ΣΤΕΛΙΟΣ ΜΙΧΑΗΛΟΓΛΟΥ
ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ ΤΟΛΗΣ
ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΠΑΤΣΙΜΑΣ
ΝΙΚΟΣ ΤΟΥΝΤΑΣ

Μαθηματικά
Γ΄ Λυκείου
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΛΥΣΕΙΣ

Α΄ ΤΕΥΧΟΣ

www.Askisopolis.gr

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ZT

1 Η Έννοια της συνάρτησης - Πεδίο ορισμού συνάρτησης

Έννοια συνάρτησης

13.α) $f(x)=x$, $x\in\mathbb{R}$, είναι $x_1\neq x_2 \Leftrightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$, $x_1,x_2\in\mathbb{R}$.

β) $f(x)=x^2$, $x\in\mathbb{R}$, τότε $-1\neq 1$ όμως $f(-1)=f(1)=1$.

14.α) $x^2+y^2=1$ για $x=0$ είναι $y^2=1 \Leftrightarrow y=\pm 1$, άρα δεν μπορεί να είναι συνάρτηση γιατί το ίδιο x αντιστοιχίζεται σε δύο y.

β) Είναι $3x+4y=1 \Leftrightarrow 4y=1-3x \Leftrightarrow y=\dfrac{1-3x}{4}$. Η εξίσωση έχει μοναδική λύση ως προς x άρα κάθε τιμή x του πεδίου ορισμού της αντιστοιχίζεται σε μία μοναδική τιμή $y=f(x)$ οπότε είναι συνάρτηση.

15.Αν $\lambda^2>3\lambda \Leftrightarrow \lambda^2-3\lambda>0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-3)>0 \Leftrightarrow \lambda<0$ ή $\lambda>3$, τότε για να είναι η f συνάρτηση πρέπει οι δύο τύποι να δίνουν τις ίδιες τιμές για κάθε τιμή του x στο διάστημα $\left[3\lambda,\lambda^2\right]$. Όμως η ισότητα $x^2-1=3 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$ αληθεύει μόνο για δύο το πολύ τιμές του x και όχι για κάθε $x\in\left[3\lambda,\lambda^2\right]$, οπότε για $\lambda<0$ ή $\lambda>3$ η f δεν είναι συνάρτηση.

Αν $\lambda^2<3\lambda \Leftrightarrow 0<\lambda<3$, δηλαδή λ = 1 ή λ = 2, η f είναι συνάρτηση.

Αν λ = 0 τότε $f(x)=\begin{cases} 3\ ,\ x\leq 0 \\ x^2-1,\ x\geq 0\end{cases}$ και επειδή $f(0)=3\neq -1=f(0)$, δεν είναι συνάρτηση. Αν λ = 3 τότε $f(x)=\begin{cases} 3\ ,\ x\leq 9 \\ x^2-1,\ x\geq 9\end{cases}$ και επειδή $f(9)=3\neq 80=f(9)$, δεν είναι συνάρτηση.

Πεδίο ορισμού συνάρτησης

16.α) $x^2-7x+6\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$ και $x\neq 6$, $D_f=\mathbb{R}-\{1,6\}$.

β) Η f ορίζεται όταν: $3-|x|\neq 0 \Leftrightarrow |x|\neq 3 \Leftrightarrow x\neq\pm 3$, $D_f=\mathbb{R}-\{-3,3\}$.

γ) Η f ορίζεται όταν: $|x|+x\neq 0 \Leftrightarrow |x|\neq -x \Leftrightarrow x>0$, $D_f=(0,+\infty)$.

δ) Η f ορίζεται όταν: $x^4-3x^3+6x-4\neq 0$ (1)

1ος τρόπος: (1) $\Leftrightarrow (x^2-2)(x^2+2)-3x(x^2-2)\neq 0 \Leftrightarrow$
$(x^2-2)(x^2-3x+2)\neq 0 \Leftrightarrow (x^2-2)(x-2)(x-1)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq\pm\sqrt{2}$ και $x\neq 1$ και $x\neq 2$.

2ος τρόπος: Εκτελούμε σχήμα Horner με $\rho=1$ και προκύπτει:
$(1)\Leftrightarrow(x-1)\left(x^3-2x^2-2x+4\right)\neq 0$. Εκτελούμε τώρα σχήμα Horner με $\rho=1$ για το x^3-2x^2-2x+4 και προκύπτει:
$(1)\Leftrightarrow\left(x^2-2\right)(x-2)(x-1)\neq 0\Leftrightarrow x\neq\pm\sqrt{2}$ και $x\neq 1$ και $x\neq 2$.
Άρα $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\sqrt{2},\sqrt{2},1,2\right\}$.

ε) Η f ορίζεται όταν: $\left(x^3-1\right)\left(x^2-4\right)\neq 0\Leftrightarrow\left(x^3-1\neq 0\Leftrightarrow x^3\neq 1\Leftrightarrow x\neq 1\right)$ και $\left(x^2-4\neq 0\Leftrightarrow x^2\neq 4\Leftrightarrow x\neq\pm 2\right)$, $D_f=\mathbb{R}-\{-2,1,2\}$.

στ) Η f ορίζεται όταν: $x^4-5x^2+4\neq 0$ (1). Θέτουμε $x^2=\omega\geq 0$ άρα η (1) γίνεται: $\omega^2-5\omega+4\neq 0\Leftrightarrow(\omega-1)(\omega-4)\neq 0\Leftrightarrow\Leftrightarrow\left(\omega\neq 1\Leftrightarrow x^2\neq 1\Leftrightarrow x\neq\pm 1\right)$ και $\left(\omega\neq 4\Leftrightarrow x^2\neq 4\Leftrightarrow x\neq\pm 2\right)$. Άρα $D_f=\mathbb{R}-\{-2,-1,1,2\}$.

ζ) Η f ορίζεται όταν: $3x^2-2\alpha x-8\alpha^2\neq 0$. Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα
$\Delta=4\alpha^2-96\alpha^2=-92\alpha^2$

- Αν $\alpha\neq 0$: $\Delta<0$ άρα $3x^2-2\alpha x-8\alpha^2\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $D_f=\mathbb{R}$.
- Αν $\alpha=0$ τότε $3x^2\neq 0\Leftrightarrow x\neq 0$, $D_f=\mathbb{R}^*$

η) Η f ορίζεται όταν: $x^3+\alpha x^2-\alpha^2x-\alpha^3\neq 0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2(x+\alpha)-\alpha^2(x+\alpha)\neq 0\Leftrightarrow(x+\alpha)\left(x^2-\alpha^2\right)\neq 0\Leftrightarrow x\neq-\alpha$ και
$\left(x^2-\alpha^2\neq 0\Leftrightarrow x^2\neq\alpha^2\Leftrightarrow|x|\neq|\alpha|\Leftrightarrow x\neq\pm\alpha\right)$, $D_f=\mathbb{R}-\{-\alpha,\alpha\}$.

17.α) $x-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$ και $x-3\geq 0\Leftrightarrow x\geq 3$. Με συναλήθευση: $D_f=[3,+\infty)$.

β) $x^2+3x-10\geq 0\Leftrightarrow x\leq-5$ ή $x\geq 2$. $D_f=(-\infty,-5]\cup[2,+\infty)$

γ) $4-x^2\geq 0\Leftrightarrow x^2\leq 4\Leftrightarrow|x|\leq 2\Leftrightarrow-2\leq x\leq 2$ και $x\neq 0$, άρα
$D_f=[-2,0)\cup(0,2]$.

δ) Η f ορίζεται όταν: $|x-3|-1>0\Leftrightarrow|x-3|>1\Leftrightarrow x-3<-1\Leftrightarrow x<2$ ή
$x-3>1\Leftrightarrow x>4$. Άρα $A=(-\infty,2)\cup(4,+\infty)$

ε) Η f ορίζεται όταν:
$|x-4|-|x|>0\Leftrightarrow|x-4|>|x|\Leftrightarrow|x-4|^2>|x|^2\Leftrightarrow x^2-8x+16>x^2\Leftrightarrow$
$-8x>-16\Leftrightarrow x<2$, άρα $D_f=(-\infty,2)$.

στ) Η f ορίζεται όταν: $|x|-x>0\Leftrightarrow|x|>x\Leftrightarrow x<0$. Άρα $A=(-\infty,0)$.

ζ) $\dfrac{1+x}{1-e^x}>0\Leftrightarrow\left(1-e^x\right)(1+x)>0$,
άρα $D_f=(-1,0)$.

x	$-\infty$ -1		0 $+\infty$
1+x	–	+	+
$1-e^x$	+	+	–
Γ	–	+	–

η) $\begin{cases} x^2-1\ge 0 \\ x-4\ne 0 \\ x(x-2)\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2\ge 1 \\ x\ne 4 \\ x\ne 0 \text{ και } x\ne 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x|\ge 1 \\ x\ne 4 \\ x\ne 0 \text{ και } x\ne 2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x\le -1 \text{ ή } x\ge 1 \\ x\ne 4 \\ x\ne 0 \text{ και } x\ne 2 \end{cases}$. Άρα $D_f=(-\infty,-1]\cup[1,2)\cup(2,4)\cup(4,+\infty)$.

θ) $\dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-2}\ge 0 \Leftrightarrow \left(x^2-x-2\right)\left(x^2+x-2\right)\ge 0$ και

$x^2+x-2\ne 0 \Leftrightarrow x\ne 1$ και $x\ne -2$.

x	$-\infty$ -2	-1	1	2	$+\infty$
x^2-x-2	+	+ 0	-	- 0	+
x^2+x-2	+ 0	-	- 0	+	+
Γινόμενο	+	-	+	-	+

$D_f=(-\infty,-2)\cup[-1,1)\cup[2,+\infty)$.

ι) $\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{x}{3x-5}\ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{-x^2+7x-10}{(x-1)(3x-5)}\ge 0 \Leftrightarrow$

$\left(-x^2+7x-10\right)(x-1)(3x-5)\ge 0$ και $(x-1)(3x-5)\ne 0 \Leftrightarrow$ $x\ne 1$ και $x\ne \dfrac{5}{3}$.

x	$-\infty$ 1	5/3	2	5	$+\infty$
$-x^2+7x-10$	-	-	- 0	+ 0	-
$x-1$	- 0	+	+	+	+
$3x-5$	-	- 0	+	+	+
Γινόμενο	-	+	-	+	-

$D_f=\left(1,\dfrac{5}{3}\right)\cup[2,5]$.

18.α) $4^x+2^x-2\ne 0 \overset{2^x=u>0}{\Leftrightarrow} u^2+u-2\ne 0 \Leftrightarrow (u\ne -2$ που ισχύει) ή

($u\ne 1 \Leftrightarrow 2^x\ne 1 \Leftrightarrow x\ne 0$). $D_f=\mathbb{R}^*$.

β) $\begin{cases} x-1>0 \\ x^2-4>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x^2>4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ |x|>2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x<-2 \text{ ή } x>2 \end{cases} \Rightarrow x>2$, άρα

$D_f=(2,+\infty)$.

γ) $e^{2x}+2e^x-3>0 \Leftrightarrow \left(e^x-1\right)\left(e^x+3\right)>0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow x>0$, άρα $D_f=(0,+\infty)$.

δ) $\frac{1+x}{1-x}>0 \Leftrightarrow (1+x)(1-x)>0 \Leftrightarrow 1-x^2>0 \Leftrightarrow x^2<1 \Leftrightarrow |x|<1 \Leftrightarrow$
$x \in (-1,1)$, άρα $D_f=(-1,1)$.

ε) Η f ορίζεται όταν: $\begin{cases} e^x-1\geq 0 \\ 1-\ln x \geq 0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x \geq 1 \\ \ln x \leq 1 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ x\leq e \\ x>0 \end{cases}$, άρα $D_f=(0,e]$.

στ) $e^{2x}+2e^x-3>0 \Leftrightarrow (e^x-1)(e^x+3)>0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow x>0$,άρα $D_f=(0,+\infty)$.

ζ) Η f ορίζεται όταν: $\begin{cases} \ln^2 x+\ln(x^2)-3>0 \\ x>0 \\ x^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln^2 x+\ln(x^2)-3>0 \\ x>0 \\ x\neq 0 \end{cases}$.

Είναι $\ln^2 x+\ln(x^2)-3>0 \Leftrightarrow \ln^2 x+2\ln|x|-3>0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \ln^2 x+2\ln x-3>0$.

Θέτουμε $\ln x=u$ άρα $u^2+2u-3>0 \Leftrightarrow (u-1)(u+3)>0 \Leftrightarrow$
$(u<-3 \Leftrightarrow \ln x<-3 \Leftrightarrow x<e^{-3})$ ή $(u>1 \Leftrightarrow \ln x>1 \Leftrightarrow x>e)$.

Άρα τελικά $\begin{cases} x>0 \\ x<e^{-3} \\ x>e \end{cases} \Leftrightarrow x\in(0,e^{-3})\cup(e,+\infty)$, $D_f=(0,e^{-3})\cup(e,+\infty)$.

η) Η f ορίζεται όταν: x >0 και $\ln x>0 \Leftrightarrow x>1$, άρα $D_f=(1,+\infty)$.

19. α) Η f ορίζεται όταν: $x\neq 0$, άρα $D_f=\mathbb{R}^*$.

β) $x+\frac{\pi}{3}\neq k\pi+\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x\neq k\pi+\frac{\pi}{6}$, $k\in\mathbb{Z}$, $D_f=\mathbb{R}-\left\{k\pi+\frac{\pi}{6}\right\}$, $k\in\mathbb{Z}$.

γ) $x+\frac{\pi}{2}\neq k\pi+\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x\neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, $D_f=\mathbb{R}-\{k\pi\}$, $k\in\mathbb{Z}$.

δ) $ημx\neq 1 \Leftrightarrow x\neq 2k\pi+\frac{\pi}{2}$, $κ\in\mathbb{Z}$, άρα $D_f=\mathbb{R}-\left\{2κ\pi+\frac{\pi}{2},\ κ\in\mathbb{Z}\right\}$.

ε) $\begin{cases} 2ημx-1\neq 0 \\ εφx-1\neq 0 \\ x\neq k\pi+\frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ημx\neq \frac{1}{2} \\ εφx\neq 1 \\ x\neq k\pi+\frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ημx\neq ημ\frac{\pi}{6} \\ εφx\neq εφ\frac{\pi}{4} \\ x\neq k\pi+\frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x \neq 2k\pi + \frac{\pi}{6} \text{ ή } x \neq 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \\ x \neq k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2k\pi + \frac{\pi}{6} \text{ ή } x \neq 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \\ x \neq k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Άρα $D_f = \mathbb{R} - \left\{2k\pi + \frac{\pi}{6},\ 2k\pi + \frac{5\pi}{6},\ k\pi + \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right\},\ k \in \mathbb{Z}$.

στ) $\begin{cases} 2\sigma\upsilon\nu x - 1 \neq 0 \\ 2\eta\mu x + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma\upsilon\nu x \neq \frac{1}{2} \\ \eta\mu x \neq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma\upsilon\nu x \neq \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \\ \eta\mu x \neq \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right) \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x \neq 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3} \\ x \neq 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6} \text{ και } x \neq 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$, άρα

$D_f = \mathbb{R} - \left\{2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3}, 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6}, 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6}\right\}, \kappa \in \mathbb{Z}$.

20.Πρέπει $x^2 - \lambda x + 9 \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}\ (2)$

Άρα $\Delta < 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 36 < 0 \Leftrightarrow \lambda^2 < 36 \Leftrightarrow |\lambda| < 6 \Leftrightarrow -6 < \lambda < 6$.

21.Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ όταν $\eta\mu x - \lambda \neq 0 \Leftrightarrow \eta\mu x \neq \lambda$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επειδή $-1 \leq \eta\mu x \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ πρέπει $\lambda \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Αυξημένης δυσκολίας

22.α) Η f ορίζεται όταν: $\begin{cases} x + 3\sqrt{x} - 10 \neq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$.

Είναι $x + 3\sqrt{x} - 10 \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}^2 + 3\sqrt{x} - 10 \neq 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x} + 5\right)\left(\sqrt{x} - 2\right) \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x} \neq -5 \text{ ισχύει}\right)$ και $\left(\sqrt{x} \neq 2 \Leftrightarrow x \neq 4\right)$, $D_f = [0, 4) \cup (4, +\infty)$.

β) Η f ορίζεται όταν: $(x-1)^2 \geq 0$, που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

$\sqrt{(x-1)^2} - |x| + 2 \neq 0 \Leftrightarrow |x-1| \neq |x| - 2$

Αν $x < 0$, τότε: $-x + 1 \neq -x - 2$ που ισχύει.

Αν $0 \le x < 1$, τότε:

$-x+1 \ne x-2 \Leftrightarrow 2x \ne 3 \Leftrightarrow x \ne \frac{3}{2}$ που ισχύει.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$	0	$+$		$+$	

Αν $x \ge 1$, τότε: $x-1 \ne x-2$ που ισχύει.
Άρα $D_f = \mathbb{R}$.

γ) Η f ορίζεται όταν: $\begin{cases} 2x+7 \ge 0 \\ \sqrt{2x+7}-x-2 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\frac{7}{2} \\ \sqrt{2x+7} \ne x+2 \end{cases}$ (1)

Αν $x+2<0 \Leftrightarrow x<-2$ άρα $x \in \left[-\frac{7}{2},-2\right)$ τότε είναι αληθής.

Αν $x \ge -2$ τότε $2x+7 \ne x^2+4x+4 \Leftrightarrow x^2+2x-3 \ne 0 \Leftrightarrow$
$(x-1)(x+3) \ne 0 \Leftrightarrow x \ne 1$ και $x \ne -3$.

Επομένως (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\frac{7}{2} \\ x \ne 1 \end{cases}$, $D_f = \left[-\frac{7}{2},1\right) \cup (1,+\infty)$.

δ) Η f ορίζεται όταν: $x+3 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -3$ και $\sqrt{x+3}-x-1 \ge 0 \Leftrightarrow$
$\sqrt{x+3} \ge x+1$ (1). Αν $x+1<0 \Leftrightarrow x<-1$, δηλαδή $x \in [-3,-1)$ τότε η (1) ισχύει.

Αν $x \ge -1$ η (1) γίνεται: $x+3 \ge (x+1)^2 \Leftrightarrow x^2+x-2 \le 0 \Leftrightarrow -2 \le x \le 1$, οπότε $x \in [-1,1]$.

Άρα $D_f = [-3,1]$.

ε) Η f ορίζεται όταν: $x+1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -1$, $10-x \ge 0 \Leftrightarrow x \le 10$ και
$\sqrt{x+1}-\sqrt{10-x}-1 \ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} \ge \sqrt{10-x}+1 \Leftrightarrow x+1 \ge \left(\sqrt{10-x}+1\right)^2 \Leftrightarrow$
$x+1 \ge 10-x+2\sqrt{10-x}+1 \Leftrightarrow 2x-10 \ge 2\sqrt{10-x} \Leftrightarrow \sqrt{10-x} \le x-5$.
Πρέπει $x-5 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 5$, τότε

$10-x \le x^2-10x+25 \Leftrightarrow x^2-9x+15 \ge 0 \Leftrightarrow x \le \frac{9-\sqrt{21}}{2}$ ή $x \ge \frac{9+\sqrt{21}}{2}$

Με συναλήθευση $D_f = \left[\frac{9+\sqrt{21}}{2},10\right]$ γιατί

$\frac{9-\sqrt{21}}{2} < 5 \Leftrightarrow 9-\sqrt{21} < 10 \Leftrightarrow \sqrt{21} > -1$ ισχύει.

στ) Η f ορίζεται όταν: $x-3 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 3$ και $\sqrt{x-3}-x+5 \ge 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sqrt{x-3} \ge x-5$ (1).
Αν $x-5<0 \Leftrightarrow x<5$ τότε η (1) ισχύει.

Αν $x-5\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 5$ τότε $(1)\Leftrightarrow x-3\ge x^2-10x+25 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-11x+28\le 0 \Leftrightarrow (x-4)(x-7)\le 0 \overset{x\ge 5}{\Leftrightarrow} 5\le x\le 7$.

Άρα η (1) ισχύει για κάθε $x\le 7$. Άρα $D_f=[3,7]$.

23. Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ όταν $\lambda x^2-2x+1\ne 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Αν $\lambda=0$ τότε $x\ne \frac{1}{2}$ και η f δεν έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Αν $\lambda\ne 0$ πρέπει $\Delta<0 \Leftrightarrow 4-4\lambda<0 \Leftrightarrow \lambda>1$.

24. Έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ όταν $\lambda x+2\ne 0 \Leftrightarrow \lambda x\ne -2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Αν $\lambda\ne 0$ τότε η παραπάνω σχέση ισχύει μόνον για $x\ne -\frac{2}{\lambda}$ άτοπο.

Άρα $\lambda=0$ και προφανώς θα είναι $2\ne 0$.

25. Αν $\lambda=0$ τότε $f(x)=\sqrt{-6x+1}$ και $D_f=\left(-\infty,\frac{1}{6}\right]$.

Αν $\lambda\ne 0$ τότε το τριώνυμο λx^2-6x+1 έχει $\Delta=36-4\lambda=4(9-\lambda)$.

• Αν $\lambda<9$ τότε $\Delta>0$ και το τριώνυμο έχει ρίζες

$$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{4(9-\lambda)}}{2\lambda}=\frac{6\pm 2\sqrt{9-\lambda}}{2\lambda}\Leftrightarrow x_1=\frac{3+\sqrt{9-\lambda}}{\lambda},\ x_2=\frac{3-\sqrt{9-\lambda}}{\lambda}$$

• Αν $\lambda\in(0,9)$ τότε

$D_f=(-\infty,x_2]\cup[x_1,+\infty)$

x	$-\infty$ x_2	x_2 x_1	x_1 $+\infty$
$4\lambda x^2-4x+1$	$+$	$-$	$+$

Ενώ αν $\lambda<0$ τότε $D_f=[x_2,x_1]$

• Αν $\lambda>9$ τότε $\Delta<0$ και $\lambda x^2-6x+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα $D_f=\mathbb{R}$.

• Αν $\lambda=9$ τότε $f(x)=\sqrt{9x^2-6x+1}=\sqrt{(3x-1)^2}=|3x-1|$ και $D_f=\mathbb{R}$.

26. Πρέπει $(1-\lambda)x^2+4(\lambda-1)x-2\lambda+1\ge 0$ μόνο για $x\in[1,3]$.

Αν $\lambda=1$ τότε είναι $(1-\lambda)x^2+4(\lambda-1)x-2\lambda+1=-2+1=-1$ και η f δεν ορίζεται. Αν $\lambda\ne 1$ τότε $\Delta=4(\lambda-1)(2\lambda-3)$.

Αν $\lambda\in\left(1,\frac{3}{2}\right)$ τότε $\Delta<0$, $1-\lambda<0$ οπότε $(1-\lambda)x^2+4(\lambda-1)x-2\lambda+1<0$ και η f δεν ορίζεται. Αν $\lambda<1$ τότε $\Delta>0$, $1-\lambda>0$ και το τριώνυμο $(1-\lambda)x^2+4(\lambda-1)x-2\lambda+1$ έχει δύο ρίζες x_1,x_2 και $D_f=(-\infty,x_1]\cup[x_2,+\infty)\ne[1,3]$.

Αν $\lambda > \frac{3}{2}$ τότε $\Delta > 0$ και το τριώνυμο έχει δύο ρίζες x_1, x_2 και

$D_f = [x_1, x_2]$ άρα $x_1 = 1$ και $x_2 = 3$.

Τότε $\begin{cases} (1-\lambda)\cdot 1^2 + 4(\lambda-1)\cdot 1 - 2\lambda + 1 = 0 \\ (1-\lambda)\cdot 3^2 + 4(\lambda-1)\cdot 3 - 2\lambda + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = 2$. Αν $\lambda = \frac{3}{2}$, τότε $\Delta = 0$,

$1-\lambda = -\frac{1}{2} < 0$ οπότε $(1-\lambda)x^2 + 4(\lambda-1)x - 2\lambda + 1 < 0$ και η f δεν ορίζεται.

27.α) Η f ορίζεται όταν $2\alpha - \alpha^2(x+1)^2 - x - 1 \geq 0$.

Αφού το μηδέν ανήκει στο πεδίο ορισμού της f τότε

$2\alpha - \alpha^2(0+1)^2 - 0 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2\alpha - \alpha^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\alpha^2 - 2\alpha + 1 \leq 0 \Leftrightarrow (\alpha-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow (\alpha-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$.

β) Είναι $f(x) = \sqrt{1-(x+1)^2 - x}$, οπότε $1-(x+1)^2 - x \geq 0 \Leftrightarrow$

$1 - x^2 - 2x - 1 - x \geq 0 \Leftrightarrow -x^2 - 3x \geq 0 \Leftrightarrow -x(x+3) \geq 0 \Leftrightarrow$

$x(x+3) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-3, 0]$.

28.α) $f^2(x) + 2x^2 f(x) = 1 - 4x^4 \Leftrightarrow f^2(x) + 2x^2 f(x) + x^4 = 1 - 3x^4 \Leftrightarrow$

$\left(f(x) + x^2\right)^2 = 1 - 3x^4$ για κάθε $x \in A$.

β) Ισχύει $\left(f(x) + x^2\right)^2 \geq 0$ άρα $1 - 3x^4 \geq 0 \Leftrightarrow 3x^4 \leq 1 \Leftrightarrow x^4 \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow$

$|x| \leq \sqrt[4]{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt[4]{3}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$. Άρα $A = \left[-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right]$.

γ) $\left|f(x) + x^2\right| = 1 \Leftrightarrow \left(f(x) + x^2\right)^2 = 1 \Leftrightarrow 1 - 3x^4 = 1 \Leftrightarrow 3x^4 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Τιμές συνάρτησης – Σύνολο τιμών

29.α) $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$ αν $\lambda = 1$ τότε $x = 1$.

β) $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ αν $\lambda = 1$ τότε $f(x) = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

30.α) $D_f = (-5, 1] \cup (1, +\infty) = (-5, +\infty)$.

β) $f(-2) = -3\cdot(-2) = 6$, $f(2) = 2^3 - 2 = 6$, άρα $f(-2) = f(2)$.

γ) Αν $-5 < x \leq 1$ τότε $f(x) = 0 \Leftrightarrow -3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ δεκτή.

Αν $x > 1$ τότε $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2}$ δεκτή.

δ) $f(\eta\mu\lambda) = 3f(1) \Leftrightarrow -3\eta\mu\lambda = -9 \Leftrightarrow \eta\mu\lambda = 3$ αδύνατη.

31.α) Η συνάρτηση ορίζεται για $x<0$ και για $x>1$ άρα έχει πεδίο ορισμού το $D_f=(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$.

β) Είναι $-1<0$ άρα $f(-1)=(-1)^4-1+1=1$.

Είναι $4>0$ άρα $f(4)=4+1=5$.

Είναι $\mu>0\Leftrightarrow \mu+1>1$ άρα $f(\mu+1)=\mu+1+1=\mu+2$.

γ) Είναι $f(-2)=(-2)^4-2+1=16-1=15$ άρα $f(f(-2))=f(15)=15+1=16$.

Είναι $f(2)=2+1=3$ άρα $f(f(2))=f(3)=3+1=4$.

δ) Για $x<0$: $f(x)=1\Leftrightarrow x^4+x+1=1\Leftrightarrow x^4+x=0\Leftrightarrow x(x^3+1)=0\Leftrightarrow$

$x=0$ ή $(x^3+1=0\Leftrightarrow x^3=-1\Leftrightarrow x=-1)$. Επειδή $x<0$ δεκτή λύση μόνο η $x=-1$ Για $x>1$: $f(x)=1\Leftrightarrow x+1=1\Leftrightarrow x=0$ αδύνατη.

32.α) Η f ορίζεται όταν $x\ge 0$.

Είναι $f(x)=y\Leftrightarrow 1-2\sqrt{x}=y\Leftrightarrow 2\sqrt{x}=1-y$ (1), επειδή $2\sqrt{x}\ge 0$ για κάθε $x\ge 0$, είναι $1-y\ge 0\Leftrightarrow y\le 1$ και έχουμε $(1)\Leftrightarrow \sqrt{x}=\dfrac{1-y}{2}\Leftrightarrow x=\dfrac{(1-y)^2}{4}\ge 0$, άρα η f έχει σύνολο τιμών το $(-\infty,1]$.

β) $D_f=\mathbb{R}$, είναι $f(x)=y\Leftrightarrow x^2-4=y\Leftrightarrow x^2=y+4$ (1), επειδή $x^2\ge 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, είναι $y+4\ge 0\Leftrightarrow y\ge -4$ και έχουμε $(1)\Leftrightarrow |x|=\sqrt{y+4}$.
$x=-\sqrt{y+4}<0$ για $x<0$ και $x=\sqrt{y+4}\ge 0$ για $x\ge 0$, άρα η f έχει σύνολο τιμών το $[-4,+\infty)$.

γ) $D_f=\mathbb{R}$, είναι $f(x)=y\Leftrightarrow |x+1|-1=y\Leftrightarrow |x+1|=y+1$ (1), επειδή $|x+1|\ge 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, είναι $y+1\ge 0\Leftrightarrow y\ge -1$, οπότε $x=y$ αν $x\ge -1$ και $x=-y-2$ αν $x<-1$, άρα η f έχει σύνολο τιμών το $[-1,+\infty)$.

δ) Η f ορίζεται όταν $x\ne 1$.

Είναι $f(x)=y\Leftrightarrow \dfrac{x}{x-1}=y\Leftrightarrow x=xy-y\Leftrightarrow x(y-1)=y$ (1), αν $y=1$ τότε $(1)\Leftrightarrow 0=1$ αδύνατο, άρα για $y\ne 1$ είναι $x=\dfrac{y}{y-1}\ne 1$ άρα η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}-\{1\}$.

ε) Η f ορίζεται όταν $e^x-1>0\Leftrightarrow e^x>1\Leftrightarrow x>0$.

Είναι $f(x)=y\Leftrightarrow \ln(e^x-1)=y\Leftrightarrow e^x-1=e^y\Leftrightarrow e^x=e^y+1$ (1), είναι $e^x>0$ άρα $e^y+1>0$ το οποίο ισχύει για κάθε $y\in\mathbb{R}$. Έχουμε

$(1) \Leftrightarrow x = \ln\left(e^y + 1\right)$. Είναι $x > 0 \Leftrightarrow \ln\left(e^y + 1\right) > 0 \Leftrightarrow e^y + 1 > 1$ ισχύει για κάθε $y \in \mathbb{R}$, άρα η f έχει σύνολο τιμών όλο το $\mathbb{R}$.

33.α) $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 3-\sqrt{x-1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \sqrt{x-1} \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x-1 \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 10 \end{cases}$ $D_f = [1,10]$

β) $1 \leq x \leq 10 \Leftrightarrow 0 \leq x-1 \leq 9 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{x-1} \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq -\sqrt{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow$

$0 \leq 3-\sqrt{x-1} \leq 3 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{3-\sqrt{x-1}} \leq \sqrt{3} \Leftrightarrow 0 \leq f(x) \leq \sqrt{3}$, άρα

$f(A) = \left[0, \sqrt{3}\right]$.

34.α) $|x| - 2 \neq 0 \Leftrightarrow |x| \neq 2 \Leftrightarrow x \neq \pm 2$ άρα $D_f = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$.

β) Πρέπει να υπάρχει $x \in D_f$ τέτοιο, ώστε $f(x) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-2}{|x|-2} = 1 \Leftrightarrow$

$x^2 - \cancel{2} = |x| - \cancel{2} \Leftrightarrow |x|^2 - |x| = 0 \Leftrightarrow |x|\left(|x|-1\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = \pm 1$.

Δηλαδή $f(0) = f(1) = f(-1) = 1$ οπότε ο αριθμός 1 βρίσκεται στο σύνολο τιμών της f.

35.α) $\dfrac{1-x}{1+x} > 0 \Leftrightarrow (1-x)(1+x) > 0 \Leftrightarrow 1-x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$,

άρα $D_f = (-1,1)$.

β) $f(x_1) + f(x_2) = \ln\dfrac{1-x_1}{1+x_1} + \ln\dfrac{1-x_2}{1+x_2} = \ln\left(\dfrac{1-x_1}{1+x_1} \cdot \dfrac{1-x_2}{1+x_2}\right) \Leftrightarrow$

$f(x_1) + f(x_2) = \ln\dfrac{1-x_2-x_1+x_1x_1}{1+x_2+x_1+x_1x_2}$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}\right) = \ln\frac{1-\dfrac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}}{1+\dfrac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}} = \ln\frac{\dfrac{1+x_1x_2-x_1-x_2}{\cancel{1+x_1x_2}}}{\dfrac{1+x_1x_2+x_1+x_2}{\cancel{1+x_1x_2}}} = \ln\frac{1+x_1x_2-x_1-x_2}{1+x_1x_2+x_1+x_2}$$

Άρα $f(x_1) + f(x_2) = f\left(\dfrac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}\right)$.

36.α) $f(e) = \ln e + 1 - f(e) \Leftrightarrow 2f(e) = 2 \Leftrightarrow f(e) = 1$.

Είναι $f(x) = \ln x + 1 - f(e) \Leftrightarrow f(x) = \ln x$, $x > 0$.

β) i. $f(xy) = f(x) + f(y) \Leftrightarrow \ln(xy) = \ln x + \ln y$ ισχύει.

ii. $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)\Leftrightarrow \ln\frac{x}{y}=\ln x-\ln y$ ισχύει.

γ) $f\left(f(x)\right)=\ln 2\Leftrightarrow \ln\left(\ln x\right)=\ln 2\Leftrightarrow \ln x=2\Leftrightarrow x=e^2$.

37.α) $f(1)=\alpha^1+\alpha-f(1)\Leftrightarrow 2f(1)=2\alpha\Leftrightarrow f(1)=\alpha$.

Είναι $f(x)=\alpha^x+\alpha-\alpha\Leftrightarrow f(x)=\alpha^x$, $x\in\mathbb{R}$.

β) i) $f(x+y)=f(x)f(y)\Leftrightarrow \alpha^{x+y}=\alpha^x\alpha^y$ ισχύει.

ii) $f(x-y)=\frac{f(x)}{f(y)}\Leftrightarrow \alpha^{x-y}=\frac{\alpha^x}{\alpha^y}$ ισχύει.

γ) $f(-2)=\frac{1}{e^2}\Leftrightarrow \alpha^{-2}=e^{-2}\Leftrightarrow \alpha=e$ άρα $f(x)=e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

$f\left(f(x)+1\right)=f(1)\Leftrightarrow e^{f(x)+1}=e\Leftrightarrow f(x)+1=1\Leftrightarrow f(x)=0\Leftrightarrow e^x=0$ αδύνατη άρα δεν έχει λύσεις.

Αυξημένης δυσκολίας

38.α) Για $x=2$ είναι $f(2)=\sqrt{2f(2)-1}\Leftrightarrow f^2(2)=2f(2)-1\Leftrightarrow$

$\left(f(2)-1\right)^2=0\Leftrightarrow f(2)=1$.

Είναι $f(x)=\sqrt{x-1}$, $x\ge 1$, άρα $f(x)=x\Leftrightarrow \sqrt{x-1}=x\Leftrightarrow$

$x-1=x^2\Leftrightarrow x^2-x+1=0$, είναι $\Delta<0$ άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

β) $f\left(x^2+1\right)=\sqrt{x^2+1-1}=\sqrt{x^2}=|x|=x$ αφού $x\ge 1$.

39.α) Η f ορίζεται όταν $x>0$, άρα $D_f=(0,+\infty)$.

β) Για $x>0$ έχουμε $f(x)=y\Leftrightarrow \frac{x+1}{\sqrt{x}}=y\Leftrightarrow x+1=y\sqrt{x}$ (1), επειδή $\sqrt{x}>0$ για κάθε $x>0$ και $x>0\Leftrightarrow x+1>0$ τότε $y>0$.

Έχουμε $(1)\Leftrightarrow x^2+2x+1=y^2x\Leftrightarrow x^2+\left(2-y^2\right)x+1=0$, επειδή υπάρχουν x,y θετικά ώστε να ικανοποιείται η εξίσωση, τότε το τριώνυμο έχει διακρίνουσα

$\Delta\ge 0\Leftrightarrow \left(2-y^2\right)^2-4\ge 0\Leftrightarrow \left(2-y^2\right)^2\ge 4\Leftrightarrow \left|2-y^2\right|\ge 2\Leftrightarrow$

$\left(2-y^2\le -2\Leftrightarrow y^2\ge 4\Leftrightarrow |y|\ge 2\overset{y>0}{\Leftrightarrow} y\ge 2\right)$ ή

$\left(2-y^2\ge 2\Leftrightarrow -y^2\ge 0\Leftrightarrow y^2\le 0 \text{ αδύνατη για } y>0\right)$ άρα έχει ρίζα ως προς x για κάθε $y\ge 2$. Άρα η f έχει σύνολο τιμών το $[2,+\infty)$.

γ) $x+1\ge\lambda\sqrt{x}\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}\ge\lambda\Leftrightarrow f(x)\ge\lambda$ και επειδή η f έχει σύνολο τιμών το $[2,+\infty)$ τότε είναι $f(x)\ge 2$ άρα πρέπει $\lambda\le 2$.

40.α) Είναι $f(x)+3\le f(x+3)=f((x+2)+1)\le f(x+2)+1\Leftrightarrow$

$f(x)+3\le f((x+1)+1)+1\le f(x+1)+1+1\le f(x)+3$.

Άρα $f(x)+3\le f(x+1)+2\le f(x)+3\Leftrightarrow f(x)+1\le f(x+1)\le f(x)+1\Leftrightarrow$

$f(x+1)=f(x)+1$.

β) Για x = 0 είναι $f(1)=f(0)+1=1$, για x =1 είναι $f(2)=f(1)+1=2$.

41. α) $x^2+1>x^2\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x|\Leftrightarrow-\sqrt{x^2+1}<x<\sqrt{x^2+1}\Rightarrow$

$\sqrt{x^2+1}+x>0$ και $x^2+1>0$ άρα $D_f=\mathbb{R}$.

β) $f(-x)=\dfrac{1}{f(x)}\Leftrightarrow f(-x)f(x)=1\Leftrightarrow\sqrt{\sqrt{x^2+1}-x}\cdot\sqrt{\sqrt{x^2+1}+x}=1\Leftrightarrow$

$\sqrt{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=1\Leftrightarrow\sqrt{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-x^2}=1\Leftrightarrow$

$\sqrt{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}=1$ ισχύει.

γ) $f(x)=k\Leftrightarrow\sqrt{\sqrt{x^2+1}+x}=k$ (1), πρέπει $k\ge 0$.

(1) $\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}+x=k^2\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}=k^2-x$ (2)

Πρέπει $k^2-x\ge 0\Leftrightarrow x\le k^2$ (3), τότε (3) $\Leftrightarrow x^2+1=\left(k^2-x\right)^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\cancel{x^2}+1=k^4-2k^2x+\cancel{x^2}\Leftrightarrow 2k^2x=k^4-1$ (4)

Αν $k=0$ τότε η (4) είναι αδύνατη, οπότε για $k>0$ είναι $x=\dfrac{k^4-1}{2k^2}$. Λόγω της (3), πρέπει $\dfrac{k^4-1}{2k^2}\le k^2\Leftrightarrow k^4-1\le 2k^4\Leftrightarrow k^4\ge-1$ που ισχύει. Άρα $k>0$.

42.α) Έστω $x_0\ge 0$ ρίζα της εξίσωσης, τότε $f(x_0)=-1$.

Για $x=x_0$ είναι $f^3(x_0)+2f^2(x_0)+f(x_0)+\sqrt{x_0}=x_0\Leftrightarrow$

$-1+2-1+\sqrt{x_0}=x_0\Leftrightarrow\sqrt{x_0}=x_0\overset{x_0\ge 0}{\Leftrightarrow}{x_0}^2-x_0=0\Leftrightarrow x_0(x_0-1)=0\Leftrightarrow$

$x_0=0$ ή $x_0=1$. Άρα η εξίσωση $f(x)=-1$ έχει δύο ρίζες τις 0 και 1.

β) 1ος τρόπος: Έστω ότι υπάρχει $\rho \geq 0$ τέτοιο ώστε $f(\rho)=0$.

Για $x=\rho$ είναι $f^3(\rho)+2f^2(\rho)+f(\rho)+\sqrt{\rho}=\rho \Leftrightarrow \sqrt{\rho}=\rho \Leftrightarrow \sqrt{\rho}=\rho$ και προκύπτει όπως στο προηγούμενο ερώτημα $\rho=0$ ή $\rho=1$, το οποίο είναι άτοπο γιατί $f(0)=f(1)=-1$ και δεν γίνεται να είναι και $f(0)=f(1)=0$. Άρα $f(x)\neq 0$ για κάθε $x \geq 0$.

2ος τρόπος: Για κάθε $x \in (0,1)\cup(1,+\infty)$ είναι:

$$f^3(x)+2f^2(x)+f(x)+\sqrt{x}=x \Leftrightarrow f(x)\left(f^2(x)+2f(x)+1\right)=x-\sqrt{x} \Leftrightarrow$$

$$f(x)\left(f(x)+1\right)^2=x-\sqrt{x} \overset{(f(x)+1)^2>0}{\Leftrightarrow} f(x)=\frac{x-\sqrt{x}}{\left(f(x)+1\right)^2}, x \in (0,1)\cup(1,+\infty).$$

Για $x \in (0,1)\cup(1,+\infty)$ είναι $f(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x-\sqrt{x}}{\left(f(x)+1\right)^2} \Leftrightarrow$

$x-\sqrt{x}=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=1$ άρα είναι αδύνατη η εξίσωση.

Είναι $f(0)=f(1)=-1$ άρα τελικά $f(x)\neq 0$ για κάθε $x \geq 0$.

γ) Επειδή $f(x)=\dfrac{x-\sqrt{x}}{\left(f(x)+1\right)^2}, x \in (0,1)\cup(1,+\infty)$ και $\left(f(x)+1\right)^2>0$ για κάθε $x \in (0,1)\cup(1,+\infty)$, τότε το πρόσημο της f στο διάστημα αυτό εξαρτάται από το πρόσημο του αριθμητή.

x	0	1 +∞	
x		+	+
$x-1$		−	+
$x(x-1)$		−	+

Είναι $x-\sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq x \overset{x\geq 0}{\Leftrightarrow} x \leq x^2 \Leftrightarrow$ $x(x-1)\geq 0$. Είναι $f(x)>0$ για κάθε $x>1$ και $f(x)<0$ για κάθε $0<x<1$ και επίσης είναι $f(0)=f(1)=-1<0$ άρα τελικά $f(x)<0$ για κάθε $x \in [0,1]$.

43.α) Επειδή $f(x)=\dfrac{g(x)}{g(x)-1}$, $x \neq 0$ πρέπει $g(x)-1\neq 0 \Leftrightarrow g(x)\neq 1$ για κάθε $x \neq 0$. Το 1 ανήκει στο σύνολο τιμών της g οπότε η μοναδική τιμή που μπορεί να πάρει αυτή τη τιμή είναι το1 άρα $g(0)=1$.

β) Για κάθε $x \neq 0$ είναι $y=f(x) \Leftrightarrow y=\dfrac{g(x)}{g(x)-1} \Leftrightarrow$

$yg(x)-y=g(x) \Leftrightarrow g(x)(y-1)=y$ (1). Αν $y=1$: $(1) \Leftrightarrow 0=1$ αδύνατη.

Αν $y>1$: $g(x)=\dfrac{y}{y-1}$ και $g(x)\geq 1 \Leftrightarrow \dfrac{y}{y-1}\geq 1 \overset{y>1}{\Leftrightarrow} y \geq y-1 \Leftrightarrow 0 \geq -1$ ισχύει.

Αν $y<1$: $g(x)=\frac{y}{y-1}$ και $g(x)\geq 1 \Leftrightarrow \frac{y}{y-1}\geq 1 \overset{y<1}{\Leftrightarrow} y\leq y-1 \Leftrightarrow 0\leq -1$ αδύνατη.

Άρα η f έχει σύνολο τιμών το $(1,+\infty)$.

Προβλήματα σχηματισμού συνάρτησης

44.α) Το συνολικό κόστος κατασκευής των x μονάδων προϊόντος είναι $x(x-120)=x^2-120x$ ευρώ. Επειδή η Βιομηχανία έχει σταθερά ημερήσια έξοδα 5.000 ευρώ, το συνολικό κόστος κατασκευής των x μονάδων προϊόντος ημερησίως δίνεται από την συνάρτηση $S(x)=x^2-120x+5000$ ευρώ με $x\geq 0$.

Επειδή πουλά το παραγόμενο προϊόν σε τιμή 30% μεγαλύτερη του κόστους, το κέρδος της Βιομηχανίας είναι

$K(x)=\frac{30}{100}S(x)=\frac{3}{10}\left(x^2-120x+5000\right)$ ευρώ με $x\geq 0$.

β) Τα έσοδα δίνονται από την συνάρτηση:

$E(x)=S(x)+\frac{3}{10}S=\frac{13}{10}S(x)=\frac{13}{10}\left(x^2-120x+5000\right)$ ευρώ με $x\geq 0$.

γ) $K\geq 420 \Leftrightarrow \frac{\cancel{3}}{10}\left(x^2-120x+5000\right)\geq \cancel{420}^{140} \Leftrightarrow x^2-120x+5000\geq 1400 \Leftrightarrow$

$x^2-120x+3600\geq 0 \Leftrightarrow (x-60)^2\geq 0$ ισχύει.

45. Έστω x τα άτομα της δεξίωσης, τότε $200\leq x\leq 500$. Τα 200 άτομα έχουν κόστος $200\cdot 100=20.000$ ευρώ. Τα επιπλέον $x-200$ άτομα έχουν έκπτωση $(x-200)\cdot 0,4=0,4x-80$ ευρώ ανά άτομο, οπότε το κόστος τους είναι $100-(0,4x-80)=100-0,4x+80=180-0,4x$ ευρώ ανά άτομο και το συνολικό τους κόστος είναι: $(x-200)(180-0,4x)=180x-0,4x^2-36.000+80x=$
$-0,4x^2+260x-36.000$ ευρώ.

Το συνολικό κόστος της δεξίωσης είναι:

$20.000-0,4x^2+260x-36.000=-0,4x^2+260x-16.000$ ευρώ.

46.α) Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι $2x+2y$, οπότε

$2x+2y=20 \Leftrightarrow y=10-x$.

Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι: $E=xy=x(10-x)=\left(10x-x^2\right)\text{ cm}^2$,

$0<x<10$.

($x>0$ και $y>0 \Leftrightarrow x<10$ αφού εκφράζουν διαστάσεις ορθογωνίου).

β) $E\leq 25 \Leftrightarrow 10x-x^2\leq 25 \Leftrightarrow 0\leq x^2-10x+25 \Leftrightarrow (x-5)^2\geq 0$ ισχύει.

47.α) Τα τρίγωνα ΑΘΕ, ΕΒΖ, ΖΓΗ και ΔΘΗ είναι ίσα γιατί έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία, οπότε το ΕΖΗΘ είναι ρόμβος.

Επιπλέον $ΑΕΘ = ΒΖΕ$ λόγω των ίσων τριγώνων.

Είναι $ΒΖΕ + ΖΕΒ = 90° \Leftrightarrow ΑΕΘ + ΖΕΒ = 90°$, οπότε και $ΖΕΘ = 90°$, επομένως το ΕΖΗΘ είναι τετράγωνο. Από το πυθαγόρειο θεώρημα είναι:

$$ΕΖ^2 = ΕΒ^2 + ΖΒ^2 = x^2 + (2-x)^2 = 2x^2 - 4x + 4,\ \ 0 \le x \le 2$$

Είναι $Ε(x) = ΕΖ^2 = 2x^2 - 4x + 4,\ \ 0 \le x \le 2$

β τρόπος (χωρίς να δείξουμε ότι το ΕΖΗΘ είναι τετράγωνο)
Τα τρίγωνα ΑΘΕ, ΕΒΖ, ΖΓΗ και ΔΘΗ όπως είδαμε είναι ίσα και το καθένα έχει εμβαδόν $\dfrac{1}{2}x(2-x) = \dfrac{2x-x^2}{2}$, οπότε

$$(ΕΖΗΘ) = (ΑΒΓΔ) - 4(ΘΑΕ) = 4 - \cancel{4}^{2}\,\frac{2x-x^2}{\cancel{2}} = 4 - 4x + 2x^2 .$$

β) $Ε(x) \ge 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 4 \ge 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 2 \ge 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \ge 0 \Leftrightarrow$

$(x-1)^2 \ge 0$ ισχύει.

48.α) Μετά από 2 ώρες είναι ΟΑ = 24 και ΟΒ = 32.
Από τον νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΟΑΒ έχουμε:

$$ΑΒ^2 = ΟΑ^2 + ΟΒ^2 - 2ΟΑ \cdot ΟΒσυν60° = 24^2 + 32^2 - 2 \cdot 24 \cdot 32 \cdot \frac{1}{2} = 832 \Leftrightarrow$$

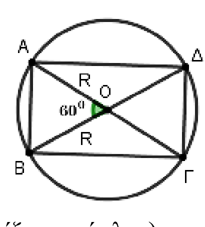
$ΑΒ = \sqrt{832} \simeq 29$ ναυτικά μίλια.

β) Επειδή η κίνηση που κάνουν τα δύο πλοία είναι ευθύγραμμη ομαλή, είναι $s_A(t) = υ_A t = 12t$ και $s_B(t) = υ_B t = 16t$.

γ) Από τον νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΟΑΒ τη χρονική στιγμή t, έχουμε: $ΑΒ^2 = ΟΑ^2 + ΟΒ^2 - 2ΟΑ \cdot ΟΒσυν60° \Leftrightarrow$

$$ΑΒ^2 = (12t)^2 + (16t)^2 - 2 \cdot 12t \cdot 16t \cdot \frac{1}{2} = 208t^2 \Leftrightarrow$$

$ΑΒ(t) = \sqrt{208}t = 4t\sqrt{13}$, $t \ge 0$.



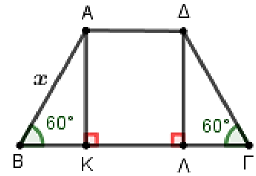
49. Επειδή ΟΑ = ΟΒ = R και $ΑΟΒ = 60°$, το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισόπλευρο, οπότε και ΑΒ =R. Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

$ΑΔ^2 = ΒΔ^2 - ΑΒ^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2 \Leftrightarrow ΑΔ = R\sqrt{3}$.

Το εμβαδόν του ορθογωνίου συναρτήσει της ακτίνας R είναι:

$Ε(R) = R \cdot R\sqrt{3} = R^2\sqrt{3}$, $R > 0$ (Είναι $R > 0$ αλλιώς δεν ορίζεται κύκλος).

50.α) Έστω ΑΔ = y cm. Κατασκευάζουμε τα ύψη ΑΚ και ΔΛ του τραπεζίου. Είναι



$συν60° = \frac{BK}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{BK}{x} \Leftrightarrow BK = \frac{x}{2}$. Όμοια και

$ΓΛ = \frac{x}{2}$. Επειδή η περίμετρος του τραπεζίου είναι

20cm, ισχύει ότι $ΑΔ + ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ = 20 \Leftrightarrow ΑΔ + x + \left(\frac{x}{2} + ΑΔ + \frac{x}{2}\right) + x = 20 \Leftrightarrow$

$2ΑΔ + 3x = 20 \Leftrightarrow 2ΑΔ = 20 - 3x \Leftrightarrow ΑΔ = \frac{20-3x}{2}$ cm.

Είναι $ΑΔ > 0 \Leftrightarrow 20 - 3x > 0 \Rightarrow 0 < x < \frac{20}{3}$.

(Είναι $x > 0$ και $y > 0$ γιατί εκφράζουν διαστάσεις τραπεζίου).

$$ΒΓ = ΒΚ + ΚΛ + ΛΓ = \frac{x}{2} + ΑΔ + \frac{x}{2} = x + \frac{20-3x}{2} = \frac{2x+20-3x}{2} = \frac{20-x}{2}$$

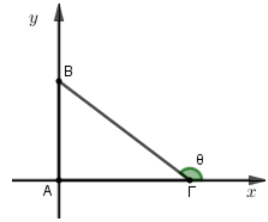
Είναι ομοίως $x < 20$ άρα τελικά πρέπει $0 < x < \frac{20}{3}$.

β) Είναι $ημ60° = \frac{AK}{x} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AK}{x} \Leftrightarrow AK = \frac{\sqrt{3}}{2}x$ cm. Το εμβαδόν του τραπεζίου είναι: $E(x) = \frac{(ΒΓ + ΑΔ)ΑΚ}{2} = \frac{\left(\frac{20-x}{2} + \frac{20-3x}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}x}{2} \Leftrightarrow$

$$E(x) = \frac{\frac{20-x+20-3x}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x}{2} \Leftrightarrow$$

$$E(x) = \frac{\frac{40-4x}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x}{2} = \frac{\cancel{4}(10-x)\sqrt{3}x}{\cancel{8}^{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(10x - x^2\right), 0 < x < \frac{20}{3}$$

51.α) t sec μετά την έναρξη της κίνησης το σημείο Γ έχει διανύσει απόσταση 2t cm, οπότε $ΑΓ = (4 + 2t)$ cm. Από το πυθαγόρειο θεώρημα



είναι $ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = 9 + (4+2t)^2 \Leftrightarrow$

$ΒΓ^2 = 9 + 16 + 16t + t^2 = t^2 + 16t + 25 \Leftrightarrow$

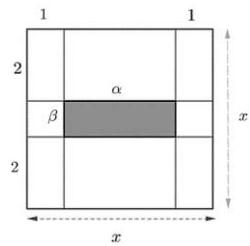
$ΒΓ = \sqrt{t^2 + 16t + 25}$ cm, $t \geq 0$.

β) Έστω $\widehat{ΒΓx} = θ$, η κλίση της ευθείας ΒΓ είναι η εφθ.

Είναι $\varepsilon\varphi\Gamma = \dfrac{AB}{A\Gamma} = \dfrac{3}{4+2t}$ άρα $\varepsilon\varphi\theta = \varepsilon\varphi\left(180^\circ - \Gamma\right) = -\varepsilon\varphi\Gamma = -\dfrac{3}{4+2t}$.

γ) $\left(AB\Gamma\right) = \dfrac{1}{2}AB\cdot A\Gamma = \dfrac{3}{2}\left(4+2t\right)$.

52.α) Έστω α, β οι διαστάσεις της κάρτας.
Τότε $\alpha = x-1-1 = x-2$ και $\beta = x-2-2 = x-4$.



Επειδή το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E = \alpha\cdot\beta$, το εμβαδόν Ε της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση:
$E(x) = (x-2)(x-4)$.

β) $E(x) = (x-2)(x-4) \Leftrightarrow 35 = (x-2)(x-4) \Leftrightarrow$
$x^2 - 2x - 4x + 8 = 35 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 27 = 0 \Leftrightarrow$
$x = 9cm$ ή $x = -3 < 0$ απορρίπτεται.

γ) $E(x) \geq 24 \Leftrightarrow (x-2)(x-4) \geq 24 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 4x + 8 \geq 24 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 16 \geq 0$,

$\Delta = (-6)^2 - 4\cdot1\cdot(-16) = 36 + 64 = 100 = 10^2$, $x_1 = \dfrac{6+10}{2} = \dfrac{16}{2} = 8$ και

$x_2 = \dfrac{6-10}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2$.

Άρα: $x^2 - 6x - 16 \geq 0 \Leftrightarrow (x-8)(x+2) \geq 0 \overset{x+2>0}{\Leftrightarrow} x - 8 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 8$.

53.α) $H\Gamma = \Delta\Gamma - \Delta H = 3 - x$.
$E = \left(HMZ\Gamma\right) + \left(AKM\Theta\right) = x^2 + (3-x)^2 = x^2 + 9 - 6x + x^2 = 2x^2 - 6x + 9$,
$x \in (0,3)$.

β) $E(x) \geq \dfrac{9}{2} \Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 9 \geq 0 \Leftrightarrow (2x-3)^2 \geq 0$ ισχύει.

γ) $E = \dfrac{9}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 9 = \dfrac{9}{2} \overset{(\cdot2)}{\Leftrightarrow} 4x^2 - 12x + 18 = 9 \Leftrightarrow$

$4x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow (2x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$.

Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΘΜ: $AM^2 = A\Theta^2 + M\Theta^2 \overset{x=\frac{3}{2}}{\Leftrightarrow}$

$AM^2 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow AM^2 = \dfrac{9}{4} + \dfrac{9}{4} \Leftrightarrow AM^2 = \dfrac{18}{4} \Leftrightarrow AM^2 = \dfrac{9}{2} \Leftrightarrow$

$AM = \sqrt{\dfrac{9}{2}} \Leftrightarrow AM = \dfrac{3}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow AM = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

54.α) Αν $E_A(d)$ το εμβαδόν που καλύπτει κάθε πλακάκι τύπου Α, τότε: $E_A(d) = d^2$. Αν $E_B(d)$ το εμβαδόν που καλύπτει κάθε πλακάκι τύπου Β, τότε: $E_B(d) = (d+1)^2$.

β) i) Αν Ε η επιφάνεια του τοίχου τότε $E = 200 \cdot E_A(d) = 128 \cdot E_B(d)$ cm^2.

$$200 \cdot E_A(d) = 128 \cdot E_B(d) \Leftrightarrow 200d^2 = 128(d+1)^2 \overset{(:8)}{\Leftrightarrow}$$

$$25d^2 = 16(d+1)^2 \Leftrightarrow 25d^2 = 16d^2 + 32d + 16 \Leftrightarrow 9d^2 - 32d - 16 = 0.$$

$$\Delta = (-32)^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-16) = 1024 + 576 = 1600 = 40^2$$

$$d = \frac{32+40}{2 \cdot 9} = \frac{72}{18} = 4cm \text{ ή } d = \frac{32-40}{2 \cdot 9} = \frac{-8}{18} < 0 \text{ Απορρίπτεται .}$$

Άρα το πλακάκι τύπου Α θα έχει πλευρά 4 cm και το πλακάκι τύπου Β πλευρά (4+1)=5 cm.

ii) $E = 200 \cdot E_A(d) = 200 \cdot 4^2 = 200 \cdot 16 = 3200cm^2$.

55.α) Αν το πλήθος των σωστών απαντήσεων είναι x, τότε το πλήθος των λανθασμένων απαντήσεων είναι 100 – x. Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, ο φοιτητής θα πάρει x βαθμούς για τις σωστές απαντήσεις και θα του αφαιρεθούν (αρνητική βαθμολογία) $\frac{1}{3}(100-x)$ βαθμοί για τις λανθασμένες απαντήσεις. Έτσι, η τελική βαθμολογία του θα είναι

$$E(x) = x - \frac{1}{3}(100-x) = \frac{3x-100+x}{3} = \frac{4x-100}{3} = \frac{4}{3}(x-25)$$ όπου x είναι το πλήθος των σωστών απαντήσεων.

β) $E(x) = 88 \Leftrightarrow \frac{4}{3}(x-25) = 88 \Leftrightarrow 4x - 100 = 264 \Leftrightarrow 4x = 364 \Leftrightarrow x = 91$.

Άρα ο φοιτητής που βαθμολογήθηκε με 88, απάντησε σωστά σε 91 ερωτήσεις και λανθασμένα σε 9 ερωτήσεις.

γ) Έστω ότι η βαθμολογία ενός φοιτητή που απάντησε σωστά σε x ερωτήσεις είναι ίση με 50. Τότε έχουμε: $E(x) = 50 \Leftrightarrow \frac{4}{3}(x-25) = 50 \Leftrightarrow$

$$4x - 100 = 150 \Leftrightarrow 4x = 250 \Leftrightarrow x = \frac{125}{2} = 62,5$$ που είναι άτοπο, αφού ο αριθμός x που παριστάνει το πλήθος των σωστών απαντήσεων, είναι ακέραιος. Επομένως η βαθμολογία ενός φοιτητή δεν μπορεί να είναι ίση με 50. Ένας φοιτητής θα πάρει βαθμολογία μεγαλύτερη από τη βάση, μόνο όταν

$$E(x) > 50 \Leftrightarrow \frac{4}{3}(x-25) > 50 \Leftrightarrow 4x - 100 > 150 \Leftrightarrow$$

$$4x > 250 \Leftrightarrow x > \frac{125}{2} = 62,5.$$

Επομένως η βαθμολογία ενός φοιτητή είναι μεγαλύτερη του 50 μόνο όταν απαντήσει σωστά σε 63 τουλάχιστον ερωτήσεις.

δ) Έστω ότι το πλήθος των σωστών απαντήσεων των φοιτητών είναι x_1, x_2 αντίστοιχα. Τότε έχουμε:

$$E(x_1)+E(x_2)=140 \Leftrightarrow \frac{4}{3}(x_1-25)+\frac{4}{3}(x_2-25)=140 \Leftrightarrow$$

$$4x_1-100+4x_2-100=420 \Leftrightarrow 4(x_1+x_2)=620 \Leftrightarrow x_1+x_2=155$$

Επομένως οι δυο φοιτητές απάντησαν σωστά σε 155 από τις 200 ερωτήσεις τους και λανθασμένα στις υπόλοιπες 200 - 155 = 45 ερωτήσεις

Ερωτήσεις «Σωστό ή Λάθος»

1. Λ	**2.** Λ	**3.** Λ	**4.** Λ	**5.** Λ	**6.** Σ	**7.** Λ	**8.** Σ	**9.** Σ	**10.** Σ
11. Λ	**12.** Σ	**13.** Λ	**14.** Σ	**15.** Σ	**16.** Λ				

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Η f ορίζεται όταν:

- $x^3-7x+6\ge 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+3)(x-2)\ge 0 \Leftrightarrow -3\le x\le 1$ ή $x\ge 2$ (1)
- $|2x+5|-|x-1|\ne 0 \Leftrightarrow |2x+5|\ne|x-1| \Leftrightarrow x\ne -6$ ή $x\ne -\frac{4}{3}$ (2)
- $5x-x^2>0 \Leftrightarrow x(5-x)>0 \Leftrightarrow 0<x<5$ (3)
- $\ln(5x-x^2)\ge 0 \Leftrightarrow 5x-x^2\ge 1 \Leftrightarrow x^2-5x+1\le 0 \Leftrightarrow \frac{5-\sqrt{21}}{2}\le x\le \frac{5+\sqrt{21}}{2}$ (4)
- $|x|-2\ge 0 \Leftrightarrow |x|\ge 2 \Leftrightarrow x\le -2$ ή $x\ge 2$ (5)
- $|x|+5\ne 0 \Leftrightarrow |x|\ne -5 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$ (6)

Από συναλήθευση των (1),(2),(3),(4),(5) και (6) προκύπτει ότι $x\in\left[2,\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right]$.

Σωστή απάντηση το Δ.

2. Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ όταν $x^2-2\lambda x+4\ne 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα $\Delta<0 \Leftrightarrow 4\lambda^2-16<0 \Leftrightarrow \lambda^2<4 \Leftrightarrow |\lambda|<2 \Leftrightarrow -2<\lambda<2$ και αφού $\lambda\in\mathbb{Z}$ τότε η μόνη τιμή από αυτές που δίνονται είναι $\lambda=-1$.

Σωστή απάντηση το Γ.

3. Η σχέση (1) αληθεύει όταν $x^2-6x+\kappa\ne 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, δηλαδή $\Delta<0 \Leftrightarrow 36-4\kappa<0 \Leftrightarrow 4\kappa>36 \Leftrightarrow \kappa>9$. Επειδή $\kappa\in\mathbb{Z}$ τότε $\kappa_{min}=10$

Σωστή απάντηση το Γ.

4. Αν $x \in [0,2]$ το τρίγωνο ΑΝΖ είναι όμοιο με το ΑΒΕ οπότε

$$\frac{NZ}{BE} = \frac{AZ}{AB} \Leftrightarrow \frac{NZ}{4} = \frac{x}{2} \Leftrightarrow NZ = 2x \text{ και } (ANZ) = \frac{1}{2}(AZ)(NZ) = \frac{1}{2}x \cdot 2x = x^2 .$$

Αν $x \in (2,6]$ σχηματίζεται το τραπέζιο ΑΖΝΕ το οποίο έχει μεγάλη βάση ΑΖ=x, μικρή βάση ΝΕ=x-2 και ύψος ΒΕ=4. Άρα το εμβαδόν του είναι

$$(AZNE) = \frac{(AZ + NE)BE}{2} = \frac{(x + x - 2)4}{2} = 4x - 4 .$$

Σωστή απάντηση το Δ.

5. Το τρίγωνο ΑΕΖ είναι όμοιο με το ΑΒΓ και ο λόγος των υψών θα ισούται με το λόγο των βάσεων δηλαδή $\frac{EZ}{B\Gamma} = \frac{4-x}{4} \Leftrightarrow \frac{EZ}{8} = \frac{4-x}{4} \Leftrightarrow EZ = 8 - 2x$.

Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΚΕΖΗ θα είναι

$(KEZH) = (EZ)(EK) = (8-2x)x = 8x - 2x^2$.

Σωστή απάντηση το Α.

6. Είναι $\text{συνx} \neq \frac{4}{3}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε το πεδίο ορισμού είναι $D_f = \mathbb{R}$.

Έστω $y = \frac{\text{συνx} + 2}{3\text{συνx} - 4} \Leftrightarrow \text{συνx} = \frac{4y+2}{3y-1}, y \neq \frac{1}{3}$. Όμως $-1 \leq \text{συνx} \leq 1 \Leftrightarrow$

$$-1 \leq \frac{4y+2}{3y-1} \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4y+2}{3y-1} \geq -1 \Leftrightarrow \frac{7y+1}{3y-1} \geq 0 \Leftrightarrow y \in \left(-\infty, -\frac{1}{7}\right] \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right) \\ \frac{4y+2}{3y-1} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{y+3}{3y-1} \leq 0 \Leftrightarrow y \in \left[-3, \frac{1}{3}\right) \end{cases}.$$

Τελικά από συναλήθευση είναι $y \in \left[-3, -\frac{1}{7}\right]$.

Σωστή απάντηση η Β.

2 Γραφική παράσταση συνάρτησης

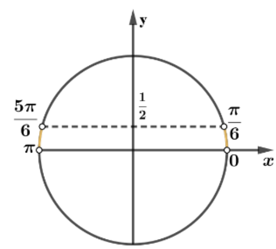
Σημεία τομής με τους άξονες
Σχετικές θέσεις γραφικών παραστάσεων

12.α) Το πεδίο ορισμού της f είναι: $A = \mathbb{R}$.
$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$.
Σημείο τομής με τον $x'x$ το $(2,0)$. Για $x = 0$ είναι: $f(0) = 2 \cdot 0 - 4 = -4$.
Σημείο τομής με τον $y'y$ το $(0,-4)$.

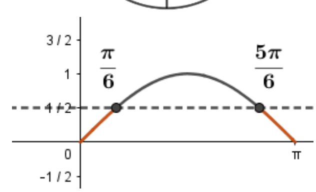
β) Το πεδίο ορισμού της f είναι: $A = \mathbb{R}$.
$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.
Τα σημεία τομής με τον $x'x$ είναι: $(2,0)$ και $(-1,0)$. Για $x = 0$ είναι:
$f(0) = (0-2)(0+1) = -2$. Σημείο τομής με τον $y'y$ το $(0,-2)$.

γ) Για να ορίζεται η f πρέπει: $x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$. Άρα $A = [-1, +\infty)$.
$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Σημείο τομής με τον $x'x$ το $(-1,0)$. Για $x = 0$ είναι: $f(0) = \sqrt{0+1} = 1$.
Σημείο τομής με τον $y'y$ το $(0,1)$.

13.α) Πρέπει: $f(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - 2\eta\mu x > 0 \Leftrightarrow$
$\eta\mu x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x < \eta\mu \frac{\pi}{6}$



Στο διάστημα $(0,\pi)$ οι λύσεις είναι η ένωση των διαστημάτων $\left(0, \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}, \pi\right)$.
Άρα η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}, \pi\right)$.



β) $D_f = \mathbb{R} - \{2,3\}$, $f(x) > 0 \Leftrightarrow$
$(x+2)(x-3)(x-2) > 0 \Leftrightarrow$
$x \in (-2,2) \cup (3,+\infty)$

x	$-\infty$ -2	2	3	$+\infty$
$x+2$	−	+	+	+
$x-3$	−	−	−	+
$x-2$	−	−	+	+
Γινόμενο	−	+	−	+

γ) $D_f = (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$,
$f(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(|x| - 1) > 0 \Leftrightarrow$
$|x| - 1 > 1 \Leftrightarrow |x| > 2 \Leftrightarrow (x < -2)$ ή $(x > 2)$
δεκτές, αφού ανήκουν στο πεδίο ορισμού.

14. $D_f=\mathbb{R}$, $D_g=\mathbb{R}$. Για να βρίσκεται η C_f κάτω από τον άξονα $x'x$, πρέπει:

$f(x)<0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-6x+5}{x^2-3x-10}<0 \Leftrightarrow$

$(x^2-6x+5)(x^2-3x-10)<0 \Leftrightarrow$

x	$-\infty$ -2	1	5	$+\infty$
$x-1$	$-$	$-$ 0	$+$	$+$
$(x-5)^2$	$+$	$+$	$+$ 0	$+$
$x+2$	$-$ 0	$+$	$+$	$+$
Γινόμενο	$+$	$-$	$+$	$+$

$(x-1)(x-5)(x+2)(x-5)<0 \Leftrightarrow (x-1)(x-5)^2(x+2)<0$. Άρα $x\in(-2,1)$.

15.α) $D_f=\mathbb{R}$, $D_g=\mathbb{R}$. Για να βρίσκεται η C_f πάνω από την C_g πρέπει: $f(x)>g(x)\Leftrightarrow$

$x^3-x^2-5x+2>-x^2+2x-4\Leftrightarrow$

$x^3-7x+6>0$ άρα

x	$-\infty$ -3	1	2	$+\infty$
$x+3$	$-$ 0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$ 0	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$ 0	$+$
Γινόμενο	$-$	$+$	$-$	$+$

$(x-1)(x^2+x-6)>0\Leftrightarrow(x-1)(x+3)(x-2)>0$.

Άρα η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g για $x\in(-3,1)\cup(2,+\infty)$.

β) $D_f=\mathbb{R}$, $D_g=\mathbb{R}-\{2\}$ άρα για $x\neq2$ είναι: $f(x)>g(x)\Leftrightarrow$

$$x^2+3x+2>\frac{x^2+4x+3}{x-2}\Leftrightarrow (x+1)(x+2)-\frac{(x+1)(x+3)}{x-2}>0$$

$$\frac{(x+1)(x+2)(x-2)-(x+1)(x+3)}{x-2}>0\Leftrightarrow\frac{(x+1)\left[x^2-4-(x+3)\right]}{x-2}>0$$

$$\Leftrightarrow\frac{(x+1)(x^2-x-7)}{x-2}>0\Leftrightarrow(x+1)(x-2)(x^2-x-7)>0\Leftrightarrow$$

$$x\in\left(-\infty,\frac{1-\sqrt{29}}{2}\right)\cup(-1,2)\cup\left(\frac{1+\sqrt{29}}{2}+\infty\right).$$

16.α) Είναι $A_f=A_g=\mathbb{R}$.

$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2+3x-2=3x+2\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x=\pm2$. Είναι $g(2)=8$ και $g(-2)=3(-2)+2=-4$. Σημεία τομής τα $(2,8)$ και $(-2,-4)$.

β) Για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει: $x+1\neq0\Leftrightarrow x\neq-1$.
Είναι $A_f=\mathbb{R}-\{1\}$ και $A_g=\mathbb{R}$.

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow\frac{6x+12}{x+1}=x+2\Leftrightarrow 6x+12=(x+1)(x+2)\Leftrightarrow$$

$6x+12=x^2+2x+x+2\Leftrightarrow x^2+3x+2-6x-12=0\Leftrightarrow$

$x^2-3x-10=0\Leftrightarrow x=5$ ή $x=-2$.

Είναι $g(5)=5+2=7$ και $g(-2)=-2+2=0$.

Σημεία τομής τα $(5,7)$ και $(-2,0)$.

17.α) $\ln\left(e^{f(x)}+e\right)=f(x)+x \Leftrightarrow e^{f(x)}+e=e^{f(x)+x} \Leftrightarrow e^{f(x)}+e=e^{f(x)}e^{x} \Leftrightarrow$

$e=e^{f(x)}e^{x}-e^{f(x)} \Leftrightarrow e^{f(x)}\left(e^{x}-1\right)=e \quad (1)$

Για κάθε $x>0$ είναι $e^{x}>e^{0}=1 \Leftrightarrow e^{x}-1>0$, οπότε η (1) γίνεται:

$$e^{f(x)}=\frac{e}{e^{x}-1} \Leftrightarrow f(x)=\ln\frac{e}{e^{x}-1}=\ln e-\ln\left(e^{x}-1\right)=1-\ln\left(e^{x}-1\right)$$

β) $f(x)<0 \Leftrightarrow 1-\ln\left(e^{x}-1\right)<0 \Leftrightarrow 1<\ln\left(e^{x}-1\right) \Leftrightarrow e^{x}-1>e \Leftrightarrow$

$e^{x}>e+1 \Leftrightarrow x>\ln(e+1)>\ln 1=0$ δεκτές αφού ανήκουν στο πεδίο ορισμού.

18. Είναι $g(0)=f^{2}(0)-2f(0)+5>0$ αφού το τριώνυμο $f^{2}(0)-2f(0)+5$ έχει $\Delta<0$. Άρα τέμνει τον ημιάξονα Oy.

