Ν. ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ - Σ. ΛΑΜΠΡΑΚΑΚΗΣ
Ν. ΣΟΥΡΜΠΗΣ - Π. ΤΟΥΡΜΑΝΗ

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Γ΄ Λυκείου

ΤΕΥΧΟΣ 3

ΘΕΜΑ Δ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΤ

Ν. ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ - Σ. ΛΑΜΠΡΑΚΑΚΗΣ
Ν. ΣΟΥΡΜΠΗΣ - Π. ΤΟΥΡΜΑΝΗ

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Γ΄ Λυκείου

ΤΕΥΧΟΣ 3

ΘΕΜΑ Δ

Σελίδες: 300

Σχήμα: 17 Χ 24

ISBN: 978-618-5528-53-9

Κεντρική Διάθεση:

Εκδόσεις: **Z-T, https://zanthl.gr**

Τηλ.: Ν.Ζ.: 6936269609 - **Κ.Τ.:** 6974033501

Στη μονάκριβη εγγονή μου,

την Αγγελική!!!

Πρόλογος

Το Θέμα Δ απευθύνεται στους μαθητές της Γ΄ Λυκείου που θα εξεταστούν στο μάθημα των Μαθηματικών Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής.

Έχει στόχο στην εξοικείωση των μαθητών στο Θέμα Δ με ασκήσεις που προσομοιάζουν με το Θέμα Δ των πανελλαδικών εξετάσεων με κυμαινόμενη δυσκολία..

Ευχόμαστε η προσπάθεια αυτή να αποτελέσει έναν χρήσιμο οδηγό για την επιτυχία των μαθητών.

Ευχαριστούμε τους εκλεκτούς συνάδελφους και φίλους **Σάκη Μίσκο** και **Γιώργο Τεκίρδαγλη** για την προσεκτική μελέτη των κειμένων και τις εύστοχες όσο και χρήσιμες παρατηρήσεις τους.

Οι συγγραφείς

Ν. Ζανταρίδης Ν. Σούρμπης

Σ. Λαμπρακάκης Π. Τουρμάνη

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ Δ

ΘΕΜΑ 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-\alpha)\ln x+\alpha,\ x>0,\ \alpha\in(1,2)$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

β) Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο σε ένα ακριβώς σημείο

$x_0\in(1,\alpha)$ και είναι $f(x_0)=\alpha-\dfrac{(x_0-\alpha)^2}{x_0}>0$.

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=\dfrac{3\alpha}{2}$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1,x_2

στο $(0,+\infty)$, με $x_1\in\left(\dfrac{1}{e},1\right)$, $x_2\in(\alpha,2\alpha)$.

δ) Να εξεταστεί αν έχει λύση η εξίσωση:

$$2f(x)=f'(x_1)(x-x_1)+f'(x_2)(x-x_2)+3\alpha \text{ στο } (0,+\infty).$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$e^{f(x)}-e^{-f(x)}>2f(x) \text{ για κάθε } x\neq 0$$

και $x^2f^2(x)=1$ για κάθε $x\neq 0$.

α) Να αποδειχθεί ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\neq 0$ και ότι:

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x}, & x<0\\[2mm] \dfrac{1}{x}, & x>0\end{cases}.$$

β) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

γ) Να εξεταστεί αν η f αντιστρέφεται.

δ) Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της C_f.

ε) **Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της C_f που άγονται από το σημείο $M(0,2)$.**

στ) **Θεωρούμε τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha)), B(\beta, f(\beta))$ με $\alpha > 0, \beta < 0$.**

i) **Να βρεθεί το εμβαδόν E του τριγώνου ΟΑΒ, όπου $O(0,0)$ είναι η αρχή των αξόνων.**

ii) **Αν $E = -\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right)$ και τα σημεία A , B απομακρύνονται από τον άξονα $y'y$ με ρυθμό $1\frac{cm}{sec}$ (θεωρούμε ότι το μοναδιαίο διάνυσμα των αξόνων έχει μήκος $1cm$) τότε:**

1) **Να αποδειχθεί ότι $E \geq 1$ για οποιαδήποτε σημεία A, B.**

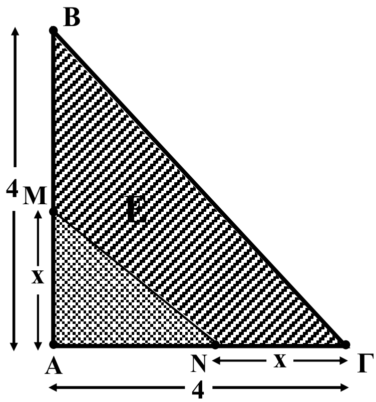
2) **Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού Ε, ως προς το χρόνο t, τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σημείο A βρίσκεται στη θέση $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ και το σημείο B στη θέση $\left(-4, \frac{1}{4}\right)$.**

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με

$$A = 90^\circ \text{ και } AB = A\Gamma = 4\,(cm).$$

Θεωρούμε τα σημεία M, N εσωτερικά των ευθυγράμμων τμημάτων $AB, A\Gamma$ αντίστοιχα και έστω $AM = \Gamma N = x\,(cm)$, με $x \in (0,4)$.



