Ν. ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ | Ν. ΚΑΡΠΟΖΗΛΟΣ | Σ. ΛΑΜΠΡΑΚΑΚΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

2ος ΤΟΜΟΣ

ΟΜΑΔΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Ν. ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ **Ν. ΚΑΡΠΟΖΗΛΟΣ** **Σ. ΛΑΜΠΡΑΚΑΚΗΣ**

nikoszantar@yahoo.gr - karpozilosn@hotmail.com - slamprakakis@yahoo.gr

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

2ος ΤΟΜΟΣ

ΟΜΑΔΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Σελίδες: 714

Σχήμα: 17 Χ 24

ISBN: 978-618-5528-46-1

ISBN (SET): 978-618-5528-25-6

Κεντρική Διάθεση:

Εκδόσεις: **Z-T, https://zanthl.gr**

Τηλ.: Ν.Ζ.: 6936269609 - **Κ.Τ.:** 6974033501

Για τους ανθρώπους που έφυγαν, όμως η μνήμη τούς έχει δίπλα μας:

Γιάνναγας, Ευδοξία, Ερμιόνη, Μάριος, Γιάννης, Τόμης, Ελένη, Χαράλαμπος, Θωμάς,…

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό είναι ο 2ος Τόμος του δίτομου βοηθήματος των μαθητών της Γ΄ Λυκείου.

Ο τόμος αυτός απευθύνεται στους μαθητές της Γ΄ Λυκείου που προετοιμάζονται για τις εξετάσεις του μαθήματος των Μαθηματικών της Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής καθώς και στους συνοδοιπόρους καθηγητές τους, οι οποίοι τους προετοιμάζουν για την επίτευξη των στόχων τους.

Ευχόμαστε στους μαθητές υπομονή και επιμονή για την πραγμάτωση των στόχων τους!!!

Ιδιαίτερες ευχαριστίες στους εκλεκτούς Μαθηματικούς Σάκη Μίσκο και Χριστίνα Ρωμανίδου για την επιμέλεια των κειμένων.

Νίκος Ζανταρίδης

Νίκος Καρπόζηλος

Στέφανος Λαμπρακάκης

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

- **ΚΑΝΟΝΕΣ DE L' HOSPITAL**
- **ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE**
- **ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗ ΤΙΜΗΣ ΤΟΥ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ (Θ.Μ.Τ.)**
- **ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ**
- **ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ**
- **ΤΟΠΙΚΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ**
- **ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ – ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ**
- **ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ**
- **ΜΕΛΕΤΗ ΚΑΙ ΧΑΡΑΞΗ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ**

ΚΑΝΟΝΕΣ DE L΄ HOSPITAL M_{65}

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο (μορφή $\frac{0}{0}$)

Αν είναι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0,\ x_0\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ και υπάρχει το

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Π.χ.: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{(x-1)^3}\underset{(\mathrm{DLH})}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 1}\frac{(\ln x)'}{\left((x-1)^3\right)'}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{3(x-1)^2(x-1)'}=$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{3x(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{(x-1)^2}\cdot\frac{1}{3x}\right)\overset{\left((+\infty)\cdot\frac{1}{3}\right)}{=}+\infty,$$

(αφού είναι $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}\overset{\left(\frac{1}{0^+}\right)}{=}+\infty$ και $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{3x}=\frac{1}{3}>0$).

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο (μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$)

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty,\ x_0\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ και υπάρχει το

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Σχόλια

1) Το θεώρημα 2 ισχύει και για τις απροσδιόριστες μορφές: $\frac{+\infty}{-\infty},\ \frac{-\infty}{+\infty},\ \frac{-\infty}{-\infty}$.

2) Τα παραπάνω θεωρήματα ισχύουν και για πλευρικά όρια και μπορούμε, να τα εφαρμόσουμε δύο ή περισσότερες φορές, αρκεί να πληρούνται οι προϋποθέσεις εφαρμογής τους.

ΒΑΣΙΚΑ ΟΡΙΑ

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1$ (θεωρία).