19. Για να διέρχεται η C_f από τα σημεία $A(-1,5)$ και $B(3,7)$ πρέπει:

$$\begin{cases} f(-1)=5 \\ f(3)=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-1)^2-\alpha(-1)+\beta=5 \\ 2\cdot 3+\alpha=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=4 \\ \alpha=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=3 \\ \alpha=1 \end{cases}$$

20.α) Επειδή η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία Α και Β, ισχύει:

$$\begin{cases} f(1)=1 \\ f(-1)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\alpha\cdot 1+2}{1^2+\beta}=1 \\ \dfrac{\alpha\cdot(-1)+2}{(-1)^2+\beta}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+2=1+\beta \\ -\alpha+2=2+2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\beta+1-2 \\ -\alpha-2\beta=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha=\beta-1 \\ -(\beta-1)-2\beta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\beta-1 \\ -\beta+1-2\beta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\beta-1 \\ -3\beta=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\dfrac{1}{3}-1=-\dfrac{2}{3} \\ \beta=\dfrac{-1}{-3}=\dfrac{1}{3} \end{cases}.$$

β) Για $\alpha=-\dfrac{2}{3}$ και $\beta=\dfrac{1}{3}$ είναι: $f(x)=\dfrac{-\frac{2}{3}x+2}{x^2+\frac{1}{3}}=\dfrac{\frac{-2x+6}{\cancel{3}}}{\frac{3x^2+1}{\cancel{3}}}=\dfrac{-2x+6}{3x^2+1}$.

Πρέπει $3x^2+1\neq 0 \Leftrightarrow 3x^2\neq -1$ που ισχύει, άρα $A=\mathbb{R}$.

$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{-2x+6}{3x^2+1}=0 \Leftrightarrow -2x+6=0 \Leftrightarrow 2x=6 \Leftrightarrow x=\frac{6}{2}=3$.

Σημείο τομής με τον $x'x$, το $(3,0)$.

γ) Η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον $x'x$, όταν: $f(x)>0 \Leftrightarrow$

$\frac{-2x+6}{3x^2+1}>0$, όμως $3x^2+1>0$, οπότε $-2x+6>0 \Leftrightarrow -2x>-6 \Leftrightarrow x<\frac{-6}{-2}=3$.

δ) Οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y=1$, είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=1$. Είναι:

$f(x)=1 \Leftrightarrow \frac{-2x+6}{3x^2+1}=1 \Leftrightarrow -2x+6=3x^2+1 \Leftrightarrow 3x^2+2x-5=0 \Leftrightarrow x=1$ ή

$x=-\frac{5}{3}$. Σημεία τομής τα $(1,1)$ και $\left(-\frac{5}{3},1\right)$.

21.α) Επειδή οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,g τέμνονται επί των ευθειών $x=-1$ και $x=2$, ισχύει:

$$\begin{cases} f(-1)=g(-1) \\ f(2)=g(2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+4=2+\beta+1 \\ 4\alpha+4=-4+\beta+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=-2 \\ \beta=-1 \end{cases}$$

β) Για $\alpha=-2$ και $\beta=-1$ είναι: $f(x)=-2x^2+4$ και $g(x)=-2x$.

$f(x)>g(x) \Leftrightarrow -2x^2+4>-2x \Leftrightarrow -2x^2+2x+4>0 \Leftrightarrow x^2-x-2<0$

$\Leftrightarrow x\in(-1,2)$. Όταν $x\in(-1,2)$ η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της g.

γ) $|g(x)|=4 \Leftrightarrow |-2x|=4 \Leftrightarrow 2|x|=4 \Leftrightarrow |x|=2 \Leftrightarrow x=\pm 2$.

δ) $f(x)=0 \Leftrightarrow -2x^2+4=0 \Leftrightarrow 2x^2=4 \Leftrightarrow x^2=2 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$ και

$g(x)=0 \Leftrightarrow -2x=0 \Leftrightarrow x=0$.

Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $x'x$ στα σημεία $\left(-\sqrt{2},0\right)$ και $\left(\sqrt{2},0\right)$, ενώ η γραφική παράσταση της g τέμνει τους άξονες στο $(0,0)$.

Για $x=0$ είναι $f(0)=4$, άρα η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0,4)$.

22. $f(x)-g(x)=2^x-1$.

Αν $x>0$, τότε $f(x)-g(x)=2^x-1>0$ και η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g.

Αν $x<0$, τότε $f(x)-g(x)=2^x-1<0$ και η C_f βρίσκεται κάτω από τη C_g.

Αν $x=0$ τέμνονται.

23. $f(x)-g(x)=8-x^3$. Αν $x<2$, τότε $f(x)-g(x)=8-x^3>0$ και η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g. Αν $x>2$, τότε $f(x)-g(x)=8-x^3<0$ και η C_f βρίσκεται κάτω από τη C_g. Αν $x=2$ τέμνονται.

24. $f(x)\left[f^2(x)-3f(x)+7\right]=-\left(x^4+x^2+1\right)$. Επειδή $-\left(x^4+x^2+1\right)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f^2(x)-3f(x)+7>0$ $(\Delta<0)$, είναι και $f(x)<0$.

Αυξημένης δυσκολίας

25. Για $x=0$ είναι $f(0)+f(0)=0\Leftrightarrow 2f(0)=0\Leftrightarrow f(0)=0$, για $x=-1$ είναι $f(-1)+f(-1)=0\Leftrightarrow 2f(-1)=0\Leftrightarrow f(-1)=0$ και για $x=1$ είναι $f(1)+f(1)=0\Leftrightarrow 2f(1)=0\Leftrightarrow f(1)=0$.
Άρα η C_f τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία (-1,0),(1,0),(3,0) , οπότε τον τέμνει σε τουλάχιστον τρία σημεία.

26.α) $y=\lambda x+3-\lambda\Leftrightarrow \lambda(x-1)+3-y=0$ Για να αληθεύει για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ πρέπει $x=1$ και $y=3$, άρα διέρχεται από το σταθερό σημείο $(1,3)$.

β) $f(x)=g(x)\Leftrightarrow \dfrac{3}{x}=\lambda x+3-\lambda\Leftrightarrow \lambda x^2+(3-\lambda)x-3=0$.
Αν $\lambda=0$, τότε έχουμε την εξίσωση $3x-3=0\Leftrightarrow 3x=3\Leftrightarrow x=1$ οπότε τέμνονται στο σημείο (1,3).
Αν $\lambda\neq 0$ τότε έχουμε την δευτεροβάθμια εξίσωση (1) για την οποία ισχύει:
$\Delta=(3-\lambda)^2+12\lambda=9-6\lambda+\lambda^2+12\lambda=(\lambda+3)^2\geq 0$, οπότε η εξίσωση έχει λύση για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.
γ) Αν $\lambda\neq -3$, τότε τέμνονται.
Αν $\lambda=-3$, τότε $g(x)=3x+6$ και η εξίσωση (1) έχει μοναδική λύση οπότε εφάπτονται.

27. $y=\dfrac{\lambda x+12}{3x+\lambda}\Leftrightarrow 3xy+\lambda y=\lambda x+12\Leftrightarrow \lambda(y-x)+3xy-12=0$. Για να αληθεύει για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ πρέπει $\begin{cases} y-x=0\\ 3xy-12=0\end{cases}\Leftrightarrow x=2$ και $y=2$ ή $x=-2$ και $y=-2$.
Άρα διέρχεται από τα σημεία $(2,2)$, $(-2,-2)$.

28.α) Για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει $x^3-\alpha x^2+\beta x+2\neq 0$. Επειδή η γραφική παράσταση της f δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα x΄x , η εξίσωση $f(x)=0$ είναι αδύνατη.

Είναι $f(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-(\alpha-1)x-\alpha}{x^3-\alpha x^2+\beta x+2}=0 \Leftrightarrow x^2-(\alpha-1)x-\alpha=0$.

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta=(\alpha-1)^2+4\alpha=\alpha^2-2\alpha+1+4\alpha=$

$=\alpha^2+2\alpha+1=(\alpha+1)^2>0$ αφού $\alpha\neq-1$.

Άρα $x^2-(\alpha-1)x-\alpha=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\dfrac{\alpha-1\pm(\alpha+1)}{2} \Leftrightarrow x=\alpha$ ή $x=-1$.

Επομένως για να είναι αδύνατη η εξίσωση $f(x)=0$ πρέπει οι ρίζες του αριθμητή να είναι ρίζες του παρονομαστή για να απορριφθούν από το πεδίο ορισμού της.

Άρα έχουμε: $\begin{cases}\alpha^3-\alpha^3+\alpha\beta+2=0\\-1-\alpha-\beta+2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha\beta+2=0\\\alpha=1-\beta\end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases}\beta^2-\beta-2=0\\\alpha=1-\beta\end{cases} \overset{\beta\neq2}{\Leftrightarrow} \begin{cases}\beta=-1\\\alpha=2\end{cases}$.

β) Επομένως για το πεδίο ορισμού της f πρέπει:

$x^3-2x^2-x+2\neq0 \overset{\substack{\text{Σχήμα Horner}\\ \text{με } \rho=-1}}{\Leftrightarrow} (x+1)(x^2-3x+2)\neq0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-1)(x-2)\neq0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}-\{-1,1,2\}$.

Άρα $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x^3-2x^2-x+2}$, $x\in\mathbb{R}-\{-1,1,2\}$. Άρα $A_f=\mathbb{R}-\{-1,1,2\}$.

Προσδιορισμός στοιχείων από τη γραφική παράσταση

29.α) $D_f=[-6,5]$, $f(A)=[-2,3]$ **β)** $f(0)=-2$

γ) $f(x)>0 \Leftrightarrow -6\leq x<-3$ ή $3<x\leq5$ **δ)** $f(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm3$

30. α. $f(x)>2 \Leftrightarrow -5\leq x<-4$ ή $4<x<6$

β. $-2<f(x)\leq2 \Leftrightarrow -4\leq x<-2$ ή $2<x\leq4$ ή $x=6$

31.α) $f(x)=g(x) \Leftrightarrow x=-2$. **β)** $f(x)>g(x) \Leftrightarrow x>-2$.

32. Το α είναι η τετμημένη του σημείου τομής της C_f με τον θετικό ημιάξονα Οx. Είναι: $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-4x=0 \Leftrightarrow x(x-4)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=4$.

Άρα $\alpha=4$. Το β είναι η τεταγμένη του σημείου της C_f, με $x=2$.

Δηλαδή $f(2)=\beta \Leftrightarrow 2^2-4\cdot2=\beta \Leftrightarrow \beta=-4$.

Όμοια: $f(-2)=\gamma \Leftrightarrow (-2)^2-4\cdot(-2)=\gamma \Leftrightarrow \gamma=12$.

33. $f(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=4 \Leftrightarrow x=0$.

34. Αν $\alpha=-2$ τότε η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει μοναδική λύση την $x=4$.
Αν $-2<\alpha<3$ τότε η $y=\alpha$ τέμνει τη C_f σε δύο σημεία, άρα η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει δύο λύσεις.
Αν $\alpha=3$ τότε η $y=\alpha$ τέμνει τη C_f σε τρία σημεία, άρα η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει τρείς λύσεις.
Αν $3<\alpha\le 5$ τότε η $y=\alpha$ τέμνει τη C_f σε 4 σημεία, άρα η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει 4 λύσεις.
Αν $5<\alpha\le 7$ τότε η $y=\alpha$ τέμνει τη C_f σε τρία σημεία, άρα η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει τρείς λύσεις.
Αν $7<\alpha<12$ τότε η $y=\alpha$ τέμνει τη C_f σε δύο σημεία, άρα η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει δύο λύσεις. Αν $\alpha=12$ τότε η $f(x)=\alpha$ έχει μοναδική λύση.
Τέλος αν $\alpha<-2$ ή $\alpha>12$ η εξίσωση $f(x)=\alpha$ είναι αδύνατη.

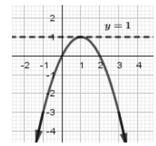
35.α) $D_f=[-1,3]$ και $f(D_f)=[0,2]$.
β) i) $f(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$ ή $x=3$ (κοινά σημεία C_f με $x'x$).
ii) $f(x)=\sqrt{3} \Leftrightarrow x=0$ ή $x=2$ (κοινά σημεία C_f με $y=\sqrt{3}$).
iii) $f(x)=\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}$, έχει λύσεις τα κοινά σημεία C_f με $y=\lambda$.

- Αν $\lambda\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ η εξίσωση είναι αδύνατη.
- Αν $\lambda\in[0,2)$ η εξίσωση έχει ακριβώς 2 λύσεις.
- Αν $\lambda=2$ η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x=1$.

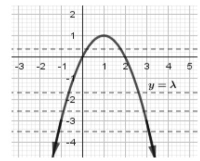
γ) i) $f(x)>0 \Leftrightarrow x\in(-1,3)$ (διαστήματα στα οποία η C_f είναι πάνω από τον $x'x$ άξονα).
ii) $f(x)<\sqrt{3} \Leftrightarrow x\in[-1,0)\cup(2,3]$ (διαστήματα στα οποία η C_f είναι κάτω από την $y=\sqrt{3}$).
δ) Αφού είναι ημικύκλιο η C_f, παρατηρούμε ότι έχει διάμετρο ίση με 4 άρα έχει ακτίνα ίση με 2 και κέντρο το Κ(1,0). Άρα για κάθε $x\in[-1,3]$ είναι

$$(x-1)^2+f^2(x)=4 \Leftrightarrow f^2(x)=4-(x-1)^2 \overset{f(x)\ge 0}{\Leftrightarrow} f(x)=\sqrt{4-(x-1)^2}.$$

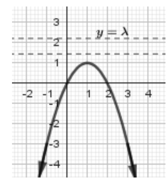
36.α) Οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=\lambda$ γραφικά αντιπροσωπεύουν το πλήθος των κοινών σημείων της C_f με την ευθεία $y=\lambda$.



- Αν $\lambda<1$ παρατηρούμε ότι η ευθεία $y=\lambda$ έχει δύο κοινά σημεία με τη C_f, οπότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει δύο λύσεις στη περίπτωση αυτή.



- Αν $\lambda=1$ τότε βλέπουμε ότι η ευθεία $y = 1$ έχει ένα μόνο κοινό σημείο με τη C_f, οπότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει μοναδική λύση στη περίπτωση αυτή.



- Αν $\lambda>1$ παρατηρούμε ότι η ευθεία $y=\lambda$ δεν έχει κανένα κοινό σημείο με τη C_f, οπότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ είναι αδύνατη στη περίπτωση αυτή.

β) $f(x)=\lambda \Leftrightarrow 2x-x^2=\lambda \Leftrightarrow x^2-2x+\lambda=0$ (1)

Η (1) είναι εξίσωση 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta=4-4\lambda=4(1-\lambda)$.

- Αν $\Delta>0 \Leftrightarrow 4(1-\lambda)>0 \Leftrightarrow 1-\lambda>0 \Leftrightarrow \lambda<1$ τότε η (1) έχει 2 ρίζες, οπότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει δύο λύσεις στην περίπτωση αυτή.
- Αν $\Delta=0 \Leftrightarrow \lambda=1$ τότε η (1) έχει μία διπλή ρίζα, οπότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει μοναδική λύση στη περίπτωση αυτή.
- Τέλος αν $\Delta<0 \Leftrightarrow \lambda>1$ η (1) είναι αδύνατη, οπότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ είναι αδύνατη στην περίπτωση αυτή.

37. $f(x)=\begin{cases} 3x, x\le 1 \\ -x+4, 1<x<3 \\ 1, x\ge 3 \end{cases}$, $x_1=2$.

38.α) $D_f=(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$ και $f(D_f)=\mathbb{R}$.

β) i. Για να ορίζεται η $g(x)=\sqrt{f(x)}$ πρέπει: $\begin{cases} x\in D_f \\ f(x)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x\ne 3 \\ x\in[0,3)\cup[5,+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x\in[0,3)\cup[5,+\infty)$. Άρα $D_g=[0,3)\cup[5,+\infty)$.

ii. Για να ορίζεται η $h(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ πρέπει:

$\begin{cases} x\in D_f \\ f(x)\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ne 3 \\ x\ne 0 \text{ και } x\ne 5 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}-\{0,3,5\}$. Άρα $D_h=\mathbb{R}-\{0,3,5\}$.

iii. Για να ορίζεται η $\varphi(x)=\ln(3-f(x))+\sqrt{3-x}$ πρέπει:

$\begin{cases} 3-f(x)>0 \\ 3-x\geq 0 \\ x\neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)<3 \\ x<3 \end{cases}$ και από το σχήμα βλέπουμε ότι για $x<3$ είναι

$f(x)<3 \Leftrightarrow x\in(-\infty,1)\cup(1,3)$. Άρα $D_\varphi=(-\infty,1)\cup(1,3)$.

39.α) Πρόκειται για τις τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g. Είναι $x=-1$ ή $x=0$ ή $x=1$.

β) $f(-1)=4$, $f(0)=2$ και $f(1)=0$.

γ) $x\in(-1,0)\cup(1,+\infty)$.

δ) Πρέπει $f(x)+2x-2\geq 0 \Leftrightarrow f(x)\geq -2x+2 \Leftrightarrow x\in[-1,0]\cup[1,+\infty)$.

40.α) Το σημείο Α ανήκει στη γραφική παράσταση της g και έχει x = 0, οπότε $g(0)=3-0=3$, άρα Α(0,3). Τα σημεία Β και Γ είναι κοινά σημεία των C_f, C_g, οπότε οι τετμημένες τους είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2-x-1=3-x\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x=\pm 2$$

Για $x=2$ είναι $g(2)=3-2=1$, άρα Γ(2,1) και για x = - 2 είναι

$g(-2)=3-(-2)=5$ άρα Β(-2,5).

Το σημείο Ζ βρίσκεται στη C_f και έχει y = 0, άρα $x^2-x-1=0$.

Η τελευταία είναι 2ου βαθμού με $\Delta=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-1)=5$ και ρίζες

$x_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Επειδή $x_Z<0$, είναι $x_Z=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, οπότε $Z\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},0\right)$.

β) Οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της $y=f(x)$ που βρίσκονται πάνω από την γραφική παράσταση της $y=g(x)$ είναι οι λύσεις της ανίσωση $f(x)>g(x)\Leftrightarrow x^2-x-1>3-x\Leftrightarrow x^2>4\Leftrightarrow |x|>2\Leftrightarrow x<-2$ ή $x>2$

γ) Είναι $|f(\alpha)-(-g(\alpha))|=|f(\alpha)+g(\alpha)|=|\alpha^2-\alpha-1+3-\alpha|=$

$|\alpha^2-2\alpha+2|=|\alpha^2-2\alpha+1+1|=|(\alpha-1)^2+1|=(\alpha-1)^2+1\geq 1$ γιατί $(\alpha-1)^2\geq 0$.

41.α) i. Επειδή η C_f τέμνει τον άξονα y′y στο (0, −1), ισχύει ότι $f(0)=-1\Leftrightarrow \gamma=-1$.

ii. Για να μην είναι η γραφική παράσταση της f κάτω από την ευθεία $y=-\lambda^2-1$, πρέπει για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ να είναι $f(x)\geq -\lambda^2-1$.

Είναι $f(x) \geq -\lambda^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 + 2\lambda x - 1 \geq -\lambda^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 + 2\lambda x + \lambda^2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$(x+\lambda)^2 \geq 0$ ισχύει.

β) Οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x′x είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2\lambda x - 1 = 0$.

Η εξίσωση είναι $2^{ου}$ βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = 4\lambda^2 + 4 = 4(\lambda^2 + 1) > 0$ και ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{-2\lambda \pm \sqrt{4(\lambda^2+1)}}{2} = \frac{-2\lambda \pm 2\sqrt{\lambda^2+1}}{2} = \frac{\cancel{2}\left(-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2+1}\right)}{\cancel{2}} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2+1} \\ x_2 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2+1} \end{cases}.$$

Οπότε τα σημεία είναι τα $A\left(-\lambda - \sqrt{\lambda^2+1}, 0\right)$ και $B\left(-\lambda + \sqrt{\lambda^2+1}, 0\right)$.

γ) Επειδή τα σημεία A και B βρίσκονται στον άξονα x΄x, είναι:

$d(A,B) = (AB) = |x_2 - x_1| = \left|-\lambda + \sqrt{\lambda^2+1} + -\lambda + \sqrt{\lambda^2+1}\right| \Leftrightarrow$

$d = \left|2\sqrt{\lambda^2+1}\right| = 2\sqrt{\lambda^2+1}$ ($\sqrt{\lambda^2+1} > 0$). Πρέπει

$d(A,B) \geq 2 \Leftrightarrow 2\sqrt{\lambda^2+1} \geq 2 \Leftrightarrow \sqrt{\lambda^2+1} \geq 1 \Leftrightarrow \lambda^2 + 1 \geq 1 \Leftrightarrow \lambda^2 \geq 0$ ισχύει.

42.α) Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται στα σημεία A και B, άρα οι τετμημένες των σημείων A και B θα είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = g(x)$. Είναι $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 = x^3 \Leftrightarrow x^2 - x^3 = 0 \Leftrightarrow$

$x^2(1-x) = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0\right)$ ή $(1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1)$.

Για x = 0 είναι $f(0) = g(0) = 0$, άρα A(0,0) και για x = 1 είναι $f(1) = g(1) = 1$, άρα B(1,1).

β) Για να ισχύει $x^3 < x^2$ πρέπει η γραφική παράσταση της g να βρίσκεται κάτω από αυτή της f. Στο σχήμα βλέπουμε ότι για κάθε $x \in (0,1)$, δηλαδή μεταξύ των σημείων A και B, η C_g βρίσκεται κάτω από τη C_f, άρα για κάθε $x \in (0,1)$ ισχύει $x^3 < x^2$.

γ) Όχι δεν είναι ο κύβος οποιουδήποτε αριθμού μεγαλύτερος από το τετράγωνό του αφού στο προηγούμενο σκέλος δείξαμε ότι για τον αριθμό $x \in (0,1)$ ισχύει $x^3 < x^2$.

δ) i. Είναι $(\pi - 3) \in (0,1)$, οπότε με βάση το β σκέλος είναι $(\pi-3)^3 < (\pi-3)^2$.

ii. Είναι $(\pi-3)^3 < (\pi-3)^2 \Leftrightarrow \pi^3 - 9\pi^2 + 27\pi - 27 < \pi^2 - 6\pi + 9 \Leftrightarrow$

$\pi^3 - 10\pi^2 + 33\pi - 36 < 0$.

Αυξημένης δυσκολίας

43.α) Στο σχήμα παρατηρούμε ότι η f δεν έχει ρίζες και επειδή είναι τριώνυμο έχει $\Delta < 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 4\beta < 0 \Leftrightarrow \alpha^2 < 4\beta$ (1). Επειδή η ε εφάπτεται της C_f, η εξίσωση $f(x) = 2x - 4 \Leftrightarrow x^2 + \alpha x + \beta - 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (\alpha - 2)x + \beta + 4 = 0$ έχει μία λύση. Όμως η εξίσωση αυτή είναι 2ου βαθμού και έχει μία λύση όταν

$\Delta = 0 \Leftrightarrow (\alpha - 2)^2 - 4(\beta + 4) = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 4 - 4\beta - 16 = 0 \Leftrightarrow$

$\alpha^2 - 4\alpha - 12 = 4\beta$ (2)

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $\cancel{\alpha^2} < \cancel{\alpha^2} - 4\alpha - 12 \Leftrightarrow 4\alpha < -12 \Leftrightarrow \alpha < -3$.

β) Για $x = 3$ είναι $y = 2 \cdot 3 - 4 = 2$, οπότε το σημείο επαφής είναι το A(3, 2)

Επειδή το σημείο A ανήκει στη C_f, ισχύει ότι

$f(3) = 2 \Leftrightarrow 9 + 3\alpha + \beta = 2 \Leftrightarrow \beta = -7 - 3\alpha$ (3).

Αντικαθιστώντας την σχέση (3) στην (2), έχουμε:

$\alpha^2 - 4\alpha - 12 = 4(-7 - 3\alpha) \Leftrightarrow \alpha^2 - 4\alpha - 12 = -28 - 12\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 + 8\alpha + 16 = 0 \Leftrightarrow$

$(\alpha + 4)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha + 4 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -4$. Τότε $\beta = -7 - 3(-4) = 5$, οπότε

$f(x) = x^2 - 4x + 5$.

44.α) Επειδή η παραβολή έχει μέγιστο είναι α < 0. Επειδή οι ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης $f(x) = 0$ είναι ετερόσημες, ισχύει ότι $P = \dfrac{\gamma}{\alpha} < 0 \overset{\alpha<0}{\Leftrightarrow} \gamma > 0$.

Επειδή η f έχει 2 ρίζες είναι $\Delta > 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 4\alpha\gamma > 0 \Leftrightarrow 4\alpha\gamma < \beta^2$.

β) Επειδή η ε τέμνει τη C_f σε δύο σημεία, η εξίσωση $f(x) = -1 \Leftrightarrow$

$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = -1 \Leftrightarrow \alpha x^2 + \beta x + \gamma + 1 = 0$ (1) έχει δύο ρίζες, οπότε

$\Delta' > 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 4\alpha(\gamma + 1) > 0 \Leftrightarrow 4\alpha(\gamma + 1) < \beta^2$.

Επειδή η (2), λόγω του σχήματος έχει ρίζες τις ρ_1, ρ_2 που είναι ετερόσημοι αριθμοί, από τους τύπους Vieta είναι $P = \dfrac{\gamma + 1}{\alpha} < 0 \overset{\alpha<0}{\Leftrightarrow} \gamma + 1 > 0 \Leftrightarrow \gamma > -1$ και λόγω του α σκέλους – 1<γ<0.

γ) Είναι $x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ και $\rho_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta'}}{2\alpha}$.

$$|x_1 - x_2| < |\rho_1 - \rho_2| \Leftrightarrow \left|\frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} - \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right| < \left|\frac{-\beta + \sqrt{\Delta'}}{2\alpha} - \frac{-\beta - \sqrt{\Delta'}}{2\alpha}\right| \Leftrightarrow$$

$$\left|\frac{\cancel{2}\sqrt{\Delta}}{\cancel{2}\alpha}\right| < \left|\frac{\cancel{2}\sqrt{\Delta'}}{\cancel{2}\alpha}\right| \Leftrightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{|\alpha|} < \frac{\sqrt{\Delta'}}{|\alpha|} \Leftrightarrow \sqrt{\Delta} < \sqrt{\Delta'} \Leftrightarrow \Delta < \Delta' \Leftrightarrow$$

$$\cancel{\beta^2} - 4\alpha\gamma < \cancel{\beta^2} - 4\alpha(\gamma+1) \Leftrightarrow -4\alpha\gamma < -4\alpha(\gamma+1) \overset{-4\alpha>0}{\Leftrightarrow} \gamma < \gamma+1 \text{ ισχύει.}$$

45.α) Επειδή η παραβολή έχει ελάχιστο είναι $\alpha > 0$. Στο σχήμα βλέπουμε ότι η f τέμνει τον θετικό ημιάξονα Ox σε δύο σημεία, άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο θετικές ρίζες. Από τους τύπους Vieta είναι $S = x_1 + x_2 > 0 \Leftrightarrow -\frac{\beta}{\alpha} > 0 \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} \beta < 0$.

β) Είναι $P = x_1x_2 > 0 \Leftrightarrow \frac{\gamma}{\alpha} > 0 \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} \gamma > 0$.

Επειδή η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο ρίζες, είναι $\Delta > 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 4\alpha\gamma > 0 \Leftrightarrow$

$\beta^2 > 4\alpha\gamma \Leftrightarrow |\beta| > 2\sqrt{\alpha\gamma} \Leftrightarrow -\beta > 2\sqrt{\alpha\gamma} \Leftrightarrow \beta < -2\sqrt{\alpha\gamma}$.

46.Επειδή η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο ρίζες είναι $\Delta > 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 4\beta > 0$.

$$|x_1 - x_2| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{\alpha-\sqrt{\Delta}}{2} - \frac{\alpha+\sqrt{\Delta}}{2}\right| = 1 \Leftrightarrow \left|-\sqrt{\Delta}\right| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta} = 1 \Leftrightarrow \Delta = 1 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 - 4\beta = 1 \Leftrightarrow 4\beta = \alpha^2 - 1 \Leftrightarrow \beta = \frac{(\alpha-1)(\alpha+1)}{4}$$

2ος τρόπος: $S = 2x_1 + 1 = -\alpha \Leftrightarrow x_1 = -\frac{\alpha+1}{2}$ (1),

$$P = x_1(x_1+1) = \beta \Leftrightarrow -\frac{\alpha+1}{2}\cdot\left(-\frac{\alpha+1}{2}+1\right) = \beta \Leftrightarrow$$

$$-\frac{\alpha+1}{2}\cdot\left(-\frac{\alpha-1}{2}\right) = \beta \Leftrightarrow \frac{(\alpha+1)(\alpha-1)}{4} = \beta$$

47.α) Η κορυφή της παραβολής έχει τετμημένη αρνητική, άρα

$-\frac{-\alpha}{2\cdot 1} < 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} < 0 \Leftrightarrow \alpha < 0$.

β) Η C_f τέμνει τον y΄y στο σημείο (0,β) που βρίσκεται στον αρνητικό ημιάξονα Oy΄. Επίσης το σημείο (0,β) βρίσκεται πάνω από το σημείο $(0,-2)$ το οποίο είναι το σημείο τομής της (ε) με τον y΄y. Επομένως $-2 < \beta < 0$

48.α) Επειδή η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία Α, Β, οι τετμημένες τους ω, φ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$

Από τους τύπους του Vieta είναι $S = -\frac{-1}{1} = 1$ και $P = \frac{-1}{1} = -1$, άρα:

i. $S=\omega+\varphi=1$ και **ii.** $P=\omega\cdot\varphi=-1$.

β) Επειδή το O βρίσκεται μεταξύ των A και B, είναι $\omega<0<\varphi$.

Είναι $(OB)=|\varphi|=\varphi$ και $(OA)=|\omega|=-\omega$.

$(OB)>(OA)\Leftrightarrow\varphi>-\omega\Leftrightarrow\varphi+\omega>0\Leftrightarrow 1>0$ που ισχύει.

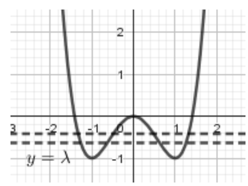
γ) Επειδή ο β είναι μεγαλύτερος από τον αντίστροφό του ισχύει ότι $\beta>\frac{1}{\beta}$.

Επειδή η διαφορά τους ξεπερνάει τη μία μονάδα, ισχύει ότι

$\beta-\frac{1}{\beta}>1\overset{\beta>0}{\Leftrightarrow}\beta^2-1>\beta\Leftrightarrow\beta^2-\beta-1>0\Leftrightarrow f(\beta)>0$.

Στο σχήμα παρατηρούμε ότι τα σημεία της γραφικής παράστασης της f με θετική τετμημένη είναι αυτά που βρίσκονται αριστερά του A ή δεξιά του B, άρα β< ω ή β > φ. Επειδή β > 0, είναι β > φ.

δ) Είναι $\frac{5}{3}-\frac{1}{\frac{5}{3}}=\frac{5}{3}-\frac{3}{5}=\frac{16}{5}>1$, οπότε με βάση το ερώτημα γ είναι $\frac{5}{3}>\varphi$.



49.α) Στο σχήμα βλέπουμε ότι η ευθεία y =λ με $\lambda\in(-1,0)$ τέμνει τη C_f σε 4 σημεία, άρα η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει 4 λύσεις.

β) $f(x)=\lambda\Leftrightarrow x^4-2x^2-\lambda=0$.

Θέτουμε $x^2=y$ και η εξίσωση γίνεται $y^2-2y-\lambda=0$.

Είναι εξίσωση 2ου βαθμού με $\Delta=4+4\lambda=4(1+\lambda)>0$ αφού $\lambda\in(-1,0)$ και ρίζες $y_1=\frac{2+\sqrt{4(1+\lambda)}}{2}>0$, $y_2=\frac{2-\sqrt{4(1+\lambda)}}{2}=\frac{2-2\sqrt{1+\lambda}}{2}\Leftrightarrow$

$y_2=1-\sqrt{1+\lambda}$. Είναι $-1<\lambda<0\Leftrightarrow 0<1+\lambda<1\Leftrightarrow 0<\sqrt{1+\lambda}<1\Leftrightarrow$

$-1<-\sqrt{1+\lambda}<0\Leftrightarrow 0<1-\sqrt{1+\lambda}<1\Leftrightarrow 0<y_2<1$.

Είναι $x^2=y_1\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{y_1}$ ή $x^2=y_2\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{y_2}$, οπότε η εξίσωση έχει 4 λύσεις.

50. Επειδή η C_f τέμνει τον άξονα x΄x στο -1, είναι $f(-1)=0\Leftrightarrow$

$-1+\alpha-\beta+\gamma=0\Leftrightarrow\alpha+\gamma=\beta+1$ (1)

1	α	β	γ	-1
	-1	-α+1	-β+α-1	
1	α-1	β-α+1	γ-β+α-1=0	

Από το σχήμα Horner προκύπτει ότι

$f(x)=(x+1)\cdot\left(x^2+(\alpha-1)x+\beta-\alpha+1\right)$.

Είναι $f(x)=0\Leftrightarrow x=-1$ ή $x^2+(\alpha-1)x+\beta-\alpha+1=0$ (2)

Επειδή η f έχει 2 ρίζες τις -1, ρ, τότε η (2) θα έχει ως ρίζα την ρ άρα θα έχει τουλάχιστον μία ρίζα. Όμως η (2) είναι 2ου βαθμού οπότε έχει

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha-1)^2 - 4(\beta-\alpha+1) \geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 - 4\beta + 4\alpha - 4 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 + 2\alpha + 1 \geq 4\beta + 4 \Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha + 1 \geq 4(\beta+1) \overset{(1)}{=} 4(\alpha+\gamma) \Rightarrow$$

$$\alpha^2 + 2\alpha + 1 \geq 4\alpha + 4\gamma \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 \geq 4\gamma \Leftrightarrow (\alpha-1)^2 \geq 4\gamma > 0 \overset{\alpha>1}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \alpha - 1 \geq 2\sqrt{\gamma} \Leftrightarrow \alpha \geq 2\sqrt{\gamma} + 1 .$$

51.α) $f(x) = x^3 + \beta x^2 + \gamma x = x\left(x^2 + \beta x + \gamma\right)$, $x \in \mathbb{R}$. Από τη γραφική παράσταση, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα το μηδέν.

Είναι $f(x) = 0 \Leftrightarrow x\left(x^2 + \beta x + \gamma\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x^2 + \beta x + \gamma = 0$.

- Έστω ότι η εξίσωση $x^2 + \beta x + \gamma = 0$ έχει ρίζα $\rho \neq 0$ άτοπο καθώς η $f(x) = 0$ θα έχει δύο ρίζες.
- Έστω ότι η εξίσωση $x^2 + \beta x + \gamma = 0$ έχει ρίζα το μηδέν τότε θα είναι $\gamma = 0$. Άρα $x^2 + \beta x = 0 \Leftrightarrow x(x+\beta) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = -\beta$ και θα πρέπει $\beta = 0$ για να έχει μοναδική ρίζα το μηδέν. Άρα $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ άρα θα έπρεπε να είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ πράγμα άτοπο από σχήμα. Άρα υποχρεωτικά $\beta \cdot \gamma \neq 0$.

β) Είναι $x^2 + \beta x + \gamma \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή είναι $\Delta < 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 4\gamma < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \beta^2 < 4\gamma$ (1). Επίσης από το σχήμα η εξίσωση $f(x) = x$ έχει ρίζα το μηδέν και άλλες δύο. Για $x \neq 0$:

$$f(x) = x \Leftrightarrow x\left(x^2 + \beta x + \gamma\right) = x \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} x^2 + \beta x + \gamma = 1 \Leftrightarrow x^2 + \beta x + \gamma - 1 = 0 .$$

Πρέπει δηλαδή η εξίσωση $x^2 + \beta x + \gamma - 1 = 0$ να έχει δύο ρίζες άνισες και μη μηδενικές δηλαδή πρέπει $0^2 + \beta \cdot 0 + \gamma - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \gamma \neq 1$

γ) Για να έχει δύο ρίζες άνισες πρέπει

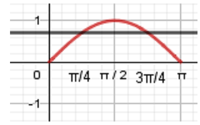
$\Delta' > 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 4(\gamma-1) > 0 \Leftrightarrow \beta^2 > 4(\gamma-1)$ (2). Από (1) και (2) προκύπτει ότι $4(\gamma-1) < \beta^2 < 4\gamma$.

Εύρεση πρόσημου τριγωνομετρικών συναρτήσεων

52.α) $f(x) > 0 \Leftrightarrow \eta\mu x > \dfrac{1}{2} \Rightarrow x \in \left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right)$,

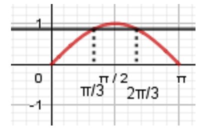
$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(0, \dfrac{\pi}{6}\right) \cup \left(\dfrac{5\pi}{6}, \pi\right)$.

β) $f(x)>0 \Leftrightarrow \eta\mu x>\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$,



$f(x)<0 \Leftrightarrow x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$.

γ) $f(x)>0 \Leftrightarrow \eta\mu x>\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$,



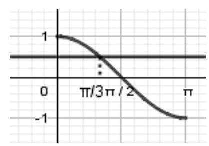
$f(x)<0 \Leftrightarrow x\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{2\pi}{3},\pi\right)$.

δ) $0<\eta\mu x<1<\frac{5}{3} \Rightarrow f(x)<0$ για κάθε $x\in(0,\pi)$,

ε) $0<\eta\mu x<1 \Leftrightarrow 0<\eta\mu^2 x<1<4 \Rightarrow 4-\eta\mu^2 x>0 \Rightarrow f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,\pi)$

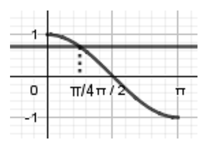
στ) $-\frac{1}{2}<0<\eta\mu x<1 \Rightarrow -1<2\eta\mu x \Rightarrow 2\eta\mu x+1>0 \Rightarrow f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,\pi)$.

53.α) $f(x)>0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x>\frac{1}{2} \Rightarrow x\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$,



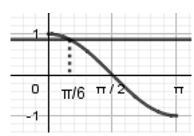
$f(x)<0 \Leftrightarrow x\in\left(\frac{\pi}{3},\pi\right)$.

β) $f(x)>0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x>\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$,



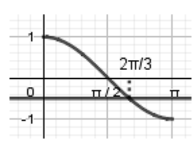
$f(x)<0 \Leftrightarrow x\in\left(\frac{\pi}{4},\pi\right)$.

γ) $f(x)>0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x>\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$,



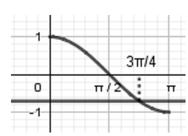
$f(x)<0 \Leftrightarrow x\in\left(\frac{\pi}{6},\pi\right)$.

δ) $f(x)>0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x>-\frac{1}{2} \Rightarrow x\in\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$,



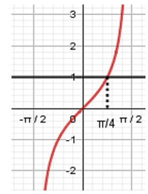
$f(x)<0 \Leftrightarrow x\in\left(\frac{2\pi}{3},\pi\right)$.

ε) $f(x)>0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x>-\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x\in\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$,



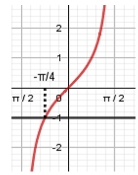
$f(x)<0 \Leftrightarrow x\in\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$.

στ) $-1<\sigma\upsilon\nu x<1 \Rightarrow f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,\pi)$.



54. α) $f(x)>0 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x>1 \Leftrightarrow x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$,

$f(x)<0 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x<1 \Leftrightarrow x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)$.



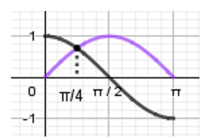
β) $f(x)>0 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x>-1 \Leftrightarrow x\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$,

$f(x)<0 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x<1 \Leftrightarrow x\in\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right)$.

Αυξημένης δυσκολίας

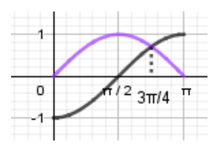
55.α) $f(x)>0 \Leftrightarrow \eta\mu x>\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow x\in\left(\frac{\pi}{4},\pi\right)$,

$f(x)<0 \Leftrightarrow \eta\mu x<\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$.



β) $f(x)>0 \Leftrightarrow \eta\mu x>-\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow x\in\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$,

$f(x)<0 \Leftrightarrow \eta\mu x<-\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow x\in\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$.



γ) Αν $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τότε $f(x)>0 \Leftrightarrow \eta\mu x>\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x>\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x>\frac{\pi}{3}$ άρα $x\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$. Αν $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ τότε $\eta\mu x>0,\ \sigma\upsilon\nu x<0 \Rightarrow f(x)>0$.

Τέλος αν $x=\frac{\pi}{2}$ τότε $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1>0$. Άρα $f(x)>0$ στο $\left(\frac{\pi}{3},\pi\right)$.

δ) Αν $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τότε $\eta\mu x>0,\ \sigma\upsilon\nu x>0 \Rightarrow f(x)>0$.

Αν $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ τότε $f(x)>0 \Leftrightarrow 3\eta\mu x>-\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x<\varepsilon\varphi\frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow$

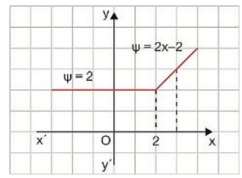
$x < \frac{5\pi}{6}$, άρα $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right)$. Τέλος αν $x = \frac{\pi}{2}$ τότε $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 > 0$.

Άρα $f(x) > 0$ στο $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right)$ και $f(x) < 0$ στα διαστήματα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{5\pi}{6}, \pi\right)$.

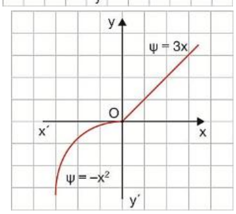
Χάραξη γραφικών παραστάσεων

56.α) Είναι $f(x) = \begin{cases} -x + 2 + x = 2, & x < 2 \\ x - 2 + x = 2x - 2, & x \geq 2 \end{cases}$

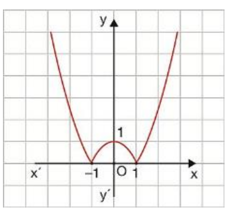
Η γραφική παράσταση της f αποτελείται από την ημιευθεία $f(x) = 2$ για $x \in (-\infty, 2)$ και από την ημιευθεία $f(x) = 2x - 2$ για $x \in [2, +\infty)$.



β) Η γραφική παράσταση της f αποτελείται από το τμήμα της παραβολής $f(x) = -x^2$ για $x \in (-\infty, 0)$ και από την ημιευθεία $f(x) = 3x$ για $x \in [0, +\infty)$.

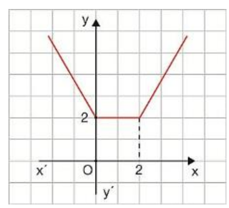


57. α)



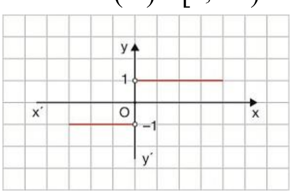
$f(A) = [0, +\infty)$

β)



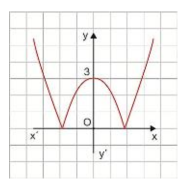
$f(A) = [2, +\infty)$

γ)



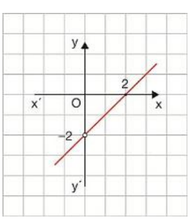
$f(A) = \{-1, 1\}$

δ)



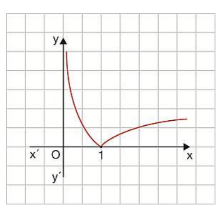
$f(A) = [0, +\infty)$

ε)



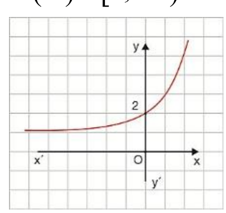
$f(A) = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

στ)



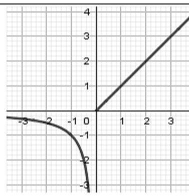
$f(A) = [0, +\infty)$

ζ)



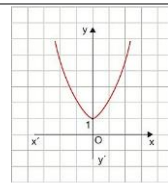
$f(A) = (1, +\infty)$

η)



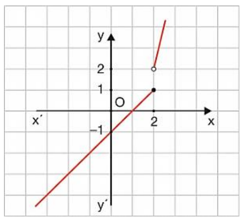
$f(A)=\mathbb{R}$

θ)



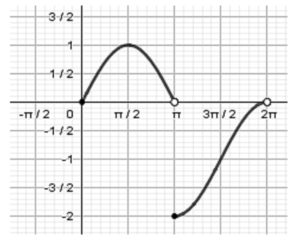
$f(A)=(1,+\infty)$

58. α)



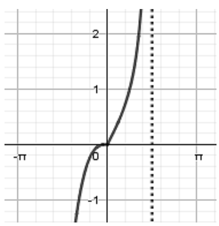
$f(A)=(-\infty,1]\cup(2,+\infty)$

β)



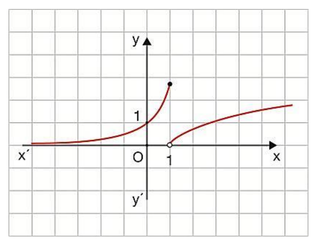
$f(A)=[-2,1]$

γ)



$f(A)=\mathbb{R}$

δ)



$f(A)=(0,+\infty)$

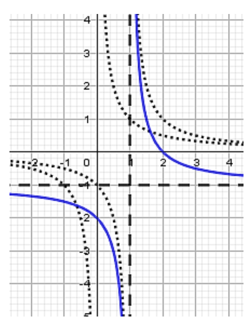
59.α) $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$.

β) Αρκεί αν βρούμε τα $y=f(x)$ ποιο σύνολο ορίζουν. $f(x)=y\Leftrightarrow\dfrac{2-x}{x-1}=y\Leftrightarrow$

$2-x=xy-y\Leftrightarrow 2+y=xy+x\Leftrightarrow$

$x(y+1)=y+2$ (1). Αν $y=-1$ τότε η (1) είναι αδύνατη, άρα $y\neq-1$ και

$x=\dfrac{y+2}{y+1}$. Είναι $x\neq1\Leftrightarrow\dfrac{y+2}{y+1}\neq1\Leftrightarrow y+2\neq y+1$ ι-σχύει, άρα $f(A)=\mathbb{R}-\{-1\}$.

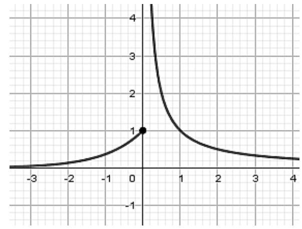


γ) $f(x)=\dfrac{2-x}{x-1}=-\dfrac{x-2}{x-1}=-\dfrac{x-1}{x-1}+\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{x-1}-1$

Η γραφική παράσταση της f προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της $y=\dfrac{1}{x}$ κατά 1 θέση δεξιά και 1 θέση κάτω.

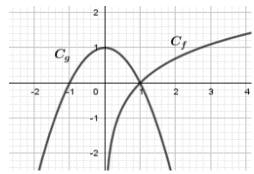
60. α) $f(A)=(0,+\infty)$.

β) Αν $k\le 0$ η εξίσωση είναι αδύνατη.
Αν $0<k\le 1$ τότε η $f(x)=k$ έχει δύο λύσεις, και τέλος αν $k>1$ έχει μία λύση.



Αυξημένης δυσκολίας

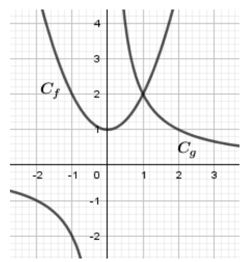
61.α) Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της $y=-x^2$ κατά 1 μονάδα πάνω.



β) $\ln x+x^2=1 \Leftrightarrow \ln x=1-x^2 \Leftrightarrow f(x)=g(x)$.
Οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f, C_g. Στο σχήμα παρατηρούμε ότι μοναδικό κοινό σημείο είναι το (1,0), οπότε η λύση της εξίσωσης είναι η x = 1.

γ) Η h ορίζεται όταν $\ln x+x^2-1\ge 0 \Leftrightarrow \ln x\ge 1-x^2 \Leftrightarrow f(x)\ge g(x) \Leftrightarrow x\ge 1$.

62.α) Η γραφική παράσταση της f προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της $y=x^2$ κατά 1 μονάδα πάνω.
Η γραφική παράσταση της g είναι υπερβολή.

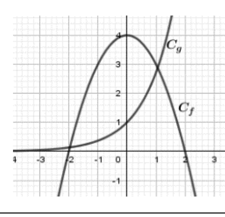


β) $x^3+x-2=0 \Leftrightarrow x\left(x^2+1\right)=2$. Αν x = 0 η εξίσωση είναι αδύνατη, οπότε για $x\ne 0$ είναι $x^2+1=\dfrac{2}{x} \Leftrightarrow$ $f(x)=g(x)$. Οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f, C_g. Στο σχήμα παρατηρούμε ότι μοναδικό κοινό σημείο είναι το (1,2), οπότε η λύση της εξίσωσης είναι η x = 1. Κάνοντας σχήμα Horner προκύπτει ότι $x^3+x-2=(x-1)\left(x^2+x+2\right)$, οπότε

$x^3+x-2=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+x+2\right)=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x^2+x+2=0$ αδύνατη (Δ<0).

γ) Η h ορίζεται όταν $x^2+1-\dfrac{2}{x}>0 \Leftrightarrow f(x)>g(x) \Leftrightarrow x<0$ ή $x>1$.

63.α) Η γραφική παράσταση της f προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της $y=-x^2$ κατά 4 μονάδες πάνω.
Η γραφική παράσταση της g είναι η γνωστή εκθετική συνάρτηση.



β) $e^x + x^2 = 4 \Leftrightarrow e^x = 4 - x^2 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$. Οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f, C_g. Στο σχήμα παρατηρούμε ότι τέμνονται σε δύο σημεία, οπότε η εξίσωση έχει δύο λύσεις.

Άρτιες – περιττές – περιοδικές συναρτήσεις

64.α) $f(x) = x,\ x \in \mathbb{R}$ είναι περιττή αφού $f(-x) = -x = -f(x)$ για κάθε $-x,\ x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$.

β) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$. Για κάθε $x \neq 0$ το $-x \neq 0$ και $f(-x) = \dfrac{1}{-x} = -f(x)$ άρα f περιττή. Δεν ορίζεται τιμή στο μηδέν για την f άρα δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

65. Επειδή η f είναι άρτια και περιττή ισχύει ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(-x) = f(x)$ (1) και $f(-x) = -f(x)$ (2). Από (1) και (2) έχουμε: $f(x) = -f(x) \Leftrightarrow 2f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

66.α) Πρέπει $\dfrac{3-x}{3+x} > 0 \Leftrightarrow (3-x)(3+x) > 0 \Leftrightarrow 9 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 9 \Leftrightarrow$
$|x| < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3$, άρα $D_f = (-3,3)$.

β) Για κάθε $x \in D_f$ και $-x \in D_f$.

$$f(-x) = \ln\frac{3+x}{3-x} = \ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right)^{-1} = -\ln\frac{3-x}{3+x} = -f(x).$$

γ) Αρκεί η εξίσωση $f(x) = k$ να έχει λύση για κάθε $k \in \mathbb{R}$. Είναι $f(x) = k \Leftrightarrow$

$$\ln\frac{3-x}{3+x} = k \Leftrightarrow \frac{3-x}{3+x} = e^k \Leftrightarrow 3 - x = 3e^k + xe^k \Leftrightarrow$$

$$3 - 3e^k = x\left(1 + e^k\right) \Leftrightarrow x = \frac{3\left(1 - e^k\right)}{1 + e^k}.$$

Πρέπει $-3 < \dfrac{3\left(1-e^k\right)}{1+e^k} < 3 \Leftrightarrow -1 < \dfrac{1-e^k}{1+e^k} < 1 \Leftrightarrow -1 - e^k < 1 - e^k < 1 + e^k \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} -1 - \cancel{e^k} < 1 - \cancel{e^k} \ \text{ισχύει} \\ \cancel{1} - e^k < \cancel{1} + e^k \Leftrightarrow 0 < 2e^k \ \text{ισχύει} \end{cases}$$

Άρα η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

67.α) Είναι $x^2 + 1 > x^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \Leftrightarrow$
$-\sqrt{x^2+1} < x < \sqrt{x^2+1} \Rightarrow \sqrt{x^2+1} - x > 0$, άρα $D_f = \mathbb{R}$.

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ το $-x \in \mathbb{R}$ και είναι:

$$f(-x) = -f(x) \Leftrightarrow \ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) = -\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) \Leftrightarrow$$

$$\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) + \ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\ln\left[\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 - x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2+1-x^2 = 1$$ ισχύει.

γ) Αρκεί η εξίσωση $f(x)=k$ να έχει λύση για κάθε $k \in \mathbb{R}$. Είναι $f(x)=k \Leftrightarrow$

$\sqrt{x^2+1}-x = e^k \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = x+e^k$. Για $x \geq -e^k$ είναι

$$\cancel{x^2}+1 = \cancel{x^2}+2e^k x+e^{2k} \Leftrightarrow 1-e^{2k} = 2e^k x \Leftrightarrow x = \frac{1-e^{2k}}{2e^k}.$$

Πρέπει $\frac{1-e^{2k}}{2e^k} \geq -e^k \Leftrightarrow 1-e^{2k} \geq -2e^{2k} \Leftrightarrow e^{2k} \geq -1$ ισχύει. Επειδή για κάθε $k \in \mathbb{R}$ υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(x)=k$, η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

Αυξημένης δυσκολίας

68. Στην αρχική σχέση βάζουμε για x το $x-T$ και προκύπτει:

$f(x-T+T) = f(x-T) \Leftrightarrow f(x) = f(x-T)$ άρα ισχύει ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τα $x+T, x-T \in \mathbb{R}$ και $f(x+T) = f(x-T) = f(x)$. Άρα η f είναι περιοδική και το T είναι η περίοδος της συνάρτησης.

69. Ονομάζουμε (1) τη δοσμένη σχέση και βάζουμε για x το $x+1$ και προκύπτει:

$f(x+1)+f(x+2)+f(x+3) = 0 \Leftrightarrow -f(x+1)-f(x+2)-f(x+3) = 0 \quad (2)$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) και έχουμε:

$$f(x)-f(x+3) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(x+3)$$

Θέτουμε όπου x το $x-3$: $f(x-3) = f(x)$.

Σύνθετες ασκήσεις

70.α) Για να ορίζεται η f πρέπει $e^x-1 \neq 0 \Leftrightarrow e^x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0$ άρα η f έχει πεδίο ορισμού το $D_f = \mathbb{R}^*$.

β) Για κάθε $x \neq 0$ το $-x \neq 0$ και έχουμε:

i. $$f(-x) = \frac{-x}{2}+\frac{-x}{e^{-x}-1}-1 = -\frac{x}{2}-\frac{x}{\frac{1}{e^x}-1}-1 =$$

$$= -\frac{x}{2}-\frac{x}{\frac{1-e^x}{e^x}}-1 = -\frac{x}{2}-\frac{xe^x}{1-e^x}-1.$$

ii. $f(-x)-f(x)=-\frac{x}{2}-\frac{xe^x}{1-e^x}-1-\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{e^x-1}-1\right)=$

$=-\frac{x}{2}-\frac{xe^x}{1-e^x}-\cancel{1}-\frac{x}{2}-\frac{x}{e^x-1}+\cancel{1}=-x-\frac{x}{e^x-1}+\frac{xe^x}{e^x-1}=$

$=-x+\frac{xe^x-x}{e^x-1}=-x+\frac{x\cancel{(e^x-1)}}{\cancel{e^x-1}}=-x+x=0$.

γ) $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{x}{e^x-1}-1>-1$ για κάθε $x>0$ αφού $\frac{x}{2}>0$ και

$x>0\Leftrightarrow e^x>1\Leftrightarrow e^x-1>0$.

Επειδή $f(-x)-f(x)=0\Leftrightarrow f(-x)=f(x)$ για κάθε $x\neq 0$ η f είναι άρτια άρα λόγω συμμετρίας θα είναι $f(x)>-1$ για κάθε $x<0$.

Άρα τελικά $f(x)>-1$ για κάθε $x\neq 0$.

δ) i) Επειδή η f είναι άρτια, η γραφική της παράσταση θα πρέπει να είναι συμμετρική ως προς τον άξονα y΄y άρα παριστάνεται από την C_1

ii) Η f έχει σύνολο τιμών το $(0,+\infty)$.

iii) $f^3(x)>f^2(x)-f(x)\Leftrightarrow f^3(x)-f^2(x)+f(x)>0\Leftrightarrow$

$f(x)\left[f^2(x)-f(x)+1\right]>0$ το οποίο ισχύει γιατί $f(x)>0$ για κάθε $x\neq 0$ και το τριώνυμο $f^2(x)-f(x)+1>0$ αφού έχει διακρίνουσα $\Delta=-3<0$.

71.α) Είναι $f(x)=f(x+2\pi)$ (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Στην (1) για x το $x-2\pi$ έχουμε $f(x-2\pi)=f\left(x-\cancel{2\pi}+\cancel{2\pi}\right)\Leftrightarrow f(x)=f(x-2\pi)$ (2)

Από (1),(2) έχουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $(x+2\pi)\in\mathbb{R},(x-2\pi)\in\mathbb{R}$ και $f(x)=f(x+2\pi)=f(x-2\pi)$ άρα η f είναι περιοδική με $T=2\pi$.

β) Αφού $f(0)=0$ και η f είναι περιοδική με περίοδο $T=2\pi$, τότε είναι $f(x)=0\Leftrightarrow x=2\kappa\pi$, $\kappa\in\mathbb{Z}$.

γ) i. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι: $(f(x)-\eta\mu x)(f(x)+\eta\mu x)=2(f(x)-\eta\mu x)\Leftrightarrow$

$f^2(x)-\eta\mu^2 x=2f(x)-2\eta\mu x\Leftrightarrow\Leftrightarrow f^2(x)-2f(x)=\eta\mu^2 x-2\eta\mu x\Leftrightarrow$

$f^2(x)-2f(x)+1=\eta\mu^2 x-2\eta\mu x+1\Leftrightarrow$

$(f(x)-1)^2=(\eta\mu x-1)^2\Leftrightarrow|f(x)-1|=|\eta\mu x-1|$ (3)

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $\eta\mu x\leq 1\Leftrightarrow\eta\mu x-1\leq 0$ και από την γραφική βλέπουμε ότι $f(x)\leq 1\Leftrightarrow f(x)-1\leq 0$.

$(3)\Leftrightarrow-(f(x)-1)=-(\eta\mu x-1)\Leftrightarrow f(x)-1=\eta\mu x-1\Leftrightarrow f(x)=\eta\mu x$.

ii. Για κάθε $x<0$ είναι $x<f(x)<-x \Leftrightarrow x<\eta\mu x<-x \Leftrightarrow$
$-|x|<\eta\mu x<|x| \Leftrightarrow |\eta\mu x|<|x|$ (4). Για κάθε $x>0$ είναι
$-x<f(x)<x \Leftrightarrow -x<\eta\mu x<x \Leftrightarrow -|x|<\eta\mu x<|x| \Leftrightarrow |\eta\mu x|<|x|$ (5)
Για $x=0$ είναι $|\eta\mu 0|=|0|$ (6), άρα από τις (4),(5) και (6) προκύπτει ότι
$|\eta\mu x|\le|x|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

72. Επειδή η C_f είναι πολυώνυμο 3ου βαθμού, θα είναι της μορφής
$f(x)=\alpha x^3+\kappa x^2+\beta x+\lambda$ με $\alpha\ne 0$, $\kappa,\beta,\lambda\in\mathbb{R}$.
Επειδή διέρχεται από το (0,0) ισχύει ότι $f(0)=0 \Leftrightarrow \lambda=0$.
Επειδή η f είναι περιττή, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(-x)=-f(x) \Leftrightarrow$
$\alpha(-x)^3+\kappa(-x)^2+\beta(-x)=-\alpha x^3-\kappa x^2-\beta x \Leftrightarrow$
$-\cancel{\alpha x^3}+\kappa x^2-\cancel{\beta x}=-\cancel{\alpha x^3}-\kappa x^2-\cancel{\beta x} \Leftrightarrow 2\kappa x^2=0 \Leftrightarrow \kappa=0$ γιατί η ισότητα αυτή ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα $f(x)=\alpha x^3+\beta x$.

β) Επειδή η γραφική παράσταση της f έχει με την ευθεία y = x τρία κοινά σημεία, η εξίσωση:
$f(x)=x \Leftrightarrow \alpha x^3+\beta x=x \Leftrightarrow \alpha x^3+\beta x-x=0 \Leftrightarrow \alpha x^3+(\beta-1)x=0$ (1) έχει 3 λύσεις. Είναι $\alpha x^3+(\beta-1)x=0 \Leftrightarrow x\left(\alpha x^2+\beta-1\right)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή
$\alpha x^2+\beta-1=0 \Leftrightarrow x^2=\frac{1-\beta}{\alpha}$ (2).
Η εξίσωση (2) έχει δύο λύσεις όταν $\frac{1-\beta}{\alpha}>0 \Leftrightarrow \alpha(1-\beta)>0$.

γ) Στο σχήμα βλέπουμε ότι η f έχει τρείς ρίζες. Τις 0 και $\pm\rho$, $\rho>0$ επειδή είναι περιττή. Είναι $f(x)=0 \Leftrightarrow \alpha x^3+\beta x=0 \Leftrightarrow x\left(\alpha x^2+\beta\right)=0 \Leftrightarrow$
$x=0$ ή $\alpha x^2+\beta=0 \Leftrightarrow x^2=-\frac{\alpha}{\beta}$ (3).
Η εξίσωση (3) έχει ρίζες τα $\pm\rho$ οπότε $-\frac{\alpha}{\beta}>0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta}<0 \Leftrightarrow \alpha\beta<0$ (4)

Έστω α < 0. Τότε το πρόσημο της $f(x)=x\left(\alpha x^2+\beta\right)$ φαίνεται στον διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$	$-\rho$		0		ρ	$+\infty$
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$\alpha x^2+\beta$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

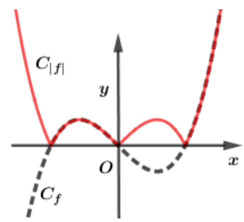
Στο σχήμα όμως βλέπουμε ότι για $x > \rho$ είναι $f(x) > 0$ οπότε καταλήγουμε σε άτοπο, άρα α > 0 και λόγω της (4) β< 0.

δ) Επειδή το σημείο Α ανήκει και στην y = x, είναι το σημείο τομής των C_f, $y = x$, οπότε το $x = \sqrt{2}$ είναι λύση της (2), οπότε

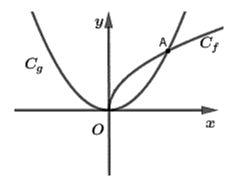
$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = \frac{1-\beta}{\alpha} \Leftrightarrow 2\alpha = 1-\beta \Leftrightarrow \beta = 1-2\alpha .$$

Είναι $\beta < 0 \Leftrightarrow 1-2\alpha < 0 \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{2}$. Επειδή ο α είναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος με $\alpha > \frac{1}{2}$, είναι α = 1. Τότε $\beta = 1-2 = -1$ και $f(x) = x^3 - x$.

ε) Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x ή πάνω σε αυτόν και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα x΄x, των τμημάτων της f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν.



73.α) Οι συναρτήσεις f,g είναι βασικές και η γραφική τους παράσταση δίνεται στο διπλανό σχήμα. Παρατηρούμε ότι έχουν δύο κοινά σημεία από τα οποία το ένα είναι το O (0, 0).Παρατηρούμε ότι $f(1) = 1 = g(1)$, οπότε το δεύτερο κοινό τους σημείο είναι το Α(1, 1).Έχουμε:

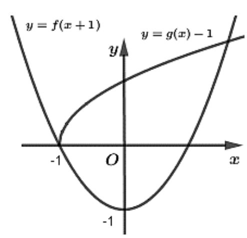


$$f(x) = g(x), x \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = x^2 \Leftrightarrow \sqrt{x}^2 = x^4 \Leftrightarrow x = x^4 \Leftrightarrow$$

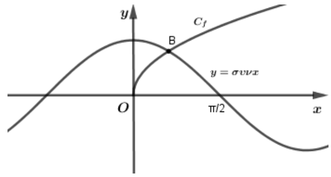
$$x - x^4 = 0 \Leftrightarrow x\left(1-x^3\right) = 0 \Leftrightarrow (x=0) \text{ ή } \left(1-x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1\right).$$

Άρα έχουν κοινά σημεία τα Ο(0, 0) και το Α(1, 1).

β) Είναι $\sqrt{x+1} = f(x+1)$, οπότε η γραφική παράσταση της $y = \sqrt{x+1}$ προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της f κατά μία μονάδα αριστερά. Είναι $x^2 - 1 = g(x) - 1$, οπότε η γραφική παράσταση της $y = x^2 - 1$ προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της C_g κατά 1 μονάδα προς τα κάτω. Παρατηρούμε ότι έχουν δύο κοινά σημεία, οπότε η εξίσωση $\sqrt{x+1} = x^2 - 1$ έχει δύο λύσεις από τις οποίες η μία είναι η x = -1. Επειδή, για να έχει λύση η εξίσωση πρέπει



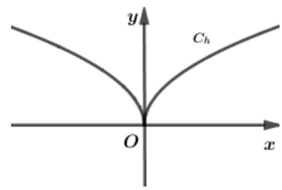
$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ |x| \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 1 \text{ ή } x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow x \geq 1$$, η τετμημένη του δεύτερου κοινού σημείου βρίσκεται στο διάστημα $(1, +\infty)$.



γ) Στο σχήμα παρατηρούμε ότι έχουν 1 κοινό σημείο Β η τετμημένη x_0 του οποίου βρίσκεται στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Το σημείο αυτό είναι μοναδικό, γιατί για κάθε $x \in \left(x_0, \frac{\pi}{2}\right)$, είναι

$\sqrt{x} > \sqrt{x_0}$, $συνx < συνx_0$ δηλαδή $\sqrt{x} > συνx$ και για κάθε $x \geq \frac{\pi}{2}$ είναι

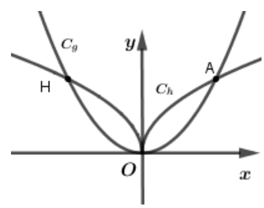
$\sqrt{x} \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}} > 1$, ενώ $συνx \leq 1$.



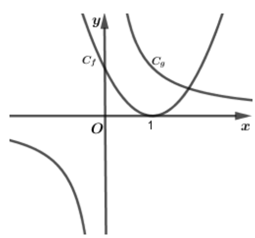
δ) i. $h(x) = \begin{cases} f(x) & , x \geq 0 \\ f(-x), & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{x} & , x \geq 0 \\ \sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}$.

Η γραφική παράσταση της $y = f(-x)$ είναι η συμμετρική της $y = f(x)$ ως προς τον άξονα y΄y.

ii. Το συμμετρικό κάθε σημείου της C_f ως προς τον άξονα y΄y βρίσκεται στη γραφική παράσταση της $y = f(-x)$, άρα η γραφική παράσταση της h έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y, οπότε είναι άρτια.



iii. Κάνοντας τη γραφική τους παράσταση στο ίδιο σύστημα αξόνων, βλέπουμε ότι έχουν δύο κοινά σημεία, από τα οποία το ένα είναι το Α του α ερωτήματος. Λόγω συμμετρίας το δεύτερο κοινό σημείο θα είναι το Η(-1,1), οπότε: $h(x) = g(x) \Leftrightarrow x = \pm 1$.



74.α) Η γραφική παράσταση της f είναι παραβολή και προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της $y = x^2$ κατά 1 μονάδα δεξιά.

Η γραφική παράσταση της g είναι υπερβολή.

β) $x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x\left(x^2 - 2x + 1\right) = 1$ (1)

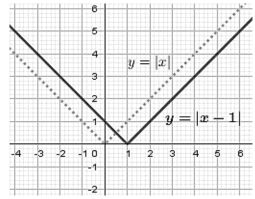
Αν x = 0 τότε η (1) είναι αδύνατη, οπότε για $x \neq 0$ γίνεται $x^2 - 2x + 1 = \frac{1}{x} \Leftrightarrow (x-1)^2 = \frac{1}{x} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.

Στο σχήμα παρατηρούμε ότι οι C_f, C_g έχουν 1 μόνο κοινό σημείο, οπότε η εξίσωση έχει μία λύση.

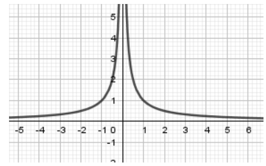
γ) $y = \sqrt{f(x)} = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$.

Ένας τρόπος για να σχεδιαστεί είναι ως παράλληλη μετατόπιση γνωστής συνάρτησης.

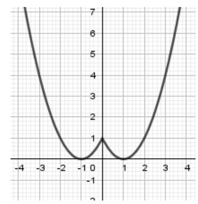
Η γραφική της παράσταση αποτελείται μεταφορά της $y=|x|$ κατά 1 μονάδα δεξιά.



Η $y=|g(x)|$ από τον κλάδο της g που είναι στα θετικά και από τον συμμετρικό ως προς τον άξονα x΄x του κλάδου που είναι στα αρνητικά.



δ) $h(x)=\begin{cases} f(x) & ,\ x\geq 0 \\ f(-x), & x<0 \end{cases}=\begin{cases} (x-1)^2 & ,x\geq 0 \\ (-x-1)^2=(x+1)^2 & ,x<0 \end{cases}$.



i. Η γραφική παράσταση της h αποτελείται
- από το τμήμα της f που βρίσκεται δεξιά του y΄y
- από το τμήμα της $y=(x+1)^2$ που βρίσκεται αριστερά του y΄y, το οποίο κατασκευάζεται με οριζόντια μετατόπιση της $y=x^2$ κατά 1 μονάδα αριστερά.

ii. Επειδή η γραφική παράσταση της $y=f(-x)$ είναι η συμμετρική της $y=f(x)$, ως προς τον άξονα y΄y, το συμμετρικό κάθε σημείου $M(x,h(x))$, ως προς τον άξονα y΄y, είναι το $M(x,h(-x))$ και βρίσκεται στην γραφική παράσταση της h, οπότε η h είναι άρτια.

Ερωτήσεις «Σωστό ή Λάθος»

1. Σ	**2.** Σ	**3.** Σ	**4.** Λ	**5.** Σ	**6.** Σ	**7.** Σ	**8.** Σ	**9.** Σ	**10.** Λ
11. Λ	**12.** Λ	**13.** Σ	**14.** Λ	**15.** Σ	**16.** Σ	**17.** Λ	**18.** Λ	**19.** Λ	**20.** Σ
21. Σ	**22.** Σ	**23.** Λ	**24.** Λ	**25.** Λ	**26.** Σ				

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Αρκεί η εξίσωση $f(x)=x$ να έχει λύση . Είναι $f(x)=x\Leftrightarrow \dfrac{\alpha x+\beta}{x-\alpha}=x\Leftrightarrow$

$\alpha x+\beta=x^2-\alpha x\Leftrightarrow x^2-2\alpha x-\beta=0$ με $\Delta=4\alpha^2+4\beta$ και αφού $\beta\neq-\alpha^2$ τότε $\Delta\neq 0$. Επομένως η εξίσωση έχει λύση όταν $\Delta>0\Leftrightarrow\alpha^2+\beta>0\Leftrightarrow\beta>-\alpha^2$.

Οπότε από τα ζεύγη τιμών που δίνονται για τα α, β θα μπορούσε να είναι $\alpha=1,\beta=0$.

Σωστή απάντηση το Γ.

2. Είναι $f(3)=-27 \Leftrightarrow 3^{2\nu}-4\cdot 3^{\nu+1}=-27 \Leftrightarrow 3^{2\nu}-12\cdot 3^{\nu}+27=0 \Leftrightarrow 3^{\nu}=3$ ή $3^{\nu}=9$. Άρα $\nu=1$ ή $\nu=2$.

Σωστή απάντηση το Δ.

3. Είναι $D_f=[0,+\infty)$, $D_g=(0,+\infty)$.

Πρέπει $x\sqrt{x}<x^{\ln x} \Leftrightarrow \ln x^{\frac{3}{2}}<\ln^2 x \Leftrightarrow \ln x\left(\ln x-\frac{3}{2}\right)>0 \Leftrightarrow \ln x<0$ ή $\ln x>\frac{3}{2}$.

Δηλαδή $0<x<1$ ή $x>\sqrt{e^3}=e\sqrt{e}$.

Σωστή απάντηση το Γ.

4. Έχουμε $f(x)<0 \Leftrightarrow (|x|-2)(1-2e^x)\ln(x+2)<0$ η οποία ορίζεται αν $x>-2$. Βρίσκουμε το πρόσημο κάθε παράγοντα του γινομένου

$|x|-2<0 \Leftrightarrow |x|<2 \Leftrightarrow$

$-2<x<2$

$1-2e^x<0 \Leftrightarrow$

$e^x>\frac{1}{2} \Leftrightarrow x>-\ln 2$

και

x	-2 … -1	-1 … $-\ln 2$	$-\ln 2$ … 2	2 … $+\infty$
$\lvert x\rvert-2$	-	-	-	+
$1-2e^x$	+	+	-	-
$\ln(x+2)$	-	+	+	+
$f(x)$	+	-	+	-

$\ln(x+2)>0 \Leftrightarrow x+2>1 \Leftrightarrow x>-1$. Τελικά $x\in(-1,-\ln 2)\cup(2,+\infty)$

Σωστή απάντηση το Β.

5. Επειδή $A\hat{O}B=45^0$ τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της ΟΑ είναι $\lambda_{OA}=\varepsilon\varphi 45^0=1 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2}=1 \Leftrightarrow \alpha=2$. Επίσης το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές οπότε $(OA)=(AB) \Leftrightarrow \sqrt{4+\alpha^2}=\sqrt{(\beta-2)^2+\alpha^2} \Leftrightarrow$

$4=(\beta-2)^2 \overset{\beta>2}{\Leftrightarrow} \beta=4$.

Σωστή απάντηση το Β.

