 \\ 2 \ , & \text{αν} \quad x>6 \end{cases}$

Παράδειγμα 3

Αν για τους πραγματικούς αριθμός x και y ισχύουν

$$-9<5x-4<1 \quad \text{και} \quad 1<-4y+5<9,$$

να αποδείξετε ότι:

α. $|x-y|<2$

β. $12-|y|+|x\cdot y|-12|x|>0$

Απάντηση

α. Από τις $-9<5x-4<1$ και $1<-4y+5<9$ ισοδύναμα βρίσκουμε

$$-1<x<1 \text{ και } -1<y<1.$$

(Σημειώνουμε εδώ με έμφαση ότι δεν αφαιρούμε ανισώσεις κατά μέλη)

Έχουμε $-1<y<1 \overset{(\cdot)-1}{\Leftrightarrow} -1<-y<1$

Οπότε, με πρόσθεση κατά μέλη των $-1<x<1$ και $-1<-y<1$ παίρνουμε $-2<x-y<2$, δηλαδή ισοδύναμα $|x-y|<2$.

β. $12-|y|+|x\cdot y|-12|x|>0 \Leftrightarrow 12\left(1-|x|\right)-|y|+|x|\cdot|y|>0$

$\Leftrightarrow 12\left(1-|x|\right)-|y|\left(1-|x|\right)>0 \Leftrightarrow \left(1-|x|\right)\left(12-|y|\right)>0$, (*)

Αρκεί να αποδείξουμε την (*).

Στο ερώτημα α. αποδείξαμε ότι $-1<x<1$ δηλαδή ισοδύναμα $|x|<1$, οπότε $1-|x|>0$. Επίσης ότι $-1<y<1$, δηλαδή ισοδύναμα $|y|<1$, άρα θα είναι και $|y|<12$, οπότε $12-|y|>0$.

Βρήκαμε ότι οι παράγοντες του 1ου μέλους της (*) είναι ομόσημοι (θετικοί), άρα αληθεύει η (*), οπότε ισχύει και η αποδεικτέα.

1.3 Ανισότητες

1. Για όλους τους $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ισχύουν οι ανισότητες:

   i. $\alpha^2+\beta^2\geq 2\alpha\beta$

   ii. $\alpha^2+\beta^2\geq -2\alpha\beta$

   iii. $\alpha^2+\beta^2\geq 2|\alpha|\cdot|\beta|$

   iv. $\alpha^2+\beta^2\geq \frac{1}{2}(\alpha+\beta)^2$

   v. $(\alpha+\beta)^2\geq 4\alpha\beta$

   vi. $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\geq 0$

   vii. $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\geq 0$

2. Για όλους τους $\alpha,\beta,\gamma,x,y,z\in\mathbb{R}$ ισχύουν:

   i. $(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2)\geq(\alpha x+\beta y)^2$

   ii. $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(x^2+y^2+z^2)\geq(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2$

   Γενικότερα:

   Αν $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_\nu$ πραγματικοί αριθμοί, τότε ισχύει:

   $$\left({\alpha_1}^2+{\alpha_2}^2+\cdots+{\alpha_\nu}^2\right)\left({\beta_1}^2+{\beta_2}^2+\cdots+{\beta_\nu}^2\right)\geq(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\cdots+\alpha_\nu\beta_\nu)^2$$

   (*Ανισότητα Cauchy-Schwarz*)

3. Αν $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_\nu$ πραγματικοί αριθμοί και $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί, τότε ισχύει:

   $$\frac{{\beta_1}^2}{\alpha_1}+\frac{{\beta_2}^2}{\alpha_2}+\cdots+\frac{{\beta_\nu}^2}{\alpha_\nu}\geq\frac{(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_\nu)^2}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\nu}$$

   (*Ανισότητα T. Andreescou*)

4. Ισχύουν:

   i. Αν α,β ομόσημοι αριθμοί, τότε $\alpha<\beta\Leftrightarrow\frac{1}{\alpha}>\frac{1}{\beta}$

ii. Αν α,β ομόσημοι αριθμοί, τότε $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\geq 2$

iii. Αν α,β ετερόσημοι αριθμοί, τότε $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\leq -2$

iv. Αν $\alpha>0$, τότε $\alpha+\frac{1}{\alpha}\geq 2$

v. Αν $\alpha<0$, τότε $\alpha+\frac{1}{\alpha}\leq -2$

5. Αν α και β θετικοί πραγματικοί αριθμοί, τότε τους αριθμούς

$$\frac{\alpha+\beta}{2},\ \sqrt{\alpha\beta}\ \text{ και }\ \frac{2}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}}$$

τούς ονομάζουμε αντίστοιχα αριθμητικό μέσο (A_M), γεωμετρικό μέσο (A_G) και αρμονικό μέσο (A_H) των αριθμών α και β.

Θα αποδείξουμε ότι για τους A_M , A_G και A_H ισχύει $A_M\geq A_G\geq A_H$

Απόδειξη

Έχουμε $A_M=\frac{\alpha+\beta}{2}$, $A_G=\sqrt{\alpha\cdot\beta}$ και $A_H=\frac{2}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}}$

- $A_M\geq A_G \Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta}{2}\geq\sqrt{\alpha\beta} \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\geq\left(\sqrt{\alpha\beta}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{(\alpha+\beta)^2}{4}\geq\alpha\beta$

  $\Leftrightarrow \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-4\alpha\beta\geq 0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2\geq 0$, που ισχύει.

- $A_G\geq A_H \Leftrightarrow \sqrt{\alpha\beta}\geq\frac{2}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}} \Leftrightarrow \alpha\beta\geq\frac{4(\alpha\beta)^2}{(\alpha+\beta)^2} \Leftrightarrow 1\geq\frac{4\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\alpha+\beta)^2\geq 4\alpha\beta \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2\geq 0$, που ισχύει.

Αποδείξαμε ότι $A_M\geq A_G$ και $A_G\geq A_H$, επομένως $A_M\geq A_G\geq A_H$