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1 \left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}\overset{\left(f(x)=e^x\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)\overset{\left(f'(x)=e^x\right)}{=}e^0=1\right).$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-1}{x}=\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R} \left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-1}{x}\overset{f(x)=e^{\alpha x}}{=}\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\alpha\cdot 0}}{x-0}=\right.$

$$\left.=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)\overset{\left(f'(x)=\alpha e^{\alpha x}\right)}{=}\alpha\cdot e^{\alpha\cdot 0}=\alpha\right).$$

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=1 \left(\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x-\ln 1}{x-1}\overset{\left(f(x)=\ln x\right)}{=}\right.$

$$\left.=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)\overset{\left(f'(x)=\frac{1}{x}\right)}{=}\frac{1}{1}=1\right).$$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x^2}=\dfrac{1}{2} \left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x^2}\underset{(DLH)}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\sigma\upsilon\nu x)'}{\left(x^2\right)'}=\right.$

$$\left.=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}\right).$$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\eta\mu x}{x^3}=\dfrac{1}{6} \left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\eta\mu x}{x^3}\underset{(DLH)}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-\eta\mu x)'}{\left(x^3\right)'}=\right.$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{3x^2}\underset{(DLH)}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{(1-\sigma\upsilon\nu x)'}{\left(3x^2\right)'}=$$

$$\left.=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{6x}=\frac{1}{6}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=\frac{1}{6}\cdot 1=\frac{1}{6}\right).$$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^3}=-\dfrac{1}{3}$

$$\left(\lim_{x\to 0}\frac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^3}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{(DLH)}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\left(x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x\right)'}{\left(x^3\right)'}=\right.$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x)'\sigma\upsilon\nu x+x(\sigma\upsilon\nu x)'-(\eta\mu x)'}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1\cdot\sigma\upsilon\nu x+x(-\eta\mu x)-\sigma\upsilon\nu x}{3x^2}=$$

$$\left.=\lim_{x\to 0}\frac{-\eta\mu x}{3x}=-\frac{1}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=-\frac{1}{3}\cdot 1=-\frac{1}{3}\right).$$

8) $\lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x)=0$

$$\left(\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\left(\frac{(-\infty)}{(+\infty)}\right)}{\underset{(DLH)}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\right.$$

$$\left.=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0\right).$$

9) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^{\alpha}\cdot\ln x\right)=0$, όπου $\alpha>0$.

$$\left(\lim_{x\to 0^+}\left(x^{\alpha}\cdot\ln x\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^{\alpha}}}\overset{\left(\frac{(-\infty)}{(+\infty)}\right)}{\underset{(DLH)}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(x^{-\alpha}\right)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{(-\alpha)x^{-\alpha-1}}=\right.$$

$$\left.\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{x^{\alpha+1}}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{1}{\alpha}\cdot x^{\alpha}\right)=\left(-\frac{1}{\alpha}\right)\cdot 0=0\right).$$

10) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{e^x}=0$

$$\left(\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{e^x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{(DLH)}{=}}\lim_{x\to +\infty}\frac{(\ln x)'}{\left(e^x\right)'}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x}}{e^x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x\cdot e^x}\overset{\left(\frac{1}{+\infty}\right)}{=}0\right).$$

11) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^{\alpha}}=0,\ (\alpha>0),$

$$\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}}\underset{(DLH)}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x^{\alpha})'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\alpha x^{\alpha}}\overset{\left(\frac{1}{+\infty}\right)}{=}0\right)$$

12) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\alpha}}{e^{x}}=0,\ (\alpha>0)$

$$\left(\text{Είναι}: \frac{x^{\alpha}}{e^{x}}=\left(\frac{x}{e^{\frac{x}{\alpha}}}\right)^{\alpha}\ \text{και}\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{\frac{x}{\alpha}}}\underset{(DLH)}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x)'}{\left(e^{\frac{x}{\alpha}}\right)'}=\right.$$

$$\left.=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{\alpha}\cdot e^{\frac{x}{\alpha}}}\overset{\left(\frac{1}{+\infty}\right)}{=}0,\ \text{οπότε}\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{e^{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^{\frac{x}{\alpha}}}\right)^{\alpha}=0^{\alpha}=0\right).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

● ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 (Μορφή: $\frac{0}{0}$)

Να βρεθούν τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{3x}-1-3x}{x^{2}}$ **β)** $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^{x^2}-1}{x^{3}}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{\eta\mu x}$

δ) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x^2+x+1)}{e^{x}-1}$ **ε)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu^5 x}{x^{2}}$ **στ)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5^x-e^x}{2^x-1}$

ΛΥΣΗ

α) $$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{3x}-1-3x}{x^{2}}\underset{(DLH)}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\frac{\left(e^{3x}-1-3x\right)'}{\left(x^{2}\right)'}=\lim\limits_{x\to0}\frac{3e^{3x}-3}{2x}\underset{(DLH)}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}$$

$$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(3e^{3x}-3\right)'}{(2x)'}=\lim\limits_{x\to0}\frac{9e^{3x}}{2}=\frac{9}{2}.$$

β) $$\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{x^2}-1}{x^3}\underset{(DLH)}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 0^-}\frac{\left(e^{x^2}-1\right)'}{\left(x^3\right)'}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2xe^{x^2}}{3x^2}=\lim_{x\to 0^-}\left[\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{2e^{x^2}}{3}\right)\right]\overset{\left((-\infty)\cdot\frac{2}{3}\right)}{=}-\infty.$$

γ) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\eta\mu x}\underset{(DLH)}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\frac{\left(\ln(1+x)\right)'}{\left(\eta\mu x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}(1+x)'}{\sigma\upsilon\nu x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+x)\sigma\upsilon\nu x}=1.$$

δ) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(x^2+x+1\right)}{e^x-1}\underset{(DLH)}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\left(\ln\left(x^2+x+1\right)\right)'}{\left(e^x-1\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x^2+x+1}\cdot(2x+1)}{e^x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x+1}{e^x\cdot\left(x^2+x+1\right)}=1.$$

ε) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu^5 x}{x^2}\underset{(DLH)}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\sigma\upsilon\nu^5 x\right)'}{\left(x^2\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-5\sigma\upsilon\nu^4 x\cdot(-\eta\mu x)}{2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{5}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu^4 x\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)=\frac{5}{2}\cdot 1^4\cdot 1=\frac{5}{2}\ .$$

στ) $$\lim_{x\to 0}\frac{5^x-e^x}{2^x-1}\underset{(DLH)}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\left(5^x-e^x\right)'}{\left(2^x-1\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{5^x\cdot\ln 5-e^x}{2^x\cdot\ln 2}=\frac{\ln 5-1}{\ln 2}\ .$$

● ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 (Μορφή $\frac{(+\infty)}{(+\infty)},\ \frac{(+\infty)}{(-\infty)},\ \frac{(-\infty)}{(+\infty)},\ \frac{(-\infty)}{(-\infty)}$)

Να βρεθούν τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\ln x}$ **β)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\left(2^x-1\right)}{\ln\left(3^x-1\right)}$

δ) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln\left(e^x+1\right)}{x}$ **ε)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(\ln x)}{\ln x+1}$ **στ)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x-\ln x}{3x-2\ln x}$

ΛΥΣΗ

α) $$\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\ln x}\underset{(DLH)}{\overset{\left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to0^+}\frac{\left(e^{\frac{1}{x}}\right)'}{(\ln x)'}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to0^+}\left(-\frac{1}{x}\cdot e^{\frac{1}{x}}\right)\underset{\left(\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty\right)}{\overset{\left(\omega=\frac{1}{x}\right)}{=}}\lim_{\omega\to+\infty}\left((-\omega)e^{\omega}\right)\overset{((-\infty)(+\infty))}{=}-\infty.$$

β) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\underset{(DLH)}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{\left(\sqrt{x}\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0\,.$$