6. i. Γνωρίζουμε ότι $|x^2-1|\geq x^2-1 \Leftrightarrow |x^2-1|-x^2+1\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η συνάρτηση f ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$. Αν $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ τότε

$f(x)=\sqrt{\frac{x^2-1-x^2+1}{2}}=0$, ενώ αν $x\in[-1,1]$ τότε

$f(x)=\sqrt{\frac{-x^2+1-x^2+1}{2}}=\sqrt{\frac{2(1-x^2)}{2}}=\sqrt{1-x^2}$.

Άρα $f(x)=\begin{cases}0, x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\\ \sqrt{1-x^2}, x\in[-1,1]\end{cases}$. Αν $x\in[-1,1]$,είναι $0\le\sqrt{1-x^2}\le 1$ οπότε

$0\le f(x)\le 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $1\le g(x)\le\frac{3}{2}$ αφού

$0\le x^2\le 1\Leftrightarrow 2\le x^2+2\le 3\Leftrightarrow\frac{1}{2}\ge\frac{1}{x^2+2}\ge\frac{1}{3}\Leftrightarrow 1\le\frac{3}{x^2+2}\le\frac{3}{2}$.

Αν $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ είναι $f(x)=0$ και $g(x)>0$.

Επομένως, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $g(x)>f(x)$.

Σωστή απάντηση το Γ.

ii. Η εξίσωση $f(x)=\sigma\upsilon\nu(\pi+x)+2$ ισοδύναμα γίνεται $f(x)=2-\sigma\upsilon\nu x$.

Όμως $-1\le\sigma\upsilon\nu x\le 1\Leftrightarrow -1\le-\sigma\upsilon\nu x\le 1\Leftrightarrow 1\le 2-\sigma\upsilon\nu x\le 3$.

Οπότε $2-\sigma\upsilon\nu x\ge 1$ και $f(x)\le 1$. Η εξίσωση έχει λύση όταν: $\begin{cases}f(x)=1\\ 2-\sigma\upsilon\nu x=1\end{cases}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}\sqrt{1-x^2}=1\\ \sigma\upsilon\nu x=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ x=2\kappa\pi\ ,\ \kappa\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow x=0$.

Σωστή απάντηση το Α.

iii. Αν $x\in[-1,1]$ τότε $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ οπότε $f(x)=y\Leftrightarrow\sqrt{1-x^2}=y\Leftrightarrow$

$1-x^2=y^2\Leftrightarrow x^2+y^2=1$, άρα η καμπύλη της C_f είναι το ημικύκλιο του μοναδιαίου κύκλου. Το εμβαδό είναι $E=\frac{1}{2}\pi\cdot 1^2=\frac{\pi}{2}$.

Σωστή απάντηση το Δ.

Τράπεζα θεμάτων ΙΕΠ

26603. α) Το πεδίο ορισμού της f αποτελείται από τις τετμημένες των σημείων της γραφικής της παράστασης, οπότε $D_f=[-5,3)$. Το σύνολο τιμών της f αποτελείται από τις τεταγμένες των σημείων της γραφικής της παράστασης οπότε $f(A)=[0,10]$.

β) Το τμήμα ΟΑ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=\frac{10-0}{-5-0}=-2$ και εξίσωση $y=-2x$.

Το ΟΓ σχηματίζει γωνία 60° με τον x΄x, οπότε έχει κλίση $\lambda=\varepsilon\varphi 60^\circ=\sqrt{3}$ και εξίσωση $y=\sqrt{3}x$, επομένως $f(x)=\begin{cases}-2x, & -5\le x\le 0\\ \sqrt{3}x, & 0<x<3\end{cases}$.

26604. α) i. Αν x m το βάθος τότε για $x \in (0,15]$ είναι $f(x) = 200x + 1500$, ενώ αν $x \in (15,+\infty)$ τότε αρχικά θα χρεώσει τα 15 μέτρα με κόστος $200 \cdot 15 + 1500 = 4500$ ευρώ και για τα επιπλέον $x - 15$ μέτρα το κόστος θα είναι $(x-15) \cdot 250 = 250x - 3750$, οπότε το συνολικό κόστος στη περίπτωση αυτή θα είναι

$$f(x) = 4500 + 250x - 3750 = 250x + 750 \text{ ,άρα } f(x) = \begin{cases} 200x + 1500, & x \in (0,15] \\ 250x + 750, & x \in (15,+\infty) \end{cases}.$$

ii. $f(12) = 200 \cdot 12 + 1500 = 3900$ ευρώ.

iii. Μέχρι τα 15 μέτρα η χρέωση της εταιρείας είναι 4500 ευρώ, οπότε το βάθος είναι μεγαλύτερο από 15 μέτρα.

Για x > 15 είναι $f(x) = 5050 \Leftrightarrow 250x + 750 = 5050 \Leftrightarrow$

$$250x = 4300 \Leftrightarrow x = \frac{4300}{250} = 17,2 \text{ μέτρα.}$$

β) $g(x) = 300x,\ x > 0$.

γ) Αν $x \in (0,15]$ τότε $f(x) = g(x) \Leftrightarrow$

$200x + 1500 = 300x \Leftrightarrow 100x = 1500 \Leftrightarrow x = 15$ μέτρα, δεκτό.

Αν x > 15 τότε $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 250x + 750 = 300x \Leftrightarrow 50x = 750 \Leftrightarrow x = 15$ απορρίπτεται.

δ) Συμφέρει η επιλογή της εταιρείας Ε1, όταν $f(x) < g(x)$.

Αν $x \in (0,15]$ τότε $f(x) < g(x) \Leftrightarrow$

$200x + 1500 < 300x \Leftrightarrow 100x > 1500 \Leftrightarrow x > 15$ απορρίπτεται.

Αν x > 15 τότε $f(x) < g(x) \Leftrightarrow 250x + 750 < 300x \Leftrightarrow 50x > 750 \Leftrightarrow x > 15$.

Επομένως συμφέρει η Ε1 όταν τα μέτρα βάθους είναι περισσότερα από 15.

Εισαγωγικό κριτήριο αξιολόγησης στις συναρτήσεις

Θέμα Α

Α1. Επειδή η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $A(1,0)$ και $B(-1,6)$ ισχύει ότι: $f(1)=0 \Leftrightarrow 1+\alpha+\beta=0 \Leftrightarrow \beta=-1-\alpha$ (1) και

$$f(-1)=6 \Leftrightarrow 1-\alpha+\beta=6 \Leftrightarrow -\alpha+\beta=5 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} -\alpha-1-\alpha=5 \Leftrightarrow -2\alpha=6 \Leftrightarrow \alpha=-3$$

και από την (1): $\beta=2$.

Α2. Είναι $f(x)=x^2-3x+2$.

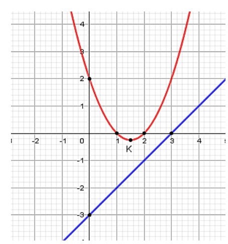
Είναι $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=2$, οπότε η C_f τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία $(1,0)$, $(2,0)$. Είναι $f(0)=2$, οπότε η C_f τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο $(0,2)$. Είναι $g(x)=0 \Leftrightarrow x-3=0 \Leftrightarrow x=3$ οπότε η C_g τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο $(3,0)$. Είναι $g(0)=-3$, οπότε η C_g τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο $(0,-3)$.

Α3. $f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^2-3x+2=x-3 \Leftrightarrow x^2-4x+5=0$ αδύνατη γιατί έχει $\Delta<0$, οπότε οι C_f, C_g δεν τέμνονται.

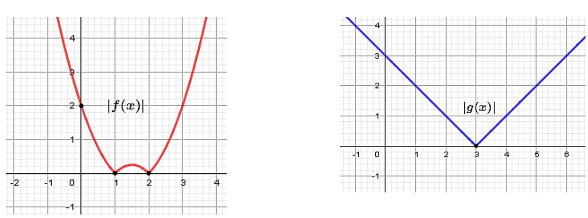
Α4. Η C_f είναι παραβολή με κορυφή $K\left(-\dfrac{\beta}{2\alpha},-\dfrac{\Delta}{4\alpha}\right)$.

Είναι $x_K=-\dfrac{\beta}{2\alpha}=\dfrac{3}{2}$, $y_K=-\dfrac{\Delta}{4\alpha}=-\dfrac{1}{4}$, άρα $K\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{4}\right)$.

Η C_f τέμνει τους άξονες στα σημεία $(1,0)$, $(2,0)$ και $(0,2)$. Η C_g είναι ευθεία που τέμνει τους άξονες στα σημεία $(3,0)$, $(0,-3)$ και δεν τέμνει την C_f.



Α5.



Α6. Επειδή $y_K=-\dfrac{1}{4}$ το σύνολο τιμών της f είναι το $f(A)=\left[-\dfrac{1}{4},+\infty\right)$.

- Αν $k<-\dfrac{1}{4}$ η εξίσωση $f(x)=k$ είναι αδύνατη.

- Αν $k=-\frac{1}{4}$ η εξίσωση έχει ακριβώς μια λύση την $x=\frac{3}{2}$.

- Αν $k>-\frac{1}{4}$ η εξίσωση $f(x)=k$ έχει ακριβώς 2 λύσεις.

Α7. α) $\frac{f(x)}{g(x)}\geq 0 \Leftrightarrow \left(x^2-3x+2\right)(x-3)\geq 0$ και $x-3\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 3$.

Άρα

$x\in[1,2]\cup(3,+\infty)$

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
x^2-3x+2		+	0	−	0	+	|	+	
$x-3$		−	|	−	|	−	0	+	
γινόμενο		−	0	+	0	−	0	+	

β) $\frac{f(x)}{g(x)}<6 \Leftrightarrow$

$\frac{x^2-3x+2}{x-3}-6<0 \Leftrightarrow$

$\frac{x^2-3x+2-6x+18}{x-3}<0 \Leftrightarrow \frac{x^2-9x+20}{x-3}<0 \Leftrightarrow \left(x^2-9x+20\right)(x-3)<0 \Leftrightarrow$

$x<3$ ή $4<x<5$

x	$-\infty$		3		4		5		$+\infty$
$x^2-9x+20$		+	|	+	0	−	0	+	
$x-3$		−	0	+	|	+	|	+	
γινόμενο		−	0	+	0	−	0	+	

γ) $|g(x)|<2 \Leftrightarrow$

$|x-3|<2 \Leftrightarrow$

$-2<x-3<2 \Leftrightarrow$

$1<x<5$

Α8. $h(x)=(x-3)^3+5x^2-26x+33=$

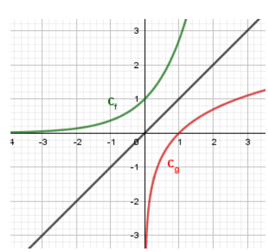
$x^3-9x^2+27x-27+5x^2-26x+33=x^3-4x^2+x+6$

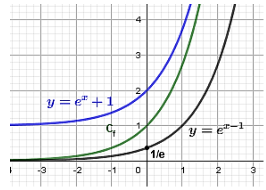
$h(x)=(x+1)\left(x^2-5x+6\right)>0 \Leftrightarrow x\in(-1,2)\cup(3,+\infty)$

x	$-\infty$		-1		2		3		$+\infty$
x^2-5x+6		+	|	+	0	−	0	+	
$x+1$		−	0	+	|	+	|	+	
γινόμενο		−	0	+	0	−	0	+	

Θέμα Β

Β1. Είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$.





B2. Η $y = e^x + 1$ προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της $y = e^x$ κατά 1 μονάδα προς τα πάνω και η γραφική παράσταση της $y = e^{x-1}$ προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της $y = e^x$ κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά.

B3. α) $f(2x) + f(1) = f(x) + f(x+1) \Leftrightarrow$

$e^{2x} + e = e^x + e^{x+1} \Leftrightarrow e^{2x} + e - e^x - e^{x+1} = 0 \Leftrightarrow$

$e^x\left(e^x - 1\right) - e\left(e^x - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left(e^x - 1\right)\left(e^x - e\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\left(e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0\right)$ ή $\left(e^x - e = 0 \Leftrightarrow e^x = e \Leftrightarrow x = 1\right)$

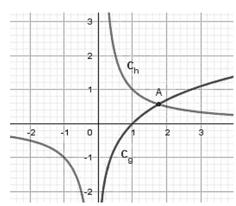
β) $g(x-1) + g(x+1) = \ln 2 \Leftrightarrow \ln(x-1) + \ln(x+1) = \ln 2 \quad (1)$

Πρέπει $\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > -1 \end{cases} \Rightarrow x > 1$

$(1) \Leftrightarrow \ln\left[(x-1)(x+1)\right] = \ln 2 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 3 \overset{x>1}{\Leftrightarrow} x = \sqrt{3}$

B4. $f(\ln 4) = e^{\ln 4} = 4, \quad g\left(\sqrt{e}\right) = \ln e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}, \; g\left(\frac{1}{e}\right) = \ln e^{-1} = -1,$

$g\left(\frac{\sqrt{e}}{e}\right) = \ln \frac{e^{\frac{1}{2}}}{e} = \ln e^{\frac{1}{2} - 1} = -\frac{1}{2}$



B5. $\varphi(x) = g\left(e^{x^2} - 1\right) + f(x) = \ln\left(e^{x^2} - 1\right) + e^x$

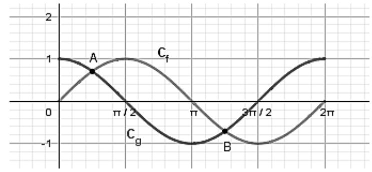
Πρέπει $e^{x^2} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{x^2} > 1 \Leftrightarrow x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$, άρα $A_\varphi = \mathbb{R}^*$.

B6. Για $x > 0$ είναι:

$x \ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow x \ln x = 1 \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{x}$.

Το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $x \ln x - 1 = 0$ είναι το πλήθος των κοινών σημείων των C_g, C_h, οπότε η εξίσωση έχει μόνο μια λύση.

Θέμα Γ



Γ1. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow ημx = συνx \Leftrightarrow$

$\frac{ημx}{συνx} = 1 \Leftrightarrow εφx = 1 \overset{x \in [0, 2\pi]}{\Leftrightarrow} x = \frac{\pi}{4}$ ή

$x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$.

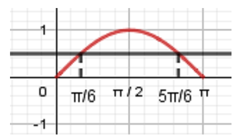
Είναι $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\etaμ\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=\etaμ\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\etaμ\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, οπότε κοινά είναι τα σημεία $A\left(\frac{\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ και $B\left(\frac{5\pi}{4},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Γ2. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $-x\in\mathbb{R}$. Επίσης

$h(-x)=\etaμ^2(-x)=(-\etaμx)^2=\etaμ^2x=f^2(x)=h(x)$, οπότε η h είναι άρτια.

Γ3. Η C_f βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y=\frac{1}{2}$ όταν

$f(x)>\frac{1}{2}\Leftrightarrow \etaμx>\etaμ\frac{\pi}{6}\overset{x\in[0,\pi]}{\Leftrightarrow} x\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$.



Γ4. $f(x)=\frac{3}{5}\Leftrightarrow \etaμx=\frac{3}{5}$.

$\etaμ^2x+συν^2x=1\Leftrightarrow\left(\frac{3}{5}\right)^2+συν^2x=1\Leftrightarrow συν^2x=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}\Leftrightarrow συνx=\pm\frac{4}{5}$.

Επειδή $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ είναι $συνx<0$ άρα $συνx=-\frac{4}{5}$.

Τότε $εφx=\frac{\etaμx}{συνx}=-\frac{3}{4}$ και $σφx=-\frac{4}{3}$.

3 Ισότητα – Πράξεις συναρτήσεων

Ισότητα συναρτήσεων

8. α) Είναι $|x|+2\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε $D_f=D_g=\mathbb{R}$ και

$$f(x)=\frac{x^2-4}{|x|+2}=\frac{|x|^2-4}{|x|+2}=\frac{\cancel{(|x|+2)}(|x|-2)}{\cancel{|x|+2}}=|x|-2=g(x).$$

Άρα $f(x)=g(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Η f ορίζεται όταν: $\begin{cases}x+1>0\\x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1\\x>1\end{cases}\Leftrightarrow x>1$, οπότε $D_f=(1,+\infty)$.

Η g ορίζεται όταν $x^2-1>0\Leftrightarrow x^2>1\Leftrightarrow|x|>1\Leftrightarrow x<-1$ ή $x>1$.

Οπότε $D_g=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$. Είναι $D_f\cap D_g=(1,+\infty)$, άρα για $x\in(1,+\infty)$,

έχουμε: $f(x)=\ln(x+1)+\ln(x-1)=\ln[(x+1)(x-1)]=\ln(x^2-1)=g(x)$.

9. α) $A_f=\mathbb{R}-\{\pm3\}\neq A_g=\mathbb{R}-\{-3\}$, άρα $f\neq g$.

Για $x\in\mathbb{R}-\{\pm3\}$, είναι: $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}=\dfrac{(x+1)\cancel{(x-3)}}{(x+3)\cancel{(x-3)}}=g(x)$.

β) $A_f=A_g=\mathbb{R}$. Για $x\geq0$, είναι $f(x)=\sqrt{x^2}=|x|=x=g(x)$.

γ) $A_f=(-\infty,-1]\cup[0,+\infty)$, $A_g=[0,+\infty)$.

Είναι $A_f\neq A_g$ άρα και $f\neq g$. Όταν $x\in[0,+\infty)$, τότε $f=g$.

δ) $A_f=\mathbb{R}^*$ και η g ορίζεται όταν $x^2-|x|\neq0\Leftrightarrow|x|^2-|x|\neq0\Leftrightarrow x\neq0$ και $x\neq\pm1$, άρα $A_g=\mathbb{R}-\{0,-1,1\}$. Είναι $A_f\neq A_g$ άρα και $f\neq g$.

Για $x\in\mathbb{R}-\{0,-1,1\}$ είναι $f(x)=\dfrac{5|x|^2-|x|}{|x|^2}=\dfrac{5|x|-1}{|x|}$,

$$g(x)=\frac{5|x|^2-6|x|+1}{|x|^2-|x|}=\frac{\cancel{(|x|-1)}(5|x|-1)}{|x|\cancel{(|x|-1)}}=\frac{5|x|-1}{|x|}=f(x).$$

10.α) Η f ορίζεται όταν $x+2>0\Leftrightarrow x>-2$ και $2-x>0\Leftrightarrow x<2$, άρα $A_f=(-2,2)$. Η g ορίζεται όταν $4-x^2>0\Leftrightarrow x^2<4\Leftrightarrow|x|<2\Leftrightarrow -2<x<2$, άρα $A_g=(-2,2)$. Είναι $A_f=A_g$ και

$f(x)=\ln(x+2)+\ln(2-x)=\ln[(x+2)(2-x)]=\ln(4-x^2)=g(x)$.

β) Η f ορίζεται όταν $x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$ και $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$, άρα $A_f=(1,+\infty)$. Η g ορίζεται όταν $\dfrac{x+1}{x-1}>0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x<-1$ ή $x>1$.

Για $x>1$ είναι $f=g$.

γ) $A_f=(3,+\infty)$, $A_g=\mathbb{R}-\{3\}$. Για $x>3$, είναι $f=g$.

11. Αν $x<-1$, τότε $f(x)=-x+1-2x-2+x=-2x-1$. Αν $-1\le x\le 1$, τότε: $f(x)=-x+1+2x+2+x=2x+3=g(x)$ και αν $x>1$, τότε $f(x)=4x+1$.

12.α) Παρατηρούμε ότι για κάθε $x\ge -2$ είναι $\sqrt{x+2}-1=0 \Leftrightarrow \sqrt{x+2}=1 \Leftrightarrow x+2=1 \Leftrightarrow x=-1$ άρα δεν μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε αριθμητή και παρονομαστή με $\sqrt{x+2}-1$.

β) Μπορούμε να δώσουμε τις εξής λύσεις:

1η λύση: Για $x\in[-2,-1)\cup(-1,+\infty)$ εκτελούμε την διαδικασία του μαθητή και παρατηρούμε ότι $f(-1)=0=g(-1)$ άρα $f=g$.

2η λύση: Ξεκινάμε από την g και φτάνουμε στην f.

$$g(x)=\sqrt{x+2}-1=\frac{\left(\sqrt{x+2}-1\right)\left(\sqrt{x+2}+1\right)}{\left(\sqrt{x+2}+1\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{x+2}^2-1}{\sqrt{x+2}+1}=\frac{x+1}{\sqrt{x+2}+1}=f(x).$$ Είναι $\sqrt{x+2}+1\ge 1>0$.

Αυξημένης δυσκολίας

13. Για να είναι $f=g$, αρχικά πρέπει $A_f=A_g$. Επειδή $A_g=\mathbb{R}$ για να έχει και η f πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, πρέπει: $x^2+\lambda x+1\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αυτό ισχύει όταν $\Delta<0 \Leftrightarrow \lambda^2-4<0 \Leftrightarrow \lambda^2<4 \Leftrightarrow |\lambda|<2 \Leftrightarrow -2<\lambda<2$. Επίσης πρέπει $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Είναι: $\dfrac{\lambda x^3+2\lambda x^2+2x+1}{x^2+\lambda x+1}=\lambda x+1 \Leftrightarrow$

$$\lambda x^3+2\lambda x^2+2x+1=\lambda x^3+\lambda^2x^2+\lambda x+x^2+\lambda x+1 \Leftrightarrow$$

$$2\lambda x^2+2x-\lambda^2x^2-\lambda x-x^2-\lambda x=0 \Leftrightarrow -\left(\lambda^2-2\lambda+1\right)x^2+2(1-\lambda)x=0 \Leftrightarrow$$

$$-(\lambda-1)^2x^2+2(1-\lambda)x=0.$$

Η τελευταία σχέση αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ όταν $\begin{cases}(\lambda-1)^2=0\\ 1-\lambda=0\end{cases} \Leftrightarrow \lambda=1$.

14. Η f ορίζεται όταν $x-\alpha \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \alpha$, άρα $A_f = \mathbb{R}-\{\alpha\}$.

Η g ορίζεται όταν $x-\beta-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \beta+1$, άρα $A_g = \mathbb{R}-\{\beta+1\}$.

Για να είναι ίσες οι συναρτήσεις f,g, πρέπει αρχικά να έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού, άρα $\alpha=\beta+1$. Τότε: $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-\beta-1}$ και $g(x)=\dfrac{x^2-(\beta-1)x-\beta}{x-\beta-1}$.

Πρέπει για κάθε $x \in \mathbb{R}-\{\alpha\}$ να είναι

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x-\beta-1}=\frac{x^2-(\beta-1)x-\beta}{x-\beta-1} \Leftrightarrow x^2-1=x^2-(\beta-1)x-\beta \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\beta-1=0\\ 1=\beta\end{cases} \Leftrightarrow \beta=1.$$ Τότε $\alpha=1+1=2$.

15. Η f ορίζεται όταν: $x^2+2x-3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ και $x \neq -3$ άρα $D_f = \mathbb{R}-\{1,-3\}$
.

Η g ορίζεται όταν: $(x-\gamma \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \gamma)$ και $(x+3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3)$, άρα $D_g = \mathbb{R}-\{\gamma,-3\}$. Για να είναι $f=g$ πρέπει $D_f = D_g$, οπότε $\gamma=1$. Τότε

$$g(x)=\frac{\alpha}{x-1}+\frac{\beta}{x+3}=\frac{\alpha(x+3)}{(x-1)(x+3)}+\frac{\beta(x-1)}{(x-1)(x+3)} \Leftrightarrow$$

$$g(x)=\frac{\alpha x+3\alpha+\beta x-\beta}{(x-1)(x+3)}=\frac{(\alpha+\beta)x+3\alpha-\beta}{x^2+2x-3}$$

Για κάθε $x \neq 1$ και $x \neq -3$ είναι $f(x)=g(x) \Leftrightarrow$

$$\frac{2x+2}{x^2+2x-3}=\frac{(\alpha+\beta)x+3\alpha-\beta}{x^2+2x-3} \Leftrightarrow (\alpha+\beta)x+3\alpha-\beta=2x+2 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\alpha+\beta=2\\ 3\alpha-\beta=2\end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} 4\alpha=4 \Leftrightarrow \alpha=1 \text{ και } 1+\beta=2 \Leftrightarrow \beta=1.$$

16.α) Έστω $f(x)=\ln(x^3)$ και $g(x)=3\ln x$, τότε οι f,g έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού το $A=(0,+\infty)$ και για κάθε $x>0$ είναι $f(x)=\ln(x^3)=3\ln x=g(x)$ άρα οι συναρτήσεις είναι ίσες.

β) Έστω $f(x)=\ln(x^2)$ και $g(x)=2\ln x$, τότε η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^*$ και η g έχει πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$, άρα οι συναρτήσεις δεν είναι ίσες.

17. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχουν τουλάχιστον ένα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει: $\varphi(x) \neq 0$. Για $x = 2$ είναι: $\varphi(2) = f^2(16) + f(16) + 1$. Το $\varphi(2)$ είναι τριώνυμο με διακρίνουσα $\Delta < 0$, άρα $f^2(16) + f(16) + 1 \neq 0 \Leftrightarrow \varphi(2) \neq 0$. Οπότε $\varphi(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Πράξεις συναρτήσεων

18.Α) α. Είναι: $f(x)\big(f(x) - 2g(x)\big) + 2g(x) = g(x)\big(2 - g(x)\big) \Leftrightarrow$

$f^2(x) - 2f(x)g(x) + 2g(x) = 2g(x) - g^2(x) \Leftrightarrow$

$f^2(x) - 2f(x)g(x) + g^2(x) = 0 \Leftrightarrow \big(f(x) - g(x)\big)^2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$. Επειδή οι C_f, C_g τέμνονται στα σημεία $A(1,2)$ και $B(5,4)$, ισχύει:

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 5$

β. Είναι $\big(f(x) + g(x)\big)^2 = 2f(x)\big(g(x) + 2\big) + 4\big(g(x) - 2\big) \Leftrightarrow$

$f^2(x) + 2f(x)g(x) + g^2(x) = 2f(x)g(x) + 4f(x) + 4g(x) - 8 \Leftrightarrow$

$f^2(x) - 4f(x) + 4 + g^2(x) - 4g(x) + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\big(f(x) - 2\big)^2 + \big(g(x) - 2\big)^2 = 0 \Leftrightarrow f(x) - 2 = 0$ και $g(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$f(x) = g(x) = 2$. Όμως $f(1) = g(1) = 2$, άρα $f(x) = g(x) = 2 \Leftrightarrow x = 1$.

Β) Έχουμε: $g(x)f(x) - 4g(x) - 2f(x) + 8 < 0 \Leftrightarrow$

$g(x)\big(f(x) - 4\big) - 2\big(f(x) - 4\big) < 0 \Leftrightarrow \big(g(x) - 2\big)\big(f(x) - 4\big) < 0 \quad (1)$

Για να ισχύει η (1) πρέπει: $\begin{cases} g(x) - 2 < 0 \\ f(x) - 4 > 0 \end{cases}$ (α) ή $\begin{cases} g(x) - 2 > 0 \\ f(x) - 4 < 0 \end{cases}$ (β)

(α): Είναι $\begin{cases} g(x) < 2 \\ f(x) > 4 \end{cases}$ Μέσω του σχήματος προκύπτει ότι $\begin{cases} x < 1 \\ x > 5 \end{cases}$, που είναι αδύνατο.

(β): Είναι $\begin{cases} g(x) > 2 \\ f(x) < 4 \end{cases}$ Μέσω του σχήματος προκύπτει ότι $\begin{cases} x > 1 \\ x < 5 \end{cases}$, άρα $x \in (1,5)$

19. Η f ορίζεται όταν $x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$, οπότε $A_f = \mathbb{R} - \{-2\}$.

Η g ορίζεται όταν $x^2 - x - 6 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$ και $x \neq -2$, άρα $A_g = \mathbb{R} - \{-2,3\}$.

Οπότε, στο $A = A_f \cap A_g = \mathbb{R} - \{-2,3\}$ είναι:

$\left(f+g\right)\left(x\right)=f\left(x\right)+g\left(x\right)=\dfrac{x^2-9}{x+2}+\dfrac{x-1}{x^2-x-6}=\dfrac{x^3-3x^2-8x+26}{x^2-x-6}$.

$\left(f\cdot g\right)\left(x\right)=f\left(x\right)\cdot g\left(x\right)=\dfrac{x^2-9}{x+2}\cdot\dfrac{x-1}{x^2-x-6}=\dfrac{\left(x+3\right)\left(x-1\right)}{\left(x+2\right)^2}$.

Η $\dfrac{f}{g}$ ορίζεται όταν $x\in A$ και $g\left(x\right)\neq 0\Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x^2-x-6}\neq 0\Leftrightarrow x\neq 1$.

Άρα $D_{f/g}=\mathbb{R}-\left\{-2,3,1\right\}$ και $\left(\dfrac{f}{g}\right)\left(x\right)=\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\dfrac{\dfrac{x^2-9}{x+2}}{\dfrac{x-1}{x^2-x-6}}=\dfrac{\left(x-3\right)^2\left(x+3\right)}{x-1}$.

20. $A_f=\left[1,+\infty\right)$, $A_g=\left(-\infty,6\right]$. $A_{f+g}=A_{fg}=\left[1,6\right]$.

$\left(f+g\right)\left(x\right)=\sqrt{x-1}+\sqrt{6-x}$, $\left(fg\right)\left(x\right)=\sqrt{x-1}\sqrt{6-x}$.

Για την $\dfrac{f}{g}$ πρέπει επιπλέον: $g\left(x\right)\neq 0\Leftrightarrow x\neq 6$, άρα $A_{\frac{f}{g}}=\left[1,6\right)$ και

$\left(\dfrac{f}{g}\right)\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{6-x}}$. Για τη $\dfrac{g}{f}$ πρέπει $f\left(x\right)\neq 0\Leftrightarrow x\neq 1$, άρα $A_{\frac{g}{f}}=\left(1,6\right]$ και

$\left(\dfrac{g}{f}\right)\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{6-x}}{\sqrt{x-1}}$.

21. Είναι $A_f=\left[-3,6\right]$ και $A_g=\left[0,10\right]$, οπότε $A_f\cap A_g=\left[0,6\right]$. Άρα έχουμε:

Αν $x\in\left[0,4\right)$ είναι: $\left(f+g\right)\left(x\right)=f\left(x\right)+g\left(x\right)=x^2+2x+1-x=x^2+x+1$.

Όταν $x\in\left[4,5\right)$, τότε: $\left(f+g\right)\left(x\right)=f\left(x\right)+g\left(x\right)=x-1+1-x=0$.

Αν $x\in\left[5,6\right]$, τότε: $\left(f+g\right)\left(x\right)=f\left(x\right)+g\left(x\right)=x-1+2x+3=3x+2$.

Άρα: $\left(f+g\right)\left(x\right)=\begin{cases}x^2+x+1, & x\in\left[0,4\right)\\ 0, & x\in\left[4,5\right)\\ 3x+2, & x\in\left[5,6\right]\end{cases}$.

22. Αν $f\left(x\right)=x^2-x+1,\ 0\le x<4$ και $g\left(x\right)=2x+x^2+1,\ -3\le x<3$, τότε $\left(f-g\right)\left(x\right)=-3x$, $x\in\left[0,3\right)$. Αν $f\left(x\right)=x^2-x^2+1$, $0\le x<4$ και $g\left(x\right)=x-4,\ 3\le x\le 15$, τότε $\left(f-g\right)\left(x\right)=x^2-2x+5$, $x\in\left[3,4\right)$.

Αν $f\left(x\right)=2x+5,\ 4\le x\le 8$ και $g\left(x\right)=2x+x^2+1$, $-3\le x<3$, τότε επειδή

$A_f \cap A_g = \varnothing$ δεν ορίζεται η $f - g$. Αν $f(x) = 2x + 5,\ 4 \le x \le 8$ και $g(x) = x - 4,\ 3 \le x \le 15$, τότε $(f - g)(x) = x + 9,\ x \in [4,8]$.

23. $f: x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow x < -2$ ή $x > 2$, $D_f = (-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$.
$g: x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$ άρα $D_g = (2,+\infty)$.

α) $(f+g)(x) = \ln\left[(x-2)^2(x+2)\right],\ x \in (2,+\infty)$,

$$(f-g)(x) = \ln\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}} = \ln(x+2),\ x \in (2,+\infty).$$

β) $\ln\left[(x-2)^2(x+2)\right] \ge \ln(x+2) \Leftrightarrow (x-2)^2\cancel{(x+2)} \ge \cancel{(x+2)} \overset{x>2}{\Leftrightarrow}$
$(x-2)^2 \ge 1 \overset{x>2}{\Leftrightarrow} x - 2 \ge 1 \Leftrightarrow x \ge 3$.

γ) $\ln(x-2) \ne 0 \Leftrightarrow x - 2 \ne 1 \Leftrightarrow x \ne 3$ και $x \in (2,+\infty)$, άρα
$D_{f/g} = (2,3) \cup (3,+\infty)$.

24. Έστω ότι η C_1 είναι η γραφική παράσταση της f και η C_2 της g.
Στο σχήμα βλέπουμε ότι η C_1 τέμνει τον y΄y στο (0,2), οπότε $f(0) = 2$ και η C_2 διέρχεται από το (0,0), άρα $g(0) = 0$. Όμως $g(0) = f(0) + 2 = 4$ άτοπο, άρα η C_2 είναι η γραφική παράσταση της f και η C_1 της g.

25.α) Έστω ότι η C_2 είναι η γραφική παράσταση της f και η C_1 της g.
Στο σχήμα βλέπουμε ότι η C_2 διέρχεται από το y΄y στο (0,0), οπότε $f(0) = 0$ και η C_2 τέμνει τον y΄y στο (0,2), άρα $g(0) = 2$. Όμως $g(0) = 0 \cdot f(0) = 0$ άτοπο, άρα η C_1 είναι η γραφική παράσταση της f και η C_2 της g.

β) Στο σχήμα βλέπουμε ότι η C_1 βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x, άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $x < 0$ τότε $h(x) = \dfrac{x}{f(x)} < 0$, οπότε η γραφική παράσταση της h μπορεί να είναι αυτή στο σχήμα 1.

26. Είναι $f(1) = 4$ και $(f \cdot g)(1) = 4 \Leftrightarrow f(1)g(1) = 4 \Leftrightarrow g(1) = 1$

α) Για $x = 1$ είναι $f(1) + \dfrac{1}{g(1)} = \dfrac{f(1) + g(1)}{g(1)} \Leftrightarrow 4 + \dfrac{1}{1} = \dfrac{1+4}{1} \Leftrightarrow 5 = 5$ άρα η $x = 1$ είναι λύση της εξίσωσης.

β) Για $x=1$ είναι $g(1)=\ln(e)\Leftrightarrow 1=1$ άρα η $x=1$ είναι λύση της εξίσωσης.

Αυξημένης δυσκολίας

27. Είναι: $f(x)\left[f(x)+g(x)-4\right]\le g(x)\left[f(x)-g(x)+4\right]-8\Leftrightarrow$

$f^2(x)+f(x)\cdot g(x)-4f(x)\le f(x)g(x)-g^2(x)+4g(x)-8\Leftrightarrow$

$f^2(x)-4f(x)+4+g^2(x)-4g(x)+4\le 0\Leftrightarrow \left(f(x)-2\right)^2+\left(g(x)-2\right)^2\le 0$.

Άρα $\left(f(x)-2\right)^2+\left(g(x)-2\right)^2=0\Leftrightarrow f(x)-2=0\Leftrightarrow f(x)=2$ και

$g(x)-2=0\Leftrightarrow g(x)=2$. Οπότε $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in A$.

28. $5f^2(x)\ +g^2(x)\le 4(g\cdot f)(x)\Leftrightarrow$

$f^2(x)+4f^2(x)+g^2(x)-4f(x)g(x)\le 0\Leftrightarrow f^2(x)+\left(2f(x)-g(x)\right)^2\le 0\Leftrightarrow$

$f(x)=0$ και $2f(x)-g(x)=0\Leftrightarrow g(x)=0$.

29. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $\dfrac{f^2(x)+\left|g(x)-e^x\right|}{e^x}=2f(x)-e^x\Leftrightarrow$

$f^2(x)+\left|g(x)-e^x\right|=2e^x f(x)-e^{2x}\Leftrightarrow$

$f^2(x)-2e^x f(x)+e^{2x}+\left|g(x)-e^x\right|=0\Leftrightarrow$

$\left(f(x)-e^x\right)^2+\left|g(x)-e^x\right|=0\Leftrightarrow \left(f(x)-e^x=0\Leftrightarrow f(x)=e^x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}\right)$

και $\left(g(x)-e^x=0\Leftrightarrow g(x)=e^x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}\right)$ άρα $f=g$.

30. Έστω ότι η $C_2\equiv C_{g-f}$ και $C_1\equiv C_{-f}$. Τότε είναι

$-f(x)\le x\Leftrightarrow g(x)-f(x)\le g(x)+x$ για κάθε $x\ge 1$.

Επίσης είναι $x\le g(x)-f(x)$ για κάθε $x\ge 1$.

Άρα για κάθε $x\ge 1$ είναι $x\le g(x)-f(x)\le g(x)+x$

Επομένως $x\le g(x)+x\Leftrightarrow g(x)\ge 0$ και καταλήγουμε σε άτοπο.

Γ. Σύνθετες ασκήσεις

31.α) $x^2\left(f(x)-1\right)+|x|f(x)=-1\Leftrightarrow$

$x^2 f(x)-x^2+|x|f(x)=-1\Leftrightarrow\left(x^2+|x|\right)f(x)=x^2-1$ (1)

$x^2+|x|=0 \Leftrightarrow |x|^2+|x|=0 \Leftrightarrow |x|(|x|+1)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $|x|=-1$ αδύνατη.

Αν $x=0$ η (1) γίνεται 0 = -1 και είναι αδύνατη, άρα $x \neq 0$, οπότε η (1) γίνεται:

$f(x)=\dfrac{x^2-1}{|x|(|x|+1)}$. Άρα $D_f=\mathbb{R}^*$.

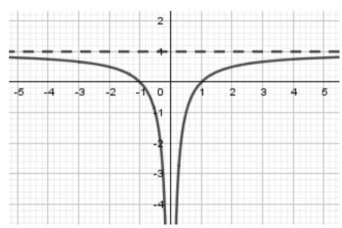
β) Η g ορίζεται όταν $|x| \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$, άρα $D_g=\mathbb{R}^*$, οπότε $D_g=A$.

Είναι $f(x)=\dfrac{x^2-1}{|x|(|x|+1)}=\dfrac{|x|^2-1}{|x|(|x|+1)}=\dfrac{(|x|-1)\cancel{(|x|+1)}}{|x|\cancel{(|x|+1)}}=\dfrac{|x|-1}{|x|} \Leftrightarrow$

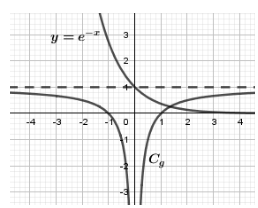
$f(x)=\dfrac{\cancel{|x|}}{\cancel{|x|}}-\dfrac{1}{|x|}=1-\dfrac{1}{|x|}=g(x)$.

γ) Επειδή $f=g$, θα αποδείξουμε ότι η g είναι άρτια. Για κάθε $x \in A_g$, είναι και $-x \in A_g$. Ακόμη $g(-x)=1-\dfrac{1}{|-x|}=1-\dfrac{1}{|x|}=g(x)$, άρα η g είναι άρτια.

δ) Είναι $g(x)=1-\dfrac{1}{|x|}=\begin{cases} 1+\dfrac{1}{x}, & x<0 \\ 1-\dfrac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$.



Η γραφική παράσταση της g αποτελείται από τον κλάδο της υπερβολής $y=\dfrac{1}{x}$ για $x < 0$, που έχει μετατοπιστεί κατακόρυφα κατά 1 μονάδα προς τα πάνω και από τον κλάδο της υπερβολής $y=-\dfrac{1}{x}$ για $x > 0$, που έχει μετατοπιστεί κατακόρυφα κατά 1 μονάδα προς τα πάνω.



ε) $|x|+e^x=|x|e^x \Leftrightarrow$

$|x|=e^x|x|-e^x \Leftrightarrow |x|=e^x(|x|-1)$ (2)

Αν x =0 τότε η (2) είναι αδύνατη, άρα $x \neq 0$ και η (2) γίνεται:

$1=e^x\dfrac{|x|-1}{|x|} \Leftrightarrow \dfrac{1}{e^x}=\dfrac{|x|}{|x|}-\dfrac{1}{|x|} \Leftrightarrow e^{-x}=1-\dfrac{1}{|x|} \Leftrightarrow e^{-x}=g(x)$.

Το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης είναι το πλήθος των κοινών σημείων της C_g με την $y=e^{-x}$.Επειδή για $x < 0$ είναι $e^{-x}>1$, η C_g δεν τέμνει την $y=e^{-x}$ στο διάστημα αυτό. Για $x \geq 0$ βλέπουμε ότι έχουν ένα κοινό σημείο, οπότε η εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση.

32.α) Στο σχήμα βλέπουμε ότι η f έχει μοναδική ρίζα τον θετικό αριθμό ρ, οπότε η εξίσωση $f(\rho)=0 \Leftrightarrow \rho^2+\alpha\rho+4=0$ έχει μοναδική ρίζα. Όμως η εξίσωση είναι 2ου βαθμού, οπότε έχει $\Delta=0 \Leftrightarrow \alpha^2-16=0 \Leftrightarrow \alpha^2=16 \Leftrightarrow \alpha=\pm 4$.
Αν α = 4 τότε $f(x)=x^2+4x+4=(x+2)^2$ και $\rho=-2$ που είναι άτοπο.
Άρα $\alpha=-4$ και $f(x)=x^2-4x+4=(x-2)^2$.

β) Για κάθε $x \neq \lambda$ είναι $g(x)=f(x) \Leftrightarrow \dfrac{x^3-5x^2+8x-3-\lambda}{x-\lambda}=x^2-4x+4 \Leftrightarrow$

$$x^3-5x^2+8x-3-\lambda=(x-\lambda)(x^2-4x+4) \Leftrightarrow$$
$$x^3-5x^2+8x-3-\lambda=x^3-4x^2+4x-\lambda x^2+4\lambda x-4\lambda \Leftrightarrow$$
$$x^3-5x^2+8x-3-\lambda=x^3-(4+\lambda)x^2+(4+4\lambda)x-4\lambda$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει για κάθε $x \neq \lambda$ όταν

$$\begin{cases} 4+\lambda=5 \\ 4+4\lambda=8 \\ 3-\lambda=-4\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=1 \\ 4\lambda=4 \\ 4\lambda-\lambda=3 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda=1.$$

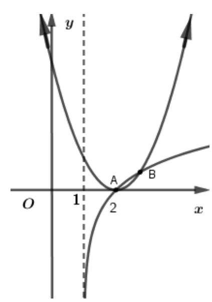
Τότε για $x \neq 1$ είναι $g(x)=\dfrac{x^3-5x^2+8x-3-1}{x-1}=\dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x-1} \Leftrightarrow$

$$g(x)=\frac{\cancel{(x-1)}(x^2-4x+4)}{\cancel{x-1}}=f(x).$$

γ) Αρχικά είναι $e^{4x}(x-1)>0 \overset{e^{4x}>0}{\Leftrightarrow} x-1>0 \Leftrightarrow x>1$.
Τότε η εξίσωση γίνεται: $\ln\left(e^{4x}(x-1)\right)=x^2+4 \Leftrightarrow$

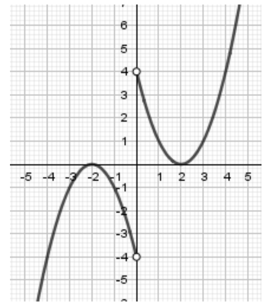
$$\ln e^{4x}+\ln(x-1)=x^2+4 \Leftrightarrow 4x+\ln(x-1)=x^2+4 \Leftrightarrow$$

$\ln(x-1)=x^2-4x+4 \Leftrightarrow \ln(x-1)=f(x)$, οπότε αρκεί να βρούμε το πλήθος των κοινών σημείων της C_f με την γραφική παράσταση της $g(x)=\ln(x-1),\ x>1$.



Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της $y=\ln x$ κατά 1 θέση δεξιά, οπότε διέρχεται από το σημείο Α(2,0) το οποίο είναι και κοινό σημείο με την C_f.
Στο σχήμα παρατηρούμε ότι έχουν και άλλο ένα κοινό σημείο Β, οπότε η εξίσωση έχει 2 λύσεις.

δ) $h(x)=\begin{cases} (x-2)^2,\ x>0 \\ -(-x-2)^2,\ x<0 \end{cases}=\begin{cases} (x-2)^2,\ x>0 \\ -(x+2)^2,\ x<0 \end{cases}.$



i. Η γραφική παράσταση της h αποτελείται από το τμήμα της f για x > 0και από το τμήμα της $y=-(x+2)^2$ για x <0.

ii. Αρχικά βλέπουμε ότι για κάθε $x \in A_h = \mathbb{R}^*$ και $-x \in A_h$. Αν x> 0 τότε $-x<0$, οπότε $h(-x)=-(-x+2)^2=-[-(x-2)]^2=$ $-(x-2)^2=-h(x)$ και αν $x<0$ τότε $-x>0$ οπότε $h(-x)=(-x-2)^2=[-(x+2)]^2=(x+2)^2=-h(x)$ οπότε η h είναι περιττή.

Τράπεζα θεμάτων ΙΕΠ

26637. α) Είναι $D_f=[0,+\infty)$ και $D_g=(0,+\infty)$. Είναι $D_f \cap D_g=(0,+\infty)=D_{fg}$ και $(fg)(x)=\ln x\cdot\sqrt{x}$.

β) Είναι $D_{f/g}=\{x\in D_f\cap D_g\,/\,g(x)\neq 0\}=\{x\in(0,+\infty)/\ln x\neq \ln 1\}=$ $\{x\in(0,+\infty)/x\neq 1\}=(0,1)\cup(1,+\infty)$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\sqrt{x}}{\ln x}$.

γ) Για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ είναι

$$(fg)(x)=\left(\frac{f}{g}\right)(x)\Leftrightarrow \ln x\cdot\sqrt{x}=\frac{\sqrt{x}}{\ln x}\overset{x\in(0,1)\cup(1,+\infty)}{\Leftrightarrow}\ln x=\frac{1}{\ln x}\Leftrightarrow$$
$$\ln^2 x=1\Leftrightarrow \ln x=\pm 1\Leftrightarrow x=e^{\pm 1}.$$

29830. α) Η f ορίζεται όταν $9-x^2\geq 0\Leftrightarrow x^2\leq 9\Leftrightarrow |x|\leq 3\Leftrightarrow -3\leq x\leq 3$, άρα $D_f=[-3,3]$.

Η g ορίζεται όταν $\begin{cases}4-x^2\geq 0\\ x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2\leq 4\\ x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|x|\leq 2\\ x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2\leq x\leq 2\\ x\neq 0\end{cases}$,

άρα $D_g=[-2,0)\cup(0,2]$.

β) i. Είναι $D_{f\cdot g}=D_f\cap D_g=[-2,0)\cup(0,2]$ και

$$(f\cdot g)(x)=f(x)g(x)=\sqrt{9-x^2}\cdot\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}.$$

ii. $D_{\frac{f}{g}}=\{x\in D_f\cap D_g\,/\,g(x)\neq 0\}$.

Είναι:

$g(x)\neq 0 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x}\neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2}\neq 0 \Leftrightarrow 4-x^2\neq 0 \Leftrightarrow x^2\neq 4 \Leftrightarrow x\neq \pm 2$,

άρα $D_{\frac{f}{g}}=(-2,0)\cup(0,2)$ και $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x}}=x\sqrt{\dfrac{9-x^2}{4-x^2}}$.

Ερωτήσεις «Σωστό ή Λάθος»

1. Λ	**2.** Σ	**3.** Λ	**4.** Λ	**5.** Σ	**6.** Σ	**7.** Λ	**8.** Λ	**9.** Σ	**10.** Λ
11. Λ	**12.** Λ	**13.** Λ	**14.** Λ	**15.** Λ	**16.** Λ				

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Είναι $D_f=\mathbb{R}-\{-\beta-2\}$ και $D_g=\mathbb{R}-\{\beta-6\}$, συνεπώς $D_f=D_g$ όταν $-\beta-2=\beta-6 \Leftrightarrow \beta=2$. Τότε $f(x)=\dfrac{3x+3}{x+4}$ και $g(x)=\dfrac{(4-\alpha)x+\gamma-2}{x+4}$, είναι $f(x)=g(x)$ όταν $\begin{cases}4-\alpha=3\Leftrightarrow \alpha=1\\ \gamma-2=3\Leftrightarrow \gamma=5\end{cases}$.

Σωστή απάντηση το Γ.

2. Είναι $D_f=\mathbb{R}$ και $D_g=(0,+\infty)$ με $D_f\cap D_g=A=(0,+\infty)$.

Η συνάρτηση $h(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$ ορίζεται στο σύνολο $B=\{x\in A\,/\,f(x)\neq 0\}=(0,1)\cup(1,+\infty)$ και το πρόσημο της προκύπτει από τον διπλανό πίνακα.

x	0 1	$+\infty$
$\ln x$	-	+
$1-x^2$	+	-
$h(x)$	-	-

Σωστή απάντηση το Α.

3. Είναι $f(x)=\dfrac{x-1}{x}$, $x\neq 0$ και $g(x)=\dfrac{x(x-1)(x+1)}{x-2}$, $x\neq 2$.

Η $h(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$ ορίζεται $x\neq 0, x\neq 2$ και $f(x)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$ δηλαδή $x\neq 0,1,2$

και $h(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{\dfrac{x(x-1)(x+1)}{x-2}}{\dfrac{x-1}{x}}=\dfrac{x^2(x+1)}{x-2}=\dfrac{x^3+x^2}{x-2}$.

Σωστή απάντηση το Δ.

4 Σύνθεση συναρτήσεων

22. $(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(3)=0,\ \ (f\circ g)(1)=f(g(1))=f(-2)=1$.
$(f\circ f)(-2)=f(f(-2))=f(1)=3,\ \ (g\circ g)(5)=g(g(5))=g(1)=-2$.

23.α) $D_f=(-\infty,1],\ f(A)=[0,+\infty),\ D_g=(0,+\infty),\ g(A)=(-1,+\infty)$.

β) $D_{g\circ f}=\{x\in D_f\ /\ f(x)\in D_g\}=\{x\le 1\ /\ f(x)>0\}\Leftrightarrow$

$D_{g\circ f}=\{x\le 1\ /\ x\in(-\infty,-1)\cup(-1,1)\}=(-\infty,-1)\cup(-1,1)$

$D_{f\circ g}=\{x\in D_g\ /\ g(x)\in D_f\}=\{x>0\ /\ g(x)\le 1\}=\{x>0\ /\ 0<x\le 1\}=(0,1]$

γ) i. Στο σχήμα παρατηρούμε ότι υπάρχει μοναδικό $x_1<-1$ τέτοιο, ώστε $f(x_1)=2$, οπότε $f(f(x))=f(x_1)\Leftrightarrow f(x)=x_1$ που είναι αδύνατη αφού το x_1 δεν περιέχεται στο $f(A)$.

ii. Στο σχήμα παρατηρούμε ότι υπάρχει μοναδικό $x_2>1$ τέτοιο, ώστε $g(x_2)=2$ οπότε $g(g(x))=g(x_2)\Leftrightarrow g(x)=x_2$.

Στο σχήμα παρατηρούμε ότι υπάρχει μοναδικό $x_3>0$ τέτοιο, ώστε $g(x_3)=x_2$, οπότε $g(x)=x_2\Leftrightarrow g(x)=g(x_3)\Leftrightarrow x=x_3$.

iii. Αν $\alpha\le -1$ τότε η εξίσωση $g(x)=\alpha$ είναι αδύνατη, ενώ αν α > - 1, η εξίσωση $g(x)=\alpha$ έχει μοναδική λύση.

24. α)

25.Είναι $A_f=[1,+\infty)$ και $A_g=\mathbb{R}-\{2\}$. Η $f\circ g$ ορίζεται όταν:

$$\left.\begin{matrix} x\in A_g \\ g(x)\in A_f\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix} x\ne 2 \\ \dfrac{3x}{x-2}\ge 1\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix} x\ne 2 \\ \dfrac{3x}{x-2}-1\ge 0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix} x\ne 2 \\ \dfrac{3x-x+2}{x-2}\ge 0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} x\ne 2 \\ (2x+2)(x-2)\ge 0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow x\le -1 \text{ ή } x>2.$$ Άρα $A_{fog}=(-\infty,-1]\cup(2,+\infty)$ και

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\sqrt{g(x)-1}\Leftrightarrow (f\circ g)(x)=\sqrt{\frac{3x}{x-2}-1}=\sqrt{\frac{2x+2}{x-2}}.$$

Η $g\circ f$ ορίζεται όταν: $\begin{cases} x\in A_f \\ f(x)\in A_g\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\ge 1 \\ \sqrt{x-1}\ne 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\ge 1 \\ x-1\ne 4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\ge 1 \\ x\ne 5\end{cases}$.

Άρα $A_{g\circ f}=[1,5)\cup(5,+\infty)$ και $(g\circ f)(x)=g(f(x))=\dfrac{3f(x)}{f(x)-2}=\dfrac{3\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}-2}$.

26. $D_f=[0,+\infty)$ και $D_g=\mathbb{R}-\{\pm1\}$. Η $f(g(x))$ ορίζεται όταν:

$$\begin{cases} x\in D_g \\ g(x)\in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R}-\{-1,1\} \\ \dfrac{1}{x^2-1}\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -1 \text{ και } x\neq 1 \\ x^2-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -1 \text{ και } x\neq 1 \\ x^2>1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x\neq -1 \text{ και } x\neq 1 \\ |x|>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -1 \text{ και } x\neq 1 \\ x<-1 \text{ ή } x>1 \end{cases}$$ άρα $x<-1$ ή $x>1$, οπότε

$D_{f\circ g}=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$. $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\sqrt{g(x)}=\sqrt{\dfrac{1}{x^2-1}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

Η $g(f(x))$ ορίζεται όταν: $\begin{cases} x\in D_f \\ f(x)\in D_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in[0,+\infty) \\ \sqrt{x}\in\mathbb{R}-\{-1,1\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ \sqrt{x}\neq -1 \\ \sqrt{x}\neq 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ x\neq 1 \end{cases}$, άρα $D_{g\circ f}=[0,1)\cup(1,+\infty)$ και

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\dfrac{1}{f^2(x)-1}=\dfrac{1}{\left(\sqrt{x}\right)^2-1}=\dfrac{1}{x-1}$.

27. $A_f=\mathbb{R}-\{3\}$, $A_g=\mathbb{R}-\{0\}$. $f\circ g:\begin{cases} x\in A_g \\ g(x)\in A_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ \dfrac{1}{x}\neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ x\neq \dfrac{1}{3} \end{cases}$,

άρα $A_{f\circ g}=\mathbb{R}-\left\{0,\dfrac{1}{3}\right\}$. $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\dfrac{g(x)+1}{g(x)-3}=\ldots=\dfrac{x+1}{1-3x}$.

$g\circ f:\begin{cases} x\in A_f \\ f(x)\in A_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 3 \\ \dfrac{x+1}{x-3}\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 3 \\ x\neq -1 \end{cases}$, $A_{g\circ f}=\mathbb{R}-\{3,-1\}$,

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{x-3}{x+1}$.

$f\circ f:\begin{cases} x\in A_f \\ f(x)\in A_f \end{cases} \Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 3 \\ x\neq 5 \end{cases}$, $A_{f\circ f}=\mathbb{R}-\{5,3\}$,

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=\dfrac{f(x)+1}{f(x)-3}=\dfrac{x-1}{5-x}$.

$g\circ g:\begin{cases} x\in A_g \\ g(x)\in A_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ \dfrac{1}{x}\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\neq 0$, $A_{g\circ g}=\mathbb{R}^*$, $(g\circ g)(x)=\dfrac{1}{g(x)}=x$.

28. $A_f=[1,+\infty)$, $A_g=(-\infty,3]$. $f\circ g:\begin{cases} x\in A_g \\ g(x)\in A_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 3 \\ \sqrt{3-x}\ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x\le 3 \\ 3-x\ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 3 \\ x\le 2 \end{cases} \Rightarrow x\le 2$, άρα $A_{f\circ g}=(-\infty,2]$.

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\sqrt{g(x)-1}=\sqrt{\sqrt{3-x}-1}$.

$g\circ f:\begin{cases} x\in A_f \\ f(x)\in A_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ \sqrt{x-1}\le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x\le 10 \end{cases} \Leftrightarrow 1\le x\le 10$, $A_{g\circ f}=[1,10]$.

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\sqrt{3-\sqrt{x-1}}$.

29. Έστω η συνάρτηση $g(x)=2x-2$. Τότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:
$f(2x-2)=f(g(x))$, οπότε αρκεί να βρούμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f\circ g$. Πρέπει: $\begin{cases} x\in D_g \\ g(x)\in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ -2\le 2x-2\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ 0\le x\le 2 \end{cases}$ άρα $x\in[0,2]$ και $D_{f\circ g}=[0,2]$.

30.α) $0\le \ln x\le 1 \Leftrightarrow 1\le x\le e$, **β)** $0\le e^x\le 1 \Leftrightarrow x\le 0$,

γ) $0\le |x|-1\le 1 \Leftrightarrow 1\le |x|\le 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x\le -1 \text{ ή } x\ge 1 \\ -2\le x\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow x\in[-2,-1]\cup[1,2]$

31.α) Είναι $A_g=\mathbb{R}-\{1\}$ και $A_h=\mathbb{R}^*$. Η $h\circ g$ ορίζεται όταν:

$\begin{cases} x\in A_g \\ g(x)\in A_h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ne 1 \\ \dfrac{1}{x-1}\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\ne 1$, οπότε, $A_{h\circ g}=\mathbb{R}-\{1\}$.

Είναι: $(h\circ g)(x)=h(g(x))=\dfrac{1}{g(x)}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{1-x}}=1-x$.

Η $h\circ g\circ h$ ορίζεται όταν $\begin{cases} x\in A_h \\ h(x)\in A_{h\circ g} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ne 0 \\ \dfrac{1}{x}\ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ne 0 \\ x\ne 1 \end{cases}$.

Άρα, $A_{h\circ g\circ h}=\mathbb{R}-\{0,1\}$.

Είναι: $(h\circ g\circ h)(x)=(h\circ g)(h(x))=1-h(x)=1-\dfrac{1}{x}$.

Η $\underbrace{h\circ g\circ h}\circ g$ ορίζεται όταν: $\begin{cases} x\in A_g \\ g(x)\in A_{h\circ g\circ h}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ \dfrac{1}{1-x}\neq 0 \\ \dfrac{1}{1-x}\neq 1\end{cases}$ ισχύει.

Άρα $A_{h\circ g\circ h\circ g}=\mathbb{R}-\{0,1\}$. Είναι:

$$(h\circ g\circ h\circ g)(x)=(h\circ g\circ h)(g(x))=1-\frac{1}{g(x)}=1-\frac{1}{\frac{1}{1-x}}=1-1+x=x .$$

β) Η f ορίζεται όταν $x-3\neq 0\Leftrightarrow x\neq 3$. Άρα $D_f=\mathbb{R}-\{3\}$. Η $f\circ f$ ορίζεται ό-ταν: $\begin{cases} x\in D_f \\ f(x)\in D_f\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 3 \\ \dfrac{3x-2}{x-3}\neq 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 3 \\ 3x-2\neq 3x-9, \text{ που ισχύει}\end{cases}$.

Άρα, $D_{f\circ f}=\mathbb{R}-\{3\}$ και

$$(f\circ f)(x)=f(f(x))=\frac{3f(x)-2}{f(x)-3}=\frac{3\frac{3x-2}{x-3}-2}{\frac{3x-2}{x-3}-3}=\frac{\frac{9x-6-2x+6}{\cancel{x-3}}}{\frac{3x-2-3x+9}{\cancel{x-3}}}=\frac{7x}{7}=x .$$

32. $f\circ f:\begin{cases} x\in A_f \\ f(x)\in A_f\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ \dfrac{x+2}{x-1}\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ x+2\neq x-1\end{cases} \Leftrightarrow x\neq 1$ και $A_{f\circ f}=\mathbb{R}-\{1\}$,

$$(f\circ f)(x)=f(f(x))=\frac{\frac{x+2}{x-1}+2}{\frac{x+2}{x-1}-1}=...=x .$$

33. $f(x)=x-4\sqrt{x}+4=\left(\sqrt{x}-2\right)^2$.

$$A_{f\circ f}=\{x\in A_f \,/\, f(x)\in A_f\}=\left\{x\geq 0 \,/\, \left(\sqrt{x}-2\right)^2\geq 0\right\}=[0,+\infty) .$$

$$(f\circ f)(x)=f(f(x))=\left(\sqrt{\left(\sqrt{x}-2\right)^2}-2\right)^2=\left(\left|\sqrt{x}-2\right|-2\right)^2 .$$

Για $x\in[0,4]$ είναι:

$$(f\circ f)(x)=f(f(x))=\left(\sqrt{\left(\sqrt{x}-2\right)^2}-2\right)^2=\left(\cancel{2}-\sqrt{x}-\cancel{2}\right)^2=x.$$

34. $g\circ h:\begin{cases} x\geq 1\\ \sqrt{x-1}\neq 0\end{cases}\Rightarrow x>1$ και $(g\circ h)(x)=g(h(x))=\dfrac{1}{x-1}$.

$f\circ g\circ h:\begin{cases} x\in A_{g\circ h}\\ (g\circ h)(x)\in A_f\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x>1\\ \dfrac{1}{x-1}\neq 0\end{cases}\Rightarrow x>1$,

$$(f\circ g\circ h)(x)=f\left(\left((g\circ h)(x)\right)\right)=\frac{1+\dfrac{1}{x-1}}{\dfrac{1}{x-1}}=x.$$

35. $A_g=\mathbb{R}-\{-2\}$. Αν $f(x)=x^2-3x$, $x\leq 0$, η $f\circ g$ ορίζεται όταν:

$\begin{cases} x\in D_g\\ g(x)\in D_f\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\neq -2\\ \dfrac{x+3}{x+2}\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow -3\leq x<-2$, τότε

$$(f\circ g)(x)=\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^2-3\frac{x+3}{x+2}=-\frac{2x^2+9x+9}{(x+2)^2}.$$

Αν $f(x)=\sqrt{x+1}$, $x>0$, τότε η $f\circ g$ ορίζεται όταν:

$$\begin{cases} x\in D_g\\ g(x)\in D_f\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\neq -2\\ \dfrac{x+3}{x+2}>0\end{cases}\Leftrightarrow x<-3 \text{ ή } x>-2,$$

τότε $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\sqrt{\dfrac{x+3}{x+2}+1}=\sqrt{\dfrac{2x+5}{x+2}}$.

36. Αν $f(x)=\dfrac{x}{x-3}$, $x<3$ και $g(x)=\dfrac{1}{x}$, $-5<x<0$, τότε η $f\circ g$ ορίζεται

όταν: $\begin{cases} x\in D_g\\ g(x)\in D_f\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} -5<x<0\\ \dfrac{1}{x}<3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} -5<x<0\\ \dfrac{1-3x}{x}<0\end{cases}\Leftrightarrow -5<x<0$ και

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}-3}=\frac{1}{1-3x}.$$

Αν $f(x)=\frac{x}{x-3}$, $x<3$ και $g(x)=\sqrt{x}$, $0\le x<4$, τότε η $f\circ g$ ορίζεται όταν:

$$\begin{cases} x\in D_g \\ g(x)\in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x<4 \\ \sqrt{x}<3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x<4 \\ x<9 \end{cases} \Leftrightarrow 0\le x<4, \text{ τότε}$$

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}.$$

Αν $f(x)=\frac{x+2}{x+1}$, $x\ge 3$ και $g(x)=\frac{1}{x}$, $-5<x<0$, τότε η $f\circ g$ ορίζεται

όταν: $\begin{cases} x\in D_g \\ g(x)\in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5<x<0 \\ \frac{1}{x}\ge 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5<x<0 \\ \frac{1-3x}{x}\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5<x<0 \\ 0<x\le\frac{1}{3} \end{cases}$ δεν

συναληθεύουν.

Αν $f(x)=\frac{x+2}{x+1}$, $x\ge 3$ και $g(x)=\sqrt{x}$, $0\le x<4$, τότε η $f\circ g$ ορίζεται όταν:

$\begin{cases} x\in D_g \\ g(x)\in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x<4 \\ \sqrt{x}\ge 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x<4 \\ x\ge 9 \end{cases}$ δεν συναληθεύουν.

Αυξημένης δυσκολίας

37. $(f\circ f)(x)=f(f(x))=\alpha(\alpha x+\beta)+\beta=\alpha^2x+\alpha\beta+\beta$. Είναι

$(f\circ f)(x)=9x+4$, οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι: $\begin{cases} \alpha^2=9 \\ \alpha\beta+\beta=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\pm 3 \\ \alpha\beta+\beta=4 \end{cases}$ (1)

• Αν $\alpha=3$ τότε η (1) γίνεται $3\beta+\beta=4\Leftrightarrow 4\beta=4\Leftrightarrow \beta=1$ και $f(x)=3x+1$.

• Αν $\alpha=-3$ τότε η (1) γίνεται $-3\beta+\beta=4\Leftrightarrow -2\beta=4\Leftrightarrow \beta=-2$ και $f(x)=-3x-2$.

38. $(f\circ g)(x)=f(g(x))=3x-\lambda^2+2\lambda+1$,

$(g\circ f)(x)=3(x+2\lambda+1)-\lambda^2=3x+6\lambda+3-\lambda^2$,

$(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)\Leftrightarrow -\lambda^2+2\lambda+1=6\lambda+3-\lambda^2\Leftrightarrow \lambda=-\frac{1}{2}$.

39. $f(g(x))=(x+\beta)^2-\alpha(x+\beta)+\beta=x^2+(2\beta-\alpha)x+\beta^2-\alpha\beta+\beta$.

Είναι: $\begin{cases} 2\beta-\alpha=1 \\ \beta^2-\alpha\beta+\beta=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=2\beta-1 \\ \beta^2-(2\beta-1)\beta+\beta=1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\alpha = 2\beta - 1\\ \beta^2 - 2\beta^2 + \beta + \beta - 1 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha = 2\beta - 1\\ -(\beta - 1)^2 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \beta = 1 \text{ και } \alpha = 1.$$

40. Επειδή $A_f = \mathbb{R} - \{2\}$, η $f \circ f$ ορίζεται όταν:

$$\begin{cases}x \in A_f\\ f(x) \in A_f\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \neq 2\\ \dfrac{\alpha x}{x-2} \neq 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \neq 2\\ \alpha x \neq 2x - 4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \neq 2\\ (\alpha - 2)x \neq -4\end{cases}$$

Αν $\alpha \neq 2$ τότε $x \neq -\dfrac{4}{\alpha - 2}$ και $f(f(x)) = \dfrac{\alpha \dfrac{\alpha x}{x-2}}{\dfrac{\alpha x}{x-2} - 2} = \dfrac{\dfrac{\alpha^2 x}{\cancel{x-2}}}{\dfrac{(\alpha-2)x + 4}{\cancel{x-2}}} = x \Leftrightarrow$

$$\frac{\alpha^2 x}{(\alpha - 2)x + 4} = x \Leftrightarrow \alpha^2 x = (\alpha - 2)x^2 + 4x \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha - 2 = 0\\ \alpha^2 = 4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha = 2\\ \alpha = \pm 2\end{cases} \Rightarrow \alpha = 2$$

άτοπο. Αν $\alpha = 2$ τότε $f(x) = \dfrac{2x}{x-2}$. $f(f(x)) = \dfrac{2\dfrac{2x}{x-2}}{\dfrac{2x}{x-2} - 2} = \dfrac{\dfrac{4x}{x-2}}{\dfrac{4}{x-2}} = x, x \neq 2$.

41. $A_f = \mathbb{R}$, $A_g = (2, +\infty)$. Η $g \circ f$ ορίζεται όταν:

$$\begin{cases}x \in A_f\\ f(x) \in A_g\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \in \mathbb{R}\\ \dfrac{2e^x + 1}{e^x} > 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \in \mathbb{R}\\ 2e^x + 1 > 2e^x\end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}, \text{ άρα } A_{g \circ f} = \mathbb{R} \text{ και}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \ln\left(\frac{2e^x + 1}{e^x} - 2\right) = \ln\frac{1}{e^x} = -\ln e^x = -x.$$

Η $f \circ g$ ορίζεται όταν: $\begin{cases}x \in A_g\\ g(x) \in A_f\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x > 2\\ \ln(x-2) \in \mathbb{R}\end{cases} \Rightarrow x > 2$ και

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{2e^{\ln(x-2)} + 1}{e^{\ln(x-2)}} = \frac{2x - 3}{x - 2} = \frac{-2x + 3}{-x + 2} = \frac{2(g \circ f)(x) + 3}{(g \circ f)(x) + 2}.$$

42. Έστω ότι η C_2 είναι η γραφική παράσταση της f και η C_1 της g. Τότε $g(1) = 0$ και επειδή $(f \circ g)(1) = 0$, είναι $f(g(1)) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$ που είναι αδύνατο αφού η f έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$. Άρα η C_1 είναι η γραφική παράσταση της f και η C_2 της g.

43. Έστω ότι η C_1 είναι η γραφική παράσταση της f και η C_2 της g.
Τότε $D_f = (0,+\infty)$ και $D_g = \mathbb{R}$.
Είναι $D_{f\circ g} = \left\{x \in D_g \,/\, g(x) \in D_f\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, g(x) > 0\right\} = (0,+\infty) \neq \mathbb{R}$ άτοπο.
Άρα η C_2 είναι η γραφική παράσταση της f και η C_1 της g.

44. Επειδή οι γραφικές παραστάσεις των $f\circ g, g\circ f$ τέμνονται στο σημείο $A(1,1)$
είναι $(f\circ g)(1) = (g\circ f)(1) \Leftrightarrow f(g(1)) = g(f(1)) = 1 \quad (1)$
Αντικαθιστούμε στην $f(g(x)) = x^2 - x + 1$ όπου x το $f(x)$ προκύπτει:
$f(g(f(x))) = f^2(x) - f(x) + 1$ και για
$x = 1$: $f(1) = f^2(1) - f(1) + 1 \Leftrightarrow f^2(1) - 2f(1) + 1 = 0 \Leftrightarrow$
$(f(1) - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow f(1) = 1$.
Τότε από την (1): $f(g(1)) = g(1) = 1 \Rightarrow f(1) = g(1) = 1$.
Οπότε και οι C_f, C_g διέρχονται από το A.

45. $f(x) = x \Leftrightarrow x^2 - 5x + 9 = x \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3$, άρα $f(3) = 3$. Είναι $g(f(3)) = f(g(3)) \Leftrightarrow g(3) = g^2(3) - 5g(3) + 9 \Leftrightarrow$
$g^2(3) - 6g(3) + 9 = 0 \Leftrightarrow (g(3) - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow g(3) = 3$. Άρα $f(3) = g(3) = 3$.

46. Έστω $A(\alpha,\alpha)$ το κοινό σημείο της C_f με την $y = x$.
Τότε $f(f(\alpha)) = f(\alpha) = \alpha$.

47. Έστω ότι η $C_{f\circ f}$ τέμνει την y = x στο σημείο A(α, α), $\alpha \in \mathbb{R}$, τότε
$f(f(\alpha)) = \alpha$. Έστω ότι $f(\alpha) = \beta,\ \beta \neq \alpha$, τότε από τη σχέση $f(f(\alpha)) = \alpha$ προκύπτει $f(\beta) = \alpha$. Όμως $f(f(\beta)) = f(\alpha) = \beta$ άτοπο αφού η $f\circ f$ τέμνει την y=x μόνο στο A.
Άρα $f(\alpha) = \alpha$, οπότε και η C_f διέρχεται από το A.

48. Έστω ότι η C_g τέμνει την y = x στο x = ρ, τότε $g(\rho) = \rho$.
Είναι $g(f(\rho)) = f(g(\rho)) \Leftrightarrow g(f(\rho)) = f(\rho)$, δηλαδή το $f(\rho)$ είναι ρίζα της $g(x) = x$. Όμως το ρ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης, άρα $f(\rho) = \rho$ για μοναδική τιμή του ρ.

Είναι $f(\rho)=\rho \Leftrightarrow \alpha\rho^2+\beta\rho+\gamma=\rho \Leftrightarrow \alpha\rho^2+(\beta-1)\rho+\gamma=0$. Επειδή η εξίσωση αυτή έχει μοναδική λύση είναι $\Delta=0 \Leftrightarrow (\beta-1)^2=4\alpha\gamma$.

49.α) Αντικαθιστούμε όπου x το $f(x)$:

$f(f(f(x)))=4f(x)-3 \Leftrightarrow f(4x-3)=4f(x)-3$.

β) Για $x=1$ είναι $f(1)=4f(1)-3 \Leftrightarrow f(1)=1$.

γ) Είναι $f(1)=1$ οπότε η f δεν είναι το μηδενικό πολυώνυμο. Έστω ότι η f είναι ν βαθμού, δηλαδή $f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+\alpha_1 x+\alpha_0$, τότε

$f(f(x))=\alpha_\nu f^\nu(x)+\alpha_{\nu-1}f^{\nu-1}(x)+...+\alpha_1 f(x)+\alpha_0$ και ο βαθμός του $f(f(x))$

θα προκύπτει από τον όρο $\alpha_\nu f^\nu(x)=\alpha_\nu\left(\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+\alpha_1 x+\alpha_0\right)^\nu$ που

τη μεγαλύτερη δύναμη θα έχει ο όρος $\alpha_\nu\left(\alpha_\nu x^\nu\right)^\nu=\alpha_\nu^{1+\nu}x^{\nu^2}$. Άρα ο βαθμός του

$f(f(x))$ είναι ν^2. Όμως $f(f(x))=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα $\nu^2=1 \Leftrightarrow \nu=1$.