α) **Να εκφράσετε το εμβαδόν Ε του τετράπλευρου ΜΝΓΒ, ως συνάρτηση του $x \in (0,4)$.**

β) Αν $E(x)$ είναι το εμβαδόν του τετράπλευρου ΜΝΓΒ, να βρείτε για ποια τιμή του $x \in (0,4)$, το $E(x)$ λαμβάνει την ελάχιστη τιμή του και στη συνέχεια το ελάχιστο του $E(x)$.

γ) Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\text{συν}x}{E(x) \cdot E(4-x) - 36}$.

δ) Να δείξετε ότι:

$$E(\alpha) \cdot E(\beta) \geq 3E(\alpha) + 2E(\beta) + 6, \text{ για κάθε } \alpha, \beta \in (0,4).$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = f'(0) = 1$ και για την οποία ισχύει ότι:

$$f''(x) + f(x) = 2e^x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση

$g(x) = (f(x) - e^x)^2 + (f'(x) - e^x)^2$, $x \in \mathbb{R}$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

ii) Να δείξετε ότι $f(x) = e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \ln x$, $x \in (0,+\infty)$. Αν ΑΒ εκφράζει την κατακόρυφη απόσταση των σημείων $A \in C_f$ της γραφικής παράστασης της f και $B \in C_h$ της γραφικής παράστασης της h με την ίδια τετμημένη $x \in (0,+\infty)$, τότε:

i) Να εκφράσετε την απόσταση $d = (AB)$ σαν συνάρτηση του $x \in (0,+\infty)$.

ii) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $d(x) = e^x - \ln x$, $x \in (0,+\infty)$, έχει ένα κρίσιμο σημείο $x_0 \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$, στο οποίο η $d(x)$ παρουσιάζει ελάχιστο.

iii) Να δείξετε ότι: $\dfrac{2\sqrt{e}+1}{2} < \min d(x) < e$.

ΘΕΜΑ 7

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln\left(e^x-1\right)+\dfrac{x e^x}{e^x-1}=0,\ x>0$, έχει στο $\left(0,+\infty\right)$ ακριβώς μια λύση x_0, η οποία μάλιστα ανήκει στο $\left(0,\ln 2\right)$.

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f\left(x\right)=\begin{cases} e^{-x}\,\eta\mu x &, x\in\left[-\pi,0\right] \\ x\ln\left(e^x-1\right), & x>0 \end{cases}.$$

i) Να εξεταστεί αν η f είναι συνεχής στο $x_1=0$.

ii) Να βρείτε το πλήθος των κρίσιμων σημείων της f.

iii) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία.

iv) Αν E είναι το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα $x'x$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x=x_0$, να δείξετε ότι: $E<x_0^2\cdot e^{x_0}$.

ΘΕΜΑ 8

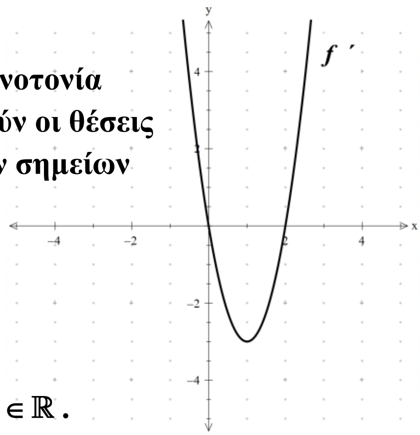
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Δίνεται ακόμη ότι: $\left(f\left(1\right)+1\right)e^{-f(1)}+e^2=0$.

α) Να δείξετε ότι: $f\left(1\right)=-2$.

β) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα και να βρεθούν οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και των σημείων καμπής της f.

γ) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και να βρεθούν οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης $\varphi\left(x\right)=f\left(x^2+x\right),\ x\in\mathbb{R}$.



δ) Να δείξετε ότι: $f(x)-f(2-x)>6(1-x)$ για κάθε $x>1$.

ε) Να βρεθεί το όριο: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{f(x)+3x-1}$.

στ) Να λυθεί η εξίσωση: $f'(x-1)+f(x^2-4x+5)+3x^2-12x+17=0$.

ζ) Αν η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική 3ου βαθμού, να βρείτε τον τύπο της f.

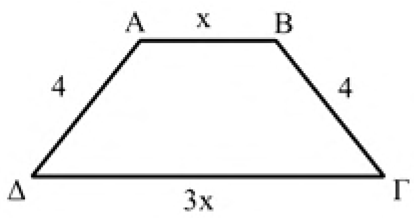
ΘΕΜΑ 9

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $ΑΒΓΔ$, με:

$(AB)=x$ cm.

$(ΓΔ)=3x$ cm.

$(ΑΔ)=(ΒΓ)=4$ cm.



α) Να δείξετε ότι $x\in(0,4)$.

β) Να βρείτε, συναρτήσει του $x\in(0,4)$, το εμβαδόν E του τραπεζίου $ΑΒΓΔ$.