γ) $$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\left(2^x-1\right)}{\ln\left(3^x-1\right)}\overset{\left(\frac{(-\infty)}{(-\infty)}\right)}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\left(\ln\left(2^x-1\right)\right)'}{\left(\ln\left(3^x-1\right)\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{2^x-1}\cdot\left(2^x-1\right)'}{\frac{1}{3^x-1}\cdot\left(3^x-1\right)'}=\lim_{x\to0^+}\frac{\left(3^x-1\right)\cdot2^x\ln2}{\left(2^x-1\right)\cdot3^x\ln3}=$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{(\ln2)\cdot\left(6^x-2^x\right)}{(\ln3)\cdot\left(6^x-3^x\right)}\underset{(DLH)}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to0^+}\frac{\left[(\ln2)\cdot\left(6^x-2^x\right)\right]'}{\left[(\ln3)\cdot\left(6^x-3^x\right)\right]'}=$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{(\ln2)\cdot\left(6^x\ln6-2^x\ln2\right)}{(\ln3)\cdot\left(6^x\ln6-3^x\ln3\right)}=\frac{(\ln2)\cdot(\ln6-\ln2)}{(\ln3)\cdot(\ln6-\ln3)}=$$

$$=\frac{(\ln2)\cdot(\ln3)}{(\ln3)\cdot(\ln2)}=1\,.$$

δ) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(e^x+1\right)}{x}\underset{(DLH)}{\overset{\left(\frac{(+\infty)}{(+\infty)}\right)}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln\left(e^x+1\right)\right)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{e^x+1}\cdot\left(e^x+1\right)'}{1}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{e^x}}=\frac{1}{1+0}=1.$$

ε) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(\ln x)}{\ln x+1}\overset{\left(\frac{(+\infty)}{(+\infty)}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln(\ln x))'}{(\ln x+1)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{\ln x}\cdot(\ln x)'}{\dfrac{1}{x}}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{\ln x}\cdot\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}\overset{\left(\frac{1}{(+\infty)}\right)}{=}0.$$

στ) Κοντά στο $+\infty$ είναι: $\dfrac{2x-\ln x}{3x-2\ln x}=\dfrac{x\cdot\left(2-\dfrac{\ln x}{x}\right)}{x\cdot\left(3-2\dfrac{\ln x}{x}\right)}=\dfrac{2-\dfrac{\ln x}{x}}{3-2\dfrac{\ln x}{x}}$.

Είναι: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}\underset{(DLH)}{\overset{\left(\frac{(+\infty)}{(+\infty)}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0.$

Άρα, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-\ln x}{3x-2\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-\dfrac{\ln x}{x}}{3-2\dfrac{\ln x}{x}}=\dfrac{2-0}{3-2\cdot 0}=\dfrac{2}{3}$.

● ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 (Μορφή: $0\cdot(\pm\infty)$)

Σχόλιο: Για να εφαρμόσουμε τους κανόνες De l΄ Hospital πρέπει να έχουμε πηλίκο. Έτσι, το γινόμενο $f(x)\cdot g(x)$ το μετασχηματίζουμε αρχικά σε πηλίκο: $f(x)\cdot g(x)=\dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$ ή $f(x)\cdot g(x)=\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}$ και στη συνέχεια εφαρμόζουμε τους κανόνες De l΄ Hospital.

● ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

(Απροσδιόριστη μορφή: $(+\infty)-(+\infty)$, $(-\infty)-(-\infty)$, $(+\infty)+(-\infty)$).

ΟΔΗΓΙΑ

Σε όριο της μορφής $\lim\limits_{x\to x_0}\left(A(x)\pm B(x)\right)$, $x_0\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ στο οποίο εμφανίζεται η απροσδιόριστη μορφή:

$$(+\infty)-(+\infty)\ \text{ή}\ (-\infty)-(-\infty)\ \text{ή}\ (+\infty)+(-\infty),$$

χρησιμοποιούμε αρχικά τον μετασχηματισμό

$$\mathbf{A(x)\pm B(x)=A(x)\cdot\left(1\pm\frac{B(x)}{A(x)}\right)}\ \text{ ή }\ \mathbf{A(x)\pm B(x)=B(x)\cdot\left(\frac{A(x)}{B(x)}\pm 1\right)}.$$

Αν μετά από αυτόν τον μετασχηματισμό έχουμε απροσδιόριστη μορφή $(\pm\infty)\cdot 0$, τότε χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό

$$\mathbf{A(x)\pm B(x)=\frac{1\pm\frac{B(x)}{A(x)}}{\frac{1}{A(x)}}}\ \text{ ή }\ \mathbf{A(x)\pm B(x)=\frac{\frac{A(x)}{B(x)}\pm 1}{\frac{1}{B(x)}}}$$

και στη συνέχεια εφαρμόζουμε τους κανόνες De l΄ Hospital.