Έστω $f(x)=\alpha x+\beta,\ \alpha\neq 0$, τότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:

$f(f(x))=4x-3 \Leftrightarrow \alpha(\alpha x+\beta)+\beta=4x-3 \Leftrightarrow \alpha^2x+\alpha\beta+\beta=4x-3 \Leftrightarrow$

$\begin{cases}\alpha^2=4\\ \alpha\beta+\beta=-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=\pm 2\\ \alpha\beta+\beta=-3\ (2)\end{cases}$. Αν $\alpha=2$ τότε

$2\beta+\beta=-3 \Leftrightarrow 3\beta=-3 \Leftrightarrow \beta=-1$ οπότε $f(x)=2x-1$. Αν $\alpha=-2$ τότε η (2) γίνεται $-2\beta+\beta=-3 \Leftrightarrow -\beta=-3 \Leftrightarrow \beta=3$ οπότε $f(x)=-2x+3$.

50.α) Αντικαθιστούμε όπου x το $f(x)$:

$f(f(f(x)))=f^3(x)+f(x) \Leftrightarrow f(x^3+x)=f^3(x)+f(x)$.

β) Για $x=0$ είναι $\cancel{f(0)}=f^3(0)+\cancel{f(0)} \Leftrightarrow f^3(0)=0 \Leftrightarrow f(0)=0$.

γ) Έστω ότι η f είναι πολυώνυμο. Αν η f είναι το μηδενικό πολυώνυμο, τότε $f(f(x))=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άτοπο αφού $f(f(1))=2$.

Επειδή $f(0)=0$ η f δεν μπορεί να είναι σταθερό πολυώνυμο.

Έστω ότι η f είναι ν βαθμού, δηλαδή $f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+\alpha_1 x+\alpha_0$, τότε $f(f(x))=\alpha_\nu f^\nu(x)+\alpha_{\nu-1}f^{\nu-1}(x)+...+\alpha_1 f(x)+\alpha_0$ και ο βαθμός του $f(f(x))$ θα προκύπτει από τον όρο

$\alpha_\nu f^\nu(x) = \alpha_\nu\left(\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_0\right)^\nu$ που τη μεγαλύτερη δύναμη θα έχει ο όρος $\alpha_\nu\left(\alpha_\nu x^\nu\right)^\nu = \alpha_\nu^{1+\nu} x^{\nu^2}$. Άρα ο βαθμός του $f\left(f(x)\right)$ είναι ν^2.

Όμως $f\left(f(x)\right) = x^3 + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα $\nu^2 = 3 \Leftrightarrow \nu = \sqrt{3}$ αδύνατο.

Άρα η f δεν είναι πολυώνυμο

51.α) Όπου x το $f(x)$, έχουμε $f\left(f\left(f(x)\right)\right) = -f(x) \Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$, άρα f περιττή.

β) Για $x = 0$ είναι $f(0) = -f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$.

Αποσύνθεση

52.α) Η f είναι σύνθεση των συναρτήσεων $g(x) = 2^x$, $h(x) = x^4$, γιατί:

$g\left(h(x)\right) = 2^{h(x)} = 2^{x^4}$.

β) Η f είναι σύνθεση των συναρτήσεων $g(x) = x^2$, $h(x) = \text{συν}x$ και

$\varphi(x) = 4x$, γιατί: $g\left(h\left(\varphi(x)\right)\right) = g(\text{συν}4x) = (\text{συν}4x)^2 = \text{συν}^2 4x$.

γ) Η f είναι σύνθεση των συναρτήσεων $g(x) = x^2 + 5x - 1$ και $h(x) = e^x$,

γιατί: $g\left(h(x)\right) = \left(h(x)\right)^2 + 5h(x) - 1 = \left(e^x\right)^2 + 5e^x - 1 = e^{2x} + 5e^x - 1$.

δ) Η f είναι σύνθεση των συναρτήσεων $g(x) = x^2 + 2x + 3$ και

$h(x) = \ln x,\ x > 0$, γιατί:

$g\left(h(x)\right) = h^2(x) + 2h(x) + 3 = \ln^2 x + 2\ln x + 3 = f(x)$

ε) η f είναι σύνθεση των συναρτήσεων $g(x) = \text{ημ}x$ και $h(x) = 3x$, γιατί:

$g\left(h(x)\right) = \text{ημ}3x = f(x)$.

ζ) η f είναι σύνθεση των συναρτήσεων $g(x) = \ln x$, $h(x) = x^2 + 1$ και

$\varphi(x) = \text{συν}x$, γιατί: $\left(h\left(\varphi(x)\right)\right) = \varphi^2(x) + 1 = \text{συν}^2 x + 1$ και

$g\left(h\left(\varphi(x)\right)\right) = \ln\left(h\left(\varphi(x)\right)\right) = \ln\left(\text{συν}^2 x + 1\right) = f(x)$.

53.γ)

54.α) Έστω $g(x) = u$, τότε: $x - 1 = u \Leftrightarrow x = u + 1$.

Επειδή $f\left(g(x)\right) = x^2 - 2x + 3$, έχουμε:

$f(u)=(u+1)^2-2(u+1)+3=u^2+2u+1-2u-2+3=u^2+2$.

Άρα $f(x)=x^2+2$, $x\in\mathbb{R}$.

β) $x+4=u \Leftrightarrow x=u-4$, τότε $f(u)=2(u-4)^2-5(u-4)+1=2u^2-21u+53$.

γ) Έστω $g(x)=u \Leftrightarrow e^x-1=u \Leftrightarrow e^x=u+1 \Leftrightarrow x=\ln(u+1)$, $u>-1$.

Επειδή $f(g(x))=e^{2x}-2x+3=\left(e^x\right)^2-2x+3$, έχουμε:

$f(u)=(u+1)^2-2\ln(u+1)+3=u^2+2u+4-2\ln(u+1)$, $u>-1$.

Άρα $f(x)=x^2+2x+4-2\ln(x+1)$, $x>-1$.

δ) $x+\frac{1}{x}=u \Rightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^2=u^2 \Leftrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=u^2-2$, τότε

$f(u)=u^2-2-5=u^2-7$.Άρα $f(x)=x^2-7$, $x\in\mathbb{R}$.

ε) Έστω $g(x)=u \Leftrightarrow \ln x+2=u \Leftrightarrow \ln x=u-2 \Leftrightarrow x=e^{u-2}$.

Είναι $f(u)=3(u-2)-2\left(e^{u-2}\right)^2-5=3u-11-2e^{2u-4}$, $u\in\mathbb{R}$.

Άρα $f(x)=3x-11-2e^{2x-4}$, $x\in\mathbb{R}$.

στ) $g(x)=u \Leftrightarrow \sqrt{x-2}=u\geq 0 \Leftrightarrow x=u^2+2$, τότε

$f(u)=\frac{u^2+2-1}{u^2+2+1}=\frac{u^2+1}{u^2+3}$, $u\geq 0$ άρα $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2+3}$, $x\geq 0$.

55. Έστω $2x-1=u \Leftrightarrow 2x=u+1 \Leftrightarrow x=\frac{u+1}{2}$, τότε η σχέση

$f(2x-1)=x^2-3x+2$, γίνεται:

$f(u)=\left(\frac{u+1}{2}\right)^2-3\frac{u+1}{2}+2=\frac{u^2+2u+1}{4}-\frac{3u+3}{2}+2 \Leftrightarrow$

$f(u)=\frac{u^2+2u+1-6u-6+8}{4}=\frac{u^2-4u+3}{4}$, άρα $f(x)=\frac{x^2-4x+3}{4}$, $x\in\mathbb{R}$.

56.α) $f(g(x))=g(x)-1=x^3-2x+3 \Leftrightarrow g(x)=x^3-3x+4$

β) $f(g(x))=\ln(g(x)+2)=2x \Leftrightarrow g(x)=e^{2x}-2$

γ) $f(g(x))=e^{3g(x)}=x-2 \Leftrightarrow g(x)=\frac{1}{3}\ln(x-2)$, $x>2$.

Αυξημένης δυσκολίας

57. Έστω $f(x)=u \Leftrightarrow \frac{x+1}{x+2}=u$, $x \neq -2$.

Τότε: $x+1=ux+2u \Leftrightarrow ux-x=1-2u \Leftrightarrow (u-1)x=1-2u \quad (1)$

Αν $u=1$, τότε η (1) γίνεται $0=-1$ και είναι αδύνατη.

Για $u \neq 1$, έχουμε $x=\frac{1-2u}{u-1}$. Επειδή $x \neq -2$, είναι

$\frac{1-2u}{u-1} \neq -2 \Leftrightarrow 1-2u \neq -2u+2$ που ισχύει. Άρα $x=\frac{1-2u}{u-1}$, $u \neq 1$. Τότε:

$$g(f(x))=\frac{x^2+3x+2}{5x^2+10x+7} \Leftrightarrow g(u)=\frac{\left(\frac{1-2u}{u-1}\right)^2+3\frac{1-2u}{u-1}+2}{5\left(\frac{1-2u}{u-1}\right)^2+10\frac{1-2u}{u-1}+7} \Leftrightarrow$$

$$g(u)=\frac{(1-2u)^2+3(1-2u)(u-1)+2(u-1)^2}{5(1-2u)^2+10(1-2u)(u-1)+7(u-1)^2} \Leftrightarrow g(u)=\frac{u}{7u^2-4u+2}$$

Άρα $g(x)=\frac{x}{7x^2-4x+2}$, $x \in \mathbb{R}-\{1\}$.

58. $f(x)=x^x=e^{\ln x^x}=e^{x\ln x}$. Είναι σύνθεση των e^x και $x\ln x$.

59.α) Για $x=g(1)$ είναι

$(g \circ f)(g(1))=g^2(1)-g(1)+1 \Leftrightarrow g(f(g(1)))=g^2(1)-g(1)+1 \Leftrightarrow$

$g(1)=g^2(1)-g(1)+1 \Leftrightarrow g^2(1)-2g(1)+1=0 \Leftrightarrow$

$(g(1)-1)^2=0 \Leftrightarrow g(1)=1$. Τότε η σχέση $f(g(1))=1$ γίνεται $f(1)=1$, οπότε οι C_f, C_g τέμνονται στο σημείο A(1, 1).

β) Έστω $f(x)=2x-1=u \Leftrightarrow x=\frac{u+1}{2}$. Τότε η σχέση $g(f(x))=x^2-x+1$ γίνεται $g(u)=\left(\frac{u+1}{2}\right)^2-\frac{u+1}{2}+1=\frac{u^2+2u+1}{4}-\frac{2(u+1)}{4}+\frac{4}{4}=\frac{u^2+3}{4}$, $u \in \mathbb{R}$,

οπότε $g(x)=\frac{x^2+3}{4}$, $x \in \mathbb{R}$.

60. Είναι $\left[(f+g)\circ h\right](x)=2x \Leftrightarrow f\left(h(x)\right)+g\left(h(x)\right)=2x$ και

$\left[(f\cdot g)\circ h\right](x)=x^2 \Leftrightarrow f\left(h(x)\right)g\left(h(x)\right)=x^2$.

Θέτουμε $h(x)=u \Leftrightarrow x-1=u \Leftrightarrow x=u+1$.

Τότε: $f(u)+g(u)=2u+2 \Leftrightarrow g(u)=2(u+1)-f(u),\ u\in\mathbb{R}$ οπότε και

$g(x)=2(x+1)-f(x),\ x\in\mathbb{R}\ (1)$.

$f(u)g(u)=(u+1)^2 \Leftrightarrow f(u)\left(2(u+1)-f(u)\right)=(u+1)^2 \Leftrightarrow$

$2(u+1)f(u)-f^2(u)=(u+1)^2 \Leftrightarrow 0=f^2(u)-2(u+1)f(u)+(u+1)^2 \Leftrightarrow$

$\left[f(u)-(u+1)\right]^2=0 \Leftrightarrow f(u)=u+1,\ u\in\mathbb{R}$, οπότε $f(x)=x+1$

και από τη σχέση (1): $g(x)=2(x+1)-(x+1)=x+1$.

Συναρτησιακές σχέσεις

61.α) Για $x=y=0$ είναι $f(0)=0$.

β) Για $y=-x$ είναι $f(-x)=f(x)$.

γ) Όπου y το $-y$: $f(x-y)=f(x)-f(-y)=f(x)-f(y)$.

δ) Για $x=0$ είναι $f(y)=-f(y)\Leftrightarrow f(y)=0$, $y\in\mathbb{R}$ άρα και $f(x)=0, x\in\mathbb{R}$.

62.α) Για $x=y=0$ είναι $f(0)=0$.

β) $y=-x$: $f(0)=xf(-x)+xf(x)\Leftrightarrow x\left(f(-x)+f(x)\right)=0$ και για $x\neq 0$ είναι

$f(-x)=-f(x)$.

γ) Όπου y το $-y$:

$f(x-y)=xf(-y)+yf(x)=x\left(-f(y)\right)+yf(x)=yf(x)-xf(y)$.

63.α) Στη σχέση $f(xy)=f(x)\cdot f(y)+xy-1\ \ (1)$ αντικαθιστούμε $x=y=1$

και προκύπτει: $f(1)=f(1)\cdot f(1)+1-1 \Leftrightarrow f(1)=f^2(1) \Leftrightarrow f(1)-f^2(1)=0 \Leftrightarrow$

$f(1)\left(1-f(1)\right)=0 \Leftrightarrow f(1)=0$

$\left(\text{απορρίπτεται γιατί } f(x)\neq 0,\ x\in\mathbb{R}^*\right)$ ή $f(1)=1$.

β) Η σχέση (1) για $y=\dfrac{1}{x}$, γίνεται: $f\left(x\dfrac{1}{x}\right)=f(x)f\left(\dfrac{1}{x}\right)+x\dfrac{1}{x}-1\Leftrightarrow$

$f(1)=f(x)f\left(\dfrac{1}{x}\right)\Leftrightarrow 1=f(x)f\left(\dfrac{1}{x}\right)\Leftrightarrow f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{f(x)}$.

γ) Αντικαθιστούμε στην (1) όπου y το $\frac{1}{y}$ και προκύπτει:

$$f\left(x\frac{1}{y}\right)=f(x)f\left(\frac{1}{y}\right)+x\frac{1}{y}-1\Leftrightarrow f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)f\left(\frac{1}{y}\right)+\frac{x}{y}-1\Leftrightarrow$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{x}{y}-1.$$

64.α) Για $x=y=1: f(1)=f(1)+f(1)\Leftrightarrow f(1)=0$.

β) Για $y=x$ είναι $f\left(\frac{x}{x}\right)=f(x)+f(x)\Leftrightarrow f(x)=0$, $x\in\mathbb{R}$.

65.α) Για $x=y=0$ είναι: $f(0)=2f(0)+f(0)\Leftrightarrow f(0)=0$.

Επομένως η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στην αρχή O των αξόνων.

β) Για $y=0$ είναι: $f(x+0)=2f(x)+f(0)+2x\Leftrightarrow$

$f(x)=2f(x)+2x\Leftrightarrow f(x)=-2x$, $x\in\mathbb{R}$.

Αυξημένης δυσκολίας

66.α) Η σχέση $f(x-y)-f(x+y)=f(x)f(y)$ (1) για $x=y=0$ γίνεται:

$$f(0)-f(0)=f(0)f(0)\Leftrightarrow f^2(0)=0\Leftrightarrow f(0)=0$$

β) Για $x=0$ η (1) γίνεται: $f(-y)-f(y)=f(0)f(y)\Leftrightarrow$

$f(-y)-f(y)=0\Leftrightarrow f(-y)=f(y)$ (2), $y\in\mathbb{R}$.

γ) Για $y=x$ η (1) γίνεται: $f(x-x)-f(x+x)=f(x)f(x)\Leftrightarrow$

$f(0)-f(2x)=f^2(x)\Leftrightarrow -f(2x)=f^2(x)$.

Αν τώρα αντικαταστήσουμε όπου x το $\frac{x}{2}$ προκύπτει:

$-f\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)=f^2\left(\frac{x}{2}\right)\Leftrightarrow f(x)=-f^2\left(\frac{x}{2}\right)\le 0$ (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Για $y=-x$ η (1) γίνεται: $f(2x)-f(0)=f(-x)f(x)\overset{f\ \text{άρτια}}{\Leftrightarrow} f(2x)=f^2(x)$.

Αν τώρα αντικαταστήσουμε όπου x το $\frac{x}{2}$ προκύπτει: $f(x)=f^2\left(\frac{x}{2}\right)\ge 0$ (2)

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Από (1), (2): $f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

67.α) Για $x=y=1$ είναι

$$f(1)=\frac{1}{6}f^2(1)+\frac{5}{2}-1 \Leftrightarrow f^2(x)-6f(1)+9=0 \Leftrightarrow \left(f(1)-3\right)^2=0 \Leftrightarrow f(1)=3$$

β) Για $y=1$ είναι: $f(x)=\frac{1}{6}f(x)\cdot 3+\frac{5}{2}x-x^2 \Leftrightarrow f(x)=5x-2x^2$.

Εύρεση τύπου συνάρτησης

68.α) Όπου x το $-x$ και σύστημα. Είναι $f(x)=\frac{1}{6}(\sigma\upsilon\nu x+3\eta\mu x)$.

β) Όπου x το $\frac{1}{x}$ και σύστημα. Είναι $f(x)=2x$.

γ) Όπου x το $-x$ προκύπτει: $2f(-x)+3f(x)=x^2+4x \quad (2)$

Λύνοντας το σύστημα έχουμε $f(x)=\frac{1}{5}x^2+4x$, $x\in\mathbb{R}$.

69. Είναι $f\left(\frac{\sqrt{x}}{e}\right)\le \ln x \ (1)$ και $\ln x \le f(x)-\ln x-2 \Leftrightarrow f(x)\ge 2\ln x+2 \quad (2)$

Θέτουμε στην (1) $\frac{\sqrt{x}}{e}=u \Leftrightarrow \sqrt{x}=eu \Leftrightarrow x=e^2u^2$, τότε:

$f(u)\le \ln\left(e^2u^2\right) \Leftrightarrow f(u)\le \ln e^2+\ln u^2 \Leftrightarrow f(u)\le 2+2\ln u$, άρα και

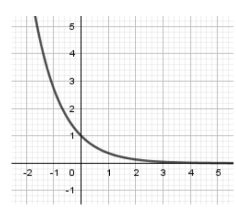
$f(x)\le 2+2\ln x \ (3)$. Από τις (2), (3) είναι $f(x)=2+2\ln x$, $x>0$.

70.α) $f(x+1)\le e^{-x-1}$, $x+1=u \Leftrightarrow x=u-1$ και

$f(u)\le e^{-u+1-1} \Leftrightarrow f(u)\le e^{-u}$, άρα και $f(x)\le e^{-x} \ (1)$,

$e^{-x-1}\le \frac{1}{e}f(x) \Leftrightarrow f(x)\ge e^{-x-1+1} \Leftrightarrow f(x)\ge e^{-x} \quad (2)$

Από τις $(1),(2)$: $f(x)=e^{-x}$.



Αυξημένης δυσκολίας

71. Έστω $1-x=X+2 \Leftrightarrow X=-1-x$.
Αντικαθιστούμε στην δοθείσα σχέση όπου x το $-1-x$ και προκύπτει:

$f\left(1-(-1-x)\right)+2f(-1-x+2)=(-1-x)^2-(-1-x) \Leftrightarrow$

$f(2+x)+2f(1-x)=x^2+2x+1+1+x=x^2+3x+2$. Άρα

$$\begin{cases} f(1-x)+2f(x+2)=x^2-x & \big|(-2) \\ 2f(1-x)+f(x+2)=x^2+3x+2 & \big| \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -2f(1-x)-4f(x+2)=-2x^2+2x \\ 2f(1-x)+f(x+2)=x^2+3x+2 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow}$$

$$-3f(x+2)=-x^2+5x+2 \Leftrightarrow f(x+2)=\frac{1}{3}\left(x^2-5x-2\right)$$

Θέτουμε $x+2=u \Leftrightarrow x=u-2$, οπότε

$$f(u)=\frac{1}{3}\left((u-2)^2-5(u-2)-2\right)=\frac{1}{3}\left(u^2-4u+4-5u+10-2\right) \Leftrightarrow$$

$$f(u)=\frac{1}{3}\left(u^2-9u+12\right)=\frac{1}{3}u^2-3u+4 \quad u \in \mathbb{R} .$$

Άρα $f(x)=\frac{1}{3}x^2-3x+4$, $x \in \mathbb{R}$.

2ος τρόπος: Θέτουμε όπου x το 1-x οπότε έχουμε:

$f(x)+2f(3-x)=(1-x)^2-1+x \Leftrightarrow f(x)+2f(3-x)=x^2-x$ (1).

Θέτουμε όπου x το 3-x στην (1) οπότε έχουμε:

$f(3-x)+2f(x)=(3-x)^2-3+x \Leftrightarrow f(3-x)+2f(x)=x^2-5x+6$.(2)

Λύνουμε το σύστημα που προκύπτει:

$$\begin{cases} f(x)+2f(3-x)=x^2-x & \big| \\ 2f(x)+f(3-x)=x^2-5x+6 & \big|\cdot(-2) \end{cases} \overset{+}{\Rightarrow}$$

$$-3f(x)=-x^2+9x-12 \Leftrightarrow f(x)=\frac{x^2}{3}-3x+4, x \in \mathbb{R}$$

72. Έστω $2-x=X+1 \Leftrightarrow X=1-x$.

Αντικαθιστούμε στην δοθείσα σχέση όπου x το $1-x$ και είναι:

$$2f\left[2-(1-x)\right]+f(1-x+1)=(1-x)^2-3(1-x) \Leftrightarrow$$

$$2f(x+1)+f(2-x)=x^2+x-2$$

Άρα $\begin{cases} 2f(x+1)+f(2-x)=x^2+x-2 & \big|(-2) \\ f(x+1)+2f(2-x)=x^2-3x & \big| \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} -4f(x+1)-2f(2-x)=-2x^2-2x+4 \\ f(x+1)+2f(2-x)=x^2-3x \end{cases} .$$

Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει:

$-3f(x+1)=-x^2-5x+4 \Leftrightarrow f(x+1)=\frac{1}{3}\left(x^2+5x-4\right)$.

Θέτουμε $x+1=u \Leftrightarrow x=u-1$, οπότε: $f(u)=\frac{1}{3}\left[(u-1)^2+5(u-1)-4\right] \Leftrightarrow$

$f(u)=\frac{1}{3}\left(u^2+3u-8\right)$, $u\in\mathbb{R}$. Άρα $f(x)=\frac{1}{3}\left(x^2+3x-8\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

73.α) Για $x=y=0$ είναι $f(0)=0$ και για $y=0$: $f(x)=2x$, $x\in\mathbb{R}$.

β) Για $x=y=1$ είναι $f(1)=0$ και για $x=1$ είναι $f(x)=0$.

74.α) Αν στην (1) θέσουμε όπου x το $-x$ έχουμε:

$(\nu+1)f(-x)+\nu f(x)=-x^{2\nu+1}$ (2). Προσθέτοντας τις (1),(2) κατά μέλη προκύπτει: $(2\nu+1)f(x)+(2\nu+1)f(-x)=0 \Leftrightarrow$

$f(x)+f(-x)=0 \Leftrightarrow f(-x)=-f(x)$ οπότε η f είναι περιττή.

β) Αντικαθιστώντας στην (1) $f(-x)=-f(x)$ προκύπτει:

$$(\nu+1)f(x)-\nu f(x)=x^{2\nu+1} \Leftrightarrow f(x)=x^{2\nu+1}$$

γ) $\begin{cases} y=x^{2\nu+1} \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=x^{2\nu+1} \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{2\nu+1}-x=0 \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(x^{2\nu}-1\right)=0 \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x=0 \text{ ή } x=1\ ,\ x=-1 \\ y=x \end{cases}$.

Άρα κοινά σημεία είναι τα $A(0,0)$, $B(-1,-1)$ και $\Gamma(1,1)$

75. Έστω $\frac{x+1}{x-2}=y \Leftrightarrow x=\frac{2y+1}{y-1}$, οπότε η σχέση γίνεται

$f(y)+2f\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{2y+1}{y-1}$.

Όπου y το $\frac{1}{y}$ και σύστημα προκύπτει $f(y)=\frac{4y+5}{3-3y}$, άρα $f(x)=\frac{4x+5}{3-3x}$

76.α) Για $x=y=z=1$ είναι

$f^2(1)-8f(1)+16\le 0 \Leftrightarrow \left(f(1)-4\right)^2\le 0 \Leftrightarrow f(1)=4$.

β) Για $y = z = 1$ είναι $f(x) \geq 4$.

Για $x = z = 1$ είναι $f(y) \leq 4$ άρα και $f(x) \leq 4$ οπότε $f(x) = 4$, $x \in \mathbb{R}$.

77. Για κάθε $x \neq 0$ είναι $f(x) \geq x^2 ημx + \frac{1}{x}$ (1). Όπου x το $-x$ προκύπτει:

$$f(-x) \geq (-x)^2 ημ(-x) + \frac{1}{-x} \Leftrightarrow -f(x) \geq -x^2 ημx - \frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

$f(x) \leq x^2 ημx + \frac{1}{x}$ (2). Από τις $(1),(2)$ $\Rightarrow f(x) = x^2 ημx + \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

Επειδή η f είναι περιττή, είναι $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για $x = 0$

είναι $f(0) = 0$, άρα $f(x) = \begin{cases} x^2 ημx + \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$.

78.α) Για $x = 1$ είναι $f(1) + 2f(1) = 3g(1) \Leftrightarrow 3f(1) = 3g(1) \Leftrightarrow f(1) = g(1)$.

β) Στη σχέση $f(x-1) + 2f(2-x) = x^2 + x$ (1) όπου x το $3-x$:

$f(2-x) + 2f(x-1) = x^2 - 7x + 12$ (2). Από το σύστημα των (1),(2) προκύπτει:

$f(2-x) = \frac{1}{3}x^2 + 3x - 4$ και για $2 - x = u$: $f(u) = \frac{1}{3}(u^2 - 13u + 10)$, $u \in \mathbb{R}$ άρα

$$f(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 13x + 10),\ x \in \mathbb{R}$$

Είναι $3g(x) = f(x) + 2f(4-3x) = ... \Leftrightarrow g(x) = \frac{1}{9}(19x^2 + 17x - 42)$

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -\frac{9}{2}$, οπότε κοινά σημεία τα $\left(1, -\frac{2}{3}\right), \left(-\frac{9}{2}, \frac{355}{12}\right)$

Σύνθετες ασκήσεις

79.α) $f(1) = 0 \Leftrightarrow λ = 1$.

β) $(f \circ g)(x) = -f(x) \Leftrightarrow \frac{g(x) - 1}{g(x) + 1} = -\frac{x - 1}{x + 1} \overset{g(x) \neq -1}{\Leftrightarrow}$

$$xg(x) + \cancel{g(x)} - \cancel{x} - 1 = -xg(x) + \cancel{g(x)} - \cancel{x} + 1 \Leftrightarrow 2xg(x) = 2 \overset{x \neq 0}{\Leftrightarrow} g(x) = \frac{1}{x}$$

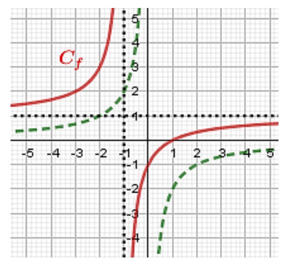
$g(x) \neq -1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} \neq -1 \Leftrightarrow x \neq -1$, άρα $g(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} - \{0, -1\}$.

γ) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$, $x\neq -1$. Για να ορίζεται η $g\circ f$ πρέπει $\begin{cases} x\in D_f \\ f(x)\in D_g \end{cases} \Leftrightarrow$

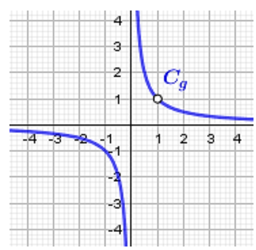
$$\begin{cases} x\neq -1 \\ \dfrac{x-1}{x+1}\neq 0 \\ \dfrac{x-1}{x+1}\neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -1 \\ x\neq 1 \\ x\neq 0 \end{cases} \text{ άρα } D_{g\circ f}=\mathbb{R}-\{0,\pm 1\},$$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\frac{1}{f(x)}=\frac{x+1}{x-1}$$

δ) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{x+1-2}{x+1}=1-\dfrac{2}{x+1}$.



Η γραφική παράσταση της f προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της $y=-\dfrac{2}{x}$ κατά 1 μονάδα αριστερά και μία μονάδα επάνω.



ε) Η $g\circ g$ ορίζεται όταν $\begin{cases} x\in D_g \\ g(x)\in D_g \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x\neq 0,\ x\neq -1 \\ \dfrac{1}{x}\neq -1 \\ \dfrac{1}{x}\neq 0 \text{ ισχύει} \end{cases} \Leftrightarrow x\neq 0,\ x\neq -1.$$

Είναι $(g\circ g)(x)=g(g(x))=\dfrac{1}{\frac{1}{x}}=x$.

80.α) Είναι $D_{f\circ g}=\{x\in D_g \,/\, g(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R} \,/\, e^x\neq 1\}=\mathbb{R}^*$ και

$$(f\circ g)(x)=\frac{1+e^x}{1-e^x}.$$

β) Για να ορίζεται η h πρέπει $e^{-x}-1\neq 0 \Leftrightarrow e^{-x}\neq 1 \Leftrightarrow -x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0$, οπότε $D_h=\mathbb{R}^*=D_{f\circ g}$.

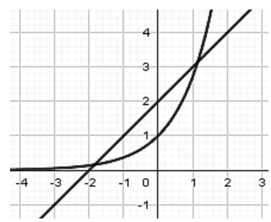
Είναι $h(x)=\dfrac{e^{-x}+1}{e^{-x}-1}=\dfrac{\dfrac{1}{e^x}+1}{\dfrac{1}{e^x}-1}=\dfrac{\dfrac{1+e^x}{\cancel{e^x}}}{\dfrac{1-e^x}{\cancel{e^x}}}=\dfrac{1+e^x}{1-e^x}=(f\circ g)(x)$.

γ) $(f\circ\varphi)(x)=g(x)\Leftrightarrow\dfrac{1+\varphi(x)}{1-\varphi(x)}=e^x\overset{\varphi(x)\neq1}{\Leftrightarrow}1+\varphi(x)=e^x-e^x\varphi(x)\Leftrightarrow$

$\varphi(x)+e^x\varphi(x)=e^x-1\Leftrightarrow\varphi(x)\left(e^x+1\right)=e^x-1\Leftrightarrow\varphi(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1},\ x\in\mathbb{R}$.

δ) $g(x)=(1-x)f(x)+1\Leftrightarrow e^x=\cancel{(1-x)}\dfrac{1+x}{\cancel{1-x}}+1\Leftrightarrow e^x=2+x$. Οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων της C_g με την ευθεία $y=x+2$.

Κάνοντας τη γραφική τους παράσταση βλέπουμε ότι έχουν 2 κοινά σημεία, άρα η εξίσωση έχει 2 λύσεις.



ε) Για κάθε $x\in D_h$ και $-x\in D_h$. Είναι $h(-x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}=-h(x)$.

στ) $(f\circ g)\left(x^2\right)=\dfrac{e^{x^2}+1}{e^{x^2}-1}$. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $e^{x^2}>0\Rightarrow e^{x^2}+1>1>0$ και για κάθε $x\neq0$ είναι $x^2>0\Leftrightarrow e^{x^2}>1\Leftrightarrow e^{x^2}-1>0$, οπότε $(f\circ g)\left(x^2\right)>0$ για κάθε $x\neq0$.

81.α) Θέτω στην $f(-x)=-f(x)$ όπου $x=0$ οπότε $f(0)=0$.

β) Από την $|x|f(x)\geq x+x^3$ (1) έχουμε για $x>0$

$xf(x)\geq x+x^3\overset{:x>0}{\Rightarrow}f(x)\geq1+x^2$ (2). Για $x<0$

$-xf(x)\geq x+x^3\overset{:-x>0}{\Rightarrow}f(x)\geq-1-x^2$ (3). Στην (1) θέτω όπου $x\to-x$

οπότε $|-x|f(-x)\geq-x-x^3$ $\quad|x|(-f(x))\geq-x-x^3\Leftrightarrow-|x|f(x)\geq-x-x^3$

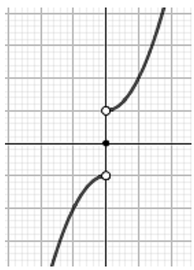
για $x>0$ $\quad-xf(x)\geq-x-x^3\overset{:-x<0}{\Leftrightarrow}f(x)\leq1+x^2$ (4)

για $x<0$ $\quad xf(x)\geq-x-x^3\overset{:x<0}{\Leftrightarrow}f(x)\leq-1-x^2$ (5)

Από $(2),(4)$: $f(x)=1+x^2$ για $x>0$. Από (3), (5):

$f(x)=-1-x^2$ για $x<0$. Άρα $f(x)=\begin{cases}-1-x^2, & x<0\\ 0 & , x=0\\ 1+x^2 & , x>0\end{cases}$.

γ)



δ) Αν $f(x)=-1-x^2,\ x<0$, τότε η $f\circ g$ ορίζεται όταν

$\begin{cases}x\in D_g\\ g(x)\in D_f\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\in\mathbb{R}\\ e^x<0 \text{ αδύνατο}\end{cases}$, άρα δεν ορίζεται η $f\circ g$ στη περίπτωση αυτή.

Αν $f(x)=0,\ x=0$, τότε η $f\circ g$ ορίζεται όταν $\begin{cases}x\in D_g\\ g(x)\in D_f\end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\ e^x=0 \text{ αδύνατο}\end{cases}$, άρα δεν ορίζεται η $f\circ g$ στη περίπτωση αυτή.

Αν $f(x)=1+x^2,\ x>0$, τότε η $f\circ g$ ορίζεται όταν $\begin{cases}x\in D_g\\ g(x)\in D_f\end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\ e^x>0 \text{ ισχύει}\end{cases}$, άρα $D_{f\circ g}=\mathbb{R}$ και $(f\circ g)(x)=1+\left(e^x\right)^2=1+e^{2x}$

$(f\circ g)(x)\le 2g(x)\Leftrightarrow 1+e^{2x}\le 2e^x \Leftrightarrow 1-2e^x+e^{2x}\le 0\Leftrightarrow \left(e^x-1\right)^2\le 0\Leftrightarrow$

$e^x-1=0\Leftrightarrow e^x=1\Leftrightarrow x=0$

82. ***α)*** $g(-x)=-2(-x)+\sqrt{4(-x)^2+1}=2x+\sqrt{4x^2+1}=f(x)$.

β) $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=\left(\sqrt{4x^2+1}\right)^2-(2x)^2=1$.

γ) Αν $x\ge 0\Rightarrow \left.\begin{matrix}2x\ge 0\\ \sqrt{4x^2+1}>0\end{matrix}\right\}\overset{+}{\Rightarrow} 2x+\sqrt{4x^2+1}>0\Leftrightarrow f(x)>0$

$$x \le 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{c} -2x \ge 0 \\ \sqrt{4x^2+1} > 0 \end{array}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} g(x) > 0 .$$

δ) Αφού $f(x)\cdot g(x) = 1 > 0$ τότε $f(x), g(x)$ ομόσημοι.

Οπότε αφού $g(x) > 0$ όταν $x \le 0$ τότε $f(x) > 0$.

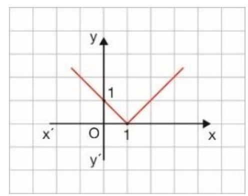
Επίσης αν $x \ge 0$ $f(x) > 0$ άρα $f(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

83.α) $A_f = (-\infty, 1]$, $A_g = \mathbb{R}$, $f\circ g : \begin{cases} x \in A_g \\ g(x) \in A_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ -x^2 + 2x \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$x^2 - 2x + 1 \ge 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \ge 0$ που ισχύει, άρα $A_{f\circ g} = \mathbb{R}$.

$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{1-g(x)} = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$.

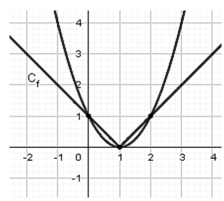
β) $f(A) = [0, +\infty)$.



γ) $(fog)(x) + 2x = x^2 + 1 \Leftrightarrow |x-1| = (x-1)^2 \Leftrightarrow$

$|x-1| - |x-1|^2 = 0 \Leftrightarrow |x-1|(1-|x-1|) = 0 \Leftrightarrow (|x-1| = 0 \Leftrightarrow x = 1)$ ή

$(|x-1| = 1 \Leftrightarrow x - 1 = \pm 1 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = 0)$.



Επειδή η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την $|x-1| = (x-1)^2$ οι λύσεις της είναι οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της $f\circ g$ με την παραβολή $y = (x-1)^2$. Κάνοντας τη γραφική τους παράσταση βλέπουμε ότι τέμνονται στα σημεία (0,1), (1,0) και (2,1).

84.α) $A_f = (0, +\infty)$, $A_g = \mathbb{R}$. $f\circ g : \begin{cases} x \in A_g \\ g(x) \in A_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ e^x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$,

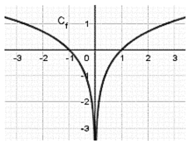
άρα $A_{f\circ g} = \mathbb{R}$, $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = \ln e^x = x$ $g\circ f : \begin{cases} x \in A_f \\ f(x) \in A_g \end{cases} \Leftrightarrow$

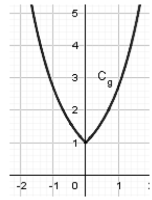
$\begin{cases} x > 0 \\ \ln x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$, άρα $A_{g\circ f} = (0, +\infty)$, $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = e^{\ln x} = x$.

β) Επειδή $A_{f\circ g} \ne A_{g\circ f}$ είναι και $f\circ g \ne g\circ f$.

γ) $x\cdot x\ge 2x^2+x-2\Leftrightarrow x^2+x-2\le 0\Leftrightarrow -2\le x\le 1$. Όμως $x>0$ άρα $x\in(0,1]$.

δ) $g(|x|)=e^{|x|}=\begin{cases}e^x, & x\ge 0\\ e^{-x}, & x<0\end{cases}$ $\qquad f(|x|)=\ln|x|=\begin{cases}\ln x, & x>0\\ \ln(-x), & x<0\end{cases}$





85.α) $f\left(\frac{x}{e}\right)\le \ln x$ θέτουμε $\frac{x}{e}=u\Leftrightarrow x=eu$, τότε

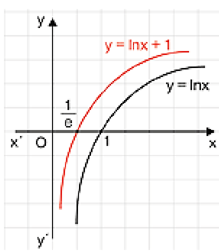
$f(u)\le \ln(eu)=\ln e+\ln u=1+\ln u$, άρα και $f(x)\le \ln x+1,\ x>0\ \ (1)$

Ακόμη $\ln x\le f(x)-1\Leftrightarrow f(x)\ge \ln x+1\ \ (2)$ και από τις $(1),(2)$ προκύπτει ότι $f(x)=\ln x+1,\ x>0$.

β) Η C_f δεν τέμνει τον $y'y$. $f(x)=0\Leftrightarrow \ln x+1=0\Leftrightarrow \ln x=-1\Leftrightarrow$

$x=e^{-1}=\frac{1}{e}$. Τέμνει τον $x'x$ στο $\left(\frac{1}{e},0\right)$.

γ)

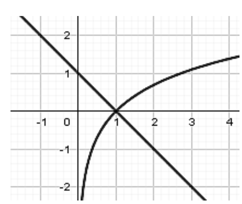


δ) i. Έστω $f(x)=u\Leftrightarrow \ln x=u-1\Leftrightarrow x=e^{u-1}$. Τότε η σχέση

$g(f(x))=\ln x+x-1$ γίνεται $g(u)=u-1+e^{u-1}-1=u-e^{u-1}-2,\ u\in\mathbb{R}$, άρα

$g(x)=x-e^{x-1}-2,\ x\in\mathbb{R}$.

ii. $(g\circ f)(x)=0\Leftrightarrow \ln x+x-1=0\Leftrightarrow \ln x=-x+1$.



Οι ρίζες της εξίσωσης $(g\circ f)(x)=0$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων της συνάρτησης $y=\ln x$ με την ευθεία $y=-x+1$. Κάνοντας τη γραφική τους παράσταση παρατηρούμε ότι μοναδικό σημείο τομής είναι το (1,0), άρα $(g\circ f)(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

86. α) $x^2 < x^2+1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} < \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow |x| < \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow$

$-\sqrt{x^2+1} < x < \sqrt{x^2+1} \Rightarrow x+\sqrt{x^2+1} > 0$ άρα $D_f = \mathbb{R}$.

β) $f(-x) = \ln\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right) = \ln\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x} \Leftrightarrow$

$f(-x) = \ln\dfrac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{-1} = -\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = -f(x)$.

γ) Έστω $g(x) = \ln x,\ h(x) = x-1+\sqrt{(x-1)^2+1},\ t(x) = x+1$.

Είναι $f(x) = g\circ(h\circ t)(x)$.

δ) $f(x+1) = f(-1-x) \Leftrightarrow f(x+1) = -f(x+1) \Leftrightarrow 2f(x+1) = 0 \Leftrightarrow$

$\ln\left(x+1+\sqrt{(x+1)^2+1}\right) = 0 \Leftrightarrow x+1+\sqrt{(x+1)^2+1} = 1 \Leftrightarrow$

$\sqrt{x^2+2x+2} = -x \overset{x\le 0}{\Leftrightarrow} \cancel{x^2}+2x+2 = \cancel{x^2} \Leftrightarrow 2x = -2 \Leftrightarrow x = -1$ δεκτή.

87.α) Για $x = 2$ είναι $f(1) = 2+1-\lambda \Leftrightarrow 2 = 3-\lambda \Leftrightarrow \lambda = 1$.

β) Θέτουμε $x-1 = u \Leftrightarrow x = u+1$. Επειδή $x \neq 1$ είναι $u+1 \neq 1 \Leftrightarrow u \neq 0$.

Τότε η σχέση $f(x-1) = x+\dfrac{1}{x-1}-1$ γίνεται $f(u) = u+\dfrac{1}{u},\ u \neq 0$, άρα

$f(x) = x+\dfrac{1}{x},\ x \neq 0$.

γ) Για κάθε $x \in D_f = \mathbb{R}^*$ και $-x \in D_f$.

$f(-x) = -x+\dfrac{1}{-x} = -x-\dfrac{1}{x} = -f(x) \Leftrightarrow f$ περιττή.

δ) Για κάθε $x \neq 0$ είναι $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\frac{1}{x}} = \dfrac{1}{x}+x = f(x)$.

ε) Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = k,\ k \in (-2,2)$ είναι αδύνατη.

$f(x) = k \Leftrightarrow x+\dfrac{1}{x} = k \Leftrightarrow x^2-kx+1 = 0$. Η τελευταία έχει $\Delta = k^2-4 < 0$ και είναι αδύνατη.

στ) $f\left(-\dfrac{1}{x}\right)+f(x) = 2+f(-x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -f\left(\dfrac{1}{x}\right)+f(x) = 2-f(x) \Leftrightarrow$

$-f(x)+f(x)=2-f(x)\Leftrightarrow f(x)=2\Leftrightarrow x+\dfrac{1}{x}=2\Leftrightarrow x^2-2x+1=0\Leftrightarrow$

$(x-1)^2=0\Leftrightarrow x=1$.

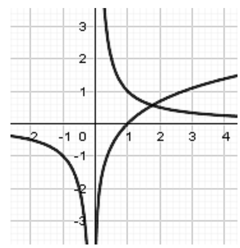
88.α) Είναι $D_{f\circ g}=\left\{x\in D_g\,/\,g(x)\in D_f\right\}=\left\{x\neq 1\,/\,\dfrac{1+x}{1-x}>0\right\}=$

$\left\{x\neq 1\,/\,(1+x)(1-x)>0\right\}=(-1,1)$ και $h(x)=(f\circ g)(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

β) Για κάθε $x\in D_h$ και $-x\in D_h$.

Είναι $h(-x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}=\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{-1}=-\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)=-h(x)$.

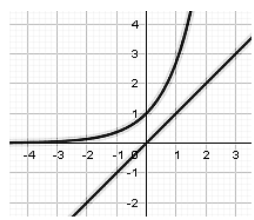
γ) Για κάθε $x>0$ είναι $xf(x)=1\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{1}{x}$.



Οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και $y=\dfrac{1}{x}$.
Κάνοντας τη γραφική τους παράσταση βλέπουμε ότι έχουν 1 κοινό σημείο, άρα η εξίσωση έχει 1 λύση.

δ) i. Θέτουμε $\ln x=u\Leftrightarrow e^u=x,\ u\in\mathbb{R}$. Τότε η σχέση $h(f(x))=x-\ln x$ γίνεται: $h(u)=e^u-u,\ u\in\mathbb{R}$, άρα $h(x)=e^x-x,\ x\in\mathbb{R}$.

ii. $h(x)=0\Leftrightarrow e^x-x=0\Leftrightarrow e^x=x$.



Οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των $y=e^x$ και $y=x$. Κάνοντας τη γραφική τους παράσταση βλέπουμε ότι δεν έχουν κοινό σημείο, άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

89.α) Για να τέμνει η C_f την y = x μόνο σε ένα σημείο, αρκεί η εξίσωση $f(x)=x$ να έχει μοναδική λύση.

90.Είναι $f(x)=x\Leftrightarrow 2x^2-7x+8=x\Leftrightarrow 2x^2-8x+8=0\Leftrightarrow$

$x^2-4x+4=0\Leftrightarrow(x-2)^2=0\Leftrightarrow x=2$.

Άρα η C_f τέμνει την y = x στο A(2,2).

β) Αρκεί και η C_g να διέρχεται από το A, δηλαδή $g(2)=2$. Είναι:

$(f\circ g)(2)=(g\circ f)(2)\Leftrightarrow f(g(2))=g(f(2))\Leftrightarrow$

$2g^2(2)-7g(2)+8=g(2)\Leftrightarrow 2g^2(2)-8g(2)+8=0\Leftrightarrow$

$g^2(2)-4g(2)+4=0\Leftrightarrow (g(2)-2)^2=0\Leftrightarrow g(2)=2$.

γ) i. Έστω $g(x)=\alpha x+\beta,\ \alpha\neq 0$.Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$f(g(x))=g(f(x))\Leftrightarrow 2(\alpha x+\beta)^2-7(\alpha x+\beta)+8=\alpha(2x^2-7x+8)+\beta\Leftrightarrow$

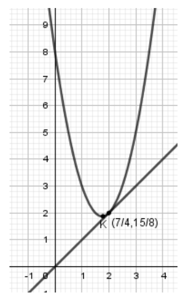
$2\alpha^2x^2+4\alpha\beta x+2\beta^2-7\alpha x-7\beta+8=2\alpha x^2-7\alpha x+8\alpha+\beta\Leftrightarrow$

$2\alpha^2x^2+\alpha(4\beta-7)x+2\beta^2-7\beta+8=2\alpha x^2-7\alpha x+8\alpha+\beta$.

Η τελευταία ισότητα ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, αν και μόνο αν

$$\begin{cases}2\alpha^2=2\alpha\\ \cancel{\alpha}(4\beta-7)=-7\cancel{\alpha}\\ 2\beta^2-7\beta+8=8\alpha+\beta\end{cases}\overset{\alpha\neq 0}{\Leftrightarrow}\begin{cases}2\alpha(\alpha-1)=0\\ 4\beta=0\\ 8=8\alpha\end{cases}\overset{\alpha\neq 0}{\Leftrightarrow}\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=0\\ \alpha=1\end{cases}$$, άρα

$g(x)=x$.



Η f είναι παραβολή με κορυφή $K\left(\dfrac{7}{4},\dfrac{15}{8}\right)$ και τέμνει τον y΄y στο (0,8).

Για κάθε $x\geq 0$ είναι $(f\circ g)(x)=x-\sqrt{x}\Leftrightarrow$

$f(g(x))=x-\sqrt{x}\Leftrightarrow \ln g(x)=x-\sqrt{x}\Leftrightarrow g(x)=e^{x-\sqrt{x}}$.

Έστω οι συναρτήσεις $h(x)=x^2-x$, $x\in\mathbb{R}$, $\varphi(x)=\sqrt{x}$, $x\geq 0$ και

$k(x)=e^x$, $x\in\mathbb{R}$. Αρχικά θα ορίσουμε την $h\circ\varphi$.

Πρέπει $\begin{cases}x\in D_\varphi\\ \varphi(x)\in D_h\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0\\ \sqrt{x}\in\mathbb{R}\end{cases}\Leftrightarrow x\geq 0$ άρα η $h\circ\varphi$ έχει πεδίο ορισμού το

$D_{h\circ\varphi}=[0,+\infty)$ και είναι

$(h\circ\varphi)(x)=h(\varphi(x))=\varphi^2(x)-\varphi(x)=\sqrt{x}^2-\sqrt{x}=x-\sqrt{x}$, $x\geq 0$.

Στην συνέχεια θα ορίσουμε την $k\circ(h\circ\varphi)$. Πρέπει

$\begin{cases}x\in D_{h\circ\varphi}\\ (h\circ\varphi)(x)\in D_k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0\\ (h\circ\varphi)(x)\in\mathbb{R}\end{cases}\Leftrightarrow x\geq 0$ άρα η $k\circ(h\circ\varphi)$ έχει πεδίο ορισμού το $[0,+\infty)$ και είναι

$(k\circ(h\circ\varphi))(x)=k((h\circ\varphi)(x))=e^{(h\circ\varphi)(x)}=e^{x-\sqrt{x}}$, $x\geq 0$.

Άρα η g ορίζεται ως η $k\circ(h\circ\varphi)$.

γ) i. Πρέπει $(f\circ g)(x)\ge 0 \Leftrightarrow x-\sqrt{x}\ge 0$.

1^{ος} τρόπος: $x-\sqrt{x}\ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}^2-\sqrt{x}\ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\ge 0$.

Είναι $\sqrt{x}\ge 0$ για κάθε $x\ge 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=0$.

Είναι $\sqrt{x}-1=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}=1 \Leftrightarrow x=1$ και $\sqrt{x}-1>0 \Leftrightarrow \sqrt{x}>1 \Leftrightarrow x>1$.

Προκύπτει ο διπλανός πίνακας. Άρα

$\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\ge 0 \Leftrightarrow x\in[1.+\infty)\cup\{0\}$

x	$-\infty$	0		1		$+\infty$
$\sqrt{x}$		0	+		+	
$\sqrt{x}-1$			-	0	+	
$\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)$		0	-	0	+	

2^{ος} τρόπος: $x-\sqrt{x}\ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}\le x \overset{x\ge 0}{\Leftrightarrow} x\le x^2 \Leftrightarrow x(x-1)\ge 0$ και ομοίως με πινακάκι βρίσκουμε ίδιο αποτέλεσμα.

ii. Για να βρίσκεται η $C_{f\circ g}$ στο 1^{ο} τεταρτημόριο πρέπει $x>0$ και

$(f\circ g)(x)>0 \Leftrightarrow x-\sqrt{x}>0 \Leftrightarrow x>1$ άρα τελικά πρέπει $x>1$.

δ) Αρχικά για να είναι f = V πρέπει να έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού. Για την V πρέπει $x^{\lambda}>0$. Αν λ άρτιος τότε $x^{\lambda}>0 \Leftrightarrow x\ne 0$ ενώ αν λ περιττός τότε $x^{\lambda}>0 \Leftrightarrow x>0$. Επομένως πρέπει ο λ περιττός και $\lambda\in[2,4]$ είναι φυσικός άρα $\lambda=3$. Επίσης πρέπει για κάθε $x>0$ να είναι

$$f(x)=V(x) \Leftrightarrow \ln x=\frac{1}{\mu}\ln\left(x^3\right) \Leftrightarrow \ln x=\frac{3}{\mu}\ln x \Leftrightarrow \frac{3}{\mu}=1 \Leftrightarrow \mu=3$$

ε) Για να ορίζεται η $\frac{1}{f}$ πρέπει $\begin{cases} x\in D_f \\ f(x)\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ άρα η $\frac{1}{f}$ έχει πεδίο ορισμού το $(0,1)\cup(1,+\infty)$ και είναι

$\left(\frac{1}{f}\right)(x)=\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\ln x}$, $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$.

Για να ορίζεται η $\sqrt{f}$ πρέπει $\begin{cases} x\in D_f \\ f(x)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \ln x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 1$ άρα η $\sqrt{f}$ έχει πεδίο ορισμού το $[1,+\infty)$ και είναι $\left(\sqrt{f}\right)(x)=\sqrt{f(x)}=\sqrt{\ln x}$, $x\ge 1$.

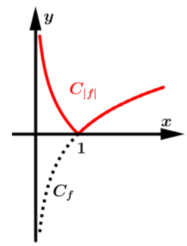
Για να ορίζεται η $f(|x|)$ πρέπει $\begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ |x|\in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ |x|>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ x\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\ne 0$ άρα η $f(|x|)$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^*$ και είναι $f(|x|)=\ln|x|=\begin{cases} \ln(-x), & x<0 \\ \ln x, & x>0 \end{cases}$.

Για να ορίζεται η $f\left(\frac{1}{|x|}\right)$ πρέπει $\begin{cases}|x|\neq 0\\ \frac{1}{|x|}\in D_f\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\ |x|>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\ x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\neq 0$ άρα η

$f\left(\frac{1}{|x|}\right)$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^*$ και είναι

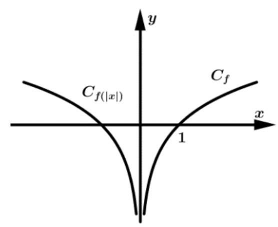
$$f\left(\frac{1}{|x|}\right)=\ln\frac{1}{|x|}=\ln 1-\ln|x|=-\ln|x|=\begin{cases}-\ln(-x)\ , \ x<0\\ -\ln x \quad , \ x>0\end{cases}.$$

στ) Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα σημεία της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x και από τα συμμετρικά των σημείων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x΄x.



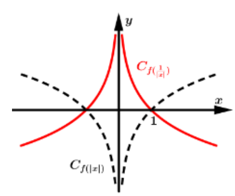
Είναι $f(|x|)=\begin{cases}\ln(-x)\ , \ x<0\\ \ln x \quad , \ x>0\end{cases}=\begin{cases}f(-x)\ , \ x<0\\ f(x)\ , \ x>0\end{cases}.$

Άρα η γραφική παράσταση της $f(|x|)$ αποτελείται από τη γραφική παράσταση της f και τη συμμετρική της ως προς τον άξονα y΄y.



Είναι $f\left(\frac{1}{|x|}\right)=\begin{cases}-\ln(-x)\ , \ x<0\\ -\ln x \quad , \ x>0\end{cases}=-f(|x|).$

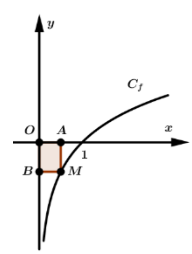
Άρα η γραφική παράσταση της $f\left(\frac{1}{|x|}\right)$ είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(|x|)$ ως προς τον άξονα x΄x.



ζ) Το σημείο Μ είναι $M(x,f(x))\equiv M(x,\ln x)$ και οι προβολές του πάνω στους άξονες είναι τα σημεία $A(x,0)$ και $B(0,\ln x)$.

- Αν $0<x<1$ τότε $\ln x<0$ και είναι:

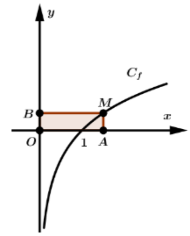
$$E_{OAMB}=(OA)(OB)=|x||\ln x|=x(-\ln x)=-x\ln x\ .$$



- Αν $x>1$ τότε $\ln x>0$ και είναι:

$E_{OAMB}=(OA)(OB)=|x||\ln x|=x\ln x$.

Άρα είναι $E(x)=|x\ln x|$, $x>0$.



Τράπεζα θεμάτων ΙΕΠ

28304. α) Επειδή η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία Α, Β, Γ ισχύει ότι $f(2)=2$, $f(-2)=2$ και $f(0)=-2$.

β) $(gof)(2)=g(f(2))=g(2)=|2|=2$,

$(gof)(-2)=g(f(-2))=g(2)=|2|=2$,

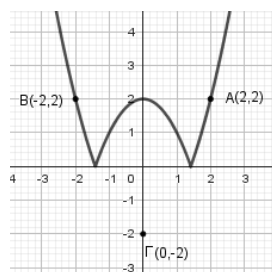
$(gof)(0)=g(f(0))=g(-2)=|-2|=2$.

γ) Είναι:

$D_{g\circ f}=\{x\in D_f\,/\,f(x)\in D_g\}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,f(x)\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$

και $(gof)(x)=g(f(x))=|f(x)|$.

Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα σημεία της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x ή πάνω σε αυτόν και από τα συμμετρικά των σημείων της που βρίσκονται κάτω από τον x΄x ως προς αυτόν και φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



29832. α) Η f ορίζεται όταν $e^x-1\neq 0\Leftrightarrow e^x\neq 1\Leftrightarrow x\neq 0$, άρα $D_f=\mathbb{R}^*$.

Η g ορίζεται όταν $\dfrac{1-x}{1+x}>0\Leftrightarrow(1-x)(1+x)>0\Leftrightarrow -1<x<1$ άρα $D_g=(-1,1)$.

β) $D_{f\circ g}=\{x\in D_g\,/\,g(x)\in D_f\}=\left\{x\in(-1,1)\,/\,\ln\dfrac{1-x}{1+x}\neq 0\right\}=(-1,0)\cup(0,1)$

γιατί $\ln\dfrac{1-x}{1+x}\neq 0\Leftrightarrow\dfrac{1-x}{1+x}\neq 1\Leftrightarrow 1-x\neq 1+x\Leftrightarrow 2x\neq 0\Leftrightarrow x\neq 0$.

γ) Είναι $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\dfrac{e^{\ln\frac{1-x}{1+x}}+1}{e^{\ln\frac{1-x}{1+x}}-1}=\dfrac{\dfrac{1-x}{1+x}+1}{\dfrac{1-x}{1+x}-1}=\dfrac{\dfrac{1-x+1+x}{\cancel{1+x}}}{\dfrac{1-x-1-x}{\cancel{x}}}=\dfrac{2}{-2x}=-\dfrac{1}{x}$.

35168. α) Η f ορίζεται όταν $1+e^x>0 \Leftrightarrow e^x>-1$ ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε $D_f=\mathbb{R}$. Η g ορίζεται όταν $x>0$ οπότε $D_g=(0,+\infty)$.

β) $D_{f\circ g}=\{x\in D_g\,/\,g(x)\in D_f\}=\{x\in(0,+\infty)\,/\,\ln(1+x^2)\in\mathbb{R}\}=(0,+\infty)$.

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\ln\left(1+e^{2\ln x}\right)=\ln\left(1+e^{\ln x^2}\right)=\ln\left(1+x^2\right)$.

γ) Η h ορίζεται όταν $1+x^2>0\Leftrightarrow x^2>-1$ ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε $D_h=\mathbb{R}$
Επειδή $D_{f\circ g}\neq D_h$ οι συναρτήσεις $f\circ g$ και h δεν είναι ίσες.

29831. α) Η g ορίζεται όταν
$\dfrac{1-x}{1+x}>0\Leftrightarrow(1-x)(1+x)>0\Leftrightarrow 1-x^2>0\Leftrightarrow x^2<1\Leftrightarrow|x|<1\Leftrightarrow -1<x<1$,
άρα $D_g=(-1,1)$.

β) $D_{f\circ g}=\{x\in D_g\,/\,g(x)\in D_f\}=\left\{x\in(-1,1)\,/\,\ln\dfrac{1-x}{1+x}\neq 0\right\}=$

$$=\left\{x\in(-1,1)\,/\,\ln\frac{1-x}{1+x}\neq\ln 1\right\}\Leftrightarrow$$

$$D_{f\circ g}=\left\{x\in(-1,1)\,/\,\frac{1-x}{1+x}\neq 1\right\}=\{x\in(-1,1)\,/\,1-x\neq 1+x\}=$$

$$=\{x\in(-1,1)\,/\,2x\neq 0\}\Leftrightarrow$$

$$D_{f\circ g}=\{x\in(-1,1)\,/\,x\neq 0\}=(-1,0)\cup(0,1).$$

γ) Για κάθε $x\in(-1,0)\cup(0,1)$ είναι:

$$f(g(x))=\frac{e^{g(x)}+1}{e^{g(x)}-1}=\frac{\dfrac{1-x}{1+x}+1}{\dfrac{1-x}{1+x}-1}=\frac{\dfrac{1-x+1+x}{1+x}}{\dfrac{1-x-1-x}{1+x}}=\frac{\dfrac{2}{1+x}}{\dfrac{-2x}{1+x}}=\frac{2}{-2x}=-\frac{1}{x}$$

Κριτήριο αξιολόγησης μέχρι και τη σύνθεση συναρτήσεων

Θέμα Α

Α1. α) Σ **β)** Σ **γ)** Λ **δ)** Λ **ε)** Λ, **Α2. 1.** β **2.** δ **3.** γ **4.** ε **5.** α

Θέμα Β

Β1. Επειδή η γραφική παράσταση της f από το σημείο Μ ισχύει ότι

$$f(3)=7 \Leftrightarrow \frac{3\alpha+1}{3-\alpha}=7 \Leftrightarrow 3\alpha+1=21-7\alpha \Leftrightarrow 10\alpha=20 \Leftrightarrow \alpha=2$$

Β2. Είναι $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-2}$ με $D_f=\mathbb{R}-\{2\}$. Για να ορίζεται η $f\circ f$ πρέπει:

$$\begin{cases} x\in D_f \\ f(x)\in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 2 \\ \dfrac{2x+1}{x-2}\neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 2 \\ \cancel{2x}+1\neq \cancel{2x}-4 \text{ ισχύει} \end{cases}, \text{ άρα } D_{f\circ f}=\mathbb{R}-\{2\}.$$

Η $f\circ f$ έχει τύπο

$$(f\circ f)(x)=f(f(x))=\frac{2\cdot\dfrac{2x+1}{x-2}+1}{\dfrac{2x+1}{x-2}-2}=\frac{\dfrac{4x+2+x-2}{\cancel{x-2}}}{\dfrac{2x+1-2x+4}{\cancel{x-2}}}=\frac{\cancel{5}x}{\cancel{5}}=x$$

Β3. Η γραφική παράσταση της f δεν βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x όταν

$f(x)\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x+1}{x-2}\geq 0 \Leftrightarrow$ $(2x+1)(x-2)\geq 0$ και $x\neq 2$. Άρα $x\in\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]\cup(2,+\infty)$.

x	−∞	-1/2		2	+∞
$2x+1$	−	●	+		+
$x-2$	−		−	○	+
$(2x+1)(x-2)$	+	●	−	○	+

Β4. Για να ανήκει το 2 στο σύνολο τιμών της f πρέπει να υπάρχει $x\neq 2$ τέτοιο, ώστε $f(x)=2$. Είναι $f(x)=2 \Leftrightarrow \dfrac{2x+1}{x-2}=2 \Leftrightarrow \cancel{2x}+1=\cancel{2x}-4$ αδύνατο.

Άρα το 2 δεν ανήκει στο σύνολο τιμών της f.

Β5. $(f\circ g)(x)=x+2 \Leftrightarrow f(g(x))=x+2 \Leftrightarrow \dfrac{2g(x)+1}{g(x)-2}=x+2 \Leftrightarrow$

$\cancel{2g(x)}+1=x\,g(x)-2x+\cancel{2g(x)}-4 \Leftrightarrow$

$x\,g(x)=2x+5 \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} g(x)=2+\dfrac{5}{x},\ x\neq 0$.

Β6. Επειδή για κάθε $x \neq 2$ είναι $(f \circ f)(x) = x$, έχουμε:

$$(f \circ f \circ f)(x) = (f \circ f)(3) \Leftrightarrow f\left(\underbrace{f(f(x))}_{x}\right) = 3 \Leftrightarrow f(x) = 3 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-2} = 3 \Leftrightarrow$$

$2x + 1 = 3x - 6 \Leftrightarrow x = 7$.

Θέμα Γ

Γ1. $2f(x) + f(-x) = 3x^2 - 4x + 9 \Leftrightarrow f(-x) = 3x^2 - 4x + 9 - 2f(x) \quad (1)$

Αντικαθιστώντας στην (1) όπου x το – x προκύπτει:

$$f(x) = 3(-x)^2 - 4(-x) + 9 - 2f(-x) \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$f(x) = 3x^2 + 4x + 9 - 2\left(3x^2 - 4x + 9 - 2f(x)\right) \Leftrightarrow$$

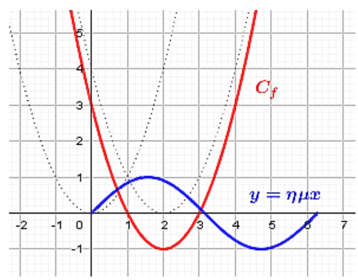
$$f(x) = 3x^2 + 4x + 9 - 6x^2 + 8x - 18 + 4f(x) \Leftrightarrow$$

$$-3f(x) = -3x^2 + 12x - 9 \Leftrightarrow f(x) = x^2 - 4x + 3.$$

Γ2. Το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $x^2 - 4x + 3 = \eta\mu x$ ισοδυναμεί με το πλήθος των κοινών σημείων της C_f με την $y = \eta\mu x$.

Είναι $f(x) = x^2 - 4x + 4 - 1 = (x-2)^2 - 1$.

Η γραφική παράσταση της f προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της $y = x^2$ κατά 2 μονάδες δεξιά και 1 μονάδα πάνω.



Παρατηρούμε ότι έχουν 2 κοινά σημεία, άρα η εξίσωση $x^2 - 4x + 3 = \eta\mu x$ έχει ακριβώς 2 λύσεις στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

Γ3. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $(f \circ g)(x) = x^2 - 1 \Leftrightarrow$

$$(\alpha x + \beta)^2 - 4(\alpha x + \beta) + 3 = x^2 - 1 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 x^2 + 2\alpha\beta x + \beta^2 - 4\alpha x - 4\beta + 3 = x^2 - 1 \Leftrightarrow$$

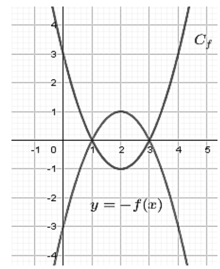
$$\alpha^2 x^2 + 2\alpha(\beta - 2)x + \beta^2 - 4\beta + 3 = x^2 - 1.$$

Επειδή η τελευταία ισότητα ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι:

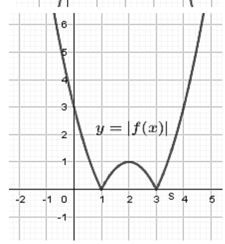
$$\begin{cases} \alpha^2 = 1 \\ 2\alpha(\beta - 2) = 0 \\ \beta^2 - 4\beta + 3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \pm 1 \\ \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 2 \\ \beta^2 - 4\beta + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \pm 1 \\ \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 2 \\ (\beta - 2)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\alpha=\pm 1\\ \alpha=0 \ \text{ή} \ \beta=2\\ \beta=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=\pm 1\\ \beta=2\end{cases}.$$

Γ4. Η γραφική παράσταση της $-\mathrm{f}$ είναι η συμμετρική της f ως προς τον άξονα x΄x. Επειδή η f έχει κορυφή το $(2,-1)$, η $-\mathrm{f}$ θα έχει κορυφή το $(2,1)$. Επειδή η f τέμνει τον y΄y στο $(0,3)$, η $-\mathrm{f}$ θα τον τέμνει στο $(0,-3)$. Τέλος και οι δύο συναρτήσεις διέρχονται από τα σημεία $(1,0)$ και $(3,0)$.



Η γραφική παράσταση της $|\mathrm{f}|$ αποτελείται από τα τμήματα της f τα οποία $\mathrm{f}(\mathrm{x})\geq 0$ και από το τμήμα της $-\mathrm{f}$ για το οποίο $\mathrm{f}(\mathrm{x})<0$



Θέμα Δ

Δ1. Θέτουμε $\ln x = u \Leftrightarrow x = e^u$, $u\in\mathbb{R}$, οπότε η σχέση $f(\ln x)=x$ γίνεται $f(u)=e^u$, $u\in\mathbb{R}$, άρα $f(x)=e^x$, $x\in\mathbb{R}$.Θέτουμε $x^3=u \Rightarrow x^6=u^2$, οπότε η σχέση $g(x^3)=\sqrt{x^6}$ γίνεται $g(u)=\sqrt{u^2}=|u|$, άρα $g(x)=|x|$, $x\in\mathbb{R}$.

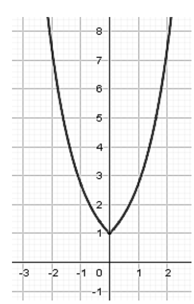
Δ2. Είναι $A_{f\circ g}=\{x\in A_g \,/\, g(x)\in A_f\}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,|x|\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$ και

$A_{g\circ f}=\{x\in A_f \,/\, f(x)\in A_g\}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,e^x\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=e^{|x|}$ και $(g\circ f)(x)=|e^x|=e^x$. Είναι $f\circ g\neq g\circ f$.

Δ3. Είναι $(f\circ g)(x)=e^{|x|}=\begin{cases}e^x, & x\geq 0\\ e^{-x}, & x<0\end{cases}$.

Επειδή τα σημεία της $f\circ g$ έχουν $y\geq 1$, το σύνολο τιμών της f είναι το $[1,+\infty)$.



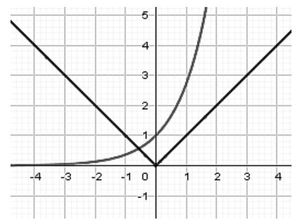
Δ4. $h(x)=(f\circ g)(x)+g(x)=e^{|x|}+|x|$, $x\in\mathbb{R}$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $-x\in\mathbb{R}$.

Είναι $h(-x)=e^{|-x|}+|-x|=e^{|x|}+|x|=h(x)$, άρα η h είναι άρτια.

Δ5. $e^{2x}-x^2=0\Leftrightarrow e^{2x}=x^2\Leftrightarrow\sqrt{\left(e^x\right)^2}=\sqrt{x^2}\Leftrightarrow e^x=|x|$.

Δηλαδή το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης ισοδυναμεί με το πλήθος των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων f, g. Από τη γραφική τους παράσταση βλέπουμε ότι έχουν 1 κοινό σημείο, άρα η εξίσωση $e^{2x}-x^2=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα.



Ερωτήσεις «Σωστό ή Λάθος»

1. Σ	**2. α)** Λ **β)** Λ	**3.** Λ	**4.** Λ	**5.** Σ	**6.** Σ	**7.** Λ	**8. α)** Λ **β)** Λ

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. $D_{g\circ f}=\left\{x\in D_f\,/\,f(x)\in D_g\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x^2-2x+9\ge 8\right\}=$

$\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x^2-2x+1\ge 0\right\}=\mathbb{R}$ με

$(g\circ f)(x)=\sqrt{x^2-2x+9-8}=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$. Οπότε η συνάρτηση φ ορίζεται όταν $|x-1|-1\ge 0\Leftrightarrow|x-1|\ge 1\Leftrightarrow x-1\le -1$ ή

$x-1\ge 1\Leftrightarrow x\le 0$ ή $x\ge 2$.

Σωστή απάντηση Β.

2. Είναι $D_{g\circ f}=\left\{x\in D_f\,/\,f(x)\in D_g\right\}=\left\{x>0\,/\,2\ln x-1\in\mathbb{R}\right\}=(0,+\infty)$ με

$$h(x)=(g\circ f)(x)=g\left(f(x)\right)=2-e^{2\ln x-1}=2-e^{\ln x^2-\ln e}=2-e^{\ln\frac{x^2}{e}}=2-\frac{x^2}{e}.$$

Σωστή απάντηση Δ.

3. Είναι $f\left[(f\circ f)(x)\right]=8x+\lambda$ δηλαδή $f(4x+3)=8x+\lambda$.

Αν $\omega=4x+3\Leftrightarrow x=\dfrac{\omega-3}{4}$. Τότε $f(\omega)=8\dfrac{\omega-3}{4}+\lambda\Leftrightarrow f(\omega)=2\omega-6+\lambda$ (1)

Επομένως η σχέση $(f\circ f)(x)=4x+3$ γίνεται $f(2x-6+\lambda)=4x+3$ (2)

Αν $2x-6+\lambda=y \Leftrightarrow x=\dfrac{y+6-\lambda}{2}$, τότε από τη σχέση (2) έχουμε

$f(y)=2(y+6-\lambda)+3 \Leftrightarrow f(y)=2y+15-2\lambda$ (3)

Από (1),(3) προκύπτει $15-2\lambda=\lambda-6 \Leftrightarrow \lambda=7$. Άρα $f(x)=2x+1$.

Σωστή απάντηση Γ.

4. Στη σχέση $2f(-x)+f(x)=\kappa e^{-x}+e^{x}-x$ για $x=0$ προκύπτει

$3f(0)=\kappa+1 \Leftrightarrow \kappa=2$, οπότε η σχέση γίνεται

$$2f(-x)+f(x)=2e^{-x}+e^{x}-x \quad (1)$$

Θέτουμε στην (1) όπου x το $-x$ και η σχέση γίνεται

$$2f(x)+f(-x)=2e^{x}+e^{-x}+x \quad (2)$$

Από σύστημα των (1),(2) έχουμε

$$\left\{\begin{array}{l} 2f(-x)+f(x)=2e^{-x}+e^{x}-x \\ f(-x)+2f(x)=2e^{x}+e^{-x}+x \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 2f(-x)+f(x)=2e^{-x}+e^{x}-x \\ -2f(-x)-4f(x)=-4e^{x}-2e^{-x}-2x \end{array}\right\} \overset{+}{\Rightarrow}$$

$-3f(x)=-3e^{x}-3x \Leftrightarrow f(x)=e^{x}+x$.

Σωστή απάντηση Α.

5. Έστω $\ln f(x)=\ln(x+2)=\omega \Leftrightarrow x+2=e^{\omega} \Leftrightarrow x=e^{\omega}-2$, οπότε η σχέση

$g(\ln f(x))=x^2-3$ γίνεται $g(\omega)=(e^{\omega}-2)^2-3 \Leftrightarrow g(\omega)=e^{2\omega}-4e^{\omega}+1$.