γ) Αν $E(x)=2x\sqrt{16-x^2}$ είναι το εμβαδό του $ΑΒΓΔ$, να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $E(x)$ και για ποια τιμή του x επιτυγχάνεται.

δ) Να βρεθούν οι $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, με $\alpha\in(0,4)$, $\beta\in(0,1)$, ώστε:

$$\alpha\sqrt{16-\alpha^2}+16\beta\sqrt{1-\beta^2}=16.$$

ε) Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to 2\sqrt{2}}\dfrac{|x-2\sqrt{2}|}{E(x)-16}$.

στ) Να μελετηθεί η f ως προς την κυρτότητα.

ζ) Να βρείτε το μέγιστο της συνάρτησης: $f(x)=E(\sqrt{2}x)\cdot E\left(\dfrac{4\sqrt{2}}{x}\right)$.

ΘΕΜΑ 12

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=e^x-x\ln x-ex,\ x>0$.

α) Να αποδειχθεί ότι η C_f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής με τετμημένη $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$.

β) Να αποδειχθεί ότι η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο σε ένα σημείο x_1 και τοπικό ελάχιστο σε ένα σημείο x_2 με $0<x_1<x_0<x_2$.

γ) Αν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο καμπής της σχηματίζει γωνία ω με τον $x'x$, να δείξετε ότι $\frac{2\pi}{3}<\omega<\frac{3\pi}{4}$.

ΘΕΜΑ 13

Η συνάρτηση $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει:

$xf'(x)=f(x)-x^2\eta\mu x$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=1$.

α) Να δείξετε ότι $f(x)=x\sigma\upsilon\nu x,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

β) Να μελετηθεί η f ως προς την κυρτότητα.

γ) Να δείξετε ότι η f έχει ακριβώς ένα κρίσιμο σημείο x_0, με $x_0\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right)$, στο οποίο η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο και είναι $f(x_0)=\frac{\sigma\upsilon\nu^2x_0}{\eta\mu x_0}$.

δ) Να δείξετε ότι $x\sigma\upsilon\nu x<\frac{\sqrt{2}}{2}$, για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

ΘΕΜΑ 14

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=e^{2x}+\alpha e^{x}, x\in\mathbb{R}$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$ (σταθερά) και η ευθεία $(\varepsilon): y=x$ είναι εφαπτομένη της C_f.

α) Να δείξετε ότι $\alpha=-1$.

β) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

γ) Να βρείτε τη σχετική θέση της C_f σε σχέση με την ευθεία $(\varepsilon): y=x$.

δ) Να δείξετε ότι το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την C_f, την ευθεία (ε) και τις ευθείες $x=-1$ και $x=1$, είναι:

$$E=\frac{(e+1)(e-1)^3}{2e^2} \text{ τ.μ..}$$

ε) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(f(x)\cdot(\ln x)^{2024}\right)$.

ΘΕΜΑ 15

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=x\cdot e^{-\frac{2}{x}},\ x\neq 0$.

α) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία, ακρότατα, κυρτότητα και σημεία καμπής.

β) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f.

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

δ) Να γίνει η γραφική παράσταση της f.

ε) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{9}{5}\right)\right)$ είναι αδύνατη στο $(0,1]$.

στ) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης:

$$f(x)=f(\alpha),\ \alpha\in\mathbb{R}-\{0\}.$$

i) Να εκφράσετε το εμβαδόν E και την περίμετρο P του ορθογωνίου $ONMK$ συναρτήσει του $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

ii) Να βρείτε το μέγιστο της περιμέτρου P του ορθογωνίου $ONMK$ και για ποια τιμή του x επιτυγχάνεται.

iii) Να δείξετε ότι το εμβαδόν E του ορθογωνίου $ONMK$ γίνεται μέγιστο σε ένα ακριβώς σημείο $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και η μέγιστη τιμή του E είναι μικρότερη του $\sqrt{2}$ τ.μ..

iv) Αν $E(x)$ είναι το εμβαδό του ορθογωνίου $ONMK$ και x_0 η θέση στην οποία το $E(x)$ γίνεται μέγιστο, να βρείτε το

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\left(E(x)\right)^2 - 2}{E(x)\eta\mu x_0 - 2\sigma\upsilon\nu^2 x_0}.$$

ΘΕΜΑ 18

Δίνεται συνάρτηση $f:(0,2) \to \mathbb{R}$, με τύπο: $f(x) = \ln x + \frac{1}{x-2}$.

α) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρεθεί το σύνολο τιμών της f.

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = -2$ έχει ακριβώς δύο ρίζες $x_1, x_2 \in (0,2)$ με $0 < x_1 < 1 < x_2 < 2$.

γ) Να δείξετε ότι $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > -2$, όπου x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = -2$.

δ) Έστω F μια παράγουσα της f στο $(0,2)$ για την οποία ισχύει:

$$F(x_1) + F(x_2) = f(x_1) + f(x_2).$$

Να δείξετε ότι η εξίσωση: $F(x) + x = f(x) + \frac{x_1 x_2}{x}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[x_1, x_2]$.