Να βρεθούν τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-2\ln x\right)$ **β)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3\ln x-\sqrt{x}\right)$

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\eta\mu x}\right)$ **δ)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{e^{2x}-1}-\frac{1}{x}\right)$

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε: $e^x-2\ln x=e^x\cdot\left(1-2\frac{\ln x}{e^x}\right)$.

Είναι: • $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{e^x}\underset{(DLH)}{\overset{\left(\frac{(+\infty)}{(+\infty)}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(e^x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{xe^x}=0$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-2\cdot\frac{\ln x}{e^x}\right)=1-2\cdot 0=1$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$.

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-2\ln x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^x\left(1-2\frac{\ln x}{e^x}\right)\right]\overset{((+\infty)\cdot 1)}{=}+\infty$.

β) Έχουμε: $3\ln x-\sqrt{x}=\sqrt{x}\cdot\left(3\frac{\ln x}{\sqrt{x}}-1\right)$.

Είναι: • $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\underset{(DLH)}{\overset{\left(\frac{(+\infty)}{(+\infty)}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(\sqrt{x})'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0.$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3\cdot\frac{\ln x}{\sqrt{x}}-1\right)=3\cdot 0-1=-1.$

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$.

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3\ln x-\sqrt{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x}\cdot\left(3\cdot\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}-1\right)\right]\overset{((-\infty)\cdot(-1))}{=}-\infty.$

γ) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\eta\mu x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\eta\mu x-x}{x\eta\mu x}\underset{(DLH)}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\eta\mu x-x\right)'}{\left(x\eta\mu x\right)'}=$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x}\underset{(DLH)}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\sigma\upsilon\nu x-1\right)'}{\left(\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x\right)'}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\eta\mu x}{2\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x}=\dfrac{0}{2}=0.$

δ) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2}{e^{2x}-1}-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x-e^{2x}+1}{x\left(e^{2x}-1\right)}\underset{(DLH)}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(2x-e^{2x}+1\right)'}{\left(x\left(e^{2x}-1\right)\right)'}=$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2-2e^{2x}}{e^{2x}-1+2xe^{2x}}\underset{(DLH)}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(2-2e^{2x}\right)'}{\left(e^{2x}-1+2xe^{2x}\right)'}=$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-4e^{2x}}{4e^{2x}+4xe^{2x}}=-\dfrac{4}{4}=-1$.

• ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 (Απροσδιόριστη μορφή: 0^0, $1^{\pm\infty}$, $\left(+\infty\right)^0$).

ΟΔΗΓΙΑ

Σε όριο της μορφής $\lim\limits_{x\to x_0}\left(A(x)\right)^{B(x)}$, $x_0\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ στο οποίο εμφανίζεται η απροσδιόριστη μορφή: 0^0 ή $1^{\pm\infty}$ ή $\left(+\infty\right)^0$ χρησιμοποιούμε αρχικά τον μετασχηματισμό $\left(A(x)\right)^{B(x)}=e^{B(x)\ln(A(x))}$ και στη συνέχεια βρίσκουμε το $\lim\limits_{x\to x_0}\left[B(x)\ln\left(A(x)\right)\right]$. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}\left[B(x)\ln\left(A(x)\right)\right]=L\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$, τότε

$$\lim_{x\to x_0}\left(\left(A(x)\right)^{B(x)}\right)=\begin{cases}e^L, & \alpha\nu\ L\in\mathbb{R}\\ +\infty, & \alpha\nu\ L=+\infty\\ 0, & \alpha\nu\ \Lambda=-\infty\end{cases}$$

Να βρεθούν τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\sqrt{x}}$ **β)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+1\right)^{\frac{1}{x}}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to0}\left(x+1\right)^{\frac{1}{x}}$

ΛΥΣΗ