Σωστή απάντηση Γ.

5 Μονοτονία – Ακρότατα Συνάρτησης

Μονοτονία συνάρτησης

26.α) Είναι $2-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$, άρα $D_f = (-\infty, 2]$. Για κάθε $x_1, x_2 \in D_f$ με $x_1 < x_2$, είναι $-x_1 > -x_2 \Leftrightarrow 2-x_1 > 2-x_2 \Leftrightarrow \sqrt{2-x_1} > \sqrt{2-x_2} \Leftrightarrow$
$2\sqrt{2-x_1} > 2\sqrt{2-x_2} \Leftrightarrow 2\sqrt{2-x_1}+5 > 2\sqrt{2-x_2}+5 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
Οπότε, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 2]$.

β) Πρέπει $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ και $x \geq 0$, άρα $A_f = [1, +\infty)$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A_f$ με $x_1 < x_2$, είναι $\begin{cases} \sqrt{x_1-1} < \sqrt{x_2-1} \\ 2\sqrt{x_1} < 2\sqrt{x_2} \end{cases} \Rightarrow$
$\sqrt{x_1-1}+2\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2-1}+2\sqrt{x_2} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$, άρα $f \nearrow [1, +\infty)$.

γ) Για κάθε $x_1, x_2 \in A_f = (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$, είναι $\ln x_1 < \ln x_2 \Leftrightarrow$
$-\ln x_1 > -\ln x_2 \Leftrightarrow 2-\ln x_1 > 2-\ln x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f \searrow (0, +\infty)$.

δ) Είναι $D_f = \mathbb{R}$. Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:
$\begin{cases} 2x_1 < 2x_2 \\ e^{x_1} < e^{x_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{2x_1} < e^{2x_2} \\ e^{x_1} < e^{x_2} \end{cases}$, άρα $e^{2x_1}+e^{x_1} < e^{2x_2}+e^{x_2} \Leftrightarrow$
$e^{2x_1}+e^{x_1}-1 < e^{2x_2}+e^{x_2}-1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι $\nearrow$ στο $\mathbb{R}$.

ε) Είναι $x \in A_f = \mathbb{R}$. Για κάθε $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι
$\begin{cases} x_1^3 < x_2^3 \\ 3x_1 < 3x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1^3 < 2x_2^3 \\ 3x_1 < 3x_2 \end{cases}$, άρα $2x_1^3+3x_1 < 2x_2^3+3x_2 \Leftrightarrow$
$2x_1^3+3x_1-5 < 2x_2^3+3x_2-5 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η $f \nearrow \mathbb{R}$.

στ) Για κάθε $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι
$$\begin{cases} 2^{x_1} < 2^{x_2} \\ 3^{x_1} < 3^{x_2} \\ 2^{-x_1} > 2^{-x_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x_1} < 2^{x_2} \\ 3^{x_1} < 3^{x_2} \\ -2^{-x_1} < -2^{-x_2} \end{cases} \Rightarrow 2^{x_1}+3^{x_1}-2^{-x_1} < 2^{x_2}+3^{x_2}-2^{-x_2} \Rightarrow f \nearrow \mathbb{R}$$

27.α) $f(x_1)-f(x_2) = \dfrac{3}{x_1-1} - \dfrac{3}{x_2-1} = \dfrac{3x_2-\cancel{3}-3x_1+\cancel{3}}{(x_1-1)(x_2-1)} \Leftrightarrow$

$f(x_1)-f(x_2) = \dfrac{3(x_2-x_1)}{(x_1-1)(x_2-1)},\ x \neq 1.$

Αν $x_1 < x_2 < 1$, τότε $f(x_1) - f(x_2) > 0 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f \searrow (-\infty, 1)$.
Αν $1 < x_1 < x_2$, τότε $f(x_1) - f(x_2) > 0 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f \searrow (1, +\infty)$.

β) $f(x_1) - f(x_2) = \dfrac{x_1 - 3}{x_1 - 2} - \dfrac{x_2 - 3}{x_2 - 2} \Leftrightarrow$

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{\cancel{x_1 x_2} - 2x_1 - 3x_2 + \cancel{6} - \cancel{x_1 x_2} + 2x_2 + 3x_1 - \cancel{6}}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)} =$$

$= \dfrac{x_1 - x_2}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)}$, $x \neq 2$. Αν $x_1 < x_2 < 2$, τότε
$f(x_1) - f(x_2) < 0 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \nearrow (-\infty, 2)$.
Αν $2 < x_1 < x_2$, τότε $f(x_1) - f(x_2) < 0 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \nearrow (2, +\infty)$

γ) Για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$, είναι $\dfrac{1}{x_1} > \dfrac{1}{x_2} \Leftrightarrow e^{\frac{1}{x_1}} > e^{\frac{1}{x_2}} \Leftrightarrow$
$f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f \searrow (0, +\infty)$. Για κάθε $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ με $x_1 < x_2$, είναι
$\dfrac{1}{x_1} > \dfrac{1}{x_2} \Leftrightarrow e^{\frac{1}{x_1}} > e^{\frac{1}{x_2}} \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f \searrow (-\infty, 0)$.

δ) $f(x) = x^2 - 2x = x^2 - 2x + 1 - 1 = (x - 1)^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$.
Για κάθε $x_1, x_2 \in (-\infty, 1)$ με $x_1 < x_2$, είναι $x_1 - 1 < x_2 - 1 < 0 \Leftrightarrow$
$(x_1 - 1)^2 > (x_2 - 1)^2 \Leftrightarrow (x_1 - 1)^2 - 1 > (x_2 - 1)^2 - 1 \Leftrightarrow$
$f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f \searrow (-\infty, 1)$.
Για κάθε $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ με $x_1 < x_2$, είναι $0 < x_1 - 1 < x_2 - 1 \Leftrightarrow$
$(x_1 - 1)^2 < (x_2 - 1)^2 \Leftrightarrow$
$(x_1 - 1)^2 - 1 < (x_2 - 1)^2 - 1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \nearrow (1, +\infty)$

ε) $f(x) = x^2 - 6x + 8 = x^2 - 6x + 9 - 1 = (x - 3)^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$.
Για κάθε $x_1, x_2 \in (-\infty, 3)$ με $x_1 < x_2$, είναι $x_1 - 3 < x_2 - 3 < 0 \Leftrightarrow$
$(x_1 - 3)^2 > (x_2 - 3)^2 \Leftrightarrow (x_1 - 3)^2 - 1 > (x_2 - 3)^2 - 1 \Leftrightarrow$
$f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f \searrow (-\infty, 3)$.
Για κάθε $x_1, x_2 \in (3, +\infty)$ με $x_1 < x_2$, είναι $0 < x_1 - 3 < x_2 - 3 \Leftrightarrow$
$(x_1 - 3)^2 < (x_2 - 3)^2 \Leftrightarrow$
$(x_1 - 3)^2 - 1 < (x_2 - 3)^2 - 1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \nearrow (3, +\infty)$.

στ) $f(x)=x^6+2x^3+2=\left(x^3+1\right)^2+1$. Για κάθε $x_1,x_2\in(-\infty,-1)$ με $x_1<x_2$, είναι $x_1^3<x_2^3<-1\Leftrightarrow x_1^3+1<x_2^3+1<0\Rightarrow \left(x_1^3+1\right)^2>\left(x_2^3+1\right)^2\Leftrightarrow$

$\left(x_1^3+1\right)^2+1>\left(x_2^3+1\right)^2+1\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)\Rightarrow$

$f\searrow(-\infty,-1)$. Για κάθε $x_1,x_2\in(-1,+\infty)$ με $x_1<x_2$, είναι $-1<x_1^3<x_2^3\Leftrightarrow$

$0<x_1^3+1<x_2^3+1\Rightarrow\left(x_1^3+1\right)^2<\left(x_2^3+1\right)^2\Leftrightarrow$

$\left(x_1^3+1\right)^2+1<\left(x_2^3+1\right)^2+1\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)\Rightarrow f\nearrow(-1,+\infty)$.

28.α) Για κάθε $x_1,x_2\in(-\infty,0)$ με $x_1<x_2$ είναι $x_1^2>x_2^2\Leftrightarrow -x_1^2<-x_2^2\quad(1)$

Επίσης $3x_1<3x_2\quad(2)$. Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) είναι

$-x_1^2+3x_1<x\,{-}_2^2+3x_2\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$, οπότε η $f\nearrow\ (-\infty,0)$.

Έστω $x_1,x_2\in[0,+\infty)$, με $x_1<x_2$, τότε: $\begin{cases}2^{x_1}<2^{x_2}\\ x_1^2<x_2^2\end{cases}\Rightarrow 2^{x_1}+x_1^2<2^{x_2}+x_2^2\Leftrightarrow$

$f(x_1)<f(x_2)$, άρα $f\nearrow\ [0,+\infty)$.

Έστω $x_1<0\le x_2$, τότε αφού $x_1<0\Leftrightarrow -x_1>0\Leftrightarrow 3-x_1>0$ και

$x_1(3-x_1)<0\Leftrightarrow -x_1^2+3x_1<0\Leftrightarrow f(x_1)<0$ και επειδή $x_2\ge0\Leftrightarrow 2^{x_2}>0$ και

$x_2^2\ge0$, ισχύει $2^{x_2}+x_2^2>0\Leftrightarrow f(x_2)>0$.

Οπότε $f(x_1)<0<f(x_2)$ και η f είναι $\nearrow$ στο $\mathbb{R}$.

β) Για κάθε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ είναι

$x_1^3<x_2^3\Leftrightarrow x_1^3-1<x_2^3-1\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)\Rightarrow f\nearrow(-\infty,0)$.

Έστω $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ με $x_1<x_2$, τότε $x_1^2<x_2^2\Leftrightarrow x_1^2+2<x_2^2+2\Leftrightarrow$

$f(x_1)<f(x_2)\Rightarrow f\nearrow[0,+\infty)$.

Έστω $x_1\le0<x_2$, τότε αφού $x_1<0\Leftrightarrow x_1^3<0\Leftrightarrow x_1^3-1<-1\Leftrightarrow f(x_1)<-1$ και

$x_2\ge0\Leftrightarrow x_2^2\ge0\Leftrightarrow x_2^2+2\ge2\Leftrightarrow f(x_2)\ge2$, άρα $f(x_1)<f(x_2)\Rightarrow$ και $f\nearrow\mathbb{R}$.

Αυξημένης δυσκολίας

29. $g(x)=\dfrac{f(x)}{f(x)-1}=\dfrac{f(x)-1+1}{f(x)-1}==1+\dfrac{1}{f(x)-1}$.

Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}$

$x_1 < x_2 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) - 1 < f(x_2) - 1 \overset{f(x)>1}{\Leftrightarrow}$

$\dfrac{1}{f(x_1)-1} > \dfrac{1}{f(x_2)-1} \Leftrightarrow 1 + \dfrac{1}{f(x_1)-1} > 1 + \dfrac{1}{f(x_2)-1} \Leftrightarrow$

$g(x_1) > g(x_2) \Rightarrow g \nearrow \mathbb{R}$.

30. $g(x) = \dfrac{f^2(x)-1}{f(x)} = \dfrac{f^{\cancel{2}}(x)}{\cancel{f(x)}} - \dfrac{1}{f(x)} = f(x) - \dfrac{1}{f(x)}$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, είναι $f(x_1) > f(x_2)$ $(1) \Leftrightarrow \dfrac{1}{f(x_1)} < \dfrac{1}{f(x_2)} \Leftrightarrow$

$-\dfrac{1}{f(x_1)} > -\dfrac{1}{f(x_2)}$ (2). Από (1)+(2): $g(x_1) > g(x_2) \Rightarrow g \searrow \mathbb{R}$.

31. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με

$x_1 < x_2$ είναι $f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow \alpha x_1^3 - 3x_1^2 + 3x_1 - \cancel{1} < \alpha x_2^3 - 3x_2^2 + 3x_2 - \cancel{1} \Leftrightarrow$

$\alpha x_1^3 - \alpha x_2^3 - 3x_1^2 + 3x_2^2 + \beta x_1 - \beta x_2 < 0 \Leftrightarrow$

$\alpha\left(x_1^3 - x_2^3\right) - 3\left(x_1^2 - x_2^2\right) + 3(x_1 - x_2) < 0 \Leftrightarrow$

$\alpha(x_1 - x_2)\left(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2\right) - 3(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + 3(x_1 - x_2) < 0 \Leftrightarrow$

$(x_1 - x_2)\left(\alpha x_1^2 + \alpha x_1 x_2 + \alpha x_2^2 - 3x_1 - 3x_2 + 3\right) < 0 \overset{x_1<x_2}{\Leftrightarrow}$

$\alpha x_1^2 + (\alpha x_2 - 3)x_1 + \alpha x_2^2 - 3x_2 + 3 > 0$ (1)

Για να ισχύει η σχέση (1) για κάθε $x_1 \in \mathbb{R}$ πρέπει $\Delta < 0$ και $\alpha > 0$. Άρα α>0.

32. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με

$x_1 < x_2$ είναι $f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow x_1^3 + 2x_1^2 + \lambda x_1 + \cancel{3} < x_2^3 + 2x_2^2 + \lambda x_2 + \cancel{3} \Leftrightarrow$

$x_1^3 - x_2^3 + 2x_1^2 - 2x_2^2 + \lambda x_1 - \lambda x_2 < 0 \Leftrightarrow$

$(x_1 - x_2)\left(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2\right) + 2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + \lambda(x_1 - x_2) < 0 \Leftrightarrow$

$(x_1 - x_2)\left(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1 + 2x_2 + \lambda\right) < 0 \overset{x_1<x_2}{\Leftrightarrow}$

$x_1^2 + (x_2 + 2)x_1 + x_2^2 + 2x_2 + \lambda > 0$ (1)

$\Delta = (x_2 + 2)^2 - 4\left(x_2^2 + 2x_2 + \lambda\right) = x_2^2 + 4x_2 + 4 - 4x_2^2 - 8x_2 - 4\lambda \Leftrightarrow$

$\Delta = -3x_2^2 - 4x_2 + 4 - 4\lambda$.

$\Delta_1 = 16 - 12(4 - 4\lambda) = 16 + 48 - 48\lambda = 64 - 48\lambda = 16(4 - 3\lambda)$.

- Αν $\Delta_1 < 0 \Leftrightarrow 4 - 3\lambda < 0 \Leftrightarrow \lambda > \frac{4}{3}$ τότε $\Delta < 0$ για κάθε $x_2 \in \mathbb{R}$ και η (1) είναι αληθής.

- Αν $\Delta_1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{4}{3}$ τότε

$$\Delta = -3x_2^2 - 4x_2 - \frac{4}{3} = -\frac{9x_2^2 + 12x_2 + 4}{3} = -\frac{(3x_2 + 2)^2}{3}.$$

Αν $\Delta = 0 \Leftrightarrow -\frac{(3x_2 + 2)^2}{3} = 0 \Leftrightarrow x_2 = -\frac{2}{3}$ τότε η (1) γίνεται

$$x_1^2 + \left(-\frac{2}{3} + 2\right)x_1 + \frac{4}{9} - \frac{4}{3} + \frac{4}{3} > 0 \Leftrightarrow$$

$x_1^2 + \frac{4}{3}x_1 + \frac{4}{9} > 0 \Leftrightarrow \left(x_1 + \frac{2}{3}\right)^2 > 0$ που ισχύει αφού $x_1 < x_2 = -\frac{2}{3}$.

Αν $x_2 \neq -\frac{2}{3}$ τότε $\Delta < 0$ και η (1) είναι αληθής. Τελικά $\lambda \geq \frac{4}{3}$.

Λύση ανίσωσης – Απόδειξη ανισοτικής σχέσης

33.α) Είναι $(f \circ f)(x^2 + x) < (f \circ f)(x + 1) \Leftrightarrow f(f(x^2 + x)) < f(f(x + 1))$

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα, ισχύει: $f(x^2 + x) > f(x + 1)$ και

$x^2 + x < x + 1 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$.

β) $(f \circ f)(x^2 - 2x) < (f \circ f)(x - 2) \Leftrightarrow f(f(x^2 - 2x)) < f(f(x - 2)) \overset{f \searrow}{\Leftrightarrow}$

$f(x^2 - 2x) > f(x - 2) \overset{f \searrow}{\Leftrightarrow} x^2 - 2x < x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 < 0 \Leftrightarrow x \in (1, 2)$.

34. Ισχύει $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = (x - y)^3 > 0$ αφού $x > y > 0$ οπότε:

$x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 > 0 \Leftrightarrow x^3 + 3xy^2 > y^3 + 3x^2y \quad (1)$

Είναι $x > y > 0$ οπότε $x^3 + 3xy^2 > 0$ και $y^3 + 3x^2y > 0$. Από την (1) έχουμε:

$x^3 + 3xy^2 > y^3 + 3x^2y \overset{f \nearrow [0, +\infty)}{\Leftrightarrow} f(x^3 + 3xy^2) > f(y^3 + 3x^2y)$.

35.α) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι $\alpha^{x_1} > \alpha^{x_2} \Leftrightarrow -\alpha^{x_1} < -\alpha^{x_2}$,
άρα και $x_1 - \alpha^{x_1} < x_2 - \alpha^{x_2} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \nearrow \mathbb{R}$.

β) $\alpha^x-\alpha^{x^3}>x-x^3\Leftrightarrow x^3-\alpha^{x^3}>x-\alpha^x\Leftrightarrow f\left(x^3\right)>f(x)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}x^3>x\Leftrightarrow$

$x(x-1)(x+1)>0\Leftrightarrow x\in(-1,0)\cup(1,+\infty)$.

γ) $\alpha^{x+1}-\alpha^x<1\Leftrightarrow-\alpha^x<1-\alpha^{x+1}\Leftrightarrow x-\alpha^x<x+1-\alpha^{x+1}\Leftrightarrow f(x)<f(x+1)$ ισχύει.

36.α) Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι $x_1^9<x_2^9,\ 5x_1^3<5x_2^3$, άρα και $x_1^9+5x_1^3<x_2^9+5x_2^3\Leftrightarrow x_1^9+5x_1^3+1<x_2^9+5x_2^3+1\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)\Rightarrow f\nearrow\mathbb{R}$.

β) i. $f(x)>7\Leftrightarrow f(x)>f(1)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}x>1$.

ii. $f^9(x)+5f^3(x)<6\Leftrightarrow f^9(x)+5f^3(x)+1<7\Leftrightarrow f(f(x))<f(1)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}$

$f(x)<1=f(0)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}x<0$.

37.α) Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι:

$$\begin{cases}-x_1>-x_2\\ x_1^3<x_2^3\end{cases}\Leftrightarrow\left.\begin{cases}1-x_1>1-x_2\\ -x_1^3>-x_2^3\end{cases}\right\}\Leftrightarrow\begin{cases}(1-x_1)^7>(1-x_2)^7\\ -x_1^3>-x_2^3\end{cases}\overset{(+)}{\Rightarrow}$$

$(1-x_1)^7-x_1^3>(1-x_2)^7-x_2^3\Leftrightarrow(1-x_1)^7-x_1^3+5>(1-x_2)^7-x_2^3+5\Leftrightarrow$

$f(x_1)>f(x_2)$ άρα f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Παρατηρούμε ότι $f(0)=6$, οπότε η ανίσωση γίνεται:

$f\left[f(x+1)-4\right]>f(0)\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f(x+1)-4<0\Leftrightarrow f(x+1)<4\ \ (1)$.

Παρατηρούμε ότι $f(1)=4$, οπότε η σχέση (1) γίνεται:

$f(x+1)<f(1)\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}x+1>1\Leftrightarrow x>0$.

38.α) Για κάθε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ είναι $-x_1>-x_2\Leftrightarrow e^{-x_1}>e^{-x_2}$ και $\ln x_1<\ln x_2\Leftrightarrow-\ln x_1>-\ln x_2$ οπότε: $e^{-x_1}-\ln x_1>e^{-x_2}-\ln x_2\Leftrightarrow$

$f(x_1)>f(x_2)$ άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

β) $\left(\dfrac{1}{e}\right)^{x^2+x+4}-\left(\dfrac{1}{e}\right)^{x^2+9}<\ln\left(x^2+x+4\right)-\ln\left(x^2+9\right)\Leftrightarrow$

$e^{-\left(x^2+x+4\right)}-e^{-\left(x^2+9\right)}<\ln\left(x^2+x+4\right)-\ln\left(x^2+9\right)\Leftrightarrow$

$e^{-\left(x^2+x+4\right)}-\ln\left(x^2+x+4\right)<e^{-\left(x^2+9\right)}-\ln\left(x^2+9\right)\Leftrightarrow$

$f\left(x^2+x+4\right)<f\left(x^2+9\right)\overset{f\searrow(0,+\infty)}{\Leftrightarrow}x^2+x+4>x^2+9\Leftrightarrow x>5$.

39.α) Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι $10^{x_1}<10^{x_2}$, $100^{x_1}<100^{x_2}$, άρα και $10^{x_1}+100^{x_1}<10^{x_2}+100^{x_2}\Leftrightarrow$

$10^{x_1}+100^{x_1}-110<10^{x_2}+100^{x_2}-110\Leftrightarrow f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)\Rightarrow f\nearrow\mathbb{R}$.

β) i) $10^x+100^x<2\Leftrightarrow 10^x+100^x-110<-108\Leftrightarrow f\left(x\right)<f\left(0\right)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}x<0$.

ii) $f\left(f(x)\right)>-108\Leftrightarrow f\left(f\left(x\right)\right)>f\left(0\right)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f\left(x\right)>0\Leftrightarrow f\left(x\right)>f\left(1\right)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}x>1$.

40.α) Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι: $-x_1>-x_2\Leftrightarrow\begin{cases}2^{-x_1}>2^{-x_2}\\3^{-x_1}>3^{-x_2}\end{cases}\overset{(+)}{\Rightarrow}$

$2^{-x_1}+3^{-x_1}>2^{-x_2}+3^{-x_2}\Leftrightarrow 2^{-x_1}+3^{-x_1}-1>2^{-x_2}+3^{-x_2}-1\Leftrightarrow f\left(x_1\right)>f\left(x_2\right)$,

άρα f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

β) i. $2^{-x}+3^{-x}<5\Leftrightarrow 2^{-x}+3^{-x}<1+4\Leftrightarrow 2^{-x}+3^{-x}-1<4\Leftrightarrow$

$f\left(x\right)<f\left(-1\right)\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}x>-1$.

ii . $f\left(f\left(x\right)-1\right)<1\Leftrightarrow f\left(\underbrace{f\left(x\right)-1}_{x_1}\right)<\underbrace{f\left(0\right)}_{x_2}\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f\left(x\right)-1>0\Leftrightarrow$

$f\left(x\right)>1\Leftrightarrow f\left(x\right)>f\left(0\right)\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}x<0$.

41.α) Έστω $f\left(x\right)=2\text{συν}x-6x$, $x\in\left[0,\pi\right]$. Για κάθε $x_1,x_2\in\left[0,\pi\right]$ με $x_1<x_2$, είναι $-6x_1>-6x_2$ και $\text{συν}x_1>\text{συν}x_2\Leftrightarrow 2\text{συν}x>2\text{συν}x_2$, άρα και $2\text{συν}x_1-6x_1>2\text{συν}x_2-6x_2\Leftrightarrow f\left(x_1\right)>f\left(x_2\right)\Rightarrow f\searrow\left[0,\pi\right]$

$2\text{συν}x-6x<1-\pi\Leftrightarrow f\left(x\right)<f\left(\frac{\pi}{3}\right)\overset{f\searrow}{\Rightarrow}x>\frac{\pi}{3}$, άρα $x\in\left(\frac{\pi}{3},\pi\right)$.

β) Έστω $f\left(x\right)=2\ln x+x$, $x>0$. Για κάθε $x_1,x_2\in\left(0,+\infty\right)$ με $x_1<x_2$, είναι $\ln x_1<\ln x_2\Leftrightarrow 2\ln x_1<2\ln x_2$ άρα και $2\ln x_1+x_1<2\ln x_2+x_2\Leftrightarrow$

$f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)\Rightarrow f\nearrow\left(0,+\infty\right)$. $2\ln x+x>2+e\Leftrightarrow f\left(x\right)>f\left(e\right)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}x>e$.

42.α) Έστω $f(x)=\sigma\upsilon\nu x-e^x,\ x\in(0,\pi)$. Για κάθε $x_1,x_2\in(0,\pi)$ με $x_1<x_2$ είναι $\sigma\upsilon\nu x_1>\sigma\upsilon\nu x_2$, $e^{x_1}<e^{x_2}\Leftrightarrow -e^{x_1}>-e^{x_2}$, οπότε και

$\sigma\upsilon\nu x_1-e^{x_1}>\sigma\upsilon\nu x_2-e^{x_2}\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)\Rightarrow f\searrow(0,\pi)$

$\alpha<\beta\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(\alpha)>f(\beta)\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha-e^{\alpha}>\sigma\upsilon\nu\beta-e^{\beta}\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha-\sigma\upsilon\nu\beta>e^{\alpha}-e^{\beta}$

β) Έστω $f(x)=\eta\mu x+x$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Για κάθε $x_1,x_2\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ με $x_1<x_2$, είναι $\eta\mu x_1<\eta\mu x_2$, άρα και

$\eta\mu x_1+x_1<\eta\mu x_2+x_2\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)\Rightarrow f\nearrow\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

$\alpha<\beta\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(\alpha)<f(\beta)\Leftrightarrow \eta\mu\alpha+\alpha<\eta\mu\beta+\beta\Leftrightarrow \eta\mu\alpha-\eta\mu\beta<\beta-\alpha$.

43.α) Έστω $f,g\nearrow\mathbb{R}$. Τότε για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι

$f(x_1)<f(x_2)$ και $g(x_1)<g(x_2)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(g(x_1))<f(g(x_2))\Rightarrow f\circ g\nearrow\mathbb{R}$.

Όμοια αν $f,g\searrow\mathbb{R}$.

β) Έστω $f,g\nearrow\mathbb{R}$. Τότε για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι $f(x_1)<f(x_2)$ και $g(x_1)<g(x_2)$. Είναι $f(x_1)<f(x_2)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(f(x_1))<f(f(x_2))\Rightarrow f\circ f\nearrow\mathbb{R}$ και

$g(x_1)<g(x_2)\overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow} g(g(x_1))<g(g(x_2))\Rightarrow g\circ g\nearrow\mathbb{R}$

γ) Η συνάρτηση $g(x)=\ln x$, $x>0$, είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, οπότε για κάθε $x>1$ και η $g(g(x))=\ln(\ln x)$ είναι γνησίως αύξουσα.

Αυξημένης δυσκολίας

44.α) Για κάθε $x_1,x_2\in(0,1]$ με $x_1<x_2$, είναι $\ln x_1<\ln x_2<0\Leftrightarrow$

$\ln^2 x_1>\ln^2 x_2\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)\Rightarrow f\searrow(0,1]$.

Για κάθε $x_1,x_2\in[1,+\infty)$ με $x_1<x_2$, είναι

$0<\ln x_1<\ln x_2\Leftrightarrow \ln^2 x_1<\ln^2 x_2\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)\Rightarrow f\nearrow[1,+\infty)$

β) Επειδή $x^2+4>1$ και $x^2+x+1>1$, είναι:

$\ln^2(x^2+4)-\ln^2(x^2+x+1)<0\Leftrightarrow \ln^2(x^2+4)<\ln^2(x^2+x+1)\Leftrightarrow$

$f(x^2+4)<f(x^2+x+1)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} x^2+4<x^2+x+1\Leftrightarrow x>3$.

45.α) Παρατηρούμε ότι και οι δύο συναρτήσεις $g(x)=x^3+x$ και $h(x)=e^x-1$ έχουν κοινή ρίζα το x =0.
Για $x<0$ είναι $x^3<0$ οπότε και $x^3+x<0$, $e^x<e^0=1 \Leftrightarrow e^x-1<0$, άρα $f(x)=(x^3+x)(e^x-1)>0$. Για $x>0$ είναι $x^3>0$ οπότε και $x^3+x>0$, $e^x>e^0=1 \Leftrightarrow e^x-1>0$, άρα $f(x)=(x^3+x)(e^x-1)>0$.

β) Για κάθε $x_1,x_2 \in (-\infty,0)$ με $x_1<x_2$ είναι $x_1^3<x_2^3<0$ οπότε και

$x_1^3+x_1<x_2^3+x_2<0 \Leftrightarrow -(x_1^3+x_1)>-(x_2^3+x_2)>0$ (1) και

$e^{x_1}<e^{x_2}<1 \Leftrightarrow e^{x_1}-1<e^{x_2}-1 \Leftrightarrow -(e^{x_1}-1)>-(e^{x_2}-1)$ (2)

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των (1), (2) έχουμε:

$(x_1^3+x_1)(e^{x_1}-1)>(x_2^3+x_2)(e^{x_2}-1) \Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$

άρα f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0)$.

Για κάθε $0\le x_1<x_2$ είναι $0\le x_1^3<x_2^3$ και $0\le x_1^3+x_1<x_2^3+x_2$ (3) και $1\le e^{x_1}<e^{x_2} \Leftrightarrow 0\le e^{x_1}-1<e^{x_2}-1$ (4).

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των (3), (4) έχουμε:

$(x_1^3+x_1)(e^{x_1}-1)<(x_2^3+x_2)(e^{x_2}-1) \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

γ) $\dfrac{e^{x^2+1}-1}{e^2-1}<\dfrac{10}{(x^2+1)^3+x^2+1} \overset{x^2+1>0}{\Leftrightarrow}$

$\left(e^{x^2+1}-1\right)\left[(x^2+1)^3+x^2+1\right]<10(e^2-1) \Leftrightarrow$

$f(x^2+1)<f(2) \overset{f\nearrow[1,+\infty)}{\Leftrightarrow} x^2+1<2 \Leftrightarrow x^2<1 \Leftrightarrow -1<x<1$.

46.α) $\ln\dfrac{x^2+1}{x^2+x+5}<(x^2+x+5)^5-(x^2+1)^5 \Leftrightarrow$

$\ln(x^2+1)-\ln(x^2+x+5)<+(x^2+x+5)^5-(x^2+1)^5 \Leftrightarrow$

$\ln(x^2+1)+(x^2+1)^5<\ln(x^2+x+5)+(x^2+x+5)^5$ (1)

Έστω $f(x)=\ln x+x^5,\ x>0$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι $f\nearrow(0,+\infty)$.

$(1) \Rightarrow f(x^2+1)<f(x^2+x+5) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} x^2+1<x^2+x+5 \Leftrightarrow x>-4$.

β) Εύκολα αποδεικνύεται ότι η $f(x)=\ln x+x^3$ είναι $\nearrow(0,+\infty)$.

$\left(x^2+1\right)^3-(x+1)^3<\ln(x+1)-\ln\left(x^2+1\right)\Leftrightarrow$

$\ln\left(x^2+1\right)+\left(x^2+1\right)^3<\ln(x+1)+(x+1)^3\Leftrightarrow$

$f\left(x^2+1\right)<f(x+1)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} x^2+\cancel{1}<x+\cancel{1}\Leftrightarrow x(x-1)<0\Leftrightarrow x\in(0,1)$.

γ) Έστω $f(x)=\ln x+e^x$, $x>0$. Από τη προηγούμενη άσκηση είναι

$f\nearrow(0,+\infty)$, οπότε: $\ln\left(x^2+x+1\right)+e^{x^2+x+1}<\ln(x+5)+e^{x+5}\Leftrightarrow$

$f\left(x^2+x+1\right)<f(x+5)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} x^2+x+1<x+5\Leftrightarrow x\in(-2,2)$.

47.α) Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι: $f^3(x_1)+3f(x_1)=x_1+3$,

$f^3(x_2)+3f(x_2)=x_2+3$ και με αφαίρεση κατά μέλη, έχουμε:

$f^3(x_1)-f^3(x_1)+3f(x_1)-3f(x_2)=x_1^3-x_2^3\Leftrightarrow$

$\left(f(x_1)-f(x_2)\right)\left(f^2(x_1)+f(x_1)f(x_2)+f^2(x_2)+3\right)=$

$(x_1-x_2)\left(x_1^2+x_1x_2+x_2^2\right)$.

Είναι $f^2(x_1)+f(x_1)f(x_2)+f^2(x_2)>0$ $\left(f(x_1)=\omega,....,\Delta<0\right)$, άρα

$f^2(x_1)+f(x_1)f(x_2)+f^2(x_2)+3>0$ και $x_1^2+x_1x_2+x_2^2>0$ $(\Delta<0)$, οπότε

$f(x_1)-f(x_2)<0\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)\Rightarrow f\nearrow\mathbb{R}$.

β) Για $x=1$ είναι $f^3(1)+3f(1)-4=0\Leftrightarrow$

$\left(f(1)-1\right)\left(f^2(1)+f(1)+4\right)=0\Leftrightarrow f(1)=1$.

Για $x=-3$ είναι $f^3(-3)+3f(-3)=0\Leftrightarrow f(-3)\left(f^2(-3)+3\right)=0\Leftrightarrow f(-3)=0$.

γ) i. $f\left(f\left(x^2-2\right)\right)>f\left(f(x)\right)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f\left(x^2-2\right)>f(x)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}x^2-2>x\Leftrightarrow$

$x^2-x-2>0\Leftrightarrow x<-1$ ή $x>2$.

ii. $f(x)>0\Leftrightarrow f(x)>f(-3)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}x>-3$.

iii. $f(x)<1\Leftrightarrow f(x)<f(1)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}x<1$.

iv. $f\left(f\left(x^2\right)-4\right)<0\Leftrightarrow f\left(f\left(x^2\right)-4\right)<f(-3)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f\left(x^2\right)-4<-3\Leftrightarrow$

$f\left(x^2\right)<1\Leftrightarrow f\left(x^2\right)<f(1)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} x^2<1\Leftrightarrow -1<x<1$.

48.α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=x^3+x$, η οποία εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι γνησίως αύξουσα. Με τη βοήθεια της g η σχέση που μας δίνεται γίνεται $g(f(x))=-4x$ (1)

Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι $-4x_1>-4x_2\overset{(1)}{\Leftrightarrow}g(f(x_1))>g(f(x_2))\overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow}$ $f(x_1)>f(x_2)$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Από τη σχέση (2) έχουμε:

- για $x=0$: $g(f(0))=0\Leftrightarrow g(f(0))=g(0)\overset{g\nwarrow}{\Leftrightarrow}f(0)=0.$
- για $x=1$: είναι $g(f(1))=2\Leftrightarrow g(f(1))=g(1)\overset{g\nwarrow}{\Leftrightarrow}f(1)=1.$

γ) i. $f(x)>0\Leftrightarrow f(x)>f(0)\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}x<0$.

ii. $f(x)<-1\Leftrightarrow f(x)<f(1)\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}x>1$.

iii. $f(f(x)+1)>0\Leftrightarrow f(f(x)+1)>f(0)\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f(x)+1<0\Leftrightarrow$ $f(x)<-1=f(1)\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}x>1$.

iv. $f\left(f\left(f\left(e^x-1\right)\right)\right)>0\Leftrightarrow f\left(f\left(f\left(e^x-1\right)\right)\right)>f(0)\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f\left(f\left(e^x-1\right)\right)<0=f(0)\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}$ $f\left(e^x-1\right)>0=f(0)\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}e^x-1<0\Leftrightarrow e^x<1\Leftrightarrow x<0$.

49.α) Από τη σχέση που μας δίνεται έχουμε
$f(x)\left(f^2(x)+2\right)=x-3\Leftrightarrow f^3(x)+2f(x)=x-3$ (*)

Έστω ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ και $f(x_1)\geq f(x_2)$ (1)

Τότε $f^3(x_1)\geq f^3(x_2)$ (1) και $2f(x_1)\geq 2f(x_2)$ (3)

Με πρόσθεση των σχέσεων (1) και (2) έχουμε
$f^3(x_1)+f(x_1)\geq f^3(x_2)+f(x_2)\Leftrightarrow x_1-3\geq x_2-3\Leftrightarrow x_1\geq x_2$ άτοπο.

Άρα για κάθε $x_1<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Από τη σχέση (*) έχουμε:

- Για $x=0$: $f^3(0)+2f(0)=-3\Leftrightarrow f^3(0)+3f(0)-f(0)+3=0\Leftrightarrow$

$f(0)\left(f^2(0)-1\right)+3\left(f(0)+1\right)=0\Leftrightarrow$

$f(0)(f(0)-1)(f(0)+1)+3(f(0)+1)=0 \Leftrightarrow (f(0)+1)\left(\underbrace{f^2(0)-f(0)+3}_{\substack{\neq 0 \\ f(0)=\omega,\Delta<0}}\right) \Leftrightarrow$

$f(0)+1=0 \Leftrightarrow f(0)=-1$.

• Για $x=3$: $f^3(3)+2f(3)=0 \Leftrightarrow f(3)\left(\underbrace{f^2(3)+2}_{\neq 0}\right)=0 \Leftrightarrow f(3)=0$.

i. $f(x)+1>0 \Leftrightarrow f(x)>-1 \Leftrightarrow f(x)>f(0) \Leftrightarrow x>0$.

ii. $f(f(x))<-1 \Leftrightarrow f(f(x))<f(0) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x)<0 \Leftrightarrow f(x)<f(3) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} x<3$.

γ) Έστω $g(x)=e^x+x,\ x\in\mathbb{R}$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η g είναι $\nearrow$ στο $\mathbb{R}$ οπότε: $e^{f(x)}+f(x)>1 \Leftrightarrow g(f(x))>g(0) \overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x)>0 \Leftrightarrow f(x)>f(3) \overset{\nearrow}{\Leftrightarrow} x>3$.

50.α) Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι

$f^3(x_1)+2f(x_1)=x_1^3-2x_1^2+5x_1-1$,

$f^3(x_2)+2f(x_2)=x_2^3-2x_2^2+5x_2-1$ και με αφαίρεση κατά μέλη, έχουμε:

$f^3(x_1)-f^3(x_1)+2f(x_1)-2f(x_2)=x_1^3-x_2^3-2x_1^2+2x_2^2+5x_1-5x_2 \Leftrightarrow$

$(f(x_1)-f(x_2))(f^2(x_1)+f(x_1)f(x_2)+f^2(x_2)+2)=$

$(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2-2x_1+2x_2+5)$.

Είναι $f^2(x_1)+f(x_1)f(x_2)+f^2(x_2)\geq 0\ (f(x_1)=\omega,...,\Delta<0)$, άρα

$f^2(x_1)+f(x_1)f(x_2)+f^2(x_2)+2>0$, $x_1^2+x_1x_2+x_2^2-2(x_1-x_2)+5>0$,

αφού $x_1^2+x_1x_2+x_2^2>0\ (\Delta<0)$ και $x_1<x_2$, άρα

$f(x_1)-f(x_2)<0 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2) \Rightarrow f\nearrow\mathbb{R}$.

β) $f(x^3-1)>f(x-1) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} x^3-\cancel{1}>x-\cancel{1} \Leftrightarrow x(x-1)(x+1)>0 \Leftrightarrow$

$x\in(-1,0)\cup(1,+\infty)$.

51.α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\ln x+x$, η οποία εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι γνησίως αύξουσα. Με τη βοήθεια της g η σχέση που μας δίνεται γίνεται $g(f(x))=2x-1$ (1)

Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι:

$2x_1 < 2x_2 \Leftrightarrow 2x_1 - 1 < 2x_2 - 1 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} g(f(x_1)) < g(f(x_2)) \overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow}$

$f(x_1) < f(x_2)$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Από τη σχέση (1) για $x = 1$: $g(f(1)) = 1 \Leftrightarrow g(f(1)) = g(1) \overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow} f(1) = 1$.

γ) Είναι $2 > 1 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(2) > f(1) = 1$. Επίσης $g(e) = 1 + e, g(f(2)) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$.

Είναι $g(f(2)) < g(e) \overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow} f(2) < e$. Άρα $1 < f(2) < e$.

52.α) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι $e^{x_1} < e^{x_2}$ και

$e^{x_1} + x_1 < e^{x_2} + x_2 \Leftrightarrow e^{x_1} + x_1 - 1 < e^{x_2} + x_2 - 1 \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2) \Leftrightarrow g \nearrow \mathbb{R}$.

β) $e^{-f(x)}(x + 1 - f(x)) = 1 \Leftrightarrow x + 1 - f(x) = e^{f(x)} \Leftrightarrow e^{f(x)} + f(x) - 1 = x \Leftrightarrow$

$g(f(x)) = x$. Έστω ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ τέτοια, ώστε

$f(x_1) \geq f(x_2)$, τότε $g(f(x_1)) \geq g(f(x_2)) \Leftrightarrow x_1 \geq x_2$ άτοπο.

Άρα για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι $f(x_1) < f(x_2)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

γ) Έστω ότι υπάρχει $\rho \in \mathbb{R}$ με $f(\rho) = 0$, τότε για $x = \rho$ είναι:

$g(f(\rho)) = \rho \Leftrightarrow g(0) = \rho \Leftrightarrow \rho = 0$.

Για $x = 0: g(f(0)) = 0 \Leftrightarrow g(f(0)) = g(0) \overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow} f(0) = 0$ οπότε x=0 μοναδική ρίζα της f.

Για $x < 0 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) < f(0) = 0$ και για $x > 0 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(0) = 0$.

δ) Είναι $0 < 2 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(0) < f(2) \Leftrightarrow 0 < f(2)$.

Είναι $g(1) = e$ και $e^{f(1)} + f(1) - 1 = 1 \Leftrightarrow g(f(1)) = 1$.

Είναι $g(f(1)) < g(1) \overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow} f(1) < 1$. Άρα $0 < f(1) < 1$.

53.α) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, τότε:

$\begin{cases} f(x_1) < f(x_2) \\ g(x_1) > g(x_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^3(x_1) < f^3(x_2) \\ g^3(x_1) > g^3(x_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 27f^3(x_1) < 27f^3(x_2) \\ -8g^3(x_1) < -8g^3(x_2) \end{cases}$ άρα

$27f^3(x_1) - 8g^3(x_1) < 27f^3(x_2) - 8g^3(x_2) \Leftrightarrow h(x_1) < h(x_2)$, οπότε η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) $\frac{f(0)}{g(0)}=\frac{2}{3} \Leftrightarrow 3f(0)=2g(0)$, άρα $\left(3f(0)\right)^3=\left(2g(0)\right)^3 \Leftrightarrow$

$27f^3(0)=8g^3(0) \Leftrightarrow 27f^3(0)-8g^3(0)=0 \Leftrightarrow h(0)=0$

$27f^3(x)>8g^3(x) \Leftrightarrow h(x)>h(0) \overset{h\nearrow}{\Leftrightarrow} x>0$.

54.α) Για κάθε $x_1,x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1<x_2$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, διαδοχικά έχουμε: $f(x_1)<f(x_2)$ (1),

$2x_1<2x_2 \Leftrightarrow f(2x_1)<f(2x_2)$ (2)

Από $(1)+(2) \Rightarrow f(x_1)+f(2x_1)<f(x_2)+f(2x_2) \Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2) \Leftrightarrow g\nearrow\mathbb{R}$.

β) $f\left(e^x\right)>2-f\left(2e^x\right) \Leftrightarrow f\left(e^x\right)+f\left(2e^x\right)>2 \Leftrightarrow g\left(e^x\right)>2 \Leftrightarrow$

$g\left(e^x\right)>g(0) \overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow} e^x>0$ ισχύει.

γ) $f\left(x^2\right)-f\left(x^2+1\right)<f\left(2x^2+2\right)-f\left(2x^2\right) \Leftrightarrow f\left(x^2\right)+f\left(2x^2\right)<f\left(x^2+1\right)+$

$f\left(2x^2+2\right) \Leftrightarrow g\left(x^2\right)<g\left(x^2+1\right) \overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow} x^2<x^2+1$ ισχύει.

55.α) $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$. Για $x=1$ είναι $f(2)=0$ και επειδή η f είναι γνησίως μονότονη, η $x=2$ είναι η μοναδική της ρίζα.

β) Για $x=0$ είναι $f(0)=-1$. Αν η f ήταν γνησίως φθίνουσα τότε επειδή 0 <2, θα ήταν $f(0)>f(2) \Leftrightarrow -1>0$ άτοπο, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Για $x<2 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x)<f(2)=0$ και για $x>2 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x)>f(2)=0$.

δ) i. $x-1=1 \Leftrightarrow x=2$.

Για $x=2$ είναι $f(10)=1$, οπότε $f(x)>1 \Leftrightarrow f(x)>f(10) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} x>10$.

ii. $x-1=-2 \Leftrightarrow x=-1$.

Για $x=-1$ είναι $f(-2)=-2$, οπότε $f(x)<-2 \Leftrightarrow f(x)<f(-2) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} x<-2$.

iii. Αν στη σχέση $f\left(x^3+x\right)=x-1$ αντικαταστήσουμε όπου x το x^2 προκύπτει:

$f\left(x^6+x^2\right)=x^2-1$, οπότε:

$f\left(x^6+x^2\right)<x-1 \Leftrightarrow x^2-1<x-1 \Leftrightarrow x^2-x<0 \Leftrightarrow x(x-1)<0 \Leftrightarrow 0<x<1$.

56.α) Για $x=0$ είναι $2f(1)=0 \Leftrightarrow f(1)=0$. $f(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=f(1) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x=1$.

β) Για $x<1 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(x)>f(1)=0$ και για $x>1 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(x)<f(1)=0$.

γ) $f(x^2-8)>0 \Leftrightarrow f(x^2-8)>f(1) \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} x^2-8<1 \Leftrightarrow x^2<9 \Leftrightarrow -3<x<3$.

57. α) Για κάθε $x>1$ είναι $x<x^2 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x)<f(x^2)$ (1),

$x^3<x^4 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x^3)<f(x^4)$ (2)

Από $(1)+(2) \Rightarrow f(x)+f(x^3)<f(x^2)+f(x^4)$.

β) $x<x+1 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x)<f(x+1)$ (1), $x^2<x^2+1 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x^2)<f(x^2+1)$ (2)

Από $(1)+(2) \Rightarrow f(x^2)+f(x)<f(x^2+1)+f(x+1)$.

γ) $2^x<3^x \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(2^x)<f(3^x)$ (1), $4^x<5^x \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(4^x)<f(5^x)$ (2), $(1)+(2) \Rightarrow$
$f(2^x)+f(4^x)<f(3^x)+f(5^x)$.

Χρήση της εις άτοπο αγωγής

58. Από τη σχέση που μας δίνεται έχουμε $e^{f(x)}=1-x^5$.
Έστω η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Τότε για κάθε $x_1, x_2 \in (-\infty,1)$ με $x_1<x_2$ είναι $f(x_1)<f(x_2) \Leftrightarrow e^{f(x_1)}<e^{f(x_2)} \Leftrightarrow 1-x_1^5<1-x_2^5 \Leftrightarrow$ $-x_1^5<-x_2^5 \Leftrightarrow x_1^5>x_2^5 \Leftrightarrow x_1>x_2$ άτοπο. Άρα δεν υπάρχει στο $\mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα συνάρτηση f για την οποία να ισχύει ότι: $e^{f(x)}+x^5=1$ για κάθε $x \in (-\infty,1)$.

59. Έστω η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Τότε για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι $f(x_1)>f(x_2) \Leftrightarrow \ln f(x_1)>\ln f(x_2)$ και με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε $\ln f(x_1)+f(x_1)>\ln f(x_2)+f(x_2) \Leftrightarrow$
$x_1^2+x_1>x_2^2+x_2 \Leftrightarrow x_1^2-x_2^2+x_1-x_2>0 \Leftrightarrow (x_1-x_2)(x_1+x_2+1)>0$ που είναι άτοπο, αφού $0 \le x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1-x_2<0$, $x_1+x_2 \ge 0 \Leftrightarrow x_1+x_2+1 \ge 1$.

Αυξημένης δυσκολίας

60. Έστω ότι υπάρχει γνησίως φθίνουσα συνάρτηση f για την οποία ισχύει η σχέση που μας δίνεται. Από τη σχέση αυτή έχουμε $f(f(x))=2-x$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι

$$f(x_1) > f(x_2) \overset{\searrow}{\Leftrightarrow} f(f(x_1)) < f(f(x_2)) \Leftrightarrow \cancel{2} - x_1 < \cancel{2} - x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2 \text{ άτοπο.}$$

61.α) Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Τότε για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με

$x_1 < x_2$ είναι $f(x_1) < f(x_2) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(f(x_1)) < f(f(x_2)) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}$

$f(f(f(x_1))) < f(f(f(x_2))) \Leftrightarrow -x_1 < -x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$ που είναι άτοπο.

Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη, είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Αν στη δοθείσα σχέση αντικαταστήσουμε όπου x το $f(x)$, προκύπτει:

$f\underbrace{(f(f(f(x))))}_{-x} = -f(x) \Leftrightarrow f(-x) = -f(x) \quad (1)$, άρα η f είναι περιττή.

γ) Για $x = 0$ η σχέση (1) γίνεται: $f(0) = -f(0) \Leftrightarrow 2f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$.

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, ισχύει ότι: $x > 0 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(0) = 0$

και για $x < 0 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) < f(0) = 0$.

62.Έστω ότι $f(x) > x$, τότε επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε:

$f(f(x)) > f(x) > x \Leftrightarrow x > x$ που είναι άτοπο. Όμοια αν $f(x) < x$.

Άρα $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$.

63.Έστω ότι $f(x) > x$, τότε $3f(x) > 3x \Leftrightarrow 2x + 3f(x) > 5x \Leftrightarrow$

$\dfrac{2x + f3(x)}{5} > x \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f\left(\dfrac{2x + 3f(x)}{5}\right) > f(x) \Leftrightarrow x > f(x)$ που είναι άτοπο.

Όμοια αν $f(x) < x$. Άρα $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$.

64.α) Είναι $f(x) = g(x) + f(-x) \Leftrightarrow f(x) - f(-x) = g(x)$.

Έστω ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Τότε για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι $f(x_1) > f(x_2) \quad (1)$

Ακόμη $x_1 < x_2 \Leftrightarrow -x_1 > -x_2 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(-x_1) < f(-x_2) \Leftrightarrow -f(-x_1) > -f(-x_2) \quad (2)$

Από $(1) + (2) \Rightarrow f(x_1) - f(-x_1) > f(x_2) - f(-x_2) \Leftrightarrow g(x_1) > g(x_2)$ που είναι άτοπο αφού η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) i. Για $x>0$ είναι: $f(\ln x)>f(-\ln x)\Leftrightarrow f(\ln x)-f(-\ln x)>0\Leftrightarrow$

$g(\ln x)>g(0)\overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow}\ln x>0\Leftrightarrow x>1$.

ii. $f(x)+f(-x^3)>f(-x)+f(x^3)\Leftrightarrow f(x)-f(-x)>f(x^3)-f(-x^3)\Leftrightarrow$

$g(x)>g(x^3)\overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow}$
$x>x^3\Leftrightarrow$
$x-x^3>0\Leftrightarrow$
$x(1-x)(1+x)>0\Leftrightarrow$
$x\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Γινόμενο		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

γ) $f(x^2+2)+f(-\eta\mu x)>f(\eta\mu x)+f(-x^2-2)\Leftrightarrow$

$f(x^2+2)-f(-x^2-2)>f(\eta\mu x)-f(-\eta\mu x)\Leftrightarrow\ g(x^2+2)>g(\eta\mu x)\overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow}$

$x^2+2>\eta\mu x$ που ισχύει αφού για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $x^2+2\ge 2>1\ge\eta\mu x$.

Θεωρητικές ασκήσεις αυξημένης δυσκολίας

65. Για κάθε $x_1,x_2\in[\alpha,\beta]$ με $x_1<x_2\overset{f\nearrow}{\Rightarrow}f(x_1)<f(x_2)$ και για κάθε $x_1,x_2\in[\beta,\gamma]$ με $x_1<x_2\overset{f\nearrow}{\Rightarrow}f(x_1)<f(x_2)$. Για κάθε $x_1\le\beta\overset{f\nearrow}{\Rightarrow}f(x_1)\le f(\beta)$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x_1=\beta$ και για κάθε $x_2\ge\beta\overset{f\nearrow}{\Rightarrow}f(x_2)\ge f(\beta)$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x_2=\beta$, άρα δεν ισχύουν ταυτόχρονα οι ισότητες και επομένως για κάθε $x_1\le\beta\le x_2$ με $x_1\ne x_2$ είναι $f(x_1)<f(\beta)<f(x_2)$. Άρα για κάθε $x_1,x_2\in[\alpha,\gamma]$ με $x_1<x_2$ είναι $f(x_1)<f(x_2)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\gamma]$.

66.α) Είναι $f(-x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Για κάθε $-\beta\le x_1<x_2\le-\alpha\Leftrightarrow\alpha\le -x_2<-x_1\le\beta\overset{f\nearrow[\alpha,\beta]}{\Rightarrow}$

$f(-x_2)<f(-x_1)\Rightarrow f(x_2)<f(x_1)\Rightarrow f\searrow[-\beta,-\alpha]$.

β) Είναι $f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Για κάθε $-\beta\le x_1<x_2\le-\alpha\Leftrightarrow\alpha\le -x_2<-x_3\le\beta\overset{f\nearrow[\alpha,\beta]}{\Rightarrow}\ f(-x_2)<f(-x_1)\Rightarrow$

$-f(x_2)<-f(x_1)\Rightarrow\ f(x_1)<f(x_2)\Rightarrow f\nearrow[-\beta,-\alpha]$.

67.α) Για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με

- $x_1 < x_2$ ισχύει $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > 0 \overset{x_1-x_2<0}{\Leftrightarrow} f(x_1) < f(x_2)$ ενώ αν
- $x_1 > x_2$ ισχύει $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > 0 \overset{x_1-x_2>0}{\Leftrightarrow} f(x_1) > f(x_2)$, επομένως $f \nearrow \Delta$.

β) Για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με

- $x_1 < x_2$ ισχύει $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} < 0 \overset{x_1-x_2<0}{\Leftrightarrow} f(x_1) > f(x_2)$ ενώ αν
- $x_1 > x_2$ ισχύει $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > 0 \overset{x_1-x_2>0}{\Leftrightarrow} f(x_1) < f(x_2)$, επομένως $f \searrow \Delta$.

68.α) Για κάθε $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ με $x_1 < x_2$ είναι

$-x_1 > -x_2 > 0 \overset{f \nearrow [0,+\infty)}{\Leftrightarrow} f(-x_1) > f(-x_2) \overset{\text{f περιττή}}{\Leftrightarrow} -f(x_1) > -f(x_2) \Leftrightarrow$
$f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow f \nearrow (-\infty, 0)$.

β) Για κάθε $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ με $x_1 < x_2$ είναι

$-x_1 > -x_2 > 0 \overset{f \nearrow [0,+\infty)}{\Leftrightarrow} f(-x_1) > f(-x_2) \overset{\text{f άρτια}}{\Leftrightarrow} f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow f \searrow (-\infty, 0)$.

69. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $-x \in \mathbb{R}$ και $f(-x) = -f(x)$. Για $x = 0$ είναι
$f(0) = -f(0) \Leftrightarrow 2f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$.

α) Για κάθε $x < 0 \overset{f \nearrow \mathbb{R}}{\Leftrightarrow} f(x) < f(0) \Leftrightarrow f(x) < 0$ και για κάθε
$x > 0 \overset{f \nearrow \mathbb{R}}{\Leftrightarrow} f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 0$.

β) Για κάθε $x < 0 \overset{f \searrow \mathbb{R}}{\Leftrightarrow} f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 0$ και για κάθε
$x > 0 \overset{f \searrow \mathbb{R}}{\Leftrightarrow} f(x) < f(0) \Leftrightarrow f(x) < 0$.

70.α) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι $|f(x_1) - f(x_2)| < -(x_1 - x_2) \Leftrightarrow$
$(x_1 - x_2) < f(x_1) - f(x_2) < -(x_1 - x_2) \Leftrightarrow$
$x_1 - x_2 - x_1 + x_2 < f(x_1) - x_1 - f(x_2) + x_2 < -x_1 + x_2 - x_1 + x_2 \Leftrightarrow$
$0 < g(x_1) - g(x_2) < 2(x_2 - x_1)$, άρα $g(x_1) > g(x_2) \Rightarrow g \searrow \mathbb{R}$.

β) Όμοια.

71. $f(x)<g(x)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(f(x))<f(g(x))\ (1)$

Αν στη σχέση $f(x)<g(x)$, αντικαταστήσουμε όπου x το $g(x)$, έχουμε:
$f(g(x))<g(g(x))\ (2)$. Από τις $(1),(2)$ είναι $f(f(x))<g(g(x))$.

72.Ισχύει $e^{f(x)}>0,\ x>0$ οπότε από τη σχέση που μας δίνεται είναι $f(x)>0$.
Έστω ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ και $f(x_1)\geq f(x_2)>0$ (1),
τότε $e^{f(x_1)}\geq e^{f(x_2)}\ (2)$. Με πολλαπλασιασμό των σχέσεων (1) και (2) έχουμε
$f(x_1)\cdot e^{f(x_1)}\geq f(x_2)\cdot e^{f(x_2)}\Leftrightarrow x_1\geq x_2$ που είναι άτοπο.
Άρα για κάθε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα.

73.α) Για κάθε $x<1\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x)<f(1)=0$ και $g\searrow\mathbb{R}: g(x)>g(1)=0$,
άρα για κάθε $x<1$ είναι $f(x)<g(x)$. Για κάθε $x>1\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x)>f(1)=0$ και
αφού $g\searrow\mathbb{R}$: $g(x)<g(1)=0$, άρα για κάθε $x>1$ είναι $g(x)<f(x)$.
Τέλος για $x=1$ είναι $f(1)=g(1)=0$.

β) Για κάθε $x<1$ είναι $f(x)<0,\ g(x)>0$ άρα $f(x)g(x)<0\Leftrightarrow h(x)<0$.
Για κάθε $x>1$ είναι $f(x)>0,\ g(x)<0$ άρα $f(x)g(x)<0\Leftrightarrow h(x)<0$.
Τέλος για $x=1$ είναι $h(1)=f(1)g(1)=0$.

74.α) Έστω ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in A$ με $x_1<x_2$ τέτοια, ώστε
$g(x_1)\leq g(x_2)\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f(g(x_1))\geq f(g(x_2))\Leftrightarrow(f\circ g)(x_1)\geq(f\circ g)(x_2)\overset{f\circ g\nearrow}{\Leftrightarrow}$
$x_1\geq x_2$ άτοπο.
Άρα για κάθε $x_1,x_2\in A$ με $x_1<x_2$ είναι $g(x_1)>g(x_2)\Rightarrow g\searrow A$

β) Έστω $f(x)=15-3x^5-5x^3,\ x\in\mathbb{R}$.
Εύκολα αποδεικνύεται ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
Για κάθε $x_1,x_2\in A$ με $x_1<x_2$ (1) είναι $e^{x_1}<e^{x_2}$ (2).
Με πρόσθεση των σχέσεων (1) και (2) έχουμε
$e^{x_1}+x_1<e^{x_2}+x_2\Leftrightarrow 15-3g^5(x_1)-5g^3(x_1)<15-3g^5(x_2)-5g^3(x_2)\Leftrightarrow$
$f(g(x_1))<f(g(x_2))\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}g(x_1)<g(x_2)$ οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

75.α) Έστω ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ τέτοια, ώστε $g(x_1) \geq g(x_2) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}$

$f(g(x_1)) \geq f(g(x_2)) \Leftrightarrow (f \circ g)(x_1) \geq (f \circ g)(x_2) \overset{f\circ g\nearrow}{\Leftrightarrow} x_1 \geq x_2$ άτοπο.

Άρα για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ είναι $g(x_1) < g(x_2) \Rightarrow g \nearrow A$.

β) Έστω $f(x) = e^x + x^3,\ x \in \mathbb{R}$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Είναι $f(g(x)) = x^{1821} + x - 3,\ x \in \mathbb{R}$ με $f \circ g \nearrow \mathbb{R}$, οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

76. Έστω ότι η C_1 είναι η γραφική παράσταση της f και η C_2 της $f \circ f$. Τότε από το σχήμα προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και η $f \circ f$ γνησίως φθίνουσα. Για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x_1) < f(x_2) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}$

$f(f(x_1)) < f(f(x_2)) \Leftrightarrow (f \circ f)(x_1) < (f \circ f)(x_2) \Leftrightarrow f \circ f \nearrow (0, +\infty)$ που είναι άτοπο. Άρα η C_2 είναι η γραφική παράσταση της f.

77.α) Όλες οι συναρτήσεις που παριστάνονται είναι γνησίως αύξουσες άρα $f \nearrow \mathbb{R}$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) > x \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} (f \circ f)(x) > f(x)$ επίσης είναι $(f \circ f)(x) > (f \circ g)(x)$ άρα από τις C_1, C_2, C_3 αυτή που παριστάνει την $f \circ f$ είναι η C_3.

β) Έστω ότι $C_1 \equiv C_f$ τότε $C_2 \equiv C_{f\circ g}$.

Άρα $f(x) < g(x) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} (f \circ f)(x) < (f \circ g)(x)$ πράγμα άτοπο.

Άρα $C_2 \equiv C_f$ τότε $C_1 \equiv C_{f\circ g}$.

78. Έστω ότι $C_2 \equiv C_f$ τότε για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι

$f(x_1) < f(x_2) \overset{f\nearrow\mathbb{R}}{\Rightarrow} (f \circ f)(x_1) < (f \circ f)(x_2) \Rightarrow f \circ f \nearrow \mathbb{R}$.

Τότε $C_1 \equiv C_{f\circ f}$ δηλαδή $(f \circ f)(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Όμως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) > 0 \Leftrightarrow (f \circ f)(x) > f(0) > 0$ άτοπο.

Έστω ότι $C_1 \equiv C_f$ τότε ομοίως $f \circ f \nearrow \mathbb{R}$ άρα τότε $C_2 \equiv C_{f\circ f}$ δηλαδή $(f \circ f)(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Όμως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) < 0 \Leftrightarrow (f \circ f)(x) < f(0) < 0$ άτοπο.

Άρα $C_3 \equiv C_f$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) > 0 \overset{f \searrow \mathbb{R}}{\Leftrightarrow} (f \circ f)(x) < f(0)$ άρα αναγκαστικά $C_1 \equiv C_{f \circ f}$.

Ακρότατα

79.α) Η f έχει μέγιστο στο $x = 1$, το 5 άρα $f(x) \le 5$.

β) $f(x) \le 5 \Leftrightarrow 3f(x) \le 15 \Leftrightarrow 3f(x) - 5 \le 10 \Leftrightarrow h(x) \le 10 = h(1)$ μέγιστο το 10.

γ) Είναι $\begin{cases} f(\alpha) \le 5 \\ f(\beta) \le 5 \\ f(\gamma) \le 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - f(\alpha) \ge 0 \\ 5 - f(\beta) \ge 0 \\ 5 - f(\gamma) \ge 0 \end{cases}$ οπότε $f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) = 15 \Leftrightarrow$

$$\underbrace{5 - f(\alpha)}_{\ge 0} + \underbrace{5 - f(\beta)}_{\ge 0} + \underbrace{5 - f(\gamma)}_{\ge 0} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - f(\alpha) = 0 \\ 5 - f(\beta) = 0 \\ 5 - f(\gamma) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha) = 5 \\ f(\beta) = 5 \\ f(\gamma) = 5 \end{cases}.$$

$\alpha = \beta = \gamma = 1$.

80.α) Στο σχήμα παρατηρούμε ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x = 2$ το $f(2) = -4$. Άρα $f(x) \ge f(2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δηλαδή $f(x) \ge -4$.

β) $f(x) \ge f(2) \Leftrightarrow f^3(x) \ge f^3(2) \Leftrightarrow f^3(x) + 2 \ge f^3(2) + 2 \Leftrightarrow h(x) \ge h(2)$.

Άρα η h παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x = 2$ το

$h(2) = f^3(2) + 2 = (-4)^3 + 2 = -62$.

81. α) $f(x) = x^2 - 6x + 10 = (x-3)^2 + 1 \ge 1 = f(3)$. Ελάχιστο το 1 για $x = 3$.

β) $f(x) = -x^2 + 8x - 10 = -(x-4)^2 + 6$.

$-(x-4)^2 \le 0 \Leftrightarrow -(x-4)^2 + 6 \le 6 \Leftrightarrow f(x) \le 6 = f(4)$. Μέγιστο το 6 για x = 4.

γ) $f(x) = x^4 - 18x^2 + 70 = \left(x^2 - 9\right)^2 - 11$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$\left(x^2 - 9\right)^2 \ge 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - 9\right)^2 - 11 \ge -11 \Leftrightarrow f(x) \ge -11 = f(3) = f(-3)$.

Ελάχιστο το -11 για $x = 3$ και $x = -3$.

δ) $f(x) = e^{2x} - 2e^x + 2 = \left(e^x - 1\right)^2 + 1$.

$\left(e^x - 1\right)^2 \ge 0 \Leftrightarrow \left(e^x - 1\right)^2 + 1 \ge 1 \Leftrightarrow f(x) \ge 1 = f(0)$. Ελάχιστο το 1 για $x = 0$.

Αυξημένης δυσκολίας

82.α) $-1 \le \etaμx \le 1$ (1) και $-1 \le συνx \le 1 \Leftrightarrow -1 \le -συνx \le 1$ (2) για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα προσθέτοντας κατά μέλη τις (1),(2) είναι $-2 \le f(x) \le 2$.

β) Για να αποτελούν ακρότατα της συνάρτησης πρέπει να υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \ne x_2$ τέτοια ώστε $f(x_1) = -2$ και $f(x_2) = 2$.

Έστω ότι $f(x_1) = -2 \Leftrightarrow ημx_1 - συνx_1 = -2$ (3)

Λόγω των (1),(2) η (3) θα ισχύει όταν $ημx_1 = -1$ και $-συνx_1 = -1 \Leftrightarrow συνx_1 = 1$

Τότε θα είναι $ημ^2x_1 + συν^2x_1 = 1 \Leftrightarrow 2 = 1$ άτοπο.

Έστω ότι $f(x_2) = 2 \Leftrightarrow ημx_2 - συνx_2 = 2$ (4)

Λόγω των (1),(2) η (4) θα ισχύει όταν $ημx_2 = 1$ και $-συνx_2 = 1 \Leftrightarrow συνx_2 = -1$

Τότε θα είναι $ημ^2x_2 + συν^2x_2 = 1 \Leftrightarrow 2 = 1$ άτοπο.

83. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + x + 1} = y \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow (y-1)x^2 + (y+2)x + y - 1 = 0 \quad (1)$$

Αν $y = 1$, τότε $x = 0$ που ανήκει στο $A_f = \mathbb{R}$, άρα η $y = 1$ είναι δεκτή.

Αν $y \ne 1$, τότε επειδή η (1) έχει τουλάχιστον μία ρίζα, είναι

$$\Delta \ge 0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow y^2 - 4y \le 0 \Leftrightarrow 0 \le y \le 4$$

Για $y = 0$, είναι $\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + x + 1} = 0 \Leftrightarrow x = 1$, οπότε η f έχει ελάχιστο το 0 για $x = 1$.

Για $y = 4$, είναι $\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + x + 1} = 4 \Leftrightarrow x = -1$, οπότε η f έχει μέγιστο το 4 για $x = -1$.

84. $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2} = \sqrt{(x-1)^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

$$(x-1)^2 \ge 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + 1 \ge 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + 1} \ge 1 \Leftrightarrow f(x) \ge 1 = f(1) \quad (1)$$

Άρα η f έχει ελάχιστο το 1 για $x = 1$.

85.α) Για κάθε $1 \le x_1 < x_2$ είναι $1 \le x_1^2 < x_2^2 \Leftrightarrow 0 \le x_1^2 - 1 < x_2^2 - 1 \Rightarrow$
$\sqrt{x_1^2 - 1} < \sqrt{x_2^2 - 1} \Leftrightarrow -\sqrt{x_1^2 - 1} > -\sqrt{x_2^2 - 1} \Leftrightarrow 3 - \sqrt{x_1^2 - 1} > 3 - \sqrt{x_2^2 - 1} \Leftrightarrow$
$f(x_1) > f(x_2)$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Για κάθε $x \ge 1$ είναι $f(x) \le f(1) = 3$, άρα η f έχει μέγιστο το 3 για x = 1.

86. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα και στο $[0,+\infty)$, για κάθε $x \geq 0$ είναι $f(x) \geq f(0) = 1$ (1). Για κάθε $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ με $x_1 < x_2$ είναι

$$-x_1 > -x_2 > 0 \overset{f\nearrow[0,+\infty)}{\Leftrightarrow} f(-x_1) > f(-x_2) \overset{f\ \text{άρτια}}{\Leftrightarrow} f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow f\searrow(-\infty,0),$$

οπότε για κάθε $x < 0$ είναι $f(x) > f(0) = 1$ (2).

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $f(x) \geq f(0) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η f έχει ελάχιστο στο A.

87. $f(x) = |g(x)+1| + |1-g(x)| \geq |g(x)+1+1-g(x)| = |2| = 2$ αφού $|\alpha+\beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Είναι $f(1) = |1| + |-1| = 2$ άρα παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 1$ το $f(1) = 2$.

88. $f(x) - f(y) = M - m \Leftrightarrow (M - f(x)) + (f(y) - m) = 0$ (1) και ισχύουν οι εξής σχέσεις:

- $f(x) \leq M \Leftrightarrow M - f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει μόνον για $x = 1$ (2)
- $f(y) \geq m \Leftrightarrow f(y) - m \geq 0$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει μόνον για $y = 2$ (3)

Από τις (2) και (3) αντιλαμβανόμαστε ότι η (1) γίνεται:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} M - f(x) = 0 \\ f(y) - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = M \\ f(y) = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

89. Έστω ότι $C_1 \equiv C_f$ και $C_2 \equiv C_g$.

Τότε $g(x) \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{g(x)} \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{g(x)} + 1 \geq 2 \Leftrightarrow f(x) \geq 2$ πράγμα άτοπο.

Έστω ότι $C_1 \equiv C_g$ και $C_2 \equiv C_f$.

Τότε η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = x_2$ το $f(x_2) = 1$.

Άρα είναι $f(x_2) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{g(x_2)} + 1 = 1 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \sqrt{g(x_2)} = 0 \Leftrightarrow g(x_2) = 0$ πράγμα άτοπο.

2ος τρόπος: Αν οι γραφικές παραστάσεις των C_1, C_2 ήταν οι γραφικές παραστάσεις των f,g τότε θα είχαν σημείο τομής το $(x_1, 1)$ οπότε $f(x_2) = g(x_2) = 1$ άτοπο αφού $f(x_2) = \sqrt{g(x_2)} + 1 = 2$.

90. Έστω $M(x,y)$ σημείο της ε. Τότε $y=x+6$. Οι αποστάσεις του M από τους άξονες, είναι: $d(M,x'x)=|y|=|x+6|$ και $d(M,y'y)=|x|$.
Αν Σ το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων του M από τους άξονες, τότε: $\Sigma=|x+6|^2+|x|^2=(x+6)^2+x^2=2x^2+12x+36$.
Η παράσταση Σ είναι τριώνυμο και η γραφική της παράσταση είναι παραβολή με κορυφή $K\left(-\frac{\beta}{2\alpha},-\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$.

Οπότε η Σ γίνεται ελάχιστη όταν $x=x_K=-\frac{\beta}{2\alpha}=-\frac{12}{4}=-3$.

Τότε $y=-3+6=3$ και το σημείο M έχει συντεταγμένες $(-3,3)$.

91. Έστω $M(x,y)$ σημείο της ε. Τότε $y=x-2$. Οι αποστάσεις του M από τους άξονες, είναι: $d(M,x'x)=|y|=|x-2|$ και $d(M,y'y)=|x|$. Αν Σ το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων του M από τους άξονες, τότε:

$$\Sigma=|x-2|^2+|x|^2=(x-2)^2+x^2=2x^2-4x+4$$

Η παράσταση Σ είναι τριώνυμο και η γραφική της παράσταση είναι παραβολή με κορυφή $K\left(-\frac{\beta}{2\alpha},-\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$.

Οπότε η Σ γίνεται ελάχιστη όταν $x=x_K=-\frac{\beta}{2\alpha}=\frac{4}{4}=1$.

Τότε $y=1-2=-1$ και το σημείο M έχει συντεταγμένες $(1,-1)$.

92. Η f είναι τριώνυμο και παρουσιάζει ελάχιστο για $x=-\frac{\beta}{2\alpha}=\frac{\lambda}{2}$ το

$-\frac{\Delta}{4\alpha}=-\frac{\lambda^2-8}{4}$. Πρέπει $-\frac{\lambda^2-8}{4}=-2\Leftrightarrow-\lambda^2+8=-8\Leftrightarrow\lambda^2=16\Leftrightarrow\lambda=\pm4$.

93. Η f είναι τριώνυμο και παρουσιάζει ελάχιστο για $x=-\frac{\beta}{2\alpha}=2\lambda$ το

$-\frac{\Delta}{4\alpha}=17-4\lambda^2$. Πρέπει $17-4\lambda^2=1\Leftrightarrow\lambda^2=4\Leftrightarrow\lambda=\pm2$.

94. $f(x)=y\Leftrightarrow(1-y)x^2+\kappa x+\lambda-y=0\quad(1)$

Αν $y=1$, τότε $(1)\Rightarrow\kappa x+\lambda-1=0$ και δεν έχει πάντα λύση ως προς x.

Για $y\neq1$, επειδή η (1) έχει τουλάχιστον μία ρίζα, είναι:

$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 4y^2 - 4(1+\lambda)y + 4\lambda - k^2 \leq 0 \ (2)$. Αν y_1, y_2 με $y_1 < y_2$ οι ρίζες του τριωνύμου της (2), τότε $f_{min} = y_1 = -3$ και $f_{max} = y_2 = 3$.

Είναι $y_1 + y_2 = -\dfrac{-4(1+\lambda)}{4} \Leftrightarrow 1+\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$ και

$y_1 y_2 = \dfrac{4\lambda - \kappa^2}{4} \Leftrightarrow -9 = \dfrac{-4-\kappa^2}{4} \Leftrightarrow \kappa^2 = 32 \Leftrightarrow \kappa = \pm 4\sqrt{2}$.

95. α) Έστω $M\left(x, x^2+1\right)$ σημείο της C_f. Είναι

$d(M,\varepsilon) = \dfrac{\left|4x + x^2 + 1 + 8\right|}{\sqrt{4^2+1}} = \dfrac{(x+2)^2+5}{\sqrt{17}}$ $(x+2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 + 5 \geq 5 \Leftrightarrow$

$\dfrac{(x+2)^2+5}{\sqrt{17}} \geq \dfrac{5}{\sqrt{17}} \Leftrightarrow d(M,\varepsilon) \geq \dfrac{5}{\sqrt{17}}$. Επειδή για $x = -2$ είναι $d(M,\varepsilon) = \dfrac{5}{\sqrt{17}}$ η ελάχιστη απόσταση είναι $\dfrac{5}{\sqrt{17}}$ για $x = -2$.

β) Για $x = -2$: $M(-2, 5)$. Αν $MK \perp \varepsilon$ τότε $\lambda_{MK}\lambda_{\varepsilon} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{MK} = \dfrac{1}{4}$

και MK: $y - 5 = \dfrac{1}{4}(x+2) \Leftrightarrow 4y - 20 = x + 2 \Leftrightarrow 4y - 22 = x \quad (1)$

$4x + y + 8 = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} 4(4y-22) + y + 8 = 0 \Leftrightarrow 17y = 80 \Leftrightarrow y = \dfrac{80}{17}$ και

$x = -\dfrac{54}{17}$ άρα $K\left(-\dfrac{54}{17}, \dfrac{80}{17}\right)$.

96. Από τη σχέση που μας δίνεται έχουμε $f(x) - g(x) = |x+2| + 3 > 0$ οπότε η κατακόρυφη απόσταση είναι $|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x) = |x+2| + 3$.

Όμως $|x+2| \geq 0 \Leftrightarrow |x+2| + 3 \geq 3 \Leftrightarrow f(x) - g(x) \geq 3$

Επειδή για $x = -2$ είναι $f(-2) - g(-2) = 3$, η ελάχιστη κατακόρυφη απόσταση των C_f, C_g είναι 3 για $x = -2$.

97.α) Έστω $g(x) = e^x + x - 1,\ x \in \mathbb{R}$. Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι... $g(x_1) < g(x_2) \Leftrightarrow g \nearrow \mathbb{R}$. Η g έχει προφανή ρίζα το 0, η οποία είναι μοναδική λόγω της μονοτονίας.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) \geq 0 = f(0)$, οπότε η f έχει ελάχιστο το 0 στο x = 0.

β) Για κάθε $x<0$ είναι $g(x)<g(0)=0 \Rightarrow f(x)=-g(x)=-e^x-x+1$ ενώ για κάθε $x\ge 0$ είναι $g(x)\ge g(0)=0 \Rightarrow f(x)=g(x)=e^x+x-1$.

γ) Επειδή στο διάστημα $(-\infty,0)$ είναι $f(x)=-g(x)$ και η g είναι γνησίως αύξουσα αποδεικνύεται εύκολα ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Επειδή $f(x)=g(x),\ \ x\in[0,+\infty)$ είναι $f\nearrow[0,+\infty)$.

98.α) Έστω $g(x)=\ln x+x-1,\ x>0$. Για κάθε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ είναι... $g(x_1)<g(x_2)\Leftrightarrow g\nearrow(0,+\infty)$. Η g έχει προφανή ρίζα το 1, η οποία είναι μοναδική λόγω της μονοτονίας .

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)\ge 0=f(1)$, οπότε η f έχει ελάχιστο το 0 στο x = 1.

β) Για κάθε $x<1$ είναι $g(x)<g(1)=0 \Rightarrow f(x)=-g(x)=-\ln x-x+1$ ενώ για κάθε $x\ge 1$ είναι $g(x)\ge g(1)=0 \Rightarrow f(x)=g(x)=\ln x+x-1$.

γ) Επειδή στο διάστημα $(0,1)$ είναι $f(x)=-g(x)$ και η g είναι γνησίως αύξουσα αποδεικνύεται εύκολα ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Επειδή $f(x)=g(x),\ \ x\in[1,+\infty)$ είναι $f\nearrow[1,+\infty)$.

99.α) Έστω $A(x,f(x)),\ x\in\mathbb{R}$. Επειδή το Β είναι συμμετρικό του Α ως προς την $y=x$ έχει συντεταγμένες $(f(x),x)$.

Είναι $d(A,B)=d(x)=(AB)=\sqrt{(f(x)-x)^2+(x-f(x))^2}\Leftrightarrow$

$d(x)=\sqrt{(f(x)-x)^2+(f(x)-x)^2}=\sqrt{2(f(x)-x)^2}=\sqrt{2}\left|f(x)-x\right|$.

Είναι $x-\sqrt{2}\le f(x)\le x+\sqrt{2}\Leftrightarrow -\sqrt{2}\le f(x)-x\le 2\Leftrightarrow \left|f(x)-x\right|\le\sqrt{2}$, άρα

$d(x)=\sqrt{2}\left|f(x)-x\right|\le\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$.

Επειδή $d(0)=\sqrt{2}\left|f(0)-0\right|=2$, είναι $d(x)\le d(0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η απόσταση d των Α, Β έχει μέγιστο το 2 για x = 0, δηλαδή όταν το Α έχει συντεταγμένες $(0,\sqrt{2})$.

β) Είναι ε: $y=x+4\sqrt{2}\Leftrightarrow x-y+4\sqrt{2}=0$.

Η απόσταση του τυχαίου σημείου Γ της C_f από την ε είναι:

$$d(A,\varepsilon)=\frac{\left|x-f(x)+4\sqrt{2}\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\left|x-f(x)+4\sqrt{2}\right|}{\sqrt{2}}.$$

Είναι $f(x)-x\le\sqrt{2}\Leftrightarrow x-f(x)\ge-\sqrt{2}\Leftrightarrow x-f(x)+4\sqrt{2}\ge 3\sqrt{2}\Rightarrow$

$$\left|x-f(x)+4\sqrt{2}\right|\ge 3\sqrt{2}\Leftrightarrow \frac{\left|x-f(x)+4\sqrt{2}\right|}{\sqrt{2}}\ge\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=3\Leftrightarrow d(A,\varepsilon)\ge 3.$$

Επειδή για x = 0 είναι $d(A,\varepsilon)=3$, η ελάχιστη απόσταση της C_f από την ε είναι 3 όταν το Α έχει συντεταγμένες $\left(0,\sqrt{2}\right)$.

100. Έστω $A(x,f(x))$, $x\in\mathbb{R}$. Επειδή το Β είναι συμμετρικό του Α ως προς την $y=x$ έχει συντεταγμένες $(f(x),x)$. Είναι

$$d(A,B)=d(x)=(AB)=\sqrt{(f(x)-x)^2+(x-f(x))^2}\Leftrightarrow$$

$$d(x)=\sqrt{(f(x)-x)^2+(f(x)-x)^2}=\sqrt{2(f(x)-x)^2}=\sqrt{2}\left|f(x)-x\right|$$

$$f(x)\ge x+2\sqrt{2}\Leftrightarrow f(x)-x\ge 2\sqrt{2}\Rightarrow\left|f(x)-x\right|\ge 2\sqrt{2}\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{2}\left|f(x)-x\right|\ge 2\sqrt{2}^2\Leftrightarrow d(x)\ge 4.$$

Επειδή $d(1)=\sqrt{2}\left|f(1)-1\right|=\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}=4$ είναι $d(x)\ge d(1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η απόσταση d των Α, Β έχει ελάχιστο το 4 για x = 1, δηλαδή όταν το Α έχει συντεταγμένες $\left(1,1+2\sqrt{2}\right)$.

Σύνθετες ασκήσεις

101. ***α)*** Είναι $f(x)=x-2\sqrt{x}+1=\left(\sqrt{x}-1\right)^2$.

Για κάθε $0\le x_1<x_2\le 1$ είναι: $\sqrt{x_1}<\sqrt{x_2}\le 1\Leftrightarrow\sqrt{x_1}-1<\sqrt{x_2}-1\le 0\Rightarrow$

$$\left(\sqrt{x_1}-1\right)^2>\left(\sqrt{x_2}-1\right)^2\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)\Rightarrow f\searrow[0,1].$$

β) Η $f\circ f$ ορίζεται όταν:

$$\begin{cases}x\in D_f\\ f(x)\in D_f\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le\left(\sqrt{x}-1\right)^2\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le 1\\ \left(\sqrt{x}-1\right)^2\ge 0 \text{ ισχύει}\Leftrightarrow\\ \left(\sqrt{x}-1\right)^2\le 1\end{cases}$$

$$\begin{cases}0\le x\le 1\\ \left|\sqrt{x}-1\right|\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le 1\\ 1-\sqrt{x}\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le 1\\ \sqrt{x}\ge 0 \text{ ισχύει}\end{cases}, \text{ άρα } D_{f\circ f}=[0,1].$$

$f(f(x))=\left(\sqrt{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}-1\right)^2=\left(\left|\sqrt{x}-1\right|-1\right)^2=\left(1-\sqrt{x}-1\right)^2=x$.

γ) Για κάθε $0\le x\le 1 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(1)\le f(x)\le f(0)\Leftrightarrow 0\le f(x)\le 1$, άρα $f(A)=[0,1]$.

δ) $f\left(\underbrace{f(f(x))}_{x}\right)\le x^2-2x+1\Leftrightarrow f(x)\le(x-1)^2\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-1\right)^2\le(x-1)^2\Leftrightarrow$

$\left|\sqrt{x}-1\right|\le|x-1| \overset{x\in[0,1]}{\Leftrightarrow} 1-\sqrt{x}\le 1-x\Leftrightarrow x\le\sqrt{x}\Leftrightarrow x^2\le x\Leftrightarrow$

$x^2-x\le 0\Leftrightarrow x(x-1)\le 0$ ισχύει αφού $x\in[0,1]$.

102. α) Για $x=-1$ είναι $2f(-1)\ge f(-1)+f(1)\Leftrightarrow f(-1)\ge f(1)$ (1)

Για $x=1$ είναι $2f(1)\ge f(-1)+f(1)\Leftrightarrow f(1)\ge f(-1)$ (2)

Από $(1),(2)\Leftrightarrow f(-1)=f(1)$.

β) Επειδή $f(-1)=f(1)$, η σχέση $2f(x)\ge f(-1)+f(1)$ γίνεται $2f(x)\ge f(-1)+f(-1)\Leftrightarrow 2f(x)\ge 2f(-1)\Leftrightarrow f(x)\ge f(-1)$, οπότε η f έχει ελάχιστο το $f(-1)$ για $x=-1$ και $x=1$.

γ) Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα, τότε επειδή $-1<1$, θα είναι $f(-1)<f(1)$ που είναι άτοπο. Όμοια αν η f είναι γνησίως φθίνουσα.

δ) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $(x+1)^2\ge 0$ και $(x-1)^2\ge 0$, οπότε μια τέτοια συνάρτηση είναι η $f(x)=(x+1)^2(x-1)^2=\left(x^2-1\right)^2=x^4-2x^2+1$.

103. α) Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο Α, τότε για κάθε $x_1,x_2\in A$ με

$x_1<x_2$ είναι $f(x_1)<f(x_2) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(f(x_1))<f(f(x_2))\Leftrightarrow$

$(f\circ f)(x_1)<(f\circ f)(x_2)\Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2)\Rightarrow g\nearrow A$.

Έστω ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Α, τότε για κάθε $x_1,x_2\in A$ με

$x_1<x_2$ είναι $f(x_1)>f(x_2) \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(f(x_1))<f(f(x_2))\Leftrightarrow$

$(f\circ f)(x_1)<(f\circ f)(x_2)\Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2)\Rightarrow g\nearrow A$.

β) Για κάθε $x\in A$ και $-x\in A$.

Είναι $g(-x)=f(f(-x)) \overset{f\text{ άρτια}}{=} f(f(x))=(f\circ f)(x)=g(x)$, άρα η g είναι άρτια.

γ) Αν η C_f τέμνει την $y=x$ στο σημείο Μ που έχει τετμημένη $x_0 \in A$, τότε $f(x_0)=x_0$. Είναι $g(x_0)=(f\circ f)(x_0)=f(f(x_0))=f(x_0)=x_0$, οπότε και η γραφική παράσταση της g διέρχεται από το Μ.

δ) Η f ορίζεται όταν $x-\alpha\neq 0 \Leftrightarrow x\neq\alpha$, δηλαδή $A=\mathbb{R}-\{\alpha\}$.

Η g ορίζεται όταν

$$\begin{cases} x\in A_f \\ f(x)\in A_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq\alpha \\ \dfrac{\alpha x+\beta}{x-\alpha}\neq\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq\alpha \\ \cancel{\alpha x}+\beta\neq\cancel{\alpha x}-\alpha^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq\alpha \\ \beta\neq-\alpha^2 \end{cases}.$$

$$g(x)=f(f(x))=\frac{\alpha\dfrac{\alpha x+\beta}{x-\alpha}+\beta}{\dfrac{\alpha x+\beta}{x-\alpha}-\alpha}=\frac{\dfrac{\alpha^2x+\cancel{\alpha\beta}+\beta x-\cancel{\alpha\beta}}{\cancel{x-\alpha}}}{\dfrac{\cancel{\alpha x}+\beta-\cancel{\alpha x}+\alpha^2}{\cancel{x-\alpha}}}=\frac{\cancel{(\alpha^2+\beta)}x}{\cancel{\alpha^2+\beta}}=x.$$

Άρα η ζητούμενη σχέση είναι η $\beta\neq-\alpha^2$.

104. α) Είναι $D_f=[0,+\infty)$ και $D_g=\mathbb{R}$. Η $f\circ g$ ορίζεται όταν

$$\begin{cases} x\in D_g \\ g(x)\in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ x+2\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\geq -2, \text{ άρα } D_{f\circ g}=[-2,+\infty) \text{ και}$$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=2\sqrt{x+2}$.

β) Αρκεί για κάθε $x\geq 0$ να είναι $2\sqrt{x}<x+2$.

Είναι $\left(2\sqrt{x}\right)^2<(x+2)^2 \Leftrightarrow 4x<x^2+4x+4 \Leftrightarrow x^2+4>0$ ισχύει.

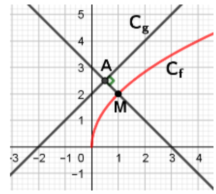
γ) Έστω $M\left(x,2\sqrt{x}\right)$ σημείο της C_f.

Επειδή η C_g είναι ευθεία, η απόσταση των C_f, C_g είναι:

$$d(M,C_g)=\frac{\left|x-2\sqrt{x}+2\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\left|\left(\sqrt{x}\right)^2-2\sqrt{x}+1+1\right|}{\sqrt{2}}=\frac{\left|\left(\sqrt{x}-1\right)^2+1\right|}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow$$

$d(M,C_g)=\dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2+1}{\sqrt{2}}$. Είναι $\left(\sqrt{x}-1\right)^2\geq 0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-1\right)^2+1\geq 1\Leftrightarrow$

$$\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2+1}{\sqrt{2}}\geq\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow d(M,C_g)\geq\frac{1}{\sqrt{2}}.$$



Η ελάχιστη απόσταση των C_f, C_g είναι $\frac{1}{\sqrt{2}}$ όταν $\sqrt{x}=1 \Leftrightarrow x=1$. Το σημείο της C_f για το οποίο έχουμε την ελάχιστη απόσταση είναι το $M(1,2)$.

Θεωρούμε ευθεία MA κάθετη στη C_g, τότε $\lambda_{MA}\cdot 1=-1 \Leftrightarrow \lambda_{MA}=-1$.

Η MA έχει εξίσωση: $y-2=-(x-1) \Leftrightarrow y=-x+3$. Το A είναι το σημείο της C_g για το οποίο έχουμε την ελάχιστη απόσταση. Για να το βρούμε λύνουμε το σύστημα των C_g, MA. Είναι:

$$\begin{cases} y=-x+3 \\ y=x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=-x+3 \\ y=x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=1 \\ y=x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{5}{2} \end{cases}, \text{ άρα } A\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right).$$

δ) Επειδή η C_g είναι ευθεία με $\lambda=1>0$ είναι γνησίως αύξουσα.

Για κάθε $0\le x_1<x_2 \Leftrightarrow \sqrt{x_1}<\sqrt{x_2} \Leftrightarrow 2\sqrt{x_1}<2\sqrt{x_2} \Leftrightarrow$
$f(x_1)<f(x_2) \Rightarrow f\nearrow[0,+\infty)$.

$2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{x}}}<x+6 \Leftrightarrow 2\sqrt{2\sqrt{f(x)}}<g(x)+2+2 \Leftrightarrow$
$2\sqrt{f(f(x))}<g(g(x))+2 \Leftrightarrow f(f(f(x)))<g(g(g(x)))$.

Είναι $f(x)<g(x)$ για κάθε $x\ge 0$, οπότε και $f(f(x))<g(f(x))$ (2)

Είναι $f(x)<g(x) \overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow} g(f(x))<g(g(x))$ (3)

Από τις (2),(3) προκύπτει ότι $f(f(x))<g(g(x))$ και αντικαθιστώντας όπου x το $f(x)$ προκύπτει $f(f(f(x)))<g(g(f(x)))$ (4)

Ακόμη από την $(3) \overset{g\nearrow}{\Rightarrow} g(g(f(x)))<g(g(g(x)))$ (5).

Από τις (4),(5) προκύπτει ότι $f(f(f(x)))<g(g(g(x)))$.

105. A) α) Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι $\alpha^{x_1}>\alpha^{x_2}$, $\beta^{x_1}>\beta^{x_2}$ οπότε και $\alpha^{x_1}+\beta^{x_1}>\alpha^{x_2}+\beta^{x_2} \Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2) \Rightarrow f\searrow\mathbb{R}$.

β) $\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{2}{5}\right)^x>1 \Leftrightarrow f(x)>f(1) \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} x<1$ $\left(\alpha=\frac{3}{5}, \beta=\frac{2}{5}\right)$.

B) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι $\alpha^{x_1} < \alpha^{x_2}$, $\beta^{x_1} < \beta^{x_2}$ οπότε και $\alpha^{x_1} + \beta^{x_1} < \alpha^{x_2} + \beta^{x_2} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \nearrow \mathbb{R}$.

α) $\left(\frac{5}{4}\right)^x + \left(\frac{11}{4}\right)^x \geq 4 \Leftrightarrow f(x) \geq f(1) \overset{\nearrow}{\Leftrightarrow} x \geq 1$, $\left(\alpha = \frac{5}{4}, \beta = \frac{11}{4}\right)$.

β) $4^x \cdot 5^{x^3} - 11^x \cdot 4^{x^3} < 5^x \cdot 4^{x^3} - 4^x \cdot 11^{x^3} \Leftrightarrow$

$4^x \cdot 5^{x^3} + 4^x \cdot 11^{x^3} < 5^x \cdot 4^{x^3} + 11^x \cdot 4^{x^3} \Leftrightarrow 4^x\left(5^{x^3} + 11^{x^3}\right) < \left(5^x + 11^x\right)4^{x^3} \Leftrightarrow$

$$\frac{5^{x^3}}{4^{x^3}} + \frac{11^{x^3}}{4^{x^3}} < \frac{5^x}{4^x} + \frac{11^x}{4^x} \Leftrightarrow f\left(x^3\right) < f(x) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} x^3 < x \Leftrightarrow x^3 - x < 0 \Leftrightarrow$$

$x(x-1)(x+1) < 0 \Leftrightarrow x < -1$ ή $0 < x < 1$.

106. α) Για κάθε $x > 1$ είναι $x^3 < x^4 \Leftrightarrow x^3 + 1 < x^4 + 1 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}$

$f\left(x^3+1\right) < f\left(x^4+1\right)$ (1) και $x^{49} < x^{50} \Leftrightarrow x^{49} + 1 < x^{50} + 1 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}$

$f\left(x^{49}+1\right) < f\left(x^{50}+1\right)$ (2)

Από $(1)+(2) \Rightarrow f\left(x^3+1\right) + f\left(x^{49}+1\right) < f\left(x^4+1\right) + f\left(x^{50}+1\right)$.

β) Είναι $x^3 - x^4 = x^3(1-x)$ και $x^{49} - x^{50} = x^{49}(1-x)$. Αν $x < 0$ τότε

$x^3 - x^4 = x^3(1-x) < 0 \Leftrightarrow x^3 < x^4 \Leftrightarrow x^3 + 1 < x^4 + 1 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}$

$f\left(x^3+1\right) < f\left(x^4+1\right)$ (3) και $x^{49} - x^{50} = x^{49}(1-x) < 0 \Leftrightarrow x^{49} < x^{50} \Leftrightarrow$

$x^{49} + 1 < x^{50} + 1 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f\left(x^{49}+1\right) < f\left(x^{50}+1\right)$ (4)

Από $(3)+(4) \Rightarrow f\left(x^3+1\right) + f\left(x^{49}-1\right) < f\left(x^4+1\right) + f\left(x^{50}-1\right)$.

Αν $0 < x < 1$ τότε $x^3 - x^4 = x^3(1-x) > 0 \Leftrightarrow x^3 > x^4 \Leftrightarrow$

$x^3 + 1 > x^4 + 1 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f\left(x^3+1\right) > f\left(x^4+1\right)$ (5) και $x^{49} - x^{50} = x^{49}(1-x) > 0 \Leftrightarrow$

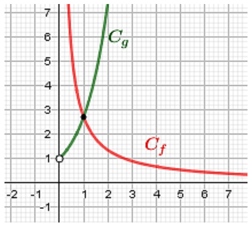
$x^{49} > x^{50} \Leftrightarrow x^{49} + 1 > x^{50} + 1 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f\left(x^{49}+1\right) > f\left(x^{50}+1\right)$ (6)

Από $(5)+(6) \Rightarrow f\left(x^3+1\right) + f\left(x^{49}-1\right) > f\left(x^4+1\right) + f\left(x^{50}-1\right)$.

Άρα για κάθε $x \neq 0$, $x \neq 1$ είναι $f\left(x^3+1\right) + f\left(x^{49}-1\right) \neq f\left(x^4+1\right) + f\left(x^{50}-1\right)$.

Επειδή η ισότητα αληθεύει για $x = 0$ και $x = 1$, αυτές είναι και οι μοναδικές ρίζες της εξίσωσης.

107. α)



β) Παρατηρούμε ότι $f(1)=g(1)=e$ οπότε οι C_f, C_g τέμνονται στο σημείο $(1,e)$.

$xe^{x-1}-1<0 \Leftrightarrow xe^{x-1}<1 \Leftrightarrow \frac{e^x}{e}<\frac{1}{x} \Leftrightarrow e^x<\frac{e}{x} \Leftrightarrow g(x)<f(x)$.

Λύσεις της ανίσωσης είναι οι τιμές του x για τις οποίες η C_g βρίσκεται κάτω από την C_f, άρα $x \in (0,1)$.

γ) Για κάθε $x_1, x_2 \in (0,+\infty)$ με $x_1<x_2$, επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα και η g γνησίως αύξουσα, έχουμε:

$f(x_1)>f(x_2)$ (1), $g(x_1)<g(x_2) \Leftrightarrow -g(x_1)>-g(x_2)$ (2) και με πρόσθεση κατά μέλη: $f(x_1)-g(x_1)>f(x_2)-g(x_2) \Leftrightarrow h(x_1)>h(x_2) \Leftrightarrow h\searrow(0,+\infty)$

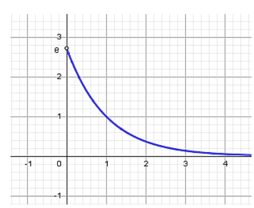
$$\beta-\alpha>\alpha\beta\left(e^{\alpha-1}-e^{\beta-1}\right) \Leftrightarrow \frac{\beta-\alpha}{\alpha\beta}>\frac{e^\alpha}{e}-\frac{e^\beta}{e} \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}>\frac{e^\alpha}{e}-\frac{e^\beta}{e} \Leftrightarrow$$

$$\frac{e}{\alpha}-\frac{e}{\beta}>e^\alpha-e^\beta \Leftrightarrow \frac{e}{\alpha}-e^\alpha>\frac{e}{\beta}-e^\beta \Leftrightarrow h(\alpha)>h(\beta) \overset{h\searrow}{\Leftrightarrow} \alpha<\beta \text{ που ισχύει.}$$

δ) Για να ορίζεται η $f\circ g$ πρέπει $\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ e^x>0 \text{ ισχύει} \end{cases}$,

άρα $D_{f\circ g}=(0,+\infty)$. $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\frac{e}{e^x}=e^{1-x}=\left(\frac{1}{e}\right)^{x-1}$.

Η γραφική παράσταση της $f\circ g$ προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της $y=\left(\frac{1}{e}\right)^x$ κατά μία μονάδα δεξιά.



108. α) Έστω $\ln x=u \Leftrightarrow x=e^u$. Για $x>1$ είναι $u>\ln 1=0$. Τότε η σχέση $f(\ln x)=x+\ln(\ln x)-e$ γίνεται: $f(u)=e^u+\ln u-e,\ u>0$, οπότε $f(x)=e^x+\ln x-e,\ x>0$.

β) Παρατηρούμε ότι $f(1)=e+\ln 1-e=0$.

Για κάθε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ είναι: $e^{x_1}<e^{x_2}$ (1),

$\ln x_1<\ln x_2 \Leftrightarrow \ln x_1-e<\ln x_2-e$ (2)

Από $(1)+(2)\Rightarrow e^{x_1}+\ln x_1-e<e^{x_2}+\ln x_2-e \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)\Leftrightarrow f\nearrow(0,+\infty)$.

Για $x>1\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x)>f(1)=0$ και για $0<x<1\overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(x)<f(1)=0$.

γ) Για $x>0$ είναι: $e^{x^2}-e^x<\ln\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow e^{x^2}-e^x<-\ln x\Leftrightarrow$

$e^{x^2}-e^x<-2\ln x+\ln x\Leftrightarrow e^{x^2}+2\ln x<e^x+\ln x\Leftrightarrow$

$e^{x^2}+\ln x^2-e<e^x+\ln x-e\Leftrightarrow f\left(x^2\right)<f(x)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} x^2<x\Leftrightarrow x^2-x<0\Leftrightarrow$

$x(x-1)<0\Leftrightarrow 0<x<1$.

δ) $e^{e^x}-e^{\eta\mu x}>\ln(\eta\mu x)-x\Leftrightarrow e^{e^x}+x>\ln(\eta\mu x)+e^{\eta\mu x}\Leftrightarrow$

$e^{e^x}+\ln e^x-e>\ln(\eta\mu x)+e^{\eta\mu x}-e\Leftrightarrow f\left(e^x\right)>f(\eta\mu x)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}$

$e^x>\eta\mu x$ που ισχύει γιατί για κάθε $x\in(0,\pi)$ είναι $e^x>1>\eta\mu x$.

109. α) $f(x)=-x^2+2x+1=-\left(x^2-2x-1\right)=-\left(x^2-2x+1-2\right)\Leftrightarrow$

$f(x)=-(x-1)^2+2$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $(x-1)^2\ge 0\Leftrightarrow -(x-1)^2\le 0\Leftrightarrow -(x-1)^2+2\le 2\Leftrightarrow$

$f(x)\le 2\Leftrightarrow f(x)\le f(1)$, οπότε η f έχει μέγιστο το 2 για $x=1$.

β) Αρκεί $g(x)\ge g(1)\Leftrightarrow e^{x-1}+e^{1-x}\ge 2\Leftrightarrow e^{x-1}+e^{-(x-1)}-2\ge 0\Leftrightarrow$

$e^{x-1}+\dfrac{1}{e^{x-1}}-2\ge 0\Leftrightarrow\left(e^{x-1}\right)^2+1-2e^{x-1}\ge 0\Leftrightarrow\left(e^{x-1}-1\right)^2\ge 0$ ισχύει.

γ) Είναι $f(x)\le 2$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$, $g(x)\ge 2$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$, άρα για κάθε $x\ne 1$ είναι $g(x)>2>f(x)$, οπότε $f(x)=g(x)\Leftrightarrow x=1$.

δ) Είναι $g(0)=e^{-1}+e$, $g(2)=e+e^{-1}$. Έστω ότι η g είναι γνησίως αύξουσα, τότε επειδή $0<2$ είναι $g(0)<g(2)$ που είναι άτοπο.

Όμοια αν η g είναι γνησίως φθίνουσα.

110. α) Για κάθε $0<x<1 \overset{f\searrow}{\Rightarrow} f(x)>f(1) \Leftrightarrow f(x)>1$ άρα $(x-1)(f(x)-1)<0$.

Για κάθε $x>1 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(x)<f(1) \Leftrightarrow f(x)<1$ άρα $(x-1)(f(x)-1)<0$.

Άρα $(x-1)(f(x)-1)\le 0$ για κάθε $x>0$ αφού $(x-1)(f(x)-1)=0$ άρα $x=1$.

β) Για κάθε $0<x_1<x_2$, επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα, διαδοχικά έχουμε:

$f(x_1)>f(x_2) \Leftrightarrow f(f(x_1))<f(f(x_2))$ (1)

Ακόμη $\ln x_1<\ln x_2 \Leftrightarrow \ln x_1-1<\ln x_2-1$ (2)

Από $(1)+(2) \Rightarrow g(x_1)<g(x_2) \Leftrightarrow g\nearrow(0,+\infty)$.

γ) i. $f(f(x))+\ln x>1 \Leftrightarrow f(f(x))+\ln x-1>0 \Leftrightarrow g(x)>g(1) \overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow} x>1$.

ii. $f(f(f(x)))+\ln f(x)<1 \Leftrightarrow f(f(f(x)))+\ln f(x)-1<0 \Leftrightarrow$

$g(f(x))<g(1) \overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x)<1 \Leftrightarrow f(x)<f(1) \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} x>1$.

iii. $f(f(f(x)))-f(f(x))>\ln\dfrac{x}{f(x)} \Leftrightarrow$

$f(f(f(x)))-f(f(x))>\ln x-\ln f(x) \Leftrightarrow$

$f(f(f(x)))+\ln f(x)>f(f(x))+\ln x \Leftrightarrow$

$f(f(f(x)))+\ln f(x)-1>f(f(x))+\ln x-1 \Leftrightarrow g(f(x))>g(x) \overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow}$

$f(x)>x$ (3). Επειδή για κάθε $x>1$ είναι $f(x)<1$, είναι $f(x)<1<x$.

Για κάθε $0<x<1$ είναι $f(x)>1>x$, άρα (3) $\Leftrightarrow x\in(0,1)$.

δ) $g(x)=f(f(x))+\ln x-1=\dfrac{1}{f(x)}+\ln x-1=\dfrac{1}{\frac{1}{x}}+\ln x-1 \Leftrightarrow$

$g(x)=x+\ln x-1,\ x>0$.

ε) Για κάθε $x>0$ είναι $g^2(x)\ge 0 \Leftrightarrow h(x)\ge h(1)$ άρα η h έχει ελάχιστο το 0 για $x=1$.

111. α) Για να βρούμε τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα x΄x, αναζητούμε τις λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0$. Έστω $\rho\in\mathbb{R}$ ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

Για $x=\rho$ η σχέση $f^2(x)-2f(x)=x^2-2x$ (1) γίνεται:

$f^2(\rho)-2f(\rho)=\rho^2-2\rho \Leftrightarrow 0=\rho^2-2\rho \Leftrightarrow \rho(\rho-2)=0 \Leftrightarrow \rho=0$ ή $\rho=2$.

Για ρ=0: $f^2(0)-2f(0)=0 \Leftrightarrow f(0)\big(f(0)-2\big)=0 \Leftrightarrow f(0)=0$ ή $f(0)=2$.

Επειδή για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)<e^{x-2}$, για $x=0$ προκύπτει ότι $f(0)<\frac{1}{e^2}$, οπότε $f(0)=0$.

Για ρ=2: $f^2(2)-2f(2)=0 \Leftrightarrow f(2)\big(f(2)-2\big)=0 \Leftrightarrow f(2)=0$ ή $f(2)=2$.

Επειδή για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)<e^{x-2}$, για $\rho=2$ προκύπτει ότι $f(2)<1$, οπότε $f(2)=0$.

Επομένως η C_f τέμνει τους άξονες στα σημεία $O(0,0)$ και $A(2,0)$.

β) Αν η f ήταν γνησίως αύξουσα τότε: $0<2 \Leftrightarrow f(0)<f(2) \Leftrightarrow 0<0$ άτοπο.
Όμοια αν f γνησίως φθίνουσα.

γ) $f^2\left(x^2\right)+2f(x)>f^2(x)+2f\left(x^2\right) \Leftrightarrow$

$f^2\left(x^2\right)-2f\left(x^2\right)>f^2(x)-2f(x) \Leftrightarrow$

$\left(x^2\right)^2-2x^2>x^2-2x \Leftrightarrow$

$x^4-3x^2+2x>0 \Leftrightarrow$

$x\left(x^3-3x+2\right)>0 \Leftrightarrow$

$x(x-1)^2(x+2)>0 \Leftrightarrow$ $x<-2$ ή $x>0$.

1	0	-3	2	1
	1	1	-2	
1	1	-2	0	

x	$-\infty$ … -2	-2 … 0	0 … 1	1 … $+\infty$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$
$(x-1)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$
Γινόμενο	$+$	$-$	$+$	$+$

δ) Η C_f τέμνει την $y=-x$ στο $(0,0)$. Θα δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=-x$ έχει λύση μόνο το 0. Έστω ότι υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}^*$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=-x_0$, τότε η σχέση (1) για $x=x_0$ γίνεται: $f^2(x_0)-2f(x_0)=x_0^2-2x_0 \Leftrightarrow$

$\cancel{x_0^2}+2x_0=\cancel{x_0^2}-2x_0 \Leftrightarrow 4x_0=0 \Leftrightarrow x_0=0$ άτοπο.

ε) Αν η f ήταν άρτια η περιττή τότε θα ήταν $f(-x)=f(x)$ ή $f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Τότε όμως $f(-2)=f(2)=0$ ή $f(-2)=-f(2)=0$ το οποίο σε κάθε περίπτωση είναι άτοπο αφού το -2 δεν είναι ρίζα της f.

στ) Για $x>0$ είναι: $f^2(\ln x)+1=2f(\ln x)\Leftrightarrow$

$f^2(\ln x)-2f(\ln x)+1=0\Leftrightarrow(f(\ln x)-1)^2=0\Leftrightarrow f(\ln x)=1$.

Αντικαθιστώντας στη (1) όπου x το lnx προκύπτει:

$f^2(\ln x)-2f(\ln x)=\ln^2 x-2\ln x\Leftrightarrow 1-2=\ln^2 x-2\ln x\Leftrightarrow$

$\ln^2 x-2\ln x+1=0\Leftrightarrow(\ln x-1)^2=0\Leftrightarrow \ln x=1\Leftrightarrow x=e$.

112. α) Για $x=2$ είναι $f(2)=8+(f(2)-8)\cdot 2-1\Leftrightarrow$

$f(2)=7+2f(2)-16\Leftrightarrow f(2)-2f(2)=-9\Leftrightarrow -f(2)=-9\Leftrightarrow f(2)=9$ και

$f(x)=x^3+x-1$.

β) Αρχικά θα βρούμε το σημείο τομής της C_f με την $y=x$.

Είναι: $f(x)=x\Leftrightarrow x^3+\cancel{x}-1=\cancel{x}\Leftrightarrow x^3=1\Leftrightarrow x=1$. Η C_f τέμνει την $y=x$ στο σημείο (1, 1). Αρκεί να δείξουμε ότι και $g(1)=1$.

Είναι $(f\circ g)(1)=(g\circ f)(1)\Leftrightarrow f(g(1))=g(f(1))\Leftrightarrow$

$g^3(1)+\cancel{g(1)}-1=\cancel{g(1)}\Leftrightarrow g^3(1)=1\Leftrightarrow g(1)=1$.

γ) Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι: $x_1^3<x_2^3$, $x_1-1<x_2-1$, οπότε και

$x_1^3+x_1-1<x_2^3+x_2-1\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)\Leftrightarrow f\nearrow\mathbb{R}$.

δ) Έστω ότι η g είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα $\Delta\subseteq\mathbb{R}$, τότε για κάθε

$x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι $g(x_1)<g(x_2)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(g(x_1))<f(g(x_2))\Leftrightarrow f\circ g\nearrow\Delta$.

Έστω ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα $\Delta\subseteq\mathbb{R}$, τότε για κάθε

$x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι $g(x_1)>g(x_2)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(g(x_1))>f(g(x_2))\Leftrightarrow f\circ g\searrow\Delta$.

ε) Έστω ότι $g(x)=\alpha x+\beta,\ \alpha\neq 0,\ \beta\in\mathbb{R}$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)\Leftrightarrow(\alpha x+\beta)^3+\alpha x+\cancel{\beta}-1=\alpha(x^3+x-1)+\cancel{\beta}\Leftrightarrow$

$\alpha^3x^3+3\alpha^2\beta x^2+3\alpha\beta^2x+\beta^3+\cancel{\alpha x}-1=\alpha x^3+\cancel{\alpha x}-\alpha\Leftrightarrow$

$$\alpha^3x^3+3\alpha^2\beta x^2+3\alpha\beta^2x+\beta^3-1=\alpha x^3-\alpha\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha^3=\alpha\ (1)\\ 3\alpha^2\beta=0\\ 3\alpha\beta^2=0\\ \beta^3-1=-\alpha\end{cases}.$$

$(1) \Leftrightarrow \alpha^3 - \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha(\alpha-1)(\alpha+1) = 0 \Leftrightarrow$

$\alpha = 0$ απορρίπτεται ή $\alpha = 1$ απορρίπτεται ή $\alpha = -1$.

Αν α = -1 τότε $\begin{cases} \alpha = -1 \\ 3\beta = 0 \\ -3\beta^2 = 0 \\ \beta^3 - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 0 \\ \beta^3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 0 \\ \beta = \sqrt[3]{2} \end{cases}$ αδύνατο.

στ) $f^3(x) + x^3 + x - 1 + 30 < 0 \Leftrightarrow f^3(x) + f(x) < -30 \Leftrightarrow$

$f^3(x) + f(x) - 1 < -31 \Leftrightarrow$

$f(f(x)) < f(-3) \overset{f \nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) < -3 \Leftrightarrow f(x) < f(-1) \overset{f \nearrow}{\Leftrightarrow} x < -1$.

Ερωτήσεις «Σωστό ή Λάθος»

1. Λ	**2.** Σ	**3.** Λ	**4.** Λ	**5.** Σ	**6.** Λ	**7.** Σ	**8.** Λ	**9.** Σ	**10.** Λ	**11.** Λ
12. Λ	**13.** Σ	**14.** Σ	**15.** Σ	**16.** Σ	**17.** Λ	**18.** Σ	**19.** Σ	**20.** Σ	**21.** Σ	**22.** Λ
23. Λ	**24.** Λ	**25.** Λ	**26.** Σ	**27.** Σ	**28.** Σ	**29.** Λ	**30.** Σ	**31.** Λ	**32.** Σ	**33.** Σ
34. Λ	**35.** Σ	**36.** Λ	**37.** Λ	**38.** Σ	**39.** Λ	**40.** Σ	**41.** Σ	**42.** Λ	**43.** Σ	**44.** Λ
45. Λ										

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Η συνάρτηση $f(x) = \ln x + 2x - 2$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ αφού

για $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \left. \begin{cases} 2x_1 - 2 < 2x_2 - 2 \\ \ln x_1 < \ln x_2 \end{cases} \right\} \overset{+}{\Rightarrow} f(x_1) < f(x_2)$

Η ανίσωση $\ln(x^2+1) - 4x + 2 \le \ln 2x - 2x^2$ γίνεται

$\ln(x^2+1) + 2x^2 + 2 \le \ln 2x + 4x \Leftrightarrow \ln(x^2+1) + 2(x^2+1) - 2 \le \ln 2x + 2 \cdot 2x - 2 \Leftrightarrow$

$f(x^2+1) \le f(2x)$ (1).Είναι $x^2 + 1 > 0$, $2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$ και η (1) γίνεται:

$x^2 + 1 \le 2x \Leftrightarrow (x-1)^2 \le 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Σωστή απάντηση Β.

2. Αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ η ανίσωση

$g(f(x^2 - 4x + 3)) < 2x - 2$ γίνεται $f(g(f(x^2 - 4x + 3))) < f(2x - 2) \overset{(f \circ g)(x) = x}{\Leftrightarrow}$

$f(x^2 - 4x + 3) < f(2x - 2) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 < 2x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 5$

Σωστή απάντηση Α.

3. Η συνάρτηση $g(x)=x^3+2x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ αφού για

$x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x_1^3<x_2^3 \\ 2x_1<2x_2\end{matrix}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} g(x_1)<g(x_2)$. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$

με $x_1<x_2 \Leftrightarrow 3-x_1>3-x_2 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} f^3(x_1)+2f(x_1)>f^3(x_2)+2f(x_2)\Leftrightarrow$

$g(f(x_1))>g(f(x_1))$ και αφού η g είναι γνησίως αύξουσα προκύπτει

$f(x_1)>f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Η ανίσωση $f\left(e^{x-1}+\ln x\right)>f(2-x)$ γίνεται $e^{x-1}+\ln x<2-x\Leftrightarrow$

$e^{x-1}+\ln x+x-2<0$ (2)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=e^{x-1}+\ln x+x-2$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ αφού για $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με

$$x_1<x_2 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} e^{x_1-1}<e^{x_2-1} \\ \ln x_1<\ln x_2 \\ x_1-2<x_2-2\end{matrix}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} h(x_1)<h(x_2).$$

Επίσης $h(1)=0$, άρα η ανίσωση (2) γίνεται $h(x)<h(1)\Leftrightarrow 0<x<1$.

Σωστή απάντηση Γ.

4. Είναι $f(x)\le 4\Leftrightarrow -4f(x)\ge -16\Leftrightarrow 3-4f(x)\ge -13\Leftrightarrow h(x)\ge -13$.

Σωστή απάντηση Β.

5. Είναι $f(x)=\ln\left(x^2+2x+2\right)=\ln\left(x^2+2x+1+1\right)=\ln\left[(x+1)^2+1\right]$ και

$(x+1)^2\ge 0\Leftrightarrow (x+1)^2+1\ge 1\Leftrightarrow \ln\left[(x+1)^2+1\right]\ge \ln 1\Leftrightarrow f(x)\ge 0$.

Έχουμε $f(x)=0\Leftrightarrow \ln\left[(x+1)^2+1\right]=\ln 1\Leftrightarrow (x+1)^2+1=1\Leftrightarrow$

$(x+1)^2=0\Leftrightarrow x=-1$.

Σωστή απάντηση Γ.

6. Είναι $f(x)\ge 3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει για $x=1$.

Συνεπώς, θα είναι $\left.\begin{matrix} f\left(\left|\sqrt{\alpha}-2\alpha\right|\right)\ge 3 \\ f\left(e^{\beta}-1\right)\ge 3\end{matrix}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} f\left(\left|\sqrt{\alpha}-2\alpha\right|\right)+f\left(e^{\beta}-1\right)\ge 6$.

Η δοσμένη σχέση θα ισχύει όταν $f\left(\left|\sqrt{\alpha}-2\alpha\right|\right)=3$ και $f\left(e^{\beta}-1\right)=3$, αυτό συμβαίνει όταν $\left|\sqrt{\alpha}-2\alpha\right|=1$ (1) και $e^{\beta}-1=1$ (2)

Από την (1) έχουμε:

$$\sqrt{\alpha}-2\alpha=-1\Leftrightarrow\sqrt{\alpha}=2\alpha-1\overset{\alpha>\frac{1}{2}}{\Leftrightarrow}4\alpha^2-5\alpha+1=0\Leftrightarrow\alpha=1,\alpha=\frac{1}{4}(\alpha\pi o\rho\rho\acute{\iota}\pi\tau\varepsilon\tau\alpha\iota)$$

ή $\sqrt{\alpha}-2\alpha=1\Leftrightarrow\sqrt{\alpha}=2\alpha+1\overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow}4\alpha^2+3\alpha+1=0(\Delta<0)$.

Από τη (2) έχουμε: $e^{\beta}-1=1\Leftrightarrow e^{\beta}=2\Leftrightarrow\beta=\ln 2$.

Σωστή απάντηση Α.

Τράπεζα θεμάτων ΙΕΠ

28300. α) Το πεδίο ορισμού αποτελείται από τις τετμημένες των σημείων της C_f, οπότε $D_f=(-2,5]$.

β) $f(-1)=2,\ f(2)=3$ και $f(5)=0$.

γ) Η f έχει ολικό ελάχιστο το 0 για x = 5 και δεν έχει ολικό μέγιστο.

δ) $(f\circ f)(-1)=f(f(-1))=f(2)=3$.

1ο Διαγώνισμα στις Συναρτήσεις μέχρι και τα ακρότατα

Θέμα Α

Α1. α) Ψ

β) Θεωρούμε τις συναρτήσεις: $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\le 1 \\ 0, & x>1 \end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1 \\ e^x, & x>1 \end{cases}$.

Παρατηρούμε ότι για $x\le 1$ είναι $f(x)g(x)=(x+2)\cdot 0=0$ και για $x>1$, είναι $f(x)g(x)=0\cdot e^x=0$, δηλαδή $f(x)g(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ χωρίς όμως κάποια από τις συναρτήσεις f,g να είναι ίση με το 0 για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Α2. α) Λ **β)** Σ **γ)** Σ **δ)** Σ **ε) i.** Λ **ii.** Λ

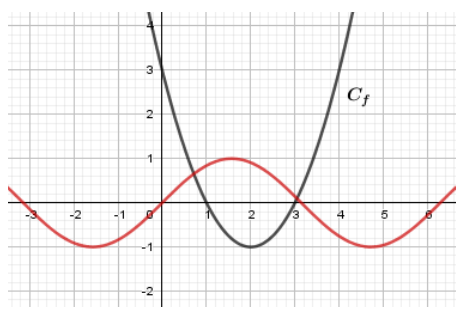
Α3. Ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση** με **πεδίο ορισμού το Α** μια διαδικασία (κανόνα) f, με την οποία κάθε στοιχείο $x\in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y. Το y ονομάζεται **τιμή της f στο x** και συμβολίζεται με $f(x)$. Για να εκφράσουμε τη διαδικασία αυτή, γράφουμε: $f: A\to\mathbb{R}$, $x\to f(x)$

Θέμα Β

Β1. Έστω $x-2=z\Leftrightarrow x=z+2$, τότε

$f(z)=(z+2)^2-8(z+2)+15=z^2+4z+4-8z-16+15=z^2-4z+3$ για κάθε $z\in\mathbb{R}$, οπότε και $f(x)=x^2-4x+3$, $x\in\mathbb{R}$.

Β2. $f(x)=(x-2)^2-1$.



Η γραφική παράσταση της f προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της $y=x^2$ κατά 2 μονάδες δεξιά και μία μονάδα κάτω.

Σχεδιάζοντας και την $y=ημx$ στο ίδιο σχήμα, παρατηρούμε ότι τέμνει την $y=x$ σε δύο σημεία, το ένα με τετμημένη στο διάστημα $(0,1)$ και το άλλο με τετμημένη στο $(3,\pi)$.

Β3. Αν $x\le 2$ τότε για να ορίζεται η f/g πρέπει $g(x)\ne 0\Leftrightarrow x\ne 1$, οπότε

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x^2-4x+3}{x-1`}=\frac{\cancel{(x-1)}(x-3)}{\cancel{x-1}}=x-3,\ x\in(-\infty,1)\cup(1,2].$$

Αν $x>2$ τότε για να ορίζεται η f/g πρέπει $g(x)\ne 0\Leftrightarrow x\ne 3$, οπότε

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\cancel{(x-3)}(x-1)}{\cancel{x-3}}=x-1,\ x\in(2,3)\cup(3,+\infty).$$

Β4. Έστω ότι υπάρχει συνάρτηση h που ικανοποιεί αυτή τη σχέση.

Τότε: Για $x=1$ είναι $h\left(f(1)\right)+h\left(f(1)+1\right)=1 \Leftrightarrow h(0)+h(1)=1 \ (1)$

Για $x=3$ είναι $h\left(f(3)\right)+h\left(f(3)+1\right)=3 \Leftrightarrow h(0)+h(1)=3 \ (2)$

Από $(1),(2) \Rightarrow$ δεν υπάρχει τέτοια συνάρτηση.

Θέμα Γ

Γ1. Παρατηρούμε στο σχήμα ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Έστω $x_1,x_2 \in [0,+\infty)$ με $x_1<x_2 \ (1)$, τότε $f(x_1)<f(x_2) \ (2)$ και από $(1)+(2) \Rightarrow f(x_1)+x_1<f(x_2)+x_2 \Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2) \Rightarrow g \nearrow [0,+\infty)$.

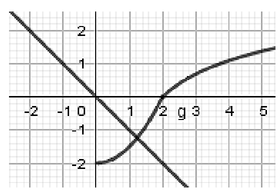
Γ2. Παρατηρούμε στο σχήμα ότι η f έχει ελάχιστο το -2 για $x=0$, δηλαδή $f(x)\geq f(0)=-2$ (3) για κάθε $x\geq 0$ (4).

Από $(3)+(4) \Rightarrow f(x)+x\geq -2 \Leftrightarrow g(x)\geq g(0)=-2$, άρα η g έχει ελάχιστο το -2 για $x=0$.

Γ3. Παρατηρούμε ότι $f(2)=0$ οπότε για κάθε

$x\geq 2 \overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow} g(x)\geq g(2)=f(2)+2=2$ άρα $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\geq 2$.

Γ4. $g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)+x=0 \Leftrightarrow f(x)=-x$.



Στο ίδιο σχήμα σχεδιάζουμε τη C_f και την ευθεία $y=-x$. Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία μόνο σε ένα σημείο με τετμημένη στο $(0,2)$, δηλαδή υπάρχει $x_0\in(0,2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=-x_0 \Leftrightarrow g(x_0)=0$.

Γ5. Αρχικά για να ορίζεται η $f\left(x^2\right)$ πρέπει $x^2\in D_f \Leftrightarrow x^2\geq 0$ που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$. $f\left(x^2\right)\leq 2-x^2 \Leftrightarrow f\left(x^2\right)+x^2\leq 2 \Leftrightarrow g\left(x^2\right)\leq g(2) \overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow} x^2\leq 2 \Leftrightarrow$ $|x|\leq\sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2}\leq x\leq\sqrt{2}$.

Θέμα Δ

Δ1. Η $f\circ g$ ορίζεται όταν $\begin{cases} x\in A_g \\ g(x)\in A_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ g(x)>0 \end{cases}$.

Δ2. Έστω $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ (1), τότε

$-x_1>-x_2 \Leftrightarrow e^{-x_1}>e^{-x_2} \Leftrightarrow -e^{-x_1}<-e^{-x_2} \Leftrightarrow -e^{-x_1}+1<-e^{-x_2}+1$ (2)

Από (1) + (2) $\Rightarrow x_1-e^{-x_1}+1<x_2-e^{-x_2}+1 \Leftrightarrow h(x_1)<h(x_2) \Rightarrow h\nearrow(0,+\infty)$.

Δ3. 1ος τρόπος
Έστω ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (0,+\infty)$ με $x_1 < x_2$ τέτοια, ώστε $g(x_1) \le g(x_2)$, τότε επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα ισχύει ότι
$f(g(x_1)) \ge f(g(x_2)) \Leftrightarrow h(x_1) \ge h(x_2)$ που είναι άτοπο αφού η h είναι γνησίως αύξουσα. Άρα για κάθε $x_1, x_2 \in A_f$ ισχύει $g(x_1) > g(x_2)$ και g γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.
2ος τρόπος
Έστω $x_1, x_2 \in (0,+\infty)$ με $x_1 < x_2$, τότε αφού η h είναι γνησίως αύξουσα έχουμε $h(x_1) < h(x_2) \Leftrightarrow (f \circ g)(x_1) < (f \circ g)(x_2) \Leftrightarrow$

$f(g(x_1)) < f(g(x_2)) \overset{f \searrow}{\Leftrightarrow} g(x_1) > g(x_2)$.

Δ4. 1ος τρόπος

$$\frac{e^{\beta}-e^{\alpha}}{\alpha-\beta} < e^{\alpha+\beta} \overset{\alpha<\beta \Leftrightarrow \alpha-\beta<0}{\Leftrightarrow} e^{\beta}-e^{\alpha} > e^{\alpha+\beta}(\alpha-\beta) \Leftrightarrow \frac{e^{\beta}}{e^{\alpha+\beta}} - \frac{e^{\alpha}}{e^{\alpha+\beta}} > \alpha-\beta \Leftrightarrow$$

$$e^{\beta-\alpha-\beta} - e^{\alpha-\alpha-\beta} > \alpha-\beta \Leftrightarrow \beta - e^{-\beta} > \alpha - e^{-\alpha} \Leftrightarrow \beta - e^{-\beta} - 1 > \alpha - e^{-\alpha} - 1 \Leftrightarrow$$

$h(\beta) > h(\alpha) \overset{h \nearrow}{\Leftrightarrow} \beta > \alpha$ ισχύει.

2ος τρόπος

$\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta < 0$ και $\alpha < \beta \Leftrightarrow e^{\alpha} < e^{\beta} \Leftrightarrow e^{\beta} - e^{\alpha} > 0$ οπότε $\dfrac{e^{\beta}-e^{\alpha}}{\alpha-\beta} < 0 < e^{\alpha+\beta}$

Δ5. α) Έστω $g(x) = \omega \Leftrightarrow e^{-x} = \omega > 0 \Leftrightarrow -x = \ln\omega \Leftrightarrow x = -\ln\omega$.
Τότε η σχέση $h(x) = f(g(x)) = x - e^{-x} + 1$ γίνεται $f(\omega) = -\ln\omega - \omega + 1,\ \omega > 0$, άρα $f(x) = -\ln x - x + 1$, $x > 0$.
β) Έστω $x_1, x_2 > 0$ με $x_1 < x_2$ τότε $-x_1 > -x_2 \Leftrightarrow -x_1 + 1 > -x_2 + 1$ και
$\ln x_1 < \ln x_2 \Leftrightarrow -\ln x_1 > -\ln x_2$ (2)
Με πρόσθεση των (1) και (2) έχουμε $f(x_1) > f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα.
Παρατηρούμε ότι $f(1) = -\ln 1 - 1 + 1 = 0$.
Για κάθε $x > 1 \overset{f2}{\Leftrightarrow} f(x) < f(1) \Leftrightarrow f(x) < 0$ και για κάθε
$0 < x < 1 \overset{f \searrow}{\Rightarrow} f(x) > f(1) \Leftrightarrow f(x) > 0$.

2ο Διαγώνισμα στις Συναρτήσεις μέχρι και τα ακρότατα

Θέμα Α

1) Λ **2)** Λ **3)** Λ **4)** Σ **5)** Λ **6)** Σ **7)** Σ **8)** Σ **9)** Σ **10)** Λ **11)** Σ **12)** Σ **13)** Λ

Θέμα Β

Β1. $D_f=[-4,4]$, $f(A)=[-9,8]$.

Β2. Η f είναι γνησίως αύξουσα. Έχει ελάχιστο το -9 για $x=-4$ και μέγιστο το 8 για $x=4$.

Β3. Για να ορίζεται η $f\circ f$ πρέπει: $\begin{cases} x\in D_f \\ f(x)\in D_f \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x\in[-4,4] \\ -4\le f(x)\le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in[-4,4] \\ -3\le x\le 2 \end{cases} \Rightarrow -3\le x\le 2$ και $D_{f\circ f}=[-3,2]$.

Για κάθε $x_1,x_2\in[-3,2]$ με $x_1<x_2$ είναι

$f(x_1)<f(x_2)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(f(x_1))<f(f(x_2))\Leftrightarrow f\circ f\nearrow$.

Β4. Είναι $0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2} \overset{\text{συνx}\searrow\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}{\Rightarrow}$ συνα > συνβ $\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(\text{συνα})>f(\text{συνβ})$.

Β5. $f(f(-2))=f(-2)=-2$, $f(f(2))=f(4)=8$.

Β6. Αρχικά πρέπει $x^2\in[-4,4]\Leftrightarrow \begin{cases} x^2\ge -4 \text{ ισχύει} \\ x^2\le 4 \end{cases} \Leftrightarrow -2\le x\le 2$

$f(x^2)>2\Leftrightarrow f(x^2)>f(1)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} x^2>1\Leftrightarrow |x|>1\Leftrightarrow x<-1$ ή $x>1$.

Με συναλήθευση προκύπτει ότι $x\in[-2,-1)\cup(1,2]$.

Θέμα Γ

Γ1. $A_f=\mathbb{R}-\{\alpha\}$.

Για να ορίζεται η $f\circ f$ πρέπει:

$\begin{cases} x\in A_f \\ f(x)\in A_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ne\alpha \\ \dfrac{\alpha x+\beta}{x-\alpha}\ne\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ne\alpha \\ \cancel{\alpha x}+\beta\ne\cancel{\alpha x}-\alpha^2 \text{ ισχύει} \end{cases}$.

Άρα $A_{f\circ f}=\mathbb{R}-\{\alpha\}$.

$$f\left(f(x)\right)=\frac{\alpha f(x)+\beta}{f(x)-\alpha}=\frac{\alpha\frac{\alpha x+\beta}{x-\alpha}+\beta}{\frac{\alpha x+\beta}{x-\alpha}-\alpha}\Leftrightarrow$$

$$f\left(f(x)\right)=\frac{\frac{\alpha^2x+\cancel{\alpha\beta}+\beta x-\cancel{\alpha\beta}}{\cancel{x-\alpha}}}{\frac{\cancel{\alpha x}+\beta-\cancel{\alpha x}+\alpha^2}{\cancel{x-\alpha}}}=\frac{x\cancel{\left(\alpha^2+\beta\right)}}{\cancel{\alpha^2+\beta}}=x\,.$$

Γ2. α) Για $\beta=-18$ είναι $f(x)=\dfrac{\alpha x-18}{x-\alpha}$. Αρκεί η εξίσωση $f(x)=2x$ να έχει ακριβώς μια λύση. Είναι: $f(x)=2x\Leftrightarrow\dfrac{\alpha x-18}{x-\alpha}=2x\Leftrightarrow$

$\alpha x-18=2x^2-2\alpha x\Leftrightarrow 2x^2-3\alpha x+18=0\quad(1)$

Η (1) είναι 2ου βαθμού και έχει ακριβώς μία λύση, μόνο όταν

$$\Delta=0\Leftrightarrow 9\alpha^2-144=0\Leftrightarrow\alpha^2=16\overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow}\alpha=4$$

β) i. Για $\alpha=4$ είναι $f(x)=\dfrac{4x-18}{x-4},\ x\neq 4$.

Αρχικά για να ορίζεται η $f\left(x^2\right)$ πρέπει $x^2\neq 4\Leftrightarrow x\neq\pm 2$.

$g(x)=\left(4-x^2\right)f\left(x^2\right)+x^4=-\cancel{\left(x^2-4\right)}\dfrac{4x^2-18}{\cancel{x^2-4}}+x^4=$

$x^4-4x^2+18=\left(x^2-2\right)^2+14$.

Είναι $\left(x^2-2\right)^2\geq 0\Leftrightarrow\left(x^2-2\right)^2+14\geq 14\Leftrightarrow g(x)\geq 14\quad(2)$

$g(x)=14\Leftrightarrow\left(x^2-2\right)^2+14=14\Leftrightarrow\left(x^2-2\right)^2=0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$.

$(2)\Leftrightarrow g(x)\geq g\left(-\sqrt{2}\right)$ και $g(x)\geq g\left(\sqrt{2}\right)$.

Η g έχει ελάχιστο το – 4 για $x=-\sqrt{2}$ και $x=\sqrt{2}$.

ii. Επειδή $g(x)\geq 14$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, είναι $g(\kappa)\geq 14,\ g(\lambda)\geq 14,\ g(\mu)\geq 14$, οπότε $g(\kappa)+g(\lambda)+g(\mu)\geq 42$.

Άρα η σχέση $g(\kappa)+g(\lambda)+g(\mu)\leq 42$ ισχύει μόνο όταν $g(\kappa)+g(\lambda)+g(\mu)=42$ και αυτό συμβαίνει όταν $g(\kappa)=g(\lambda)=g(\mu)=14$.

Επειδή $\kappa,\lambda,\mu>0$, είναι $\kappa=\lambda=\mu=\sqrt{2}$.

iii. Αρχικά πρέπει $h(x)\neq 4$. $f(h(x))=e^x \Leftrightarrow \dfrac{4h(x)-18}{h(x)-4}=e^x \Leftrightarrow$

$4h(x)-18=h(x)e^x-4e^x \Leftrightarrow$

$4e^x-18=e^xh(x)-4h(x)\Leftrightarrow (e^x-4)h(x)=4e^x-18 \quad (3)$

Αν $e^x-4=0\Leftrightarrow e^x=4\Leftrightarrow x=\ln 4$ η (3) είναι αδύνατη.

Για $x\neq \ln 4$ είναι $(3)\Leftrightarrow h(x)=\dfrac{4e^x-18}{e^x-4}$.

Πρέπει $h(x)\neq 4\Leftrightarrow \dfrac{4e^x-18}{e^x-4}\neq 4\Leftrightarrow \Leftrightarrow 4e^x-18\neq 4e^x-16$ ισχύει.

Άρα $h(x)=\dfrac{4e^x-18}{e^x-4},\ x\neq \ln 4$.

Θέμα Δ

Δ1. Έστω $g(x)=u\Leftrightarrow -x+2=u\Leftrightarrow x=2-u$.

Τότε $f(g(x))=e^{x-2}+x-3\Leftrightarrow f(u)=e^{2-u-2}+2-u-3=e^{-u}-u-1,\ u\in\mathbb{R}$,

άρα $f(x)=e^{-x}-x-1,\ x\in\mathbb{R}$.

Δ2. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$. Τότε: $-x_1>-x_2\Leftrightarrow e^{-x_1}>e^{-x_2}\ (1)$ και $-x_1-1>-x_2-1\ (2)$. Από $(1)+(2)\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)\Leftrightarrow f\searrow\mathbb{R}$.

Δ3. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι $f(x_1)>f(x_2)\overset{f\searrow\mathbb{R}}{\Leftrightarrow}$

$f(f(x_1))<f(f(x_2))\Leftrightarrow (f\circ f)(x_1)<(f\circ f)(x_2)\Leftrightarrow f\circ f\nearrow\mathbb{R}$.

Δ4. α) $e^{-x^3}-e^{-x^2}<x^3-x^2\Leftrightarrow e^{-x^3}-x^3<e^{-x^2}-x^2\Leftrightarrow$

$e^{-x^3}-x^3-1<e^{-x^2}-x^2-1\Leftrightarrow f(x^3)<f(x^2)\overset{f\searrow\mathbb{R}}{\Leftrightarrow} x^3>x^2\Leftrightarrow$

$x^3-x^2>0\Leftrightarrow x^2(x-1)>0\Leftrightarrow x>1$.

β) $f(f(x)+1)>\dfrac{1-2e}{e}\Leftrightarrow f(f(x)+1)>\dfrac{1}{e}-2\Leftrightarrow f(f(x)+1)>f(1)\overset{f\searrow\mathbb{R}}{\Leftrightarrow}$

$f(x)+1<1\Leftrightarrow f(x)<0\Leftrightarrow f(x)<f(0)\overset{f\searrow\mathbb{R}}{\Leftrightarrow} x>0$.

Δ5. Έστω ότι υπάρχει συνάρτηση h γνησίως φθίνουσα για την οποία ισχύει ότι $f(h(x))=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Τότε για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι:

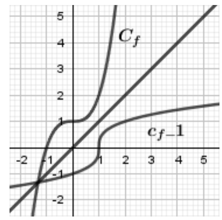
$h(x_1)>h(x_2)\overset{f\searrow\mathbb{R}}{\Leftrightarrow} f(h(x_1))<f(h(x_2))\Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2)\Leftrightarrow$

$-x_1+2<-x_2+2\Leftrightarrow x_1>x_2$ άτοπο.

6 Αντίστροφη συνάρτηση

Εύρεση αντίστροφης

25.α) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2$. Τότε



$x_1^3 \neq x_2^3 \Leftrightarrow x_1^3 + 1 \neq x_2^3 + 1 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

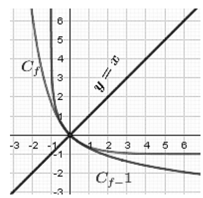
Άρα η f είναι $1-1$. $f(x) = y \Leftrightarrow x^3 + 1 = y \Leftrightarrow x^3 = y - 1$.

• Αν $y - 1 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 1$ τότε: $x = \sqrt[3]{y-1} \Leftrightarrow$

$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-1},\ y \geq 1$, άρα: $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1},\ x \geq 1$.

• Αν $y - 1 < 0 \Leftrightarrow y < 1$, τότε $-y + 1 > 0$ και $x = -\sqrt[3]{-y+1} \Leftrightarrow f^{-1}(y) = -\sqrt[3]{-y+1}$,

$y < 1$ και $f^{-1}(x) = -\sqrt[3]{-x+1},\ x < 1$.



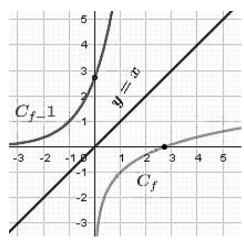
Άρα $f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-1} & , x \geq 1 \\ -\sqrt[3]{-x+1} & , x < 1 \end{cases}$.

β) Εύκολα αποδεικνύεται ότι η f είναι $1-1$.

$f(x) = y \Leftrightarrow e^{-x} = y + 1$. Πρέπει $y + 1 > 0 \Leftrightarrow y > -1$, τότε

$-x = \ln(y+1) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = -\ln(x+1),\ x > -1$.

γ) Για κάθε $0 < x_1 < x_2 \Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2 \Leftrightarrow$



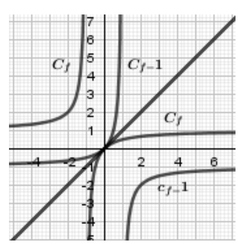
$\ln x_1 - 1 < \ln x_2 - 1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow$

$f \nearrow (0, +\infty) \Rightarrow 1-1$.

$f(x) = y \Leftrightarrow \ln x - 1 = y \Leftrightarrow \ln x = y + 1 \Leftrightarrow x = e^{y+1} \Leftrightarrow$

$f^{-1}(y) = e^{y+1},\ y \in \mathbb{R}$ άρα $f^{-1}(x) = e^{x+1},\ x \in \mathbb{R}$.

δ) Εύκολα αποδεικνύεται ότι η f είναι $1-1$.



$f(x) = y \Leftrightarrow \dfrac{x}{x+3} = y \Leftrightarrow x = xy + 3y \Leftrightarrow$

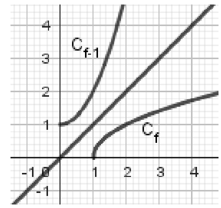
$x(1-y) = 3y \quad (1)$. Αν $y = 1$, η (1) είναι αδύνατη.

Για $y \neq 1$ είναι $x = \dfrac{3y}{1-y}$, άρα $f^{-1}(x) = \dfrac{3x}{1-x}$, $x \neq 1$.

ε) Έστω $1 \leq x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \Leftrightarrow$

$\sqrt{x_1 - 1} < \sqrt{x_2 - 1} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow$

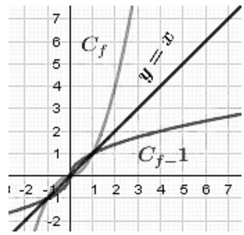
$f \nearrow [1, +\infty) \Rightarrow f\ 1-1$.



$f(x)=y \Leftrightarrow \sqrt{x-1}=y,\ y\geq 0 \Leftrightarrow x-1=y^2 \Leftrightarrow$

$x=y^2+1 \Leftrightarrow f^{-1}(y)=y^2+1,\ y\geq 0$ άρα

$f^{-1}(x)=x^2+1,\ x\geq 0$.



στ) Είναι $f(x)=\begin{cases}-x^2, & x<0\\ x^2, & x\geq 0\end{cases}$. Είναι $f\nearrow$ σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $[0,+\infty)$.

Αν $x_1<0\leq x_2$ τότε $f(x_1)<0\leq f(x_2)$ άρα

$f\nearrow\mathbb{R} \Rightarrow f$ 1−1 Για $x<0: f(x)=y \Leftrightarrow$

$-x^2=y \Leftrightarrow x^2=-y,\ y<0 \Rightarrow x=-\sqrt{-y}$,

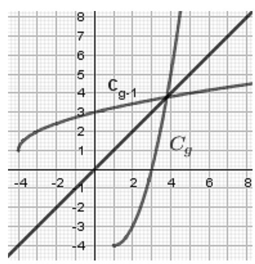
αν $x\geq 0$: $f(x)=y \Leftrightarrow x^2=y,\ y\geq 0 \Rightarrow x=\sqrt{y}$, άρα $f^{-1}(x)=\begin{cases}-\sqrt{-x}, & x<0\\ \sqrt{x}, & x\geq 0\end{cases}$.

26.α) Είναι $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow x=-1$ ή $x=3$.

Είναι $f(-1)=0=f(3)$, οπότε η f δεν είναι 1-1.

β) $g(x)=x^2-2x-3=(x-1)^2-4,\ x\geq 1$.

Η g είναι παραβολή με α =1>0, κορυφή το (1,-4), οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ άρα και 1-1.

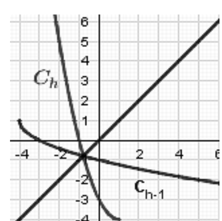


$g(x)=y \Leftrightarrow (x-1)^2-4=y \Leftrightarrow (x-1)^2=y+4 \overset{y\geq -4}{\Leftrightarrow}$

$|x-1|=\sqrt{y+4} \overset{x\geq 1}{\Leftrightarrow} x-1=\sqrt{y+4} \Leftrightarrow$

$x=\sqrt{y+4}+1$, άρα $g^{-1}(y)=\sqrt{y+4}+1,\ y\geq -4$,

οπότε $g^{-1}(x)=\sqrt{x+4}+1,\ x\geq -4$.



γ) $h(x)=(x-1)^2-4,\ x\leq 1$. Η h είναι παραβολή με α =1>0, κορυφή το (1,-4), οπότε είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1]$ άρα και 1-1.

$h(x)=y \Leftrightarrow (x-1)^2-4=y \Leftrightarrow (x-1)^2=y+4 \overset{y\geq -4}{\Leftrightarrow}$

$|x-1|=\sqrt{y+4} \overset{x\leq 1}{\Leftrightarrow} -x+1=\sqrt{y+4} \Leftrightarrow x=1-\sqrt{y+4}$, άρα

$h^{-1}(y)=1-\sqrt{y+4},\ y\geq -4$, οπότε $h^{-1}(x)=1-\sqrt{x+4},\ x\geq -4$.

27.α) Για κάθε $x_1, x_2 \in A_f = [1, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ είναι

$x_1 - 1 < x_2 - 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x_1 - 1} < \sqrt[3]{x_2 - 1} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow f \nearrow \Rightarrow f\, 1-1$.

$f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-1} = y \overset{y \geq 0}{\Leftrightarrow} x - 1 = y^3 \Leftrightarrow x = y^3 + 1$,

$x \geq 1 \Leftrightarrow y^3 + 1 \geq 1 \Leftrightarrow y^3 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 0$ ισχύει.

Άρα $f^{-1}(y) = y^3 + 1,\ y \geq 0$, οπότε $f^{-1}(x) = x^3 + 1,\ x \geq 0$.

β) Για κάθε $x_1, x_2 \in A_f = \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι

$e^{x_1} < e^{x_2} \Leftrightarrow e^{x_1} + 2 < e^{x_2} + 2 \Leftrightarrow \ln\left(e^{x_1} + 2\right) < \ln\left(e^{x_2} + 2\right) \Leftrightarrow$

$\ln\left(e^{x_1} + 2\right) - 1 < \ln\left(e^{x_2} + 2\right) - 1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow f \nearrow \Rightarrow f\, 1-1$.

$f(x) = y \Leftrightarrow \ln\left(e^x + 2\right) - 1 = y \Leftrightarrow \ln\left(e^x + 2\right) = y + 1 \Leftrightarrow e^x + 2 = e^{y+1} \Leftrightarrow$

$e^x = e^{y+1} - 2$ (1). Πρέπει $e^{y+1} - 2 > 0 \Leftrightarrow e^{y+1} > 2 \Leftrightarrow y + 1 > \ln 2 \Leftrightarrow y > \ln 2 - 1$

τότε η (1) γίνεται $x = \ln\left(e^{y+1} - 2\right)$, άρα $f^{-1}(y) = \ln\left(e^{y+1} - 2\right),\ y > \ln 2 - 1$

οπότε $f^{-1}(x) = \ln\left(e^{x+1} - 2\right),\ x > \ln 2 - 1$.

γ) $f(x) = \ln\left(e^x + 1\right) - x = \ln\left(e^x + 1\right) - \ln e^x = \ln \dfrac{e^x + 1}{e^x} = \ln\left(1 + e^{-x}\right),\ x \in \mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι $-x_1 > -x_2 \Leftrightarrow e^{-x_1} > e^{-x_2} \Leftrightarrow$

$1 + e^{-x_1} > 1 + e^{-x_2} \Leftrightarrow \ln\left(1 + e^{-x_1}\right) > \ln\left(1 + e^{-x_2}\right) \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow f \searrow \Rightarrow f\, 1-1$

$f(x) = y \Leftrightarrow \ln\left(1 + e^{-x}\right) = y \Leftrightarrow 1 + e^{-x} = e^y \Leftrightarrow e^{-x} = e^y - 1$.

Πρέπει $e^y - 1 > 0 \Leftrightarrow e^y > 1 \Leftrightarrow y > 0$, τότε $-x = \ln\left(e^y - 1\right) \Leftrightarrow x = -\ln\left(e^y - 1\right)$,

άρα $f^{-1}(y) = -\ln\left(e^y - 1\right),\ y > 0$ οπότε $f^{-1}(x) = -\ln\left(e^x - 1\right),\ x > 0$.

δ) Πρέπει $1 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq e$. Για κάθε $x_1, x_2 \in A_f = (-\infty, e]$ με

$x_1 < x_2$ είναι $\ln x_1 < \ln x_2 \Leftrightarrow -\ln x_1 > -\ln x_2 \Leftrightarrow 1 - \ln x_1 > 1 - \ln x_2 \Leftrightarrow$

$\sqrt{1 - \ln x_1} > \sqrt{1 - \ln x_2} \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow f \searrow (-\infty, e] \Rightarrow f\, 1-1$.

$f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{1 - \ln x} = y \overset{y \geq 0}{\Leftrightarrow} 1 - \ln x = y^2 \Leftrightarrow 1 - y^2 = \ln x \Leftrightarrow x = e^{1-y^2}$.

Είναι $x \leq e \Leftrightarrow e^{1-y^2} \leq e \Leftrightarrow 1 - y^2 \leq 0 \Leftrightarrow y^2 \geq 1 \Leftrightarrow |y| \geq 1 \Leftrightarrow y \leq -1$ απορρίπτεται ή

$y \geq 1$. Άρα $f^{-1}(y) = e^{1-y^2},\ y \geq 1$, οπότε $f^{-1}(x) = e^{1-x^2},\ x \geq 1$.

ε) Η f ορίζεται όταν $\dfrac{x+1}{x-1} > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) > 0 \Leftrightarrow x < -1$ ή $x > 1$,

άρα $D_f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Για κάθε $x_1, x_2 \in D_f$ με $f(x_1) = f(x_2)$, είναι:

$\ln\frac{x_1+1}{x_1-1}=\ln\frac{x_2+1}{x_2-1}\Leftrightarrow\frac{x_1+1}{x_1-1}=\frac{x_2+1}{x_2-1}\Leftrightarrow\cancel{x_1x_2}-x_1+x_2-\cancel{1}=\cancel{x_1x_2}+x_1-x_2-\cancel{1}\Leftrightarrow$

$2x_2=2x_1\Leftrightarrow x_1=x_1$ άρα η f είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

$f(x)=y\Leftrightarrow\ln\frac{x+1}{x-1}=y\Leftrightarrow\frac{x+1}{x-1}=e^y\Leftrightarrow x+1=xe^y-e^y\Leftrightarrow$

$x\left(1-e^y\right)=-e^y-1\quad(1)$

Αν $e^y=1\Leftrightarrow y=0$ τότε η (1) είναι αδύνατη, οπότε για $y\neq0$ είναι $x=\frac{e^y+1}{e^y-1}$.

Είναι $x<-1$ ή $x>1\Leftrightarrow\frac{e^y+1}{e^y-1}<-1\,(2)$ ή $\frac{e^y+1}{e^y-1}>1\,(3)$

$(2)\Leftrightarrow\frac{e^y+1}{e^y-1}+1<0\Leftrightarrow\frac{e^y+1+e^y-1}{e^y-1}<0\Leftrightarrow\frac{2e^y}{e^y-1}<0\Leftrightarrow e^y-1<0\Leftrightarrow$

$e^y<1\Leftrightarrow y<0$.

$(3)\Leftrightarrow\frac{e^y+1}{e^y-1}-1>0\Leftrightarrow\frac{\cancel{e^y}+1-\cancel{e^y}+1}{e^y-1}>0\Leftrightarrow\frac{2}{e^y-1}>0\Leftrightarrow e^y-1>0\Leftrightarrow$

$e^y>1\Leftrightarrow y>0$.

Άρα $f^{-1}(y)=\frac{e^y+1}{e^y-1},\ y\in\mathbb{R}^*$, οπότε και $f^{-1}(x)=\frac{e^x+1}{e^x-1},\ x\in\mathbb{R}^*$.

στ) Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}^*$ με $x_1\neq x_2$ είναι: $\frac{1}{x_1}\neq\frac{1}{x_2}\Leftrightarrow e^{\frac{1}{x_1}}\neq e^{\frac{1}{x_2}}\Leftrightarrow$

$f(x_1)\neq f(x_2)$ άρα f 1−1. $f(x)=y\Leftrightarrow e^{\frac{1}{x}}=y,\ y>0\Leftrightarrow\frac{1}{x}=\ln y$ με

$\ln y\neq0\Leftrightarrow y\neq1$ είναι $x=\frac{1}{\ln y}$, άρα $f^{-1}(y)=\frac{1}{\ln y},\ y\in(0,1)\cup(1,+\infty)$.

ζ) Έστω $0<x_1<x_2\ (1)\Rightarrow\frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2}\Leftrightarrow-\frac{1}{x_1}<-\frac{1}{x_2}\ (2)$

Από $(1)+(2)\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)\Rightarrow f\nearrow(0,+\infty)\Rightarrow 1-1$.

$f(x)=y\Leftrightarrow x-\frac{1}{x}=y\Leftrightarrow x^2-1=xy\Leftrightarrow x^2-xy-1=0$. Είναι $\Delta=y^2+4$ και

$x_{1,2}=\frac{y\pm\sqrt{y^2+4}}{2}$, όμως $x>0$ άρα $x=\frac{y+\sqrt{y^2+4}}{2}$ αφού $y^2+4>y^2\Leftrightarrow$

$-\sqrt{y^2+4}<y<\sqrt{y^2+4}\Rightarrow y-\sqrt{y^2+4}<0$. Άρα $f^{-1}(x)=\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2},x\in\mathbb{R}$.

η) Πρέπει $e^x-1\neq 0 \Leftrightarrow e^x\neq 1 \Leftrightarrow x\neq 0$, άρα $A_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}^*$ με $f(x_1)=f(x_2)$ είναι $\frac{e^{x_1}}{e^{x_1}-1}=\frac{e^{x_2}}{e^{x_2}-1}\Leftrightarrow$

$\cancel{e^{x_1+x_2}}-e^{x_1}=\cancel{e^{x_1+x_2}}-e^{x_2}\Leftrightarrow e^{x_1}=e^{x_2}\Leftrightarrow x_1=x_2\Rightarrow f$ 1−1.

$f(x)=y\Leftrightarrow \frac{e^x}{e^x-1}=y\Leftrightarrow e^x=ye^x-y\Leftrightarrow y=ye^x-e^x\Leftrightarrow$

$e^x(y-1)=y$ (1). Αν $y-1=0\Leftrightarrow y=1$ η (1) είναι αδύνατη.

Αν $y\neq 1$ τότε η (1) γίνεται: $e^x=\frac{y}{y-1}$.

Είναι $e^x>0\Leftrightarrow \frac{y}{y-1}>0\Leftrightarrow y(y-1)>0\Leftrightarrow y<0$ ή $y>1$. Τότε $x=\ln\frac{y}{y-1}$

άρα $f^{-1}(y)=\ln\frac{y}{y-1}$, $y<0$ ή $y>1$ οπότε $f^{-1}(x)=\ln\frac{x}{x-1}$, $x<0$ ή $x>1$.

θ) Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$ είναι $\frac{e^{x_1}-1}{e^{x_1}+1}=\frac{e^{x_2}-1}{e^{x_2}+1}\Leftrightarrow$

$\cancel{e^{x_1+x_2}}+e^{x_1}-e^{x_2}-\cancel{1}=\cancel{e^{x_1+x_2}}+e^{x_2}-e^{x_1}-\cancel{1}\Leftrightarrow 2e^{x_1}=2e^{x_2}\Leftrightarrow e^{x_1}=e^{x_2}\Leftrightarrow$
$x_1=x_2\Rightarrow f$ 1−1.

$f(x)=y\Leftrightarrow \frac{e^x-1}{e^x+1}=y\Leftrightarrow e^x-1=ye^x+y\Leftrightarrow e^x(1-y)=1+y$.

Αν $1-y=0\Leftrightarrow y=1$ η (1) είναι αδύνατη. Αν $y\neq 1$ τότε η (1) γίνεται $e^x=\frac{1+y}{1-y}$

Είναι $e^x>0\Leftrightarrow \frac{1+y}{1-y}>0\Leftrightarrow (1-y)(y+1)>0\Leftrightarrow -1<y<1$. Τότε $x=\ln\frac{1+y}{1-y}$

άρα $f^{-1}(y)=\ln\frac{1+y}{1-y}$, $-1<y<1$ οπότε $f^{-1}(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$, $-1<x<1$.

ι) Η f ορίζεται όταν $x>0$ και $\ln x-1\neq 0\Leftrightarrow \ln x\neq 1\Leftrightarrow x\neq e$, άρα
$A_f=(0,e)\cup(e,+\infty)$.

Για κάθε $x_1,x_2\in A_f$ με $f(x_1)=f(x_2)$ είναι $\frac{\ln x_1}{\ln x_1-1}=\frac{\ln x_2}{\ln x_2-1}\Leftrightarrow$

$\cancel{\ln x_1\cdot\ln x_2}-\ln x_1=\cancel{\ln x_1\cdot\ln x_2}-\ln x_2\Leftrightarrow \ln x_1=\ln x_2\Leftrightarrow x_1=x_2\Rightarrow f$ 1−1

$f(x)=y\Leftrightarrow \frac{\ln x}{\ln x-1}=y\Leftrightarrow \ln x=y\ln x-y\Leftrightarrow y=y\ln x-\ln x\Leftrightarrow$
$(y-1)\ln x=y$ (1)

Αν $y=1$ η (1) είναι αδύνατη. Αν $y\neq 1$ τότε $\ln x=\frac{y}{y-1}\Leftrightarrow x=e^{\frac{y}{y-1}}$.

Είναι $\begin{cases}x>0\\ x\neq e\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}e^{\frac{y}{y-1}}>0 \text{ ισχύει}\\ e^{\frac{y}{y-1}}\neq e\end{cases}\Leftrightarrow\frac{y}{y-1}\neq 1\Leftrightarrow y\neq y-1$ ισχύει.

Άρα $f^{-1}(y)=e^{\frac{y}{y-1}}$, $y\neq 1$, οπότε $f^{-1}(x)=e^{\frac{x}{x-1}}$, $x\neq 1$.

κ) $f(x)=x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3$. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$ είναι $(x_1-1)^3=(x_2-1)^3\Leftrightarrow x_1-1=x_2-1\Leftrightarrow x_1=x_2\Rightarrow f$ 1−1.

$f(x)=y\Leftrightarrow(x-1)^3=y$.

Αν $y\geq 0$ τότε $x-1=\sqrt[3]{y}\Leftrightarrow x=1+\sqrt[3]{y}$, ενώ αν $y<0$ τότε $x-1=-\sqrt[3]{-y}\Leftrightarrow x=1-\sqrt[3]{-y}$.

Άρα $f^{-1}(y)=\begin{cases}1+\sqrt[3]{y}, & y\geq 0\\ 1-\sqrt[3]{-y}, & y<0\end{cases}$, οπότε $f^{-1}(x)=\begin{cases}1+\sqrt[3]{x}, & x\geq 0\\ 1-\sqrt[3]{-x}, & x<0\end{cases}$.

28.α) Όταν $x\in A_1=(-\infty,2]$ είναι $f(x)=-x^2+4x-8=-(x-2)^2-4$.

Για $x_1,x_2\in A_1$ με $x_1<x_2$ είναι $x_1-2<x_2-2<0\Rightarrow(x_1-2)^2>(x_2-2)^2\Leftrightarrow -(x_1-2)^2<-(x_2-2)^2\Leftrightarrow -(x_1-2)^2-4<-(x_2-2)^2-4\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)\Leftrightarrow f\nearrow$, άρα f 1−1 στο A_1.

$f(x)=y\Leftrightarrow -(x-2)^2-4=y\Leftrightarrow(x-2)^2=-4-y$.

Πρέπει $-4-y\geq 0\Leftrightarrow y\leq -4$. Όταν $x\in A_2=(2,+\infty)$ είναι $f(x)=x-5$.

Για $x_1,x_2\in A_2$ με $x_1\neq x_2$ είναι $x_1-5\neq x_2-5\Leftrightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$ άρα η f είναι 1−1 στο A_2. $f(x)=y\Leftrightarrow x-5=y\Leftrightarrow x=y+5$. Πρέπει $y+5>2\Leftrightarrow y>-3$.

Επειδή $f(A_1)=(-\infty,-4]$, $f(A_2)=(-3,+\infty)$ και $f(A_1)\cap f(A_2)=\varnothing$ η f αντιστρέφεται. Για $y\leq -4$ είναι $x-2=-\sqrt{-4-y}\Leftrightarrow x=2-\sqrt{-4-y}$ ή $f^{-1}(y)=2-\sqrt{-4-y}$, $y\leq -4$ οπότε $f^{-1}(x)=2-\sqrt{-4-x}$, $x\leq -4$.

Για $y>-3$ είναι $f^{-1}(y)=y+5$ οπότε $f^{-1}(x)=x+5$, $x>-3$.

Άρα $f^{-1}(x)=\begin{cases}2-\sqrt{-4-x}, & x\leq -4\\ x+5, & x>-3\end{cases}$.

β) Για $x_1, x_2 \in A_1 = (-\infty, 0]$ με $x_1 < x_2$ είναι

$x_1^3 < x_2^3 \Leftrightarrow x_1^3 - 1 < x_2^3 - 1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ άρα f γνησίως αύξουσα οπότε

f $1-1$ στο A_1. $f(x) = y \Leftrightarrow x^3 - 1 = y \Leftrightarrow x^3 = y + 1$. Πρέπει $y + 1 \le 0 \Leftrightarrow y \le -1$.

Για $x_1, x_2 \in A_2 = (0, +\infty)$ με $x_1 \ne x_2$ είναι $-x_1 + 2 \ne -x_2 + 2 \Leftrightarrow f(x_1) \ne f(x_2)$

άρα η f είναι $1-1$ στο A_2.

$f(x) = y \Leftrightarrow -x + 2 = y \Leftrightarrow x = 2 - y$. Πρέπει $2 - y > 0 \Leftrightarrow y < 2$.

Επειδή $f(A_1) = (-\infty, -1]$, $f(A_2) = (-\infty, 2)$ και $f(A_1) \cap f(A_2) \ne \varnothing$ η f δεν αντιστρέφεται.

29.α) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$ είναι $5f(x_1) = 5f(x_2)$ και

$2f^3(x_1) = 2f^3(x_2)$, άρα $2f^3(x_1) - 5f(x_1) = 2f^3(x_2) - 5f(x_2)$ (1), όμως

$2f^3(x) - 5f(x) + x = 0 \Leftrightarrow 2f^3(x) - 5f(x) = -x$ άρα η (1) γίνεται:

$-x_1 = -x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ και η f είναι $1-1$, οπότε και αντιστρέφεται.

β) $2f^3(x) - 5f(x) + x = 0 \Leftrightarrow x = -2f^3(x) + 5f(x)$ (2).

Αν $f(x) = y$ τότε $x = f^{-1}(y)$ και η (2) γίνεται: $f^{-1}(y) = -2y^3 + 5y$ όποτε

$f^{-1}(x) = -2x^3 + 5x$, $x \in \mathbb{R}$.

30.α) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$ είναι $3f(x_1) = 3f(x_2)$.

$e^{f(x_1)} = e^{f(x_2)}$ άρα και $e^{f(x_1)} + 3f(x_1) = e^{f(x_2)} + 3f(x_2) \Leftrightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \Leftrightarrow$

$2x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ άρα η f είναι $1-1$, οπότε και αντιστρέφεται.

β) Αν $f(x) = y$ τότε $x = f^{-1}(y)$ και η σχέση $e^{f(x)} + 3f(x) = 2x + 1$ γίνεται:

$e^y + 3y = 2f^{-1}(y) + 1 \Leftrightarrow 2f^{-1}(y) = e^y + 3y - 1 \Leftrightarrow$

$f^{-1}(y) = \frac{1}{2}\left(e^y + 3y - 1\right)$, $y \in \mathbb{R}$ όποτε $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + 3x - 1\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

31.α) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$, τότε $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$ και

$f(f(x_1)) - f(x_1) = f(f(x_2)) - f(x_2) \Leftrightarrow x_1 + 2 = x_2 + 2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow$ f $1-1$.

β) $f(x) = y \Rightarrow f(y) - y = f^{-1}(y) + 2$, άρα $f^{-1}(x) = f(x) - x - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

Αυξημένης δυσκολίας

32.α) Για κάθε $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ είναι $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$, οπότε και

$x_1 + \sqrt{x_1} < x_2 + \sqrt{x_2} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow f \nearrow [0, +\infty) \Rightarrow 1-1$.

$f(x)=y \Leftrightarrow x+\sqrt{x}=y$ (1)**.** Είναι $x \geq 0$, $\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow x+\sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 0$ και η (1) γίνεται: $\sqrt{x}=y-x \overset{y\geq x}{\Leftrightarrow} x=y^2-2xy+x^2 \Leftrightarrow x^2-x(2y+1)+y^2=0$ (2)

Η (2) είναι $2^{ου}$ βαθμού και έχει λύση αφού

$\Delta=(2y+1)^2-4y^2=4y+1>0\,(y\geq 0)$ και

$x=\dfrac{2y+1+\sqrt{4y+1}}{2}$ ή $x=\dfrac{2y+1-\sqrt{4y+1}}{2}$.

Αν $x=\dfrac{2y+1+\sqrt{4y+1}}{2}$, τότε $y \geq x \Leftrightarrow y \geq \dfrac{2y+1+\sqrt{4y+1}}{2} \Leftrightarrow$

$\cancel{2y} \geq \cancel{2y}+1+\sqrt{4y+1} \Leftrightarrow \sqrt{4y+1} \leq -1$ αδύνατο.

Αν $x=\dfrac{2y+1-\sqrt{4y+1}}{2}$, τότε $y \geq x \Leftrightarrow y \geq \dfrac{2y+1-\sqrt{4y+1}}{2} \Leftrightarrow$

$\cancel{2y} \geq \cancel{2y}+1-\sqrt{4y+1} \Leftrightarrow \sqrt{4y+1} \geq 1 \Leftrightarrow 4y+1 \geq 1 \Leftrightarrow y \geq 0$ ισχύει.

Άρα $f^{-1}(y)=\dfrac{2y+1-\sqrt{4y+1}}{2}$, $y \geq 0$ και $f^{-1}(x)=\dfrac{2x+1-\sqrt{4x+1}}{2}$, $x \geq 0$.

β) Η f ορίζεται όταν $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$ και $x \geq 0$, οπότε $D_f=[0,+\infty)$.

Για κάθε $x_1,x_2 \geq 0$ με $x_1<x_2$ είναι $\sqrt{x_1}<\sqrt{x_2}$ (1), $x_1+1<x_2+1 \Leftrightarrow$ $\sqrt{x_1+1}<\sqrt{x_2+1}$ (2) και από

$(1)+(2) \Rightarrow f(x_1)<f(x_2) \Leftrightarrow f \nearrow [0,+\infty) \Rightarrow f$ 1−1.

$f(x)=y \Leftrightarrow \sqrt{x+1}+\sqrt{x}=y$ (3)

Επειδή $\sqrt{x+1} \geq 0$, $\sqrt{x} \geq 0$ και δεν μηδενίζονται ταυτόχρονα, είναι $y>0$ και η (3) γίνεται: $\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)^2=y^2 \Leftrightarrow x+1+2\sqrt{x+1}\sqrt{x}+x=y^2 \Leftrightarrow$

$2\sqrt{x^2+x}=y^2-(2x+1) \Leftrightarrow \left(2\sqrt{x^2+x}\right)^2=\left[y^2-(2x+1)\right]^2 \Leftrightarrow$

$4\left(x^2+x\right)=y^4-2y^2(2x+1)+(2x+1)^2 \Leftrightarrow$

$\cancel{4x^2}+\cancel{4x}=y^4-2y^2(2x+1)+\cancel{4x^2}+\cancel{4x}+1 \Leftrightarrow$

$2y^2(2x+1)=y^4+1 \overset{y>0}{\Leftrightarrow} 2x+1=\dfrac{y^4+1}{2y^2} \Leftrightarrow 2x=\dfrac{y^4+1}{2y^2}-1=\dfrac{y^4+1-2y^2}{2y^2} \Leftrightarrow$

$x=\dfrac{\left(y^2-1\right)^2}{4y^2}$, άρα $f^{-1}(y)=\dfrac{\left(y^2-1\right)^2}{4y^2}$, $y>0$ και $f^{-1}(x)=\dfrac{\left(x^2-1\right)^2}{4x^2}$, $x>0$.

γ) Η f ορίζεται όταν $9-x^2>0 \Leftrightarrow x^2<9 \Leftrightarrow |x|<3 \Leftrightarrow -3<x<3$, άρα $A_f=(-3,3)$. Για κάθε $x_1,x_2 \in (-3,3)$ με $f(x_1)=f(x_2)$ είναι

$\dfrac{x_1}{\sqrt{9-x_1^2}}=\dfrac{x_2}{\sqrt{9-x_2^2}}$ (1). Αν τα x_1,x_2 είναι ετερόσημοι τότε η (1) είναι αδύνατη.

Αν $x_1x_2 \geq 0$ τότε η (1) γίνεται: $\left(\dfrac{x_1}{\sqrt{9-x_1^2}}\right)^2=\left(\dfrac{x_2}{\sqrt{9-x_2^2}}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\dfrac{x_1^2}{9-x_1^2}=\dfrac{x_2^2}{9-x_2^2} \Leftrightarrow 9x_1^2-\cancel{x_1^2x_2^2}=9x_2^2-\cancel{x_1^2x_2^2} \Leftrightarrow 9x_1^2=9x_2^2 \Leftrightarrow x_1^2=x_2^2$ και

επειδή τα x_1,x_2 είναι ομόσημοι ή μηδέν είναι $x_1=x_2$, οπότε η f είναι 1-1 και αντιστρέφεται. Θέτουμε $f(x)=y \Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{9-x^2}}=y \Leftrightarrow x=y\sqrt{9-x^2}$ (2)

Η (2) αληθεύει μόνο όταν x, y ομόσημοι ή μηδέν.

Τότε η (2) γίνεται $x^2=y^2\left(9-x^2\right) \Leftrightarrow x^2=9y^2-x^2y^2 \Leftrightarrow x^2+x^2y^2=9y^2 \Leftrightarrow$

$x^2\left(1+y^2\right)=9y^2 \Leftrightarrow x^2=\dfrac{9y^2}{y^2+1} \Leftrightarrow |x|=\dfrac{9|y|}{\sqrt{y^2+1}}$ και επειδή τα x, y είναι ομόσημοι αριθμοί, γίνεται: $x=\dfrac{9y}{\sqrt{y^2+1}}$.

Άρα $f^{-1}(y)=\dfrac{9y}{\sqrt{y^2+1}}$, $y \in \mathbb{R}$, οπότε $f^{-1}(x)=\dfrac{9x}{\sqrt{x^2+1}}$, $x \in \mathbb{R}$.

33.α) Για κάθε $x_1,x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι $e^{x_1}<e^{x_2}$ (1) και

$-x_1>-x_2 \Leftrightarrow e^{-x_1}>e^{-x_2} \Leftrightarrow -e^{-x_1}<-e^{-x_2}$ (2)

Από $(1)+(2) \Rightarrow f(x_1)<f(x_2) \Rightarrow f \nearrow \mathbb{R} \Rightarrow 1-1$.

β) $f(x)=y \Leftrightarrow e^x-e^{-x}=y \overset{e^x=\omega>0}{\Leftrightarrow} \omega-\dfrac{1}{\omega}=y \Leftrightarrow \omega^2-1=\omega y \Leftrightarrow$

$\omega^2-\omega y-1=0$.

Είναι $\Delta=y^2+4$ και $\omega_{1,2}=\dfrac{y\pm\sqrt{y^2+4}}{2}$, όμως $\omega>0$ άρα $\omega=\dfrac{y+\sqrt{y^2+4}}{2}$

αφού $y^2+4>y^2 \Leftrightarrow \sqrt{y^2+4}>\sqrt{y^2}=|y| \Leftrightarrow -\sqrt{y^2+4}<y<\sqrt{y^2+4}$.

Άρα $\omega=\frac{y+\sqrt{y^2+4}}{2}\Leftrightarrow e^x=\frac{y+\sqrt{y^2+4}}{2}\Leftrightarrow x=\ln\frac{y+\sqrt{y^2+4}}{2}$, άρα

$f^{-1}(y)=\ln\frac{y+\sqrt{y^2+4}}{2}$, $y\in\mathbb{R}$.

34.α) $x^2+1>x^2\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}>|x|\Leftrightarrow-\sqrt{x^2+1}<x<\sqrt{x^2+1}\Rightarrow$

$\sqrt{x^2+1}-x>0\Leftrightarrow f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι

$$f(x_1)-f(x_2)=\sqrt{x_1^2+1}-x_1-\sqrt{x_2^2+1}+x_2=$$

$$\frac{\left(\sqrt{x_1^2+1}-\sqrt{x_2^2+1}\right)\left(\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}\right)}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}-(x_1-x_2)=$$

$$\frac{x_1^2-x_2^2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}-(x_1-x_2)=\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}-(x_1-x_2)=$$

$$(x_1-x_2)\left(\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}-1\right)=(x_1-x_2)\frac{x_1+x_2-\sqrt{x_1^2+1}-\sqrt{x_2^2+1}}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}=$$

$(x_1-x_2)\frac{-f(x_1)-f(x_2)}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}>0$ γιατί $x_1<x_2$ και $f(x_1),f(x_2)>0$, οπότε

$f(x_1)>f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Επομένως είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται.

$$f(x)=y\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}-x=y\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}=y+x\overset{y+x>0}{\Leftrightarrow}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2=(y+x)^2\Leftrightarrow$$

$$\cancel{x^2}+1=y^2+2xy+\cancel{x^2}\Leftrightarrow 2xy=1-y^2\overset{y>0}{\Leftrightarrow}x=\frac{1-y^2}{2y}.$$

Είναι $x>-y\Leftrightarrow\frac{1-y^2}{2y}>-y\Leftrightarrow1-y^2>-2y^2\Leftrightarrow1>-y^2$ ισχύει άρα

$f^{-1}(y)=\frac{y^2-1}{2y}$, $y>0$ οπότε $f^{-1}(x)=\frac{1-x^2}{2x}$, $x>0$.

35.α) Έστω $x_1<x_2\le0\Rightarrow x_1+\lambda<x_2+\lambda\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)\Rightarrow f\nearrow(-\infty,0]$.

Έστω $0<x_1<x_2\Rightarrow x_1^2<x_2^2\Leftrightarrow x_1^2+1<x_2^2+1\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)\Rightarrow f\nearrow(0,+\infty)$.

Για $x\le0$ είναι $x+\lambda\le\lambda\Leftrightarrow f(x)\le\lambda$, άρα $f(A_1)=(-\infty,\lambda]$.

Για $x>0$ είναι $f(x)>1$ άρα $f(A_2)=(1,+\infty)$.

Η f είναι 1-1 όταν $f(A_1)\cap f(A_2)=\varnothing$ και αυτό συμβαίνει όταν $\lambda \le 1$.

β) Για $\lambda=-1$ είναι $f(x)=\begin{cases} x-1, & x\le 0 \\ x^2+1, & x>0 \end{cases}$. Για $x\le 0: f(x)=y \Leftrightarrow x=y+1$ και

για $x>0: f(x)=y \Leftrightarrow x=\sqrt{y^2-1}$, άρα $f^{-1}(x)=\begin{cases} x+1 & , x\le -1 \\ \sqrt{x^2-1} & , x>1 \end{cases}$.

36.α) Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $g(x_1)=g(x_2)$. Επειδή η f είναι συνάρτηση, ισχύει: $f(g(x_1))=f(g(x_2))\Leftrightarrow -2x_1+5=-2x_2+5\Leftrightarrow x_1=x_2$, άρα g $1-1$.

β) Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι $g(x_1)>g(x_2)$.
Έστω ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $g(x_1)\le g(x_2)$, τότε επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα ισχύει: $f(g(x_1))\le f(g(x_2))\Leftrightarrow -2x_1+5\le -2x_2+5\Leftrightarrow x_1\ge x_2$ που είναι άτοπο. Άρα $g(x_1)>g(x_2)$ και η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

γ) Αν $f=g$ τότε $f(f(x))=-2x+5$ και για $f(x)=y$ είναι $f(y)=-2x+5\Leftrightarrow$
$x=\dfrac{5-f(y)}{2}\Leftrightarrow f^{-1}(y)=\dfrac{5-f(y)}{2}$ άρα $f^{-1}(x)=\dfrac{5-f(x)}{2}$, $x\in\mathbb{R}$.

37. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $g(x_1)=g(x_2)\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow x_1=x_2$ άρα g $1-1$.
$g(x)=y\Leftrightarrow 1+\sqrt{x+1}=y\Leftrightarrow \sqrt{x+1}=y-1$.
Για $y\ge 1$ είναι $x+1=(y-1)^2\Leftrightarrow x=y^2-2y$, άρα $g^{-1}(x)=x^2-2x=f(x)$,
$x\ge 1$ $x^2=2x+1+\sqrt{x+1}\Leftrightarrow x^2-2x=1+\sqrt{x+1}\Leftrightarrow f(x)=g(x)=f^{-1}(x)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}$
$f(x)=x\Leftrightarrow x^2-2x=x\Leftrightarrow x^2-3x=0\Leftrightarrow x=0$ ή $x=3$.

38.α) Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$ είναι $f(f(x_1))=f(f(x_2))\Leftrightarrow$
$4x_1-15=4x_2-15\Leftrightarrow 4x_1=4x_2\Leftrightarrow x_1=x_2\Rightarrow f$ $1-1$.

β) Αντικαθιστώντας στην $f(f(x))=4x-15$ όπου x το $f(x)$, έχουμε:
$f(f(f(x)))=4f(x)-15\Leftrightarrow 8x-35=4f(x)-15\Leftrightarrow f(x)=2x-5$, $x\in\mathbb{R}$.

39.α) Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$, είναι $f(f(x_1))=f(f(x_2))\Leftrightarrow$
$3+4x_1=3+4x_2\Leftrightarrow 4x_1=4x_2\Leftrightarrow x_1=x_2\Rightarrow f$ $1-1$.

β) Αντικαθιστώντας στην $f(f(x))=3+4x$ όπου x το $f(x)$, έχουμε:
$f(f(f(x)))=3+4f(x)\Leftrightarrow 64x+63=3+4f(x)\Leftrightarrow f(x)=16x+15$, $x\in\mathbb{R}$.

40. Οι f,g είναι 1-1 άρα αντιστρέφονται. Είναι $g^{-1}(\mathbb{R}) = A_f = \mathbb{R}$ και $A_{g^{-1}} = g(\mathbb{R}) = \mathbb{R} = A_f$. Θέτουμε όπου x το $g^{-1}(x) \in \mathbb{R}$ στη σχέση που μας δίνεται: $f\left(g\left(g^{-1}(x)\right)\right) = g^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) = g^{-1}(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα $f = g^{-1}$.

41.α) Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Αν υπάρχουν $0 < x_1 < x_2$ τέτοια ώστε: $f^{-1}(x_1) \geq f^{-1}(x_2) \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f\left(f^{-1}(x_1)\right) \geq f\left(f^{-1}(x_2)\right) \Rightarrow x_1 \geq x_2$ άτοπο.

Άρα για κάθε $0 < x_1 < x_2$ ισχύει $f^{-1}(x_1) < f^{-1}(x_2)$ οπότε η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Ομοίως αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

β) $f(x) + x = \frac{1}{x} - f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) + f^{-1}(x) = \frac{1}{x} - x$ για κάθε $x > 0$. Έστω η συνάρτηση $g(x) = f(x) + f^{-1}(x) = \frac{1}{x} - x$, $x > 0$. Για κάθε $0 < x_1 < x_2$ είναι

$$\begin{cases} -x_1 > -x_2 \\ \dfrac{1}{x_1} > \dfrac{1}{x_2} \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} \frac{1}{x_1} - x_1 > \frac{1}{x_2} - x_2 \Leftrightarrow g(x_1) > g(x_2) \Rightarrow g\searrow(0,+\infty).$$

Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ τότε η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα.

Για κάθε $0 < x_1 < x_2$ με $x_1 < x_2 \overset{f,\, f^{-1}\nearrow}{\Rightarrow} \begin{cases} f(x_1) < f(x_2) & (1) \\ f^{-1}(x_1) < f^{-1}(x_1) & (2) \end{cases} \overset{(1)+(2)}{\Rightarrow}$

$g(x_1) < g(x_2) \Rightarrow g\nearrow(0,+\infty)$ άτοπο. Η f είναι γνησίως μονότονη άρα θα είναι $\searrow$

42. Έστω ότι $C_2 \equiv C_f$ και $C_1 \equiv C_{f^{-1}}$.

1ος τρόπος: Είναι $f(x) < x$ για κάθε $x \in (0,1)$ και $f\nearrow[0,+\infty)$ άρα

$f(f(x)) < f(x) \Leftrightarrow (f \circ f)(x) < f(x)$ για κάθε $x \in (0,1)$ άτοπο.

2ος τρόπος: Είναι $f(x) < f^{-1}(x)$ για κάθε $x \in (0,1)$ και $f\nearrow[0,+\infty)$ άρα

$f(f(x)) < f\left(f^{-1}(x)\right) \Leftrightarrow (f \circ f)(x) < x$ για κάθε $x \in (0,1)$ άτοπο.

Άρα τελικά $C_1 \equiv C_f$ και $C_2 \equiv C_{f^{-1}}$.

Εφαρμογές του «1-1»

43.α) Έστω $f(x) = \ln x - 1 + x$, $x > 0$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι $f\nearrow\mathbb{R} \Rightarrow f$ 1−1, άρα $\ln x = 1 - x \Leftrightarrow \ln x - 1 + x = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(1) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x = 1$.

β) Έστω $f(x)=e^{3x}+5x-3+2e^{x}$, $x\in\mathbb{R}$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι $f\nearrow\mathbb{R}\Rightarrow f\ 1-1$, άρα $e^{3x}+5x=3-2e^{x}\Leftrightarrow e^{3x}+5x-3+2e^{x}=0\Leftrightarrow$ $f(x)=f(0)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}x=0$.

γ) Έστω $f(x)=x^7+2x^9-3$, $x\in\mathbb{R}$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι $f\nearrow\mathbb{R}\Rightarrow f\ 1-1$, άρα $x^7+2x^9-3=0\Leftrightarrow f(x)=f(1)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}x=1$.

δ) Έστω $f(x)=3^x+x^3-1$, $x\in\mathbb{R}$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι $f\nearrow\mathbb{R}\Rightarrow f\ 1-1$, άρα $3^x+x^3=1\Leftrightarrow 3^x+x^3-1=0\Leftrightarrow f(x)=f(0)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}x=0$.

ε) Έστω $f(x)=\sqrt[5]{x}+\sqrt[3]{x}+\ln x-2$, $x\in>0$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι $f\nearrow\mathbb{R}\Rightarrow f\ 1-1$, άρα $\sqrt[5]{x}+\sqrt[3]{x}+\ln x=2\Leftrightarrow\sqrt[5]{x}+\sqrt[3]{x}+\ln x-2=0\Leftrightarrow$ $f(x)=f(1)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}x=1$.

στ) Έστω $f(x)=\ln x+2-\sqrt{5-x}$, $x\in(0,5]$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι $f\nearrow\mathbb{R}\Rightarrow f\ 1-1$, άρα

$\ln x+2=\sqrt{5-x}\Leftrightarrow\ln x+2-\sqrt{5-x}=0\Leftrightarrow f(x)=f(1)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}x=1$.

Αυξημένης δυσκολίας

44. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$ είναι

$$g(f(x_1))=g(f(x_2))\Leftrightarrow(g\circ f)(x_1)=(g\circ f)(x_2)$$

και επειδή η $g\circ f$ είναι 1-1, ισχύει ότι $x_1=x_2$.
Άρα η f είναι 1-1 και αντιστρέφεται

45. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $g(x_1)=g(x_2)$, είναι $\dfrac{f(x_1)}{f^2(x_1)+1}=\dfrac{f(x_2)}{f^2(x_2)+1}\Leftrightarrow$

$f(x_1)(f^2(x_2)+1)=f(x_2)(f^2(x_1)+1)\Leftrightarrow$

$f(x_1)f^2(x_2)+f(x_1)=f(x_2)f^2(x_1)+f(x_2)\Leftrightarrow$

$f(x_1)f^2(x_2)-f(x_2)f^2(x_1)+f(x_1)-f(x_2)=0\Leftrightarrow$

$f(x_1)f(x_2)(f(x_2)-f(x_1))-(f(x_2)-f(x_1))=0\Leftrightarrow$

$(f(x_2)-f(x_1))(f(x_1)f(x_2)-1)=0\Leftrightarrow f(x_1)f(x_2)=1$ αδύνατο αφού $f(x)>1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ή $f(x_1)=f(x_2)\overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow}x_1=x_2$ άρα g 1-1 και αντιστρέφεται.

46.α) Οι f,g ορίζονται στο $\mathbb{R}$ άρα η $g\circ f$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $(g\circ f)(x_1)=(g\circ f)(x_2)$, είναι: $g(f(x_1))=g(f(x_2))\overset{g\ 1-1}{\Leftrightarrow}$

$f(x_1)=f(x_2)\overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow}x_1=x_2$, άρα η $g\circ f$ είναι 1-1.

β) Είναι $(g\circ f)(\mathbb{R})=g(f(\mathbb{R}))=g(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ άρα η $(g\circ f)^{-1}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

γ) Επειδή οι f,g έχουν σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ τότε οι αντίστροφές τους ορίζονται στο $\mathbb{R}$. Άρα η συνάρτηση $f^{-1}\circ g^{-1}$ ορίζεται στο $\mathbb{R}$.Επειδή η $g\circ f$ έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ τότε για κάθε $y\in\mathbb{R}$ υπάρχει $x\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $(g\circ f)(x)=y$.

Είναι $(g\circ f)(x)=y\Leftrightarrow(g\circ f)^{-1}(y)=x$.

Επίσης είναι $(f^{-1}\circ g^{-1})(y)=f^{-1}(g^{-1}(y))=f^{-1}(g^{-1}(g(f(x))))=f^{-1}(f(x))=x$.

Άρα για κάθε $y\in\mathbb{R}$ είναι $(g\circ f)^{-1}(y)=(f^{-1}\circ g^{-1})(y)$ άρα $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$.

47.Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $g(x_1)=g(x_2)$ είναι

$$f^2(x_1)+f(x_1)=f^2(x_2)+f(x_2)\Leftrightarrow f^2(x_1)-f^2(x_2)+f(x_1)-f(x_2)=0\Leftrightarrow$$
$$(f(x_1)-f(x_2))(f(x_1)+f(x_2))+f(x_1)-f(x_2)=0\Leftrightarrow$$
$$(f(x_1)-f(x_2))(f(x_1)+f(x_2)+1)=0\quad(1)$$

Η f έχει σύνολο τιμών το $(0,+\infty)$ οπότε $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα είναι $f(x_1)+f(x_2)+1>0$ επομένως από την (1) προκύπτει ότι

$f(x_1)-f(x_2)=0\Leftrightarrow f(x_1)=f(x_2)\overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow}x_1=x_2$ άρα η g είναι 1-1.

48.α) $f(1)=6=f(-1)$ άρα δεν είναι 1-1.

β) Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$, είναι $\dfrac{x_1+3}{x_1^2+2}=\dfrac{x_2+3}{x_2^2+2}\Leftrightarrow$

$$x_1x_2^2+3x_2^2+2x_1+\cancel{6}=x_2x_1^2+3x_1^2+2x_2+\cancel{6}\Leftrightarrow$$
$$x_1x_2^2-x_2x_1^2+3x_2^2-3x_1^2+2x_1-2x_2=0\Leftrightarrow$$
$$x_1x_2(x_2-x_1)+3(x_2-x_1)(x_2+x_1)-2(x_2-x_1)=0\Leftrightarrow$$
$$(x_2-x_1)(x_1x_2+3x_2+3x_1-2)=0\Leftrightarrow x_1=x_2 \text{ ή } x_1x_2+3x_2+3x_1-2=0\ (1)$$

Η (1) για $x_1=0$ δίνει $x_2=\dfrac{2}{3}$ και $f(0)=f\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{3}{2}$ άρα η f δεν είναι 1-1.

49.Για x = 1 είναι $f(1)+f(1)=2\Leftrightarrow 2f(1)=2\Leftrightarrow f(1)=1$. Για x = 0 είναι $f(0)+f(0)=2\Leftrightarrow 2f(0)=2\Leftrightarrow f(0)=1$. Επειδή $f(0)=f(1)$, η f δεν είναι 1-1.

50. $(f\circ f)(x)+(g\circ f)(x)=e^x \Leftrightarrow f(f(x))+g(f(x))=x+1$.

Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$, είναι $f(f(x_1))=f(f(x_2))$ (1),

$g(f(x_1))=g(f(x_2))$ (2) και από $(1)+(2)\Rightarrow$

$f(f(x_1))+g(f(x_1))=f(f(x_2))+g(f(x_2)) \Leftrightarrow x_1+1=x_2+1 \Leftrightarrow x_1=x_2$ άρα f 1-1.

51.α) Έστω $f(x)=x^{11}+3x^5$, $x\in\mathbb{R}$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι

$f\nearrow\mathbb{R}\Rightarrow f$ 1-1, οπότε: $(x^3+x)^{11}-3(x+1)^5=(x+1)^{11}-3(x^3+x)^5 \Leftrightarrow$

$(x^3+x)^{11}+3(x^3+x)^5=(x+1)^{11}+3(x+1)^5 \Leftrightarrow$

$f(x^3+x)=f(x+1) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x^3+\cancel{x}=\cancel{x}+1 \Leftrightarrow x=1$.

β) Για $x<3$ είναι $\ln\dfrac{e^x+2}{3-x}=\sqrt{3-x}-\sqrt{e^x+2} \Leftrightarrow$

$\ln(e^x+2)+\sqrt{e^x+2}=\ln(3-x)+\sqrt{3-x}$ $\quad(1)$

Έστω $f(x)=\ln x+\sqrt{x}$, $x>0$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι $f\nearrow(0,+\infty)\Rightarrow f\ 1-1$,

οπότε: $(1)\Rightarrow f(e^x+2)=f(3-x) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} e^x+2=3-x \Leftrightarrow e^x+x-1=0$ $\quad(2)$

Έστω $\varphi(x)=e^x+x-1$, $x\in\mathbb{R}$.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε η (2) γίνεται $\varphi(x)=\varphi(0)\Leftrightarrow x=0$.

γ) Έστω $f(x)=e^x+x$, $x\in\mathbb{R}$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι $f\nearrow\mathbb{R}\Rightarrow f\ 1-1$,

οπότε: $\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x=e^{\eta\mu x}-e^{\sigma\upsilon\nu x} \Leftrightarrow e^{\sigma\upsilon\nu x}+\sigma\upsilon\nu x=e^{\eta\mu x}+\eta\mu x \Leftrightarrow$

$f(\sigma\upsilon\nu x)=f(\eta\mu x) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} \sigma\upsilon\nu x=\eta\mu x \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=1 \Leftrightarrow x=k\pi+\dfrac{\pi}{4}$, $k\in\mathbb{Z}$.

52.α) Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $g(x_1)=g(x_2)$. Τότε: $g(g(x_1))=g(g(x_2))$ και

$g(x_1)+g(g(x_1))=g(x_2)+g(g(x_2)) \Leftrightarrow f(x_1+2)=f(x_2+2) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x_1=x_2$,

άρα g 1-1.

β) $g(e^x+2x)=g(x+1) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} e^x+2x=x+1 \Leftrightarrow e^x+x-1=0$.

Έστω $h(x)=e^x+x-1$, $x\in\mathbb{R}$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι $f\nearrow\mathbb{R}\Rightarrow f\ 1-1$

οπότε: $e^x+x-1=0 \Leftrightarrow h(x)=h(0) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x=0$.

53.α) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$ είναι

$$f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \Leftrightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f\ 1-1$$

β) Για $x = -1$, είναι $f(f(-1)) = -1$ και για $x = f(-1)$ είναι

$$f(f(f(-1))) = 2f(-1) + 1 \Leftrightarrow f(-1) = 2f(-1) + 1 \Leftrightarrow f(-1) = -1$$

γ) $f(x) = x \Leftrightarrow f(f(x)) = f(x) \Leftrightarrow 2x + 1 = x \Leftrightarrow x = -1$.

54.α) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$ είναι $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$ και $f^3(x_1) = f^3(x_2)$, άρα $f(f(x_1)) + f^3(x_1) = f(f(x_2)) + f^3(x_2) \Leftrightarrow$
$2x_1 + 3 = 2x_2 + 3 \Leftrightarrow 2x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f\ 1-1$.

β) $f(2x^3 + x) = f(4 - x) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} 2x^3 + x = 4 - x \Leftrightarrow x^3 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow$
$(x-1)(x^2 + x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

55.α) Για $x = y = 0$ η σχέση $f(x-y) = f(x) - f(y)$ (1), γίνεται: $f(0) = 0$.
Επειδή η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα και $f(0) = 0$, η $x = 0$ είναι η μοναδική ρίζα της f. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$.
Τότε: $f(x_1) - f(x_2) = 0$ και λόγω της (1), είναι: $f(x_1 - x_2) = 0$ άρα $x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$. Οπότε η f είναι 1-1.

β) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $g(x_1) = g(x_2)$. Τότε: $f(x_1) - x_1 = f(x_2) - x_2 \Leftrightarrow$
$f(x_1) - f(x_2) = x_1 - x_2$ και λόγω της (1), είναι: $f(x_1 - x_2) = x_1 - x_2$ $\quad (2)$
Επειδή η C_f τέμνει την $y = x$ το πολύ σε ένα σημείο και $f(0) = 0$, η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μοναδική ρίζα την $x = 0$. Οπότε η (2) γίνεται:
$x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$, άρα η g είναι $1-1$ και αντιστρέφεται.

56.α) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$ είναι: $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$, άρα και $f(f(x_1)) - f(x_1) = f(f(x_2)) - f(x_2) \Leftrightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ άρα $f\ 1-1$

β) Για $x = 1$ είναι $f(f(1)) = f(1) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} f(1) = 1$.

57.α) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$ είναι:
$f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \Rightarrow f(f(f(x_1))) = f(f(f(x_2)))$, άρα και
$f(f(f(x_1))) - f(f(x_1)) = f(f(f(x_2))) - f(f(x_2)) \Leftrightarrow 2x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$
άρα $f\ 1-1$.

β) Για $x=0$ είναι $f\left(f\left(f(0)\right)\right)=f\left(f(0)\right)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}f\left(f(0)\right)=f(0)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}f(0)=0$.

58.α) Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$ είναι: $f^3(x_1)=f^3(x_2)$, άρα και $f^3(x_1)+4f(x_1)=f^3(x_2)+4f(x_2)\Leftrightarrow x_1+4=x_2+4\Leftrightarrow x_1=x_2$ άρα $f\,1-1$.

β) Για $x=1$ είναι $f^3(1)+4f(1)=5\Leftrightarrow f^3(1)+4f(1)-5=0\Leftrightarrow$

$\left(f(1)-1\right)\left(f^2(1)+f(1)+5\right)=0\Leftrightarrow f(1)=1$.

Για $x=-4$ είναι $f^3(-4)+4f(-4)=-4+4\Leftrightarrow f(-4)\left(f^2(-4)+4\right)=0\Leftrightarrow$

$f(-4)=0$ ή $f^2(-4)=-4$ αδύνατο.

γ) Αντικαθιστώντας στη δοθείσα σχέση όπου x το $f(x)$, προκύπτει ότι

$f^3\left(f(x)\right)+4f\left(f(x)\right)=f(x)+4$, οπότε: $f^3\left(f(x)\right)+4f\left(f(x)\right)=4\Leftrightarrow$

$f(x)+4=4\Leftrightarrow f(x)=0\Leftrightarrow f(x)=f(-4)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}x=-4$.

59.α) Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$ είναι

$$f\left(f(x_1)\right)=f\left(f(x_2)\right)\Leftrightarrow 3-2e^{x_1-1}=3-2e^{x_2-1}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow x_1=x_2$$

β) Για $x=1$ είναι $f\left(f(1)\right)=1$ και για $x=f(1)$ είναι

$$f\left(f\left(f(1)\right)\right)=3-2e^{f(1)-1}\Leftrightarrow f(1)=3-2e^{f(1)-1}\Leftrightarrow 2e^{f(1)-1}+f(1)-3=0\quad(1)$$

Έστω $g(x)=2e^{x-1}+x-3,\ x\in\mathbb{R}$ Εύκολα αποδεικνύεται ότι η g είναι γνησίως αύξουσα και επειδή $g(1)=0$ η $x=1$ είναι η μοναδική ρίζα της $g(x)=0$.

$(1)\Rightarrow g\left(f(1)\right)=0\Leftrightarrow g\left(f(1)\right)=g(1)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}f(1)=1$.

γ) Αντικαθιστώντας στη δοθείσα σχέση όπου x το $f(x)$ προκύπτει

$f\left(f\left(f(x)\right)\right)=3-2e^{f(x)-1}$, οπότε: $f\left(f\left(f(x)\right)\right)=1\Leftrightarrow$

$3-2e^{f(x)-1}=1\Leftrightarrow e^{f(x)-1}=1\Leftrightarrow f(x)-1=0\Leftrightarrow f(x)=1\Leftrightarrow f(x)=f(1)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}x=1$

δ) Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Τότε για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι $f(x_1)<f(x_2)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f\left(f(x_1)\right)<f\left(f(x_2)\right)\Leftrightarrow\ 3-2e^{x_1-1}<3-2e^{x_1-1}\Leftrightarrow x_1>x_2$ άτοπο. Όμοια αν η f είναι γνησίως φθίνουσα.

60.α) Για $x=2$ είναι: $(f\circ f)(2)=2\Leftrightarrow f\left(f(2)\right)=2$. Για $x=f(2)$ είναι:

$(f\circ f)\left(f(2)\right)=3f(2)-4\Leftrightarrow f\underbrace{\left(f\left(f(2)\right)\right)}_{2}=3f(2)-4\Leftrightarrow$

$f(2)=3f(2)-4\Leftrightarrow f(2)=2$.

β) Για $x=2$ είναι: $g(2)=(2-1)^4+2\cdot 2f(2)+5-4\cdot 2 \Leftrightarrow g(2)=6$.

Για $x=0$ είναι $g(0)=(-1)^4+2\cdot 0f(0)+5-4\cdot 0=6$.

Δηλαδή $g(0)=g(2)$, άρα η g δεν είναι $1-1$ και επομένως δεν είναι αντιστρέψιμη.

γ) Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$ είναι $f(f(x_1))=f(f(x_2)) \Leftrightarrow$

$3x_1-4=3x_2-4 \Leftrightarrow 3x_1=3x_2 \Leftrightarrow x_1=x_2$ άρα η f είναι 1-1.

Αντικαθιστώντας στη δοθείσα σχέση όπου x το $f(x)$ προκύπτει

$f(f(f(x)))=3f(x)-4$, οπότε: $(f\circ f\circ f)(x)=2 \Leftrightarrow 3f(x)-4=2 \Leftrightarrow$

$3f(x)=6 \Leftrightarrow f(x)=2 \Leftrightarrow f(x)=f(2) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x=2$

Τιμές αντίστροφης

61.β) $f^{-1}(4)=2$, $f^{-1}(1)=1$, $f^{-1}(6)=3$.

62.α) Επειδή κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη C_f το πολύ σε ένα σημείο, η f είναι 1-1.

β) $D_{f^{-1}}=f(A)=[0,4]$, $f^{-1}(A)=D_f=[0,3]$

γ) $f^{-1}(1)=1$, $f^{-1}(2)=2$, $f^{-1}(4)=3$, $f^{-1}(f(0))=0$.

δ) $f^{-1}(x)<1 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(f^{-1}(x))<f(1) \Leftrightarrow x<1$

Αυξημένης δυσκολίας

63. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $y\in f(A)$ είναι $f(x)=y \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$.

$-x\in A_f$ και $f(-x)=-f(x)=-y$, άρα $-y\in f(A)$.

Είναι $f^{-1}(-y)=f^{-1}(-f(x))=f^{-1}(f(-x))=-x=-f^{-1}(y)$ άρα η f^{-1} είναι περιττή.

64.α) Για κάθε $1\le x_1<x_2$ είναι

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{3x_1}{1+2x_1^2}-\frac{3x_2}{1+2x_2^2}=\frac{3x_1+6x_1x_2^2-3x_2-6x_1^2x_2}{(1+2x_1^2)(1+2x_2^2)} \Leftrightarrow$$

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{3(x_1-x_2)-6x_1x_2(x_1-x_2)}{(1+2x_1^2)(1+2x_2^2)}=\frac{3(x_1-x_2)(1-2x_1x_2)}{(1+2x_1^2)(1+2x_2^2)}$$

Είναι $1+2x_1^2>0$, $1+2x_2^2>0$, $x_1-x_2<0$ και $1-2x_1x_2<0$, οπότε

$f(x_1)-f(x_2)>0 \Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2) \Rightarrow f\searrow[1,+\infty) \Rightarrow f\ 1-1$

β) $f^{-1}\left(\frac{6}{9}\right)=\alpha \Leftrightarrow \frac{6}{9}=f(\alpha) \Leftrightarrow f(\alpha)=f(2) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} \alpha=2$.

γ) $f(x)=y \Leftrightarrow \frac{3x}{1+2x^2}=y \Leftrightarrow 3x=y+2yx^2 \Leftrightarrow 2yx^2-3x+y=0$,

$\Delta=9-8y^2>0$, $x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-8y^2}}{4y}$. Αν $x=\frac{3+\sqrt{9-8y^2}}{4y}$, τότε

$x\geq 1 \Leftrightarrow \frac{3+\sqrt{9-8y^2}}{4y}\geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{9-8y^2}\geq 4y-3 \quad (1)$

Αν $y\in\left(0,\frac{3}{4}\right]$ τότε η (1) είναι αληθής. Αν $y\in\left(\frac{3}{4},1\right]$ τότε η (1) γίνεται:

$$\cancel{9}-8y^2\geq 16y^2-24y+\cancel{9} \Leftrightarrow 24y^2-24y\leq 0 \Leftrightarrow 24y(y-1)\leq 0$$

που ισχύει αφού $y\in\left(\frac{3}{4},1\right]$.

Αν $x=\frac{3-\sqrt{9-8y^2}}{4y}$, τότε $x\geq 1 \Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{9-8y^2}}{4y}\geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{9-8y^2}\leq 3-4y$.

Αν $y\in\left(\frac{3}{4},1\right]$ τότε η (1) είναι αδύνατη.

Άρα $f^{-1}(y)=\frac{3+\sqrt{9-8y^2}}{4y}$, $y\in(0,1]$, οπότε $f^{-1}(x)=\frac{3+\sqrt{9-8x^2}}{4x}$, $x\in(0,1]$.

65.α) Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$ είναι $\frac{e^{x_1}}{e^{x_1}+2}=\frac{e^{x_2}}{e^{x_2}+2} \Leftrightarrow$

$e^{x_1+x_2}+2e^{x_1}=e^{x_1+x_2}+2e^{x_2} \Leftrightarrow 2e^{x_1}=2e^{x_2} \Leftrightarrow x_1=x_2$, άρα f $1-1$.

β) Έστω $f^{-1}\left(f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right)=\alpha \Leftrightarrow f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)=f(\alpha) \Leftrightarrow \frac{3}{2}=f(f(\alpha)) \Leftrightarrow$

$\frac{e^{f(\alpha)}}{e^{f(\alpha)}+2}=\frac{3}{2} \Leftrightarrow 2e^{f(\alpha)}=3e^{f(\alpha)}+6 \Leftrightarrow e^{f(\alpha)}=-6$ αδύνατο.

66.α) Είναι $A_f=[0,+\infty)$. Έστω $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ με $x_1<x_2$, τότε $\sqrt{x_1}<\sqrt{x_2}$.

$\sqrt[3]{x_1}<\sqrt[3]{x_2}$ και με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε: $\sqrt{x_1}+\sqrt[3]{x_1}<\sqrt{x_2}+\sqrt[3]{x_2} \Leftrightarrow$

$f(x_1)<f(x_2)$. Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

β) Είναι $f^{-1}(x)=64 \Leftrightarrow x=f(64)=\sqrt{64}+\sqrt[3]{64}=8+4=12$.

γ) Επειδή $f(64)=12$ είναι $f^{-1}(12)=64$ οπότε $f(x)f^{-1}(x)=12f^{-1}\left(f^{-1}(12)\right)\Leftrightarrow$ $f(x)f^{-1}(x)=f(64)f^{-1}(64)$ (1). Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)\cdot f^{-1}(x), x\geq 0$. Επειδή οι f και f^{-1} είναι $\nearrow$ και έχουν σύνολο τιμών το $[0,+\infty)$ για κάθε $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ είναι $f(x_1)<f(x_2)$ και $f^{-1}(x_1)<f^{-1}(x_2)$ άρα και $f(x_1)f^{-1}(x_1)<f(x_2)f^{-1}(x_2)\Leftrightarrow h(x_1)<h(x_2)$, άρα η h είναι $\nearrow$ οπότε και $1-1$. Η (1) γίνεται: $h(x)=h(64)\Leftrightarrow x=64$.

Λύση ανίσωσης-Σχέσεις διάταξης

67.α) Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$, τότε $e^{f(x_1)}=e^{f(x_2)}$ και $e^{f(x_1)}+f(x_1)=e^{f(x_2)}+f(x_2)\Leftrightarrow x_1+2=x_2+2\Leftrightarrow x_1=x_2$ άρα η f είναι $1-1$ και αντιστρέφεται.

β) Επειδή η f είναι $1-1$ έχουμε: $f(\ln x)=f\left(\frac{e}{x}\right)\Leftrightarrow \ln x=\frac{e}{x}\Leftrightarrow \ln x-\frac{e}{x}=0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\ln x-\frac{e}{x},\ x\in(0,+\infty)$.

Για κάθε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ είναι: $\frac{e}{x_1}>\frac{e}{x_2}\Leftrightarrow -\frac{e}{x_1}<-\frac{e}{x_2}$ και

$\ln x_1<\ln x_2$ άρα $\ln x_1-\frac{e}{x_1}<\ln x_2-\frac{e}{x_2}\Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2)$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, οπότε και $1-1$.

Επειδή $g(e)=0$, έχουμε: $\ln x-\frac{e}{x}=0\Leftrightarrow g(x)=g(e)\Leftrightarrow x=e$.

γ) Είναι $f(x)=y\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$, οπότε η σχέση $e^{f(x)}+f(x)=x+2$ γίνεται: $e^y+y=f^{-1}(y)+2\Leftrightarrow f^{-1}(y)=e^y+y-2,\ y\in\mathbb{R}$ άρα $f^{-1}(x)=e^x+x-2,\ x\in\mathbb{R}$.

δ) Παρατηρούμε ότι $f^{-1}(0)=e^0-2=-1$ άρα $f(-1)=0$.

$\left(x^3-8\right)\left(e^x-3\right)<f(-1)\Leftrightarrow$

$\left(x^3-8\right)\left(e^x-3\right)<0\Leftrightarrow$

x	$-\infty$ $\ln 3$	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	$-$ 0	$+$
x^2+2x+4	$+$	$+$	$+$
e^x-3	$-$ 0	$+$	$+$
Γινόμενο	$+$	$-$	$+$

$(x-2)\left(x^2+2x+4\right)\left(e^x-3\right)<0\Leftrightarrow x\in(\ln 3,2)$.

68. α) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$.

Τότε $\frac{e^{x1}}{e^{x1}+1} = \frac{e^{x2}}{e^{x2}+1} \Leftrightarrow e^{x1}\left(e^{x2}+1\right) = e^{x2}\left(e^{x1}+1\right) \Leftrightarrow$

$e^{x1+x2} + e^{x1} = e^{x1+x2} + e^{x2} \Leftrightarrow e^{x1} = e^{x2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$.

Άρα η f είναι $1-1$ και υπάρχει η αντίστροφή της.

$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{e^x}{e^x+1} = y \Leftrightarrow e^x = e^x y + y \Leftrightarrow e^x - e^x y = y \Leftrightarrow e^x(1-y) = y \quad (1)$

Αν $1-y=0 \Leftrightarrow y=1$, η σχέση (1) γίνεται: $0=1$ και είναι αδύνατη.

Άρα για $y \neq 1$ η (1) γίνεται: $e^x = \frac{y}{1-y}$.

Επειδή $e^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, πρέπει: $\frac{y}{1-y} > 0 \Leftrightarrow y(1-y) > 0 \Leftrightarrow 0 < y < 1$.

Τότε: $e^x = \frac{y}{1-y} \Leftrightarrow x = \ln\frac{y}{1-y}$ ή $f^{-1}(y) = \ln\frac{y}{1-y}$, $y \in (0,1)$, οπότε και

$f^{-1}(x) = \ln\frac{x}{1-x}$, $x \in (0,1)$.

β) Η $f^{-1} \circ g$ ορίζεται όταν: $\begin{cases} x \in A_g \\ g(x) \in A_{f^{-1}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ (1-\ln x) \in (0,1) \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x > 0 \\ 0 < 1-\ln x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ -1 < -\ln x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 0 < \ln x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ e^0 < x < e^1 \end{cases}$, άρα

$1 < x < e$ και $A_{f^{-1} \circ g} = (1,e)$.

Είναι $\left(f^{-1} \circ g\right)(x) = f^{-1}(g(x)) = \ln\frac{g(x)}{1-g(x)} = \ln\frac{1-\ln x}{\ln x}$.

Έστω $x_1, x_2 \in (1,e)$ με $x_1 < x_2$, τότε: $\ln x_1 < \ln x_2$ και

$\begin{cases} -\ln x_1 > -\ln x_2 \\ \frac{1}{\ln x_1} > \frac{1}{\ln x_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\ln x_1 > 1-\ln x_2 > 0 \\ \frac{1}{\ln x_1} > \frac{1}{\ln x_2} > 0 \end{cases}$. Άρα και $\frac{1-\ln x_1}{\ln x_1} > \frac{1-\ln x_2}{\ln x_2} \Leftrightarrow$

$\ln\frac{1-\ln x_1}{\ln x_1} > \ln\frac{1-\ln x_2}{\ln x_2} \Leftrightarrow \left(f^{-1} \circ g\right)(x_1) > \left(f^{-1} \circ g\right)(x_2)$, άρα η $f^{-1} \circ g$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(1,e)$.

γ) Επειδή $1 < \alpha < \beta < e$ και η $f^{-1} \circ g$ είναι γνησίως φθίνουσα, ισχύει:

$\left(f^{-1}\circ g\right)(\alpha)>\left(f^{-1}\circ g\right)(\beta)\Leftrightarrow \ln\dfrac{1-\ln\alpha}{\ln\alpha}>\ln\dfrac{1-\ln\beta}{\ln\beta}\Leftrightarrow$

$\dfrac{1-\ln\alpha}{\ln\alpha}>\dfrac{1-\ln\beta}{\ln\beta}\Leftrightarrow \dfrac{1-\ln\alpha}{1-\ln\beta}>\dfrac{\ln\alpha}{\ln\beta}$.

2ος τρόπος: $\dfrac{1-\ln\alpha}{1-\ln\beta}>\dfrac{\ln\alpha}{\ln\beta}\overset{\ln\beta\cdot(1-\ln\beta)>0}{\Leftrightarrow}\ln\beta-\ln\alpha\cdot\ln\beta>\ln\alpha-\ln\alpha\cdot\ln\beta\Leftrightarrow$

$\ln\beta>\ln\alpha\Leftrightarrow\beta>\alpha$ ισχύει.

69.α) Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη είναι $1-1$ και αντιστρέφεται.

$f\left(-3+f^{-1}\left(x^2-3x\right)\right)=4\Leftrightarrow f\left(-3+f^{-1}\left(x^2-3x\right)\right)=f(3)\overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow}$

$-3+f^{-1}\left(x^2-3x\right)=3\Leftrightarrow f^{-1}\left(x^2-3x\right)=6\Leftrightarrow x^2-3x=f(6)\Leftrightarrow$

$x^2-3x=-2\Leftrightarrow x^2-3x+2=0\Leftrightarrow x=1$ ή $x=2$.

β) Επειδή η C_f διέρχεται από τα σημεία Α και Β ισχύει: $f(3)=4$ και $f(6)=-2$ δηλαδή $f(3)>f(6)$ και επειδή είναι γνησίως μονότονη, είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. $f^{-1}(x-5)<3\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f\left(f^{-1}(x-5)\right)>f(3)\Leftrightarrow x-5>4\Leftrightarrow x>9$.

γ) Έστω $g(x)=f(3x)+2-f^{-1}(-2x),\ x\in\mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι $3x_1<3x_2\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f(3x_1)>f(3x_2)\Leftrightarrow$ $f(3x_1)+2>f(3x_2)+2$ (1). Ακόμη

$-2x_1>-2x_2\Leftrightarrow f\left(f^{-1}(-2x_1)\right)>f\left(f^{-1}(-2x_2)\right)\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f^{-1}(-2x_1)<f^{-1}(-2x_2)\Leftrightarrow$

$-f^{-1}(-2x_1)>-f^{-1}(-2x_2)$ (2). Από $(1)+(2)\Rightarrow g(x_1)>g(x_2)\Leftrightarrow g\searrow\mathbb{R}$.

Είναι $g(1)=f(3)+2-f^{-1}(-2)=4+2-6=0$, οπότε

$$f(3x)+2<f^{-1}(-2x)\Leftrightarrow g(x)<0\Leftrightarrow g(x)<g(1)\overset{g\searrow}{\Leftrightarrow}x>1$$

δ) Θέτουμε $f(x)=\omega$ και είναι $\omega^2\le 2\omega+8\Leftrightarrow\omega^2-2\omega-8\le 0\Leftrightarrow$

$-2\le\omega\le 4\Leftrightarrow -2\le f(x)\le 4\Leftrightarrow f(6)\le f(x)\le f(3)\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}6\ge x\ge 3$.

70. α) Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι

$\begin{cases}-3x_1>-3x_2\\-2x_1>-2x_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3x_1>-3x_2\\2e^{-2x_1}>2e^{-2x_2}\end{cases}$. Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει:

$2e^{-2x_1}-3x_1>2e^{-2x_2}-3x_2 \Leftrightarrow 2e^{-2x_1}-3x_1-2e^2>2e^{-2x_2}-3x_2-2e^2 \Leftrightarrow$

$f(x_1)>f(x_2)$, οπότε η f είναι ↘ στο $\mathbb{R}$ και επομένως είναι $1-1$ και αντιστρέφεται.

β) Παρατηρούμε ότι $f(-1)=2e^2-3\cdot(-1)-2e^2=3$, οπότε η εξίσωση γίνεται:

$f\left(f^{-1}\left(x-2e^2\right)-1\right)=f(-1) \overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow} f^{-1}\left(x-2e^2\right)-1=-1 \Leftrightarrow$

$f^{-1}\left(x-2e^2\right)=0 \Leftrightarrow x-2e^2=f(0) \Leftrightarrow x-2e^2=2-2e^2 \Leftrightarrow x=2$.

γ) Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, ισχύει:

$f^{-1}\left(f(x)-1-2e^2\right)<0 \Leftrightarrow f\left(f^{-1}\left(f(x)-1-2e^2\right)\right)>f(0) \Leftrightarrow$

$f(x)-1-2e^2>2-2e^2 \Leftrightarrow f(x)>3 \Leftrightarrow f(x)>f(-1)$ άρα $x<-1$.

71.α) Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι $\begin{cases} x_1^5<x_2^5 \\ x_1^3<x_2^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1^5<3x_2^5 \\ 2x_1^3<2x_2^3 \end{cases} \overset{+}{\Rightarrow}$

$3x_1^5+2x_1^3<3x_2^3+2x_2^3 \Leftrightarrow 3x_1^5+2x_1^3-1<3x_2^3+2x_2^3-1 \Leftrightarrow$
$f(x_1)<f(x_2) \Rightarrow f \nearrow \mathbb{R}$, άρα και $1-1$.

β) $f\left(f^{-1}(4\sigma\upsilon\nu x+2)\right)=4 \Leftrightarrow f\left(f^{-1}(4\sigma\upsilon\nu x+2)\right)=f(1) \overset{1-1}{\Leftrightarrow}$

$f^{-1}(4\sigma\upsilon\nu x+2)=1 \Leftrightarrow f\left(f^{-1}(4\sigma\upsilon\nu x+2)\right)=f(1) \Leftrightarrow$

$4\sigma\upsilon\nu x+2=4 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=2k\pi\pm\dfrac{\pi}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$.

γ) $f^{-1}\left(f\left(x^2+2x+2\right)-5\right)>0 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f\left(x^2+2x+2\right)-5>f(0) \Leftrightarrow$

$f\left(x^2+2x+2\right)>4=f(1) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} x^2+2x+2>1 \Leftrightarrow (x+1)^2>0 \Leftrightarrow x\neq 1$.

δ) Έστω $g(x)=f(x)+2+f(2x)+f^{-1}(x-1)$, $x\in\mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι $f(x_1)<f(x_2) \Leftrightarrow$

$f(x_1)+2<f(x_2)+2$ (1), $2x_1<2x_2 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(2x_1)<f(2x_2)$ (2),

$x_1-1<x_2-1 \Leftrightarrow f\left(f^{-1}(x_1-1)\right)<f\left(f^{-1}(x_2-1)\right) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f^{-1}(x_1-1)<f^{-1}(x_2-1)$ (3)

Από $(1)+(2)+(3) \Rightarrow g(x_1)<g(x_2) \Leftrightarrow g\nearrow\mathbb{R}$.

Είναι $g(0)=f(0)+2+f(0)-f^{-1}(-1)=-f^{-1}(-1)$.

Επειδή $f(0)=-1$, είναι $f^{-1}(-1)=0$ άρα $g(0)=0$.

$f(x)+2+f(2x)+f^{-1}(x-1)>0 \Leftrightarrow g(x)>g(0) \overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow} x>0$.

Κοινά σημεία αντιστρόφων

72.α) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι:

$$\begin{cases} x_1 - 1 < x_2 - 1 \\ x_1 - 2 < x_2 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2e^{x_1-1} < 2e^{x_2-1} \\ x_1 - 2 < x_2 - 2 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow}$$

$2e^{x_1-1} + x_1 - 2 < 2e^{x_2-1} + x_2 - 2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \nearrow \mathbb{R}$, άρα και $1-1$.

$f(x) > x \Leftrightarrow 2e^{x-1} + x - 2 > x \Leftrightarrow e^{x-1} > 1 \Leftrightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Για κάθε $x > 1$ είναι $f(x) > x > f^{-1}(x)$ λόγω συμμετρίας και για κάθε x<1 είναι $f(x) < x < f^{-1}(x)$ λόγω συμμετρίας, άρα $f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = 1$.

β) $f^{-1}(x^2 - 3x + 3) < 1 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(f^{-1}(x^2 - 3x + 3)) < f(1) \Leftrightarrow x^2 - 3x + 3 < 1 \Leftrightarrow$

$x^2 - 3x + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2$.

73.α) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι: $\begin{cases} 2^{x_1} < 2^{x_2} \\ x_1 - 4 < x_2 - 4 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow}$

$2^{x_1} + x_1 - 4 < 2^{x_2} + x_2 - 4 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \nearrow \mathbb{R}$, άρα και $1-1$.

$f(x) = f^{-1}(x) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) = x \Leftrightarrow 2^x + x - 4 = x \Leftrightarrow 2^x = 4 \Leftrightarrow x = 2$

β) $f(f(x)) = f(2^x) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} f(x) = 2^x \Leftrightarrow 2^x + x - 4 = 2^x \Leftrightarrow x = 4$

γ) $f^{-1}(x-2) < 3 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(f^{-1}(x-2)) < f(3) \Leftrightarrow x - 2 < 7 \Leftrightarrow x < 9$

74.α) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2, \ldots.. f \nearrow \mathbb{R} \Rightarrow f\ 1-1$.

$f^{-1}(-5) = k \Leftrightarrow f(k) = -5 = f(1) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x = 1$.

β) $f(x) = f^{-1}(x) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) = x \Leftrightarrow 3^x + \cancel{x} - 9 = \cancel{x} \Leftrightarrow x = 2$.

γ) $f^{-1}(f(\ln x) - 3) > 0 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(f^{-1}(f(\ln x) - 3)) > f(0) \Leftrightarrow$

$f(\ln x) - 3 > -8 \Leftrightarrow f(\ln x) > -5 = f(1) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} \ln x > 1 \Leftrightarrow x > e$.

75.α) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 16 < x_2 - 16$ (1) και

$x_1^3 < x_2^3 \Leftrightarrow 2x_1^3 < 2x_2^3$ (2)

Από (1) +(2)$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow f \nearrow \mathbb{R} \Rightarrow f\ 1-1$.

β) $f^{-1}(-16)=k \Leftrightarrow f(k)=-16=f(0) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} k=0$,

$f^{-1}(2)=b \Leftrightarrow f(b)=2=f(2) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} b=2$.

γ) $f(x)>x \Leftrightarrow 2x^3+\cancel{x}-16>\cancel{x} \Leftrightarrow 2x^3>16 \Leftrightarrow x^3>8=2^3 \Leftrightarrow x>2$.

Για κάθε $x>2$ η C_f βρίσκεται πάνω από την $y=x$ και λόγω συμμετρίας η $C_{f^{-1}}$ βρίσκεται κάτω από την $y=x$, οπότε για $x>2$ είναι $f(x)>f^{-1}(x)$. Όμοια για $x<2$ είναι $f(x)<x<f^{-1}(x)$.

Επομένως, κοινό σημείο των C_f, $C_{f^{-1}}$ είναι το $(2,2)$.

76.α) Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$,….. $f\nearrow\mathbb{R} \Rightarrow f$ $1-1$.

β) $f(x)=f^{-1}(x) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x)=x \Leftrightarrow x^3+e^x+\cancel{x}-1=\cancel{x} \Leftrightarrow x^3+e^x-1=0$.

Έστω $g(x)=x^3+e^x-1$, $x\in\mathbb{R}$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η g είναι $\nearrow$, οπότε και $1-1$, άρα $x^3+e^x-1=0 \Leftrightarrow g(x)=g(0) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x=0$.

77.α) Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1^3<x_2^3 \Leftrightarrow 4x_1^3<4x_2^3 \Leftrightarrow$

$4x_1^3-1<4x_2^3-1 \Leftrightarrow \dfrac{4x_1^3-1}{3}<\dfrac{4x_2^3-1}{3} \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2) \Rightarrow f\nearrow\mathbb{R}$.

β) $f(x)=y \Leftrightarrow 4x^3-1=3y \Leftrightarrow x^3=\dfrac{3y+1}{4}$.

Αν $y\ge -\dfrac{1}{3}$, τότε $x=\sqrt[3]{\dfrac{3y+1}{4}}$ και αν $y<-\dfrac{1}{3}$, τότε $x=-\sqrt[3]{\dfrac{-3y-1}{4}}$, άρα

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{\dfrac{3x+1}{4}} & , x\ge -\dfrac{1}{3}\\ -\sqrt[3]{\dfrac{-3x-1}{4}}, & x<-\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

γ) $f(x)=f^{-1}(x) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x)=x \Leftrightarrow \dfrac{4x^3-1}{3}=x \Leftrightarrow 4x^3-3x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ ή

$4x^2+4x+1=0 \Leftrightarrow (2x+1)^2=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$.

Κοινά σημεία τα $(1,1)$, $\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$.

Αυξημένης δυσκολίας

78.α) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2, \ldots.. f \nearrow \mathbb{R} \Rightarrow f$ 1−1.

$f^{-1}(11) = k \Leftrightarrow f(k) = 11 = f(1) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} k = 1$.

β) $f(x) = f^{-1}(x) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) = x \Leftrightarrow 4x^{33} + x + 5 = 0$ Έστω $g(x) = 4x^{33} + x + 5$, $x \in \mathbb{R}$. Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow g(x_1) < g(x_2) \Rightarrow$

$g \nearrow \mathbb{R} \Rightarrow g$ 1−1. $4x^{33} + x + 5 = 0 \Leftrightarrow g(x) = g(-1) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x = -1$

79.α) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^3 < x_2^3 \ (1),\ 5x_1 < 5x_2 \Leftrightarrow 5x_1 - 5 < 5x_2 - 5 \ (2)$

Από $(1) + (2) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \nearrow \mathbb{R} \Rightarrow f$ 1−1.

$f^{-1}(1) = \alpha \Leftrightarrow 1 = f(\alpha) \Leftrightarrow f(\alpha) = f(1) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} \alpha = 1$.

β) $f^{-1}(x^2) < 1 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(f^{-1}(x^2)) < f(1) \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$.

γ) $f^3(x) + 5f(x) = x + 5 \Leftrightarrow f^3(x) + 5f(x) - 5 = x \Leftrightarrow f(f(x)) = x \Leftrightarrow$

$f(x) = f^{-1}(x) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) = x \Leftrightarrow x^3 + 5x - 5 = x \Leftrightarrow x^3 + 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow$

$(x-1)(x^2 + x + 5) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x^2 + x + 5 = 0$ αδύνατη.

80.α) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$ είναι $f^3(x_1) = f^3(x_2)$ και

$f^3(x_1) + 3f(x_1) = f^3(x_2) + 3f(x_2) \Leftrightarrow x_1 + 3 = x_2 + 3 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f$ 1−1.

$f(x) = y \Leftrightarrow y^3 + 3y - 3 = x$, άρα $f^{-1}(y) = y^3 + 3y - 3$, $y \in \mathbb{R}$.

β) Έστω ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1) \geq f(x_2)$, τότε $3f(x_1) \geq 3f(x_2), f^3(x_1) \geq f^3(x_2)$ και $f^3(x_1) + 3f(x_1) \geq f^3(x_2) + 3f(x_2) \Leftrightarrow$

$x_1 + 3 \geq x_2 + 3 \Leftrightarrow x_1 \geq x_2$ που είναι άτοπο.

γ) $f(x) = f^{-1}(x) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) = x \Leftrightarrow x^3 + 3x = x + 3 \Leftrightarrow x^3 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow$

$x = 1$ ή $x^2 + x + 3 = 0$ που είναι αδύνατο.

81.α) Για να είναι η f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ πρέπει να αποδείξουμε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι $f(x_1) < f(x_2)$.

Έστω ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1) \geq f(x_2)$ τότε

$3f(x_1)\ge 3f(x_2)$ $f^3(x_1)\ge f^3(x_2)$, οπότε και

$f^3(x_1)+11f(x_1)\ge f^3(x_2)+11f(x_2)\Leftrightarrow$

$x_1^3-2x_1^2+5x_1+4\ge x_2^3-2x_2^2+5x_2+4\Leftrightarrow$

$x_1^3-x_2^3-2x_1^2+2x_2^2+5x_1-5x_2\ge 0\Leftrightarrow$

$(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)-2(x_1-x_2)(x_1+x_2)+5(x_1-x_2)\ge 0\Leftrightarrow$

$(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2-2x_1-2x_2+5)\ge 0 \overset{x_1<x_2}{\Leftrightarrow}$

$x_1^2+x_1x_2+x_2^2-2x_1-2x_2+5\le 0\Leftrightarrow x_1^2+x_1(x_2-2)+x_2^2-2x_2+5\le 0$ (1)

Η (1) είναι 2ου βαθμού με $\Delta=(x_2-2)^2-4(x_2^2-2x_2+5)=$

$x_2^2-4x_2+4-4x_2^2+8x_2-20=-3x_2^2+4x_2-16$. Η τελευταία είναι τριώνυμο με $\Delta_1=16-4(-3)(-16)=-176<0$, άρα $-3x_2^2+4x_2-16<0$ και $\Delta<0$, άρα $x_1^2+x_1(x_2-2)+x_2^2-2x_2+5>0$, οπότε η (1) είναι αδύνατη.

Άρα για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) $f(x)=0\Rightarrow 0^3+0=x^3-2x^2+5x-4\Leftrightarrow x^3-2x^2+5x-4=0\Leftrightarrow$

$(x-1)(x^2-x+4)=0\Leftrightarrow x=1$ ή ($x^2-x+4=0$ που είναι αδύνατη).

γ) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα είναι και 1-1 και αντιστρέφεται.

Για να ανήκει το σημείο $A(0,1)$ στη γραφική παράσταση της f^{-1} πρέπει:

$f^{-1}(0)=1\Leftrightarrow f(f^{-1}(0))=f(1)\Leftrightarrow f(1)=0$. Η αρχική σχέση για $x=1$ γίνεται:

$f^3(1)+11f(1)=1^3-2\cdot 1^2+5\cdot 1-4\Leftrightarrow f(1)(f^2(1)+11)=0\Leftrightarrow$ $f(1)=0$ ή $f^2(1)=-11$ που είναι αδύνατο.

δ) Επειδή οι C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την $y=x$, για να είναι η C_f πάνω από την $C_{f^{-1}}$, πρέπει να βρίσκεται πάνω από την $y=x$.

Άρα $f(x)>f^{-1}(x)\Leftrightarrow f(x)>x\Leftrightarrow 11f(x)>11x$, τότε $f^3(x)>x^3$, οπότε

$f^3(x)+11f(x)>x^3+11x\Leftrightarrow x^3-2x^2+5x-4>x^3+11x\Leftrightarrow$

$2x^2+6x+4<0\Leftrightarrow x^2+3x+2<0\Leftrightarrow x\in(-2,-1)$.

82.α) Επειδή $x^2+9>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $-x\in\mathbb{R}$.

$f(-x)=\dfrac{-x}{\sqrt{(-x)^2+9}}=-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}=-f(x)$, άρα η f είναι περιττή.

β) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}=\dfrac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2+9}}=\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2+9}}=\sqrt{\dfrac{x^2+9-9}{x^2+9}}=\sqrt{1-\dfrac{9}{x^2+9}}$.

Για κάθε $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ είναι

$$x_1^2<x_2^2\Leftrightarrow x_1^2+9<x_2^2+9\Leftrightarrow \frac{1}{x_1^2+9}>\frac{1}{x_2^2+9}\Leftrightarrow \frac{9}{x_1^2+9}>\frac{9}{x_2^2+9}\Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{x_1^2+9}<-\frac{1}{x_2^2+9}\Leftrightarrow 1-\frac{1}{x_1^2+9}<1-\frac{1}{x_2^2+9}\Leftrightarrow \sqrt{1-\frac{1}{x_1^2+9}}<\sqrt{1-\frac{1}{x_2^2+9}}\Leftrightarrow$$

$f(x_1)<f(x_2)\Leftrightarrow f\nearrow[0,+\infty)$.

Για κάθε $x_1,x_2\in(-\infty,0)$ με $x_1<x_2$ είναι

$$-x_1>-x_2>0\overset{f\nearrow[0,+\infty)}{\Leftrightarrow} f(-x_1)>f(-x_2)\overset{f\ \text{περιττή}}{\Leftrightarrow} -f(x_1)>-f(x_2)\Leftrightarrow$$

$f(x_1)<f(x_2)\Leftrightarrow f\nearrow(-\infty,0)$.

Ακόμη για κάθε $x_1<0<x_2$ είναι $f(x_1)<0<f(x_2)$, οπότε για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι $f(x_1)<f(x_2)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

γ) Θέτουμε $f(x)=y\Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}=y\Leftrightarrow x=y\sqrt{x^2+9}$ (2)

Η (2) αληθεύει μόνο όταν x, y ομόσημοι. Τότε η (2) γίνεται $x^2=y^2(x^2+9)\Leftrightarrow$

$x^2=x^2y^2+9y^2\Leftrightarrow x^2-x^2y^2=9y^2\Leftrightarrow x^2(1-y^2)=9y^2$ (3)

Αν $y=\pm1$ τότε η (3) είναι αδύνατη, οπότε για $y\neq\pm1$ είναι $x^2=\dfrac{9y^2}{1-y^2}$ (4)

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$$x^2\geq 0\Leftrightarrow \frac{y^2}{1-y^2}\geq 0\Leftrightarrow 1-y^2>0\Leftrightarrow y^2<1\Leftrightarrow |y|<1\Leftrightarrow -1<y<1.$$

Είναι $f(A)=(-1,1)$.

δ) Η (4) γίνεται $|x|=\dfrac{9|y|}{\sqrt{1-y^2}}$ και επειδή τα x, y είναι ομόσημοι αριθμοί, γίνεται:

$x=\dfrac{9y}{\sqrt{1-y^2}}$. Άρα $f^{-1}(y)=\dfrac{9y}{\sqrt{1-y^2}}$, $y\in(-1,1)$, οπότε

$$f^{-1}(x)=\frac{9x}{\sqrt{1-x^2}},\ x\in(-1,1)$$

ε) $f(x) > x \Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}} > x \Leftrightarrow x > x\sqrt{x^2+9} \Leftrightarrow x - x\sqrt{x^2+9} > 0 \Leftrightarrow$

$x\left(1-\sqrt{x^2+9}\right) > 0 \quad (5)$

Η (5) αληθεύει όταν $\begin{cases} x > 0 \\ 1-\sqrt{x^2+9} > 0 \end{cases}$ ή $\begin{cases} x < 0 \\ 1-\sqrt{x^2+9} < 0 \end{cases}$.

Αν $\begin{cases} x > 0 \\ 1-\sqrt{x^2+9} > 0 \end{cases}$ τότε $\sqrt{x^2+9} < 1 \Leftrightarrow x^2+9 < 1 \Leftrightarrow x^2 < -8$ αδύνατο.

Αν $\begin{cases} x < 0 \\ 1-\sqrt{x^2+9} < 0 \end{cases}$ τότε $\sqrt{x^2+9} > 1 \Leftrightarrow x^2+9 > 1 \Leftrightarrow x^2 > -8$ ισχύει.

Δηλαδή για κάθε x < 0 η C_f βρίσκεται πάνω από την y= x και λόγω συμμετρίας η $C_{f^{-1}}$ κάτω από την y= x, οπότε οι C_f , $C_{f^{-1}}$ δεν έχουν κοινά σημεία στο $(-\infty, 0)$. Όμοια για x > 0 η C_f βρίσκεται κάτω από την y= x και λόγω συμμετρίας η $C_{f^{-1}}$ πάνω από την y= x, οπότε οι C_f , $C_{f^{-1}}$ δεν έχουν κοινά σημεία στο $(0, +\infty)$.

Επειδή $f(0) = 0 = f^{-1}(0)$, το (0,0) είναι το μοναδικό κοινό τους σημείο.

Τράπεζα θεμάτων ΙΕΠ

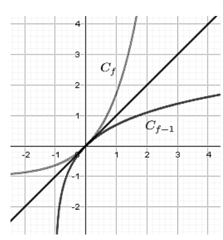
23196. α) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι $e^{x_1} < e^{x_2} \Leftrightarrow e^{x_1} - 1 < e^{x_2} - 1 \Leftrightarrow$ $f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow f \nearrow \mathbb{R} \Rightarrow f\ 1-1$, άρα η f αντιστρέφεται.

β) Θέτουμε $f(x) = y,\ y \in \mathbb{R}$ και έχουμε: $e^x - 1 = y \Leftrightarrow e^x = y+1\ (1)$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $e^x > 0 \Leftrightarrow y+1 > 0 \Leftrightarrow y > -1$. Τότε η (1) γίνεται:

$x = \ln(y+1)$, άρα $f^{-1}(y) = \ln(y+1),\ y > -1$ οπότε $f^{-1}(x) = \ln(x+1),\ x > -1$.

γ) Η γραφική παράσταση της f προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της $y = e^x$ κατά 1 μονάδα προς τα κάτω. Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της $y = \ln x$ κατά 1 μονάδα προς τα αριστερά.



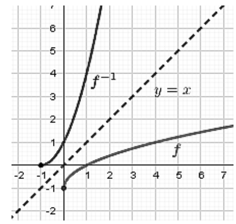
23198. α) Για κάθε $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ είναι $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \Leftrightarrow$ $\sqrt{x_1} - 1 < \sqrt{x_2} - 1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow f \nearrow [0, +\infty) \Rightarrow f\ 1-1$, άρα η f αντιστρέφεται.

β) Για κάθε $x \geq 0$ είναι $f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 = y \Leftrightarrow \sqrt{x} = y + 1\ (1)$.

Είναι $\sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow y + 1 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -1$, τότε η (1) γίνεται: $x = (y+1)^2 \geq 0$, άρα

$f^{-1}(y) = (y+1)^2$, $y \geq -1$ οπότε $f^{-1}(x) = (x+1)^2$, $x \geq -1$.

γ) Η γραφική παράσταση της f προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της $y = \sqrt{x}$ κατά 1 μονάδα προς τα κάτω. Η γραφική παράσταση της f^{-1} προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της $y = x^2$ κατά 1 μονάδα αριστερά.



23209. α) Για κάθε $x_1 < x_2 \leq 1$ είναι

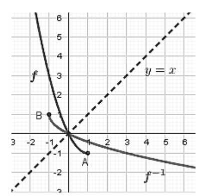
$x_1 - 1 < x_2 - 1 \leq 0 \Rightarrow (x_1 - 1)^2 > (x_2 - 1)^2 \Leftrightarrow (x_1 - 1)^2 - 1 > (x_2 - 1)^2 - 1 \Leftrightarrow$

$f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow f \searrow (-\infty, 1]$.

β) Η γραφική παράσταση της f αποτελείται από τα σημεία της παραβολής $y = (x-1)^2 - 1$ με $x \leq 1$. Η παραβολή έχει κορυφή το σημείο Κ(1, - 1) στο οποίο παρουσιάζει ελάχιστο, αφού $y = (x-1)^2 - 1 = x^2 - 2x + 1 - 1 = x^2 - 2x$,

άρα η f έχει σύνολο τιμών το $[-1, +\infty)$.

γ) Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα είναι 1-1 και αντιστρέφεται. Η γραφική παράσταση της f^{-1} είναι η συμμετρική της C_f ως προς την ευθεία y = x.



23216. α) Επειδή η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(3,0)$ και $B(0,8)$, ισχύει ότι $f(3) = 0$ και $f(0) = 8$.

Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Είναι $0 < 3 \Leftrightarrow f(0) < f(3) \Leftrightarrow 8 < 0$ άτοπο.

Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη, είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Η C_f βρίσκεται κάτω από τον x΄x, όταν $f(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(3) \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} x > 3$

και πάνω από τον x΄x, όταν $f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(3) \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} x < 3$.

γ) $f(\ln x) > 0 \Leftrightarrow f(\ln x) > f(3) \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} \ln x < 3 \Leftrightarrow 0 < x < e^3$.

24569. α) Η f ορίζεται όταν $1 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$ και

$1 - \sqrt{1-x} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x} \leq 1 \Leftrightarrow 1 - x \leq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$, άρα $D_f = [0,1]$.

β) i. Για κάθε $x_1, x_2 \in [0,1]$ με $f(x_1) = f(x_2)$ είναι

$\sqrt{1-\sqrt{1-x_1}} = \sqrt{1-\sqrt{1-x_2}} \Leftrightarrow 1-\sqrt{1-x_1} = 1-\sqrt{1-x_2} \Leftrightarrow \sqrt{1-x_1} = \sqrt{1-x_2} \Leftrightarrow$
$1-x_1 = 1-x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f\ 1-1$.

ii. $f(f(x)) = 0 \Leftrightarrow f(f(x)) = f(0) \overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow} f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(0) \overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow} x = 0$.

24991. α) Για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $f(x_1) = f(x_2)$ είναι

$$-2\ln x_1 + 1 = -2\ln x_2 + 1 \Leftrightarrow -2\ln x_1 = -2\ln x_2 \Leftrightarrow \ln x_1 = \ln x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

άρα η f είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

β) Για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) = y \Leftrightarrow -2\ln x + 1 = y \Leftrightarrow -2\ln x = y - 1 \Leftrightarrow$

$\ln x = \dfrac{1-y}{2} \Leftrightarrow x = e^{\frac{1-y}{2}}$. Άρα $f^{-1}(y) = e^{\frac{1-y}{2}}$, $y \in \mathbb{R}$, οπότε $f^{-1}(x) = e^{\frac{1-x}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$.

γ) Η συνάρτηση g ορίζεται όταν $x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ άρα $A_g = \mathbb{R}^*$.

Επειδή $A_f \neq A_g$ οι συναρτήσεις f, g δεν είναι ίσες. όταν όμως $x \in (0, +\infty)$ τότε $g(x) = 1 - \ln x^2 = 1 - 2\ln x = f(x)$.

23642.α) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι $x_1 + 1 < x_2 + 1$ (1) και $x_1^3 < x_2^3$ (2)

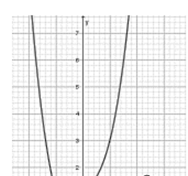
Από $(1)+(2) \Rightarrow x_1^3 + x_1 + 1 < x_2^3 + x_2 + 1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow f \nearrow \mathbb{R}$.

β) Στο σχήμα 1 η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$ οπότε δεν είναι η γραφική παράσταση της f.

Η συνάρτηση του σχήματος 2 είναι γνησίως φθίνουσα οπότε δεν είναι η γραφική παράσταση της f.

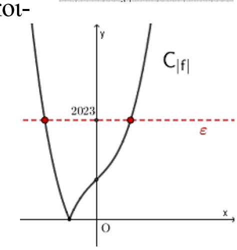
Επομένως στο σχήμα 3 είναι η C_f.

γ) i. Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα σημεία της C_f που δεν είναι κάτω από τον άξονα x΄x και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα, των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν.



ii. $|x^3 + x + 1| = 2023 \Leftrightarrow |f(x)| = 2023$.

Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης είναι το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της $|f|$ με την ευθεία y = 2023. Κατασκευάζοντας την ευθεία y = 2023 στο ίδιο σχήμα με την $|f|$ βλέπουμε ότι έχουν δύο κοινά σημεία, επομένως η εξίσωση $|f(x)| = 2023$ έχει ακριβώς δύο λύσεις.



24130. α) Για κάθε $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$ με $x_1 < x_2$, είναι

$x_1 - 1 < x_2 - 1 \Leftrightarrow \sqrt{x_1 - 1} < \sqrt{x_2 - 1} \Leftrightarrow \sqrt{x_1 - 1} + 3 < \sqrt{x_2 - 1} + 3 \Leftrightarrow$

$f(x_1) < f(x_2)$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της, άρα είναι και 1-1.

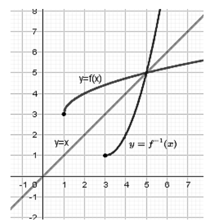
β) Για κάθε $x \geq 1$ είναι $f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{x-1} + 3 = y \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = y - 3$ (1).

Είναι $y - 3 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 3$, τότε η (1) γίνεται: $x - 1 = (y-3)^2 \Leftrightarrow x = (y-3)^2 + 1$

Είναι $x \geq 1 \Leftrightarrow (y-3)^2 + 1 \geq 1 \Leftrightarrow (y-3)^2 \geq 0$ ισχύει. Άρα η f έχει σύνολο τιμών το $f(A) = [3, +\infty)$.

Είναι $f^{-1}(y) = (y-3)^2 + 1,\ y \geq 3$ άρα $f^{-1}(x) = (x-3)^2 + 1,\ x \geq 3$.

γ) Η γραφική παράσταση της f^{-1} είναι η συμμετρική της f ως προς την ευθεία y=x. Στο σχήμα βλέπουμε ότι κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f, f^{-1} είναι το (5,5).



26602. α) Η f ορίζεται όταν $x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$, άρα $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$.

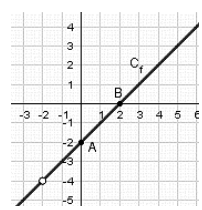
Επειδή $D_g = \mathbb{R} \neq D_f$ οι συναρτήσεις f, g δεν είναι ίσες.

β) Για $x \neq -2$ είναι $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2} = \dfrac{(x-2)\cancel{(x+2)}}{\cancel{x+2}} = x - 2 = g(x)$.

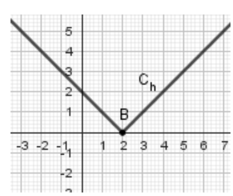
Η γραφική παράσταση της f αποτελείται από τα σημεία της ευθείας $y = x - 2$ εκτός του σημείου $(-2, -4)$.

Για x = 0 είναι $y = -2$ και για y = 0 είναι $0 = x - 2 \Leftrightarrow x = 2$.

Άρα η C_f τέμνει τους άξονες στα σημεία A(0, -2) και B(2,0).



Η γραφική παράσταση της h αποτελείται από τα σημεία της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x ή πάνω σε αυτόν και από τα συμμετρικά ως προς τον x΄x, των σημείων της που βρίσκονται κάτω από αυτόν.



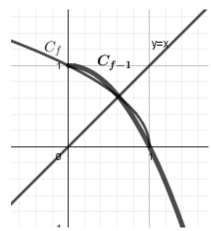
γ) Η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -2)$ και $(-2, +\infty)$.

Η h είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,-2)$, $(-2,2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2,+\infty)$. Η f δεν έχει ακρότατα, ενώ η h έχει ελάχιστο το 0 για x = 2.

24703. α) Για κάθε $x_1, x_2 \in (-\infty,1]$ με $f(x_1)=f(x_2)$ είναι $\sqrt{1-x_1}=\sqrt{1-x_2} \Leftrightarrow 1-x_1=1-x_2 \Leftrightarrow -x_1=-x_2 \Leftrightarrow x_1=x_2$ άρα η f είναι 1-1 και υπάρχει η αντίστροφή της f^{-1}.

β) Για κάθε $x \in (-\infty,1]$ είναι $f(x)=y \Leftrightarrow \sqrt{1-x}=y$. Για $y \geq 0$ είναι $1-x=y^2 \Leftrightarrow 1-y^2=x$. Είναι $x \leq 1 \Leftrightarrow 1-y^2 \leq 1 \Leftrightarrow y^2 \geq 0$ ισχύει για κάθε $y \in \mathbb{R}$. Άρα $f^{-1}(y)=1-y^2,\ y \geq 0$ οπότε $f^{-1}(x)=1-x^2,\ x \geq 0$.

γ) Επειδή οι γραφικές παραστάσεις δύο αντίστροφων συναρτήσεων είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y = x, προκύπτει το διπλανό σχήμα.



25124. α) Για κάθε $x_1, x_2 \in (-\infty,0]$ με $x_1 < x_2$ είναι

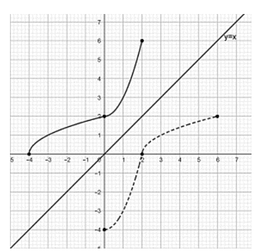
$$x_1^3 < x_2^3 \Leftrightarrow -x_1^3 > -x_2^3 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow f \searrow (-\infty,0]$$

β) Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα, είναι 1-1 και αντιστρέφεται.
Για κάθε $x \leq 0$ είναι $f(x)=y \Leftrightarrow -x^3=y \Leftrightarrow x^3=-y \quad (1)$

Είναι $x \leq 0 \Leftrightarrow x^3 \leq 0 \Leftrightarrow -y \leq 0 \Leftrightarrow y \geq 0$, άρα $f(A)=[0,+\infty)=D_{f^{-1}}$.

γ) Η (1) γίνεται $x=-\sqrt[3]{y}$, άρα $f^{-1}(y)=-\sqrt[3]{y},\ y \geq 0$, οπότε $f^{-1}(x)=-\sqrt[3]{x},\ x \geq 0$.

27277. α) Στο σχήμα βλέπουμε ότι η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το $[-4,2]$ και σύνολο τιμών το $[0,6]$. Όμως $D_{f^{-1}}=f(A)$, οπότε η f έχει σύνολο τιμών το $[-4,2]$ και $f^{-1}(A)=D_f$, άρα $D_f=[0,6]$.



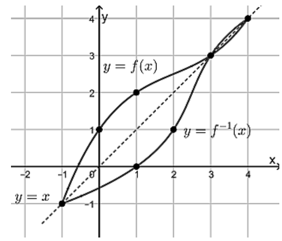
β) Έστω $f(2)=\alpha$ τότε

$f^{-1}(\alpha)=2 \Leftrightarrow f^{-1}(\alpha)=f^{-1}(0) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} \alpha=0$, δηλαδή

$f(2)=0$ και $f^{-1}(f(6))=6$.

γ) Σχεδιάζουμε τη συμμετρική της C_f ως προς την ευθεία y = x.

28299. α) Επειδή κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη C_f το πολύ μία φορά, η f είναι 1-1 και αντιστρέφεται.
β) Σχεδιάζουμε στο ίδιο σύστημα αξόνων την ευθεία y=x και βλέπουμε ότι τα κοινά τους σημεία είναι τα (-1,-1), (3, 3) και (4, 4).
γ) Σχεδιάζουμε τη συμμετρική της C_f ως προς την ευθεία y = x.



31528. α) Η f ορίζεται όταν $1-e^{-x}>0 \Leftrightarrow e^{-x}<1 \Leftrightarrow -x<0 \Leftrightarrow x>0$, άρα $D_f=(0,+\infty)$.
β) Για κάθε x > 0 είναι

$$f(x)=y \Leftrightarrow \ln\left(1-e^{-x}\right)=y \Leftrightarrow 1-e^{-x}=e^{y} \Leftrightarrow 1-e^{y}=e^{-x} \ (1)$$

Πρέπει $1-e^{y}>0 \Leftrightarrow e^{y}<1 \Leftrightarrow y<0$, τότε η (1) γίνεται:

$$-x=\ln\left(1-e^{y}\right) \Leftrightarrow x=-\ln\left(1-e^{y}\right).$$

Είναι $x>0 \Leftrightarrow -\ln\left(1-e^{y}\right)>0 \Leftrightarrow \ln\left(1-e^{y}\right)<0 \Leftrightarrow 1-e^{y}<1 \Leftrightarrow e^{y}>0$ ισχύει.

Άρα $f^{-1}(y)=-\ln\left(1-e^{y}\right),\ y<0$, οπότε $f^{-1}(x)=-\ln\left(1-e^{x}\right),\ x<0$.

32695. α) Για κάθε $x\in[0,+\infty)$, $y\in\left[-\frac{1}{2},1\right)$, είναι

$$f(x)=y \Leftrightarrow 1-\frac{3}{\sqrt{x}+2}=y \Leftrightarrow 1-y=\frac{3}{\sqrt{x}+2} \Leftrightarrow \sqrt{x}+2=\frac{3}{1-y} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x}=\frac{3}{1-y}-2 \Leftrightarrow \sqrt{x}=\frac{3-2+2y}{1-y} \Leftrightarrow \sqrt{x}=\frac{1+2y}{1-y} \Leftrightarrow x=\left(\frac{1+2y}{1-y}\right)^2, \text{ άρα}$$

$$f^{-1}(y)=\left(\frac{1+2y}{1-y}\right)^2,\ y\in\left[-\frac{1}{2},1\right), \text{ οπότε } f^{-1}(x)=\left(\frac{1+2x}{1-x}\right)^2,\ x\in\left[-\frac{1}{2},1\right).$$

Επομένως $f^{-1}=g$.

β) $0\le x<1 \Leftrightarrow 0\le\sqrt{x}<1 \Leftrightarrow 2\le\sqrt{x}+2<3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ge\frac{1}{\sqrt{x}+2}>\frac{1}{3} \Leftrightarrow$

$$1<\frac{3}{\sqrt{x}+2}\le\frac{3}{2} \Leftrightarrow -1>-\frac{3}{\sqrt{x}+2}\ge-\frac{3}{2} \Leftrightarrow 1-1>1-\frac{3}{\sqrt{x}+2}\ge1-\frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$-\frac{1}{2}\le f(x)<0$. Για κάθε $x\in[0,1)$ είναι $g(x)>0$.

γ) Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=g(x)$ είναι αδύνατη για $x \in D_f \cap D_g = [0,1)$.
Επειδή για κάθε $x \in [0,1)$ είναι $f(x)<0$ και $g(x)>0$, η εξίσωση $f(x)=g(x)$ είναι αδύνατη.

29926 .α) i. Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2$ είναι
$2x_1 \neq 2x_2 \Leftrightarrow 2x_1 - 1 \neq 2x_2 - 1 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, οπότε η g είναι 1-1 και αντιστρέφεται.
ii. Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ είναι $g(x)=y \Leftrightarrow 2x-1=y \Leftrightarrow 2x=y+1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}(y+1)$,

άρα $g^{-1}(y)=\frac{1}{2}(y+1),\ y \in \mathbb{R}$, οπότε $g^{-1}(x)=\frac{1}{2}(x+1),\ x \in \mathbb{R}$.
β) i. Η f ορίζεται όταν $x-2>0 \Leftrightarrow x>2$, άρα $D_f=(2,+\infty)$.

$$D_{f \circ g^{-1}} = \left\{x \in g^{-1} /\ g^{-1}(x) \in D_f\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{1}{2}(x+1)>2\right\} = (3,+\infty)$$

$\frac{1}{2}(x+1)>2 \Leftrightarrow x+1>4 \Leftrightarrow x>3$.

ii. $\left(f \circ g^{-1}\right)(x) = f\left(g^{-1}(x)\right) = \ln\left(\frac{1}{2}(x+1)-2\right)+5 = \ln\frac{x-3}{2}+5$.

35170. α) Η f ορίζεται όταν $1+e^x>0 \Leftrightarrow e^x>-1$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε $D_f=\mathbb{R}$. Η g ορίζεται όταν $x>0$ οπότε $D_g=(0,+\infty)$.

β) Είναι $D_{f+g}=D_g \cap D_f=(0,+\infty)$ και
$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\ln\left(1+e^x\right)+2\ln x$.
γ) Για κάθε $x_1, x_2 \in (0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ είναι
$e^{x_1}<e^{x_2} \Leftrightarrow 1+e^{x_1}<1+e^{x_2} \Leftrightarrow \ln\left(1+e^{x_1}\right)<\ln\left(1+e^{x_2}\right)$ (1)
και $\ln x_1<\ln x_2 \Leftrightarrow 2\ln x_1<2\ln x_2$ (2). Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1), (2) προκύπτει $\ln\left(1+e^{x_1}\right)+2\ln x_1<\ln\left(1+e^{x_2}\right)+2\ln x_2 \Leftrightarrow$
$(f+g)(x_1)<(f+g)(x_2) \Leftrightarrow (f+g)\nearrow(0,+\infty)$.

35171. α) i. Για κάθε $x_1, x_2 \in (0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ είναι
$\ln x_1<\ln x_2 \Leftrightarrow 2\ln x_1<2\ln x_2 \Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2) \Leftrightarrow g\nearrow(0,+\infty)$ άρα η g 1-1 και αντιστρέφεται.

ii. Για κάθε $x \in (0,+\infty)$ και $y \in \mathbb{R}$ είναι $g(x) = y \Leftrightarrow 2\ln x = y \Leftrightarrow \ln x^2 = y \Leftrightarrow$

$x^2 = e^y \Leftrightarrow |x| = \sqrt{e^y} \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x = e^{\frac{y}{2}}$, άρα $g^{-1}(y) = e^{\frac{y}{2}}$, $y \in \mathbb{R}$, οπότε

$g^{-1}(x) = e^{\frac{x}{2}}$ με $x \in \mathbb{R}$.

β) Είναι $D_{h\circ g^{-1}} = \left\{x \in D_{g^{-1}} / g^{-1}(x) \in D_h\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} / e^{\frac{x}{2}} \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}$ και

$$\left(h \circ g^{-1}\right)(x) = h\left(g^{-1}(x)\right) = \ln\left(1 + \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2\right) = \ln\left(1 + e^x\right).$$

27317. α) Για κάθε $x_1, x_2 \in [0,2]$ με $x_1 < x_2$ είναι $x_1^2 < x_2^2 \Leftrightarrow -x_1^2 > -x_2^2 \Leftrightarrow$

$4 - x_1^2 > 4 - x_2^2 \Leftrightarrow \sqrt{4 - x_1^2} > \sqrt{4 - x_2^2} \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο [0, 2].

β) i. Για κάθε $x \in [0,2]$ και $y \geq 0$ είναι

$$f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{4 - x^2} = y \Leftrightarrow 4 - x^2 = y^2 \Leftrightarrow 4 - y^2 = x^2.$$

Για κάθε $x \in [0,2]$, είναι

$$0 \leq x^2 \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq 4 - y^2 \leq 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - y^2 \geq 0 \\ 4 - y^2 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 \leq 4 \\ y^2 \geq 0 \text{ ισχύει} \end{cases} \overset{y\geq 0}{\Leftrightarrow} 0 \leq y \leq 2,$$

άρα $f(A) = [0,2]$.

ii. Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα, είναι 1-1 και αντιστρέφεται, οπότε ορίζεται η f^{-1}. Για κάθε $x, y \in [0,2]$ είναι $x^2 = 4 - y^2 \overset{x\in[0,2]}{\Leftrightarrow} x = \sqrt{4 - y^2}$, άρα

$f^{-1}(y) = \sqrt{4 - y^2}$, $y \in [0,2]$, οπότε $f^{-1}(x) = \sqrt{4 - x^2} = f(x)$, $x \in [0,2]$.

29835. α) Η f ορίζεται όταν $x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$ άρα $D_f = [-1,+\infty)$.

Η g ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα $D_g = \mathbb{R}$.

β) $D_{f\circ g} = \left\{x \in D_g / g(x) \in D_f\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} / 2 - x \geq -1\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} / x \leq 3\right\} = (-\infty,3]$

και $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{2 - x + 1} - 1 = \sqrt{3 - x} - 1$.

γ) Για κάθε $x_1, x_2 \in (-\infty,3]$ με $x_1 < x_2$ είναι

$-x_1 > -x_2 \geq -3 \Leftrightarrow 3 - x_1 > 3 - x_2 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{3 - x_1} > \sqrt{3 - x_2} \Leftrightarrow$

$\sqrt{3 - x_1} - 1 > \sqrt{3 - x_2} - 1 \Leftrightarrow \varphi(x_1) > \varphi(x_2)$ άρα η φ είναι ↘, οπότε είναι 1-1.

Θέτουμε $\varphi(x)=y \Leftrightarrow \sqrt{3-x}-1=y \Leftrightarrow \sqrt{3-x}=y+1$. Για κάθε $x \le 3$ είναι $\sqrt{3-x} \ge 0 \Leftrightarrow y+1 \ge 0 \Leftrightarrow y \ge -1$ και $3-x=(y+1)^2 \Leftrightarrow 3-(y+1)^2=x$, άρα $f^{-1}(y)=3-(y+1)^2$, $y \ge -1$, οπότε $f^{-1}(x)=3-(x+1)^2$, $x \ge -1$.

23200.α) Επειδή η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 3 και διέρχεται από το σημείο $A(1, \ln 2)$ είναι $f(0)=3$ και $f(1)=\ln 2$. . Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη και $0<1$ με $f(0)>f(1)$, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

β) $f(\alpha\ln\alpha) \le f(\ln\alpha) \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} \alpha\ln\alpha \ge \ln\alpha \Leftrightarrow \alpha\ln\alpha-\ln\alpha \ge 0 \Leftrightarrow (\alpha-1)\ln\alpha \ge 0$.
Αν $0<\alpha<1$ τότε $\alpha-1<0$, $\ln\alpha<0$, οπότε $(\alpha-1)\ln\alpha>0$.
Αν $\alpha \ge 1$ τότε $\alpha-1 \ge 0$, $\ln\alpha \ge 0$, οπότε $(\alpha-1)\ln\alpha \ge 0$, οπότε για κάθε $\alpha>0$ είναι $(\alpha-1)\ln\alpha \ge 0$.

γ) $f\left(e^{x-1}+\ln x\right)=\ln 2 \Leftrightarrow f\left(e^{x-1}+\ln x\right)=f(1) \overset{f\searrow \Rightarrow 1-1}{\Leftrightarrow} e^{x-1}+\ln x=1 \quad (1)$
Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=e^{x-1}+\ln x,\ x>0$. Για κάθε $x_1, x_2>0$ με $x_1<x_2$ είναι $x_1-1<x_2-1 \Leftrightarrow e^{x_1-1}<e^{x_2-1}$ και $\ln x_1<\ln x_2$, οπότε και $e^{x_1-1}+\ln x_1<e^{x_2-1}+\ln x_2 \Leftrightarrow h(x_1)<h(x_2) \Leftrightarrow h\nearrow(0,+\infty) \Rightarrow h\ 1-1$.
Η (1) γίνεται: $h(x)=h(1) \overset{h\ 1-1}{\Leftrightarrow} x=1$.

δ) Είναι $g(0)=f(0)+(3-\ln 2)\cdot 0-3=3-3=0$ και
$g(1)=f(1)+3-\ln 2-3=\ln 2-\ln 2=0$.
Επειδή $g(0)=g(1)$ η g δεν είναι 1-1, οπότε δεν αντιστρέφεται.

Ερωτήσεις «Σωστό ή Λάθος»

1. Σ	**2.** Λ	**3.** Σ	**4.** Σ	**5.** Λ	**6.** Λ	**7.** Σ	**8.** Σ	**9.** Σ	**10.** Σ	**11.** Λ
12. Σ	**13.** Σ	**14.** Λ	**15.** Σ	**16.** Σ	**17.** Σ	**18.** Σ	**19.** Λ	**20.** Σ	**21.** Λ	**22.** Λ
23. Σ	**24.** Λ	**25.** Σ								

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Η εξίσωση ισοδύναμα γίνεται: $e^{x^2-3x-1}+x^2-5x+6=e^{2x-7} \Leftrightarrow$

$$e^{(x^2-3x)-1}+(x^2-3x)-2x+6=e^{(2x-6)-1} \Leftrightarrow$$

$$e^{(x^2-3x)-1}+(x^2-3x)=e^{(2x-6)-1}+2x-6 \quad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=e^{x-1}+x$ η οποία εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και 1-1 οπότε η εξίσωση (1) γίνεται

$$f(x^2-3x)=f(2x-6)\overset{f\,1-1}{\Leftrightarrow}x^2-3x=2x-6\Leftrightarrow x^2-5x+6=0\Leftrightarrow x=2 \text{ ή } x=3$$

Σωστή απάντηση Γ.

2. Η συνάρτηση $f(x)=e^{3x}-3e^{2x}+3e^x-1=(e^x-1)^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ γιατί για $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με

$x_1<x_2\Leftrightarrow e^{x_1}<e^{x_2}\Leftrightarrow (e^{x_1}-1)^3<(e^{x_2}-1)^3\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$, συνεπώς η f αντιστρέφεται. Η ανίσωση $f^{-1}\left(f^{-1}(f(x)+\sigma\upsilon\nu x+\pi-2x)-x\right)>0$ γίνεται

$$f\left[f^{-1}\left(f^{-1}(f(x)+\sigma\upsilon\nu x+\pi-2x)-x\right)\right]>f(0)\Leftrightarrow$$

$$f^{-1}(f(x)+\sigma\upsilon\nu x+\pi-2x)>x\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f\left[f^{-1}(f(x)+\sigma\upsilon\nu x+\pi-2x)\right]>f(x)\Leftrightarrow$$

$$f(x)+\sigma\upsilon\nu x+\pi-2x>f(x)\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x+\pi-2x>0 \quad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\sigma\upsilon\nu x+\pi-2x, x\in[0,\pi]$ και για $x_1,x_2\in[0,\pi]$

με $x_1<x_2\Leftrightarrow\begin{cases}-2x_1>-2x_2\\ \sigma\upsilon\nu x_1>\sigma\upsilon\nu x_2\end{cases}\overset{+}{\Rightarrow}\sigma\upsilon\nu x_1-2x_2>\sigma\upsilon\nu x_1-2x_2\Leftrightarrow g(x_1)>g(x_2)$.

Επομένως, η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0,\pi]$ και

$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, άρα η ανίσωση (1) γίνεται $g(x)>g\left(\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow x<\frac{\pi}{2}$.

Συνεπώς $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Σωστή απάντηση Α.

3. Η συνάρτηση $f(x)=x+e^x-1$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ αφού για

x_1,x_2 με $x_1<x_2\Leftrightarrow\begin{cases}x_1-1<x_2-1\\ e^{x_1}<e^{x_2}\end{cases}\overset{(+)}{\Rightarrow}f(x_1)<f(x_2)$.

Επίσης $f(1)=e\Leftrightarrow f^{-1}(e)=1$.

Οπότε η εξίσωση $f\left(\frac{1-x}{e^x}\right)+1=f(1)+f^{-1}(e)$ γίνεται

$$f\left(\frac{1-x}{e^x}\right)+1=e+1\Leftrightarrow f\left(\frac{1-x}{e^x}\right)=e=f(1)\Leftrightarrow\frac{1-x}{e^x}=1\Leftrightarrow e^x+x-1=0\Leftrightarrow$$

$$f(x)=f(0)\overset{f\,1-1}{\Leftrightarrow}x=0.$$

Σωστή απάντηση Δ.

4. Στη σχέση (1) $f(x)-f(y)=f\left(\frac{x}{y}\right)$ για $x=y=1$ προκύπτει $f(1)=0$, άρα το $x=1$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

Η συνάρτηση f είναι 1-1 γιατί για $x_1,x_2\in\mathbb{R}^*$ με

$f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow f(x_1)-f(x_2)=0\overset{(1)}{\Leftrightarrow} f\left(\frac{x_1}{x_2}\right)=0$ άρα $\frac{x_1}{x_2}=1\Leftrightarrow x_1=x_2$.

Η εξίσωση $f(x)+f(x^2+3)=f(x^2+1)+f(x+1)$ γίνεται

$$f(x)-f(x^2+1)=f(x+1)-f(x^2+3)\overset{(1)}{\Leftrightarrow} f\left(\frac{x}{x^2+1}\right)=f\left(\frac{x+1}{x^2+3}\right)\Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{x^2+1}=\frac{x+1}{x^2+3}\Leftrightarrow x^2-2x+1=0\Leftrightarrow x=1.$$

Σωστή απάντηση Α.

5. Για να έχει νόημα το $f^{-1}(4-x)$ θα πρέπει $0\le 4-x\le 6\Leftrightarrow -2\le x\le 4$.

Επομένως για $x\in[-2,4]$ η ανίσωση γίνεται $f^{-1}(4-x)-f^2(x)\le -8$ (1)

Αφού η f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ τότε και f^{-1} θα είναι γνησίως αύξουσα.

Πράγματι, πρέπει να αποδείξουμε ότι για κάθε $y_1,y_2\in f(A)$ με $y_1<y_2$ είναι $f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2)$.

Έστω ότι $f^{-1}(y_1)\ge f^{-1}(y_2)$, τότε επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα έχουμε: $f\left(f^{-1}(y_1)\right)\ge f\left(f^{-1}(y_2)\right)\Leftrightarrow y_1\ge y_2$ που είναι άτοπο.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f^{-1}(4-x)-f^2(x)$ η οποία είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-2,4]$ αφού για $x_1,x_2\in[-2,4]$ με $x_1<x_2\Leftrightarrow$

$$\left.\begin{cases} 4-x_1>4-x_2\Leftrightarrow f^{-1}(4-x_1)>f^{-1}(4-x_2) \\ 0<f(x_1)<f(x_2)\Leftrightarrow f^2(x_1)<f^2(x_2)\Leftrightarrow -f^2(x_1)>-f^2(x_2)\end{cases}\right\}\overset{(+)}{\Rightarrow}$$

$g(x_1)>g(x_2)$.

Επίσης $g(1)=f^{-1}(3)-f^2(1)=1-9=-8$, συνεπώς η ανίσωση (1) γίνεται $g(x)\le g(1)\Leftrightarrow x\ge 1$, όμως $x\in[-2,4]$ και τελικά $x\in[1,4]$.

Σωστή απάντηση Γ.

6. Στη σχέση $f(f(x))=3x+2$ (1) θέτουμε όπου x το $f(x)$ και η σχέση γίνεται $f(f(f(x)))=3f(x)+2$ (2).

Στην (1) για $x=17$ έχουμε $f\left(f\left(17\right)\right)=53 \Leftrightarrow f^{-1}\left(53\right)=f\left(17\right)$, οπότε η εξίσωση $9f\left(x\right)=f^{-1}\left(53\right)-8$ γίνεται

$$9f\left(x\right)=f\left(17\right)-8 \Leftrightarrow 9f\left(x\right)+8=f\left(17\right) \Leftrightarrow 3\left(3f\left(x\right)+2\right)+2=f\left(17\right) \overset{(2)}{\Leftrightarrow}$$

$$3f\left(f\left(f\left(x\right)\right)\right)+2=f\left(17\right) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 3f\left(3x+2\right)+2=f\left(17\right) \Leftrightarrow f\left(f\left(f\left(3x+2\right)\right)\right)=f\left(17\right)$$

$$f\left(f\left(3x+2\right)\right)=17=3\cdot 5+2 \Leftrightarrow f\left(f\left(3x+2\right)\right)=f\left(f\left(5\right)\right) \Leftrightarrow f\left(3x+2\right)=f\left(5\right) \Leftrightarrow$$

$$3x+2=5 \Leftrightarrow x=1.$$

Σωστή απάντηση Δ.

7 Επαναληπτικές ασκήσεις στις συναρτήσεις

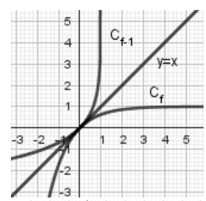
Επίπεδο δυσκολίας Β Θέματος

1. α) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι $-x_1 > -x_2 \Leftrightarrow e^{-x_1} > e^{-x_2} \Leftrightarrow$ $-e^{-x_1} < -e^{-x_2} \Leftrightarrow 1-e^{-x_1} < 1-e^{-x_2} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

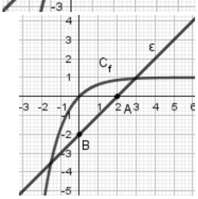
β) Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ είναι $\alpha^2+1>0$ και $-\alpha^2-1<0$, άρα $-\alpha^2-1<\alpha^2+1$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα είναι $f(-\alpha^2-1) < f(\alpha^2+1)$.

γ) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, είναι 1-1 και αντιστρέφεται.
Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $y \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) = y \Leftrightarrow 1-e^{-x} = y \Leftrightarrow 1-y = e^{-x}$ (1)
Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $e^{-x} > 0$, από την (1) προκύπτει ότι $1-y>0 \Leftrightarrow y<1$. Τότε η (1) γίνεται: $-x = \ln(1-y) \Leftrightarrow x = -\ln(1-y)$, άρα $f^{-1}(y) = -\ln(1-y),\ y<1$, οπότε $f^{-1}(x) = -\ln(1-x),\ x<1$.

δ) Επειδή οι $C_f, C_{f^{-1}}$, είναι συμμετρικές ως προς την y=x σχεδιάζουμε την $C_{f^{-1}}$ ως συμμετρική της C_f ως προς την $y = x$.



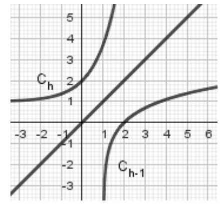
ε) Σχεδιάζουμε την ευθεία ε: $y = x-2$ στο ίδιο σύστημα αξόνων με τη C_f. Για y=0 είναι x=2 και για x=0 είναι y = -2, δηλαδή η ε τέμνει τους άξονες στα σημεία Α(2,0) και Β(0,-2). Στο σχήμα βλέπουμε ότι η ε τέμνει τη C_f σε δύο σημεία, οπότε η εξίσωση $f(x) = x-2$ έχει ακριβώς δύο λύσεις.



2. α) Είναι $D_f = [0,+\infty)$ και $D_g = \mathbb{R}$.
Είναι $D_{f\circ g} = \{x \in D_g / g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} / e^{2x} \geq 0\} = \mathbb{R}$ και
$h(x) = f(g(x)) = \sqrt{e^{2x}}+1 = \sqrt{(e^x)^2}+1 = e^x+1$.

β) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι $e^{x_1} < e^{x_2} \Leftrightarrow e^{x_1}+1 < e^{x_2}+1 \Leftrightarrow$ $h(x_1) < h(x_2) \Leftrightarrow h \nearrow \mathbb{R}$, οπότε η h είναι 1-1 και αντιστρέφεται.
Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $y \in \mathbb{R}$ είναι $h(x) = y \Leftrightarrow e^x+1 = y \Leftrightarrow e^x = y-1 (1)$
Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $e^x > 0$, από την (1) προκύπτει ότι $y-1>0 \Leftrightarrow y>1$. Τότε η (1) γίνεται: $x = \ln(y-1)$, άρα $h^{-1}(y) = \ln(y-1),\ y>1$, οπότε $h^{-1}(x) = \ln(x-1),\ x>1$.

γ) Η γραφική παράσταση της h προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της $y = e^x$ κατά 1 μονάδα προς τα πάνω και η γραφική παράσταση της h^{-1} από οριζόντια μετατόπιση της $y = \ln x$ κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά.



Στο σχήμα βλέπουμε ότι οι $C_h, C_{h^{-1}}$ δεν έχουν κοινά σημεία, οπότε η εξίσωση $h(x) = h^{-1}(x)$ είναι αδύνατη.

δ) Αρκεί η εξίσωση $g(x) = h(x)$ να έχει ακριβώς μία λύση.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $g(x) = h(x) \Leftrightarrow e^{2x} = e^x + 1 \Leftrightarrow (e^x)^2 - e^x - 1 = 0$ (1)

Θέτουμε $e^x = \omega > 0$ και η (1) γίνεται $\omega^2 - \omega - 1 = 0$. Η τελευταία είναι εξίσωση 2ου βαθμού με Δ=5 και ρίζες $\omega = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ή $\omega = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ απορρίπτεται.

Άρα $e^x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = \ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, οπότε οι γραφικές παραστάσεις των g, h έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

ε) Για κάθε $x \geq 0$ είναι $\sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} + 1 \geq 1 \Leftrightarrow f(x) \geq 1 = f(0)$, οπότε η f έχει ελάχιστο το 1 για x = 0.

3. α) Είναι $D_{f\circ g} = \{x \in D_g \,/\, g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x - 2 > 0\} \Leftrightarrow$

$D_{f\circ g} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x > 2\} = (2, +\infty)$ και $h(x) = f(g(x)) = \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{x-2}$.

β) Για κάθε $x_1, x_2 \in (2, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ είναι $x_1 - 2 < x_2 - 2 \Leftrightarrow$

$\frac{1}{x_1 - 2} > \frac{1}{x_2 - 2} \Leftrightarrow h(x_1) > h(x_2) \Leftrightarrow h \searrow (2, +\infty)$, οπότε η h είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

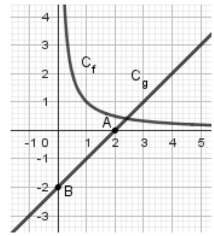
Για κάθε $x > 2$ με $y \in \mathbb{R}$ είναι $h(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{x-2} = y \Leftrightarrow$

$x - 2 = \frac{1}{y} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y} + 2$ (1). Είναι $x > 2 \Leftrightarrow \frac{1}{y} + 2 > 2 \Leftrightarrow \frac{1}{y} > 0 \Leftrightarrow y > 0$.

Η (1) γίνεται $h^{-1}(y) = \frac{1}{y} + 2,\ y > 0$, οπότε $h^{-1}(x) = \frac{1}{x} + 2,\ x > 0$.

γ) Για κάθε x > 2 είναι $g(x) > h(x) \Leftrightarrow x - 2 > \frac{1}{x-2} \Leftrightarrow$

$(x-2)^2 > 1 \overset{x>2}{\Leftrightarrow} x - 2 > 1 \Leftrightarrow x > 3$.



δ) Η γραφική παράσταση της f είναι ο κλάδος της υπερβολής $y=\frac{1}{x}$ με x > 0. Η γραφική παράσταση της g είναι ευθεία. Για y=0 είναι x=2 και για x=0 είναι y = -2, δηλαδή η C_g τέμνει τους άξονες στα σημεία Α(2,0) και Β(0,-2). Στο σχήμα βλέπουμε οι C_f, C_g έχουν ένα κοινό σημείο, οπότε η εξίσωση $f(x)=g(x)$ έχει ακριβώς 1 λύση.

4. α) Η f ορίζεται όταν $x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$, άρα $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$. Επειδή $D_g=\mathbb{R}\neq D_f$ οι συναρτήσεις f, g δεν είναι ίσες, όταν όμως $x\neq 1$, τότε

$$f(x)=\frac{x^3-1}{x-1}=\frac{\cancel{(x-1)}\left(x^2+x+1\right)}{\cancel{x-1}}=x^2+x+1=g(x).$$

β) Αρκεί $g(x)\geq\frac{3}{4}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Είναι $g(x)\geq\frac{3}{4}\Leftrightarrow x^2+x+1\geq\frac{3}{4}\Leftrightarrow$

$4x^2+4x+4\geq 3\Leftrightarrow 4x^2+4x+1\geq 0\Leftrightarrow(2x+1)^2\geq 0$ ισχύει.

Η ισότητα $g(x)=\frac{3}{4}$ ισχύει όταν $(2x+1)=0\Leftrightarrow 2x+1=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$, άρα η g έχει ελάχιστο το 3/4 για $x=-\frac{1}{2}$.

γ) Επειδή $g(x)\geq\frac{3}{4}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, είναι $g(\alpha)\geq\frac{3}{4}\Leftrightarrow\alpha^2+\alpha+1\geq\frac{3}{4}$,

$g(\beta)\geq\frac{3}{4}\Leftrightarrow\beta^2+\beta+1\geq\frac{3}{4}$ και με πολλαπλασιασμό κατά μέλη:

$\left(\alpha^2+\alpha+1\right)g\left(\beta^2+\beta+1\right)\geq\frac{9}{16}$. Προφανώς η ισότητα ισχύει όταν

$g(\alpha)=\frac{3}{4}\Leftrightarrow\alpha=-\frac{1}{2}$ και $g(\beta)=\frac{3}{4}\Leftrightarrow\beta=-\frac{1}{2}$.

δ) Αρκεί να βρούμε δύο διαφορετικές τιμές του x για τις οποίες τα y=g(x) είναι ίσα. Είναι $g(x)=1\Leftrightarrow x^2+x+1=1\Leftrightarrow x(x+1)=0\Leftrightarrow x=0$ ή $x=-1$.

Είναι $g(0)=1$ και $g(-1)=1$, άρα $g(0)=g(-1)$, οπότε η g δεν είναι 1-1 και δεν αντιστρέφεται.

5. α) $D_f=[-3,7]$, $f(A)=[-2,\ 1{,}5]$, $D_g=[-3,1]$, $g(A)=[-8,1]$.

β) $D_{g\circ f}:\begin{cases}x\in D_f\\ f(x)\in D_g\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3\leq x\leq 7\\ -3\leq f(x)\leq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3\leq x\leq 7\\ -3\leq x\leq 1\ \text{ή}\ 5\leq x\leq 7\end{cases}$,

$D_{g\circ f}=[-3,1]\cup[5,7]$,

$D_{f\circ g}:\begin{cases}x\in D_g\\ g(x)\in D_f\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3\le x\le 1\\ -3\le g(x)\le 7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3\le x\le 1\\ -2\le x\le 1\end{cases}, D_{f\circ g}=[-2,1]$.

γ) $f(g(x))=1\Leftrightarrow(g(x)=1\Leftrightarrow x=0)$ ή $(g(x)=5$ αδύνατη$)$

δ) Αν $k<-2$ ή $k>1{,}5$ είναι αδύνατη. Αν $-2\le k<0$ μία λύση, αν $0\le k<1{,}5$ δύο λύσεις και αν $k=1{,}5$ μία λύση.

6. α) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=(x+\lambda)^2+\lambda=x^2+2\lambda x+\lambda^2+\lambda$$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $(f\circ g)(x)=x^2+2x+2\Leftrightarrow$

$x^2+2\lambda x+\lambda^2+\lambda=x^2+2x+2$ αν και μόνο αν $\begin{cases}2\lambda=2\\ \lambda^2+\lambda=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=1\\ 1^2+1=2 \text{ ισχύει}\end{cases}$.

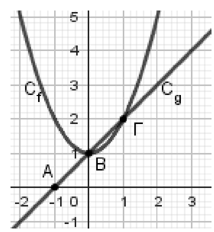
β) Αρκεί για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να είναι

$h(x)\ge 1\Leftrightarrow x^2+2x+2-1\ge 0\Leftrightarrow x^2+2x+1\ge 0\Leftrightarrow(x+1)^2\ge 0$ ισχύει.

Η ισότητα $h(x)=1$ ισχύει όταν $(x+1)^2=0\Leftrightarrow x+1=0\Leftrightarrow x=-1$.

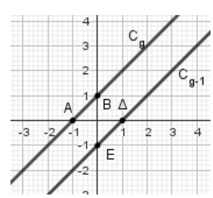
Επομένως η h έχει ελάχιστο το 1 για x = 1.

γ) Η γραφική παράσταση της $f(x)=x^2+1$ προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της $y=x^2$ κατά 1 μονάδα προς τα πάνω. Η γραφική παράσταση της g είναι ευθεία που τέμνει τους άξονες στα σημεία Α(0,-1) και Β(0,1). Κοινά σημεία των C_f, C_g είναι τα Β(0,1) και Γ(1,2).



δ) Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι $x_1+1<x_2+1\Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2)$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι 1-1 και αντιστρέφεται. $g(x)=y\Leftrightarrow x+1=y\Leftrightarrow x=y-1$, άρα $g^{-1}(y)=y-1,\ y\in\mathbb{R}$, οπότε $g^{-1}(x)=x-1,\ x\in\mathbb{R}$.

Για y=0 είναι x = 1 και για x=0 είναι y=-1, δηλαδή η $C_{g^{-1}}$ τέμνει τους άξονες στα σημεία Δ(1,0) και Ε(0,-1).



7. α) Η f ορίζεται όταν $\begin{cases}x\ne 0\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow x>0$ άρα $D_f=(0,+\infty)$.

Είναι $f(1)=1\Leftrightarrow\dfrac{\alpha+\beta\ln 1}{1}=1\Leftrightarrow\alpha=1$.

β) Η $h = f \circ g$ ορίζεται όταν $\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ e^x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \dfrac{1+\beta \ln g(x)}{g(x)} = \dfrac{1+\beta \ln e^x}{e^x} = \dfrac{1+\beta x}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.

γ) Πρέπει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει η ισότητα:

$$h(x) = w(x) \Leftrightarrow \frac{1+\beta x}{e^x} = e^{-x} + xe^{-x} \Leftrightarrow 1+\beta x = 1+x \Leftrightarrow \beta = 1$$

δ) Η $\varphi = \dfrac{h}{k}$ ορίζεται όταν $\begin{cases} x \in D_h \\ x \in D_k \\ k(x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \in \mathbb{R} \\ x+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq -1$.

Είναι $\varphi(x) = \dfrac{h(x)}{k(x)} = \dfrac{\frac{1+x}{e^x}}{x+1} = \dfrac{\cancel{1+x}}{\cancel{(1+x)}e^x} = \dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$, $x \neq -1$.

ε) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{-1\}$ με $x_1 < x_2$ είναι $-x_1 > -x_2 \Rightarrow$

$e^{-x_1} > e^{-x_2} \Rightarrow \varphi(x_1) > \varphi(x_2) \Rightarrow \varphi \nearrow$ στο $\mathbb{R} - \{-1\}$ άρα 1-1 άρα αντιστρέφεται.

$\varphi(x) = y \Leftrightarrow e^{-x} = y \overset{y>0}{\Leftrightarrow} -x = \ln y \Leftrightarrow x = -\ln y$.

Πρέπει $x \neq -1 \Leftrightarrow -\ln y \neq -1 \Leftrightarrow y \neq e$ άρα $\varphi^{-1}(x) = -\ln x,\ x \in (0,e) \cup (e,+\infty)$.

8. α) Για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει $x^3 - \alpha x^2 + \beta x + 2 \neq 0$.
Επειδή η γραφική παράσταση της f δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα x΄x, η εξίσωση $f(x) = 0$ είναι αδύνατη.

Είναι $f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 - (\alpha-1)x - \alpha}{x^3 - \alpha x^2 + \beta x + 2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - (\alpha-1)x - \alpha = 0$ και

$x^3 - \alpha x^2 + \beta x + 2 \neq 0$. $x^2 - (\alpha-1)x - \alpha = 0$,

$\Delta = (\alpha-1)^2 + 4\alpha = \alpha^2 - 2\alpha + 1 + 4\alpha = \alpha^2 + 2\alpha + 1 = (\alpha+1)^2 > 0$ αφού $\alpha \neq -1$

$x^2 - (\alpha-1)x - \alpha = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \dfrac{\alpha - 1 \pm (\alpha+1)}{2} \Leftrightarrow x = \alpha$ ή $x = -1$.

Επομένως για να είναι αδύνατη η εξίσωση $f(x) = 0$ πρέπει οι ρίζες του αριθμητή να είναι ρίζες του παρονομαστή για να απορριφθούν από το πεδίο ορισμού της. Άρα έχουμε:

$\begin{cases} \alpha^3 - \alpha^3 + \alpha\beta + 2 = 0 \\ -1 - \alpha - \beta + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\beta + 2 = 0 \\ \alpha = 1 - \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta^2 - \beta - 2 = 0 \\ \alpha = 1 - \beta \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases}\beta = 2 \text{ Απορρίπτεται ή } \beta = -1 \text{ Δεκτή} \\ \alpha = 2\end{cases}$. Επομένως για το πεδίο ορισμού της f εί-

ναι: $x^3 - 2x^2 - x + 2 \neq 0 \overset{\substack{\text{Σχήμα Horner} \\ \text{με } \rho=-1}}{\Leftrightarrow} (x+1)(x^2 - 3x + 2) \neq 0 \Leftrightarrow$

$(x+1)(x-1)(x-2) \neq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \{-1,1,2\}$.

Άρα $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$, $x \in \mathbb{R} - \{-1,1,2\}$.

β) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = \dfrac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x^2 - 3x + 2)} \Leftrightarrow$

$$f(x) = \frac{\cancel{(x+1)}\,\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x+1)}\,(x-1)\,\cancel{(x-2)}} = \frac{1}{x-1}, \quad x \in \mathbb{R} - \{-1,1,2\}.$$

Η $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$ ορίζεται αν $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ άρα έχει πεδίο ορισμού το $D_g = \mathbb{R} - \{1\}$. Οι f,g δεν έχουν ίδια πεδία ορισμού επομένως δεν είναι ίσες.

Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{-1,1,2\}$ είναι $f(x) = g(x)$ άρα το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο $f = g$ είναι το $x \in \mathbb{R} - \{-1,1,2\}$.

γ) Για κάθε $x_1, x_2 < 1$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 < 0 \Rightarrow$

$\dfrac{1}{x_1 - 1} > \dfrac{1}{x_2 - 1} \Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$ άρα $g \searrow (-\infty, 1)$. Για κάθε $x_1, x_2 > 1$ με

$x_1 < x_2 \Rightarrow 0 < x_1 - 1 < x_2 - 1 \Rightarrow \dfrac{1}{x_1 - 1} > \dfrac{1}{x_2 - 1} \Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$ άρα

$g \searrow (1, +\infty)$. Για $x_1 < 1 \Leftrightarrow x_1 - 1 < 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x_1 - 1} < 0 \Leftrightarrow g(x_1) < 0$ και για

$x_2 > 1 \Leftrightarrow x_2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x_2 - 1} > 0 \Leftrightarrow g(x_2) > 0$ και είναι $g(x_1) < g(x_2)$.

Άρα για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{1\}$ με $x_1 < x_2$ δεν είναι πάντα $g(x_1) > g(x_2)$ και επομένως η g δεν είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της.

δ) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{1\}$ με

$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow \dfrac{1}{x_1 - 1} = \dfrac{1}{x_2 - 1} \Rightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2$ άρα η g είναι 1-1

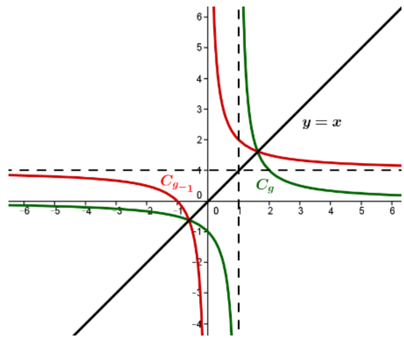
και αντιστρέφεται. Έστω $g(x) = y \Leftrightarrow \dfrac{1}{x-1} = y \quad (1)$

Είναι για $x < 1 \Leftrightarrow g(x) < 0$ και για $x > 1 \Leftrightarrow g(x) > 0$ άρα $g(x) \neq 0$.

Άρα για $y \neq 0$ είναι $(1) \Leftrightarrow yx - y = 1 \Leftrightarrow yx = y + 1 \overset{y\neq 0}{\Leftrightarrow}$

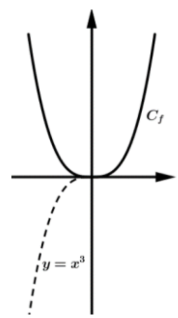
$x = \dfrac{y+1}{y} \Leftrightarrow g^{-1}(y) = \dfrac{y+1}{y}$, $y \neq 0$.

ε) Η g είναι η καμπύλη $y = \dfrac{1}{x}$ μετατοπισμένη κατά μία μονάδα προς τα δεξιά. Η αντίστροφη της g είναι συμμετρική ως προς την ευθεία y=x.



9. α) $f(x) = |x|x^2 = \begin{cases} -x^3, & x \leq 0 \\ x^3, & x \geq 0 \end{cases}$.

Για $x < 0$ η γραφική παράσταση της f είναι συμμετρική ως προς τον άξονα x΄x με την $y = x^3$.



β) Για κάθε $x_1 < x_2 \leq 0$ είναι $x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow -x_1^3 > -x_2^3 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.

Για κάθε $0 \leq x_1 < x_2$ είναι $x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$. Είναι $|x|x^2 \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq f(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 0$ το $f(0) = 0$. Είναι $f(x) = 0$ (1) και αν $x \leq 0$ τότε $(1) \Leftrightarrow -x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ενώ αν $x \geq 0$ τότε $(1) \Leftrightarrow x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Άρα η f παρουσιάζει ακρότατο μόνο για $x = 0$.

γ) Αν $f(x) = |x|x^2$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = x$, $x < 0$ τότε η $g \circ f$ ορίζεται όταν:

$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ f(x) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ |x|x^2 < 0 \text{ αδύνατη} \end{cases}$ άρα δεν ορίζεται η $g \circ f$.

Αν $f(x)=|x|x^2$, $x\in\mathbb{R}$ και $g(x)=2x+1$, $x\geq 0$ τότε η $g\circ f$ ορίζεται όταν:

$$\begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ f(x)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ |x|x^2\geq 0 \text{ ισχύει για κάθε } x\in\mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x\in\mathbb{R} \text{ άρα για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

είναι $(g\circ f)(x)=g(f(x))=2f(x)+1=2|x|x^2+1=\begin{cases} -2x^3+1 , & x<0 \\ 2x^3+1 , & x\geq 0 \end{cases}$.

δ) Για κάθε $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ είναι

$f(h(x_1))<f(h(x_2)) \overset{f\nearrow[0,+\infty)}{\Rightarrow} h(x_1)<h(x_2)$ άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Επίπεδο δυσκολίας Γ Θέματος

10.α) Θέτουμε $\frac{1}{x}=\omega>0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{\omega}$, τότε η σχέση $f\left(\frac{1}{x}\right)=x-\frac{1}{x}$ γίνεται:

$f(\omega)=\frac{1}{\omega}-\omega,\ \omega>0$ οπότε $f(x)=\frac{1}{x}-x,\ x>0$.

β) Έστω $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$, τότε: $\frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2}$, $-x_1>-x_2$ και με πρόσθεση κατά μέλη $\frac{1}{x_1}-x_1>\frac{1}{x_2}-x_2 \Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2) \Rightarrow f\searrow(0,+\infty)$.

γ) $f(x)=y \Leftrightarrow \frac{1}{x}-x=y \Leftrightarrow 1-x^2=xy \Leftrightarrow x^2+xy-1=0$ (1)

Επειδή η (1) έχει τουλάχιστον μια λύση, είναι $\Delta\geq 0 \Leftrightarrow y^2+4\geq 0$ που ισχύει για κάθε $y\in\mathbb{R}$. Το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$.

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$ είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

Επειδή οι γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$, η C_f βρίσκεται κάτω από την $C_{f^{-1}}$ όταν βρίσκεται κάτω από την $y=x$, άρα: $f(x)<x \Leftrightarrow \frac{1}{x}-x<x \Leftrightarrow \frac{1}{x}<2x \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 1<2x^2 \Leftrightarrow$

$x^2>\frac{1}{2} \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x>\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Η C_f βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f^{-1} στο διάστημα $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$.

δ) $f\left(x^2\right) \geq 2\left(1-x^2\right) \Leftrightarrow \dfrac{1}{x^2}-x^2 \geq 2-2x^2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x^2}+x^2-2 \geq 0 \overset{x^2>0}{\Leftrightarrow}$

$1+x^4-2x^2 \geq 0 \Leftrightarrow \left(x^2-1\right)^2 \geq 0$ ισχύει.

Είναι $g(x)=f\left(x^2\right)+2x^2=\dfrac{1}{x^2}-x^2+2x^2=\dfrac{1}{x^2}+x^2 \geq 2=g(1)$, άρα η g έχει ελάχιστο το 2 στα $x=1$.

11.α) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1<x_2$, τότε $\begin{cases} 2x_1<2x_2 \\ e^{x_1}<e^{x_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{2x_1}<e^{2x_2} \\ e^{x_1}-3<e^{x_2}-3 \end{cases} \overset{+}{\Rightarrow}$

$e^{2x_1}+e^{x_1}-3<e^{2x_2}+e^{x_2}-3 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2) \Rightarrow f \nearrow \mathbb{R}$.

β) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

Είναι $f(x)=e^{2x}+2e^x-3=\left(e^x\right)^2+2e^x+1-4=\left(e^x+1\right)^2-4$.

Θέτουμε $f(x)=y \Leftrightarrow \left(e^x+1\right)^2-4=y \Leftrightarrow \left(e^x+1\right)^2=y+4$ (1)

Πρέπει $y+4>0 \Leftrightarrow y>-4$ (2), τότε επειδή $e^x+1>0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η (1) γίνεται: $e^x+1=\sqrt{y+4} \Leftrightarrow e^x=\sqrt{y+4}-1$ (3). Επειδή $e^x>0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ πρέπει και $\sqrt{y+4}-1>0 \Leftrightarrow \sqrt{y+4}>1 \Leftrightarrow y+4>1 \Leftrightarrow y>-3$ (4)

Από τις (2), (4) προκύπτει ότι $y>-3$ και τότε η (3) γίνεται: $x=\ln\left(\sqrt{y+4}-1\right)$ άρα $f^{-1}(y)=\ln\left(\sqrt{y+4}-1\right)$, $y>-3$, οπότε $f^{-1}(x)=\ln\left(\sqrt{x+4}-1\right)$, $x>-3$.

γ) $f\left(1+f^{-1}\left(e^x-1\right)\right)+3<e^2+2e \Leftrightarrow f\left(1+f^{-1}\left(e^x-1\right)\right)<e^2+2e-3 \Leftrightarrow$

$f\left(1+f^{-1}\left(e^x-1\right)\right)<f(1) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} 1+f^{-1}\left(e^x-1\right)<1 \Leftrightarrow f^{-1}\left(e^x-1\right)<0 \Leftrightarrow$

$f\left(f^{-1}\left(e^x-1\right)\right)<f(0) \Leftrightarrow e^x-1<0 \Leftrightarrow e^x<1 \Leftrightarrow x<0$.

δ) $e^{2e^x}-e^{2-2x}=2\left(e^{1-x}-e^{e^x}\right) \Leftrightarrow e^{2e^x}+2e^{e^x}=e^{2(1-x)}+2e^{1-x} \Leftrightarrow$

$e^{2e^x}+2e^{e^x}-3=e^{2(1-x)}+2e^{1-x}-3 \Leftrightarrow f\left(e^x\right)=f(1-x) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} e^x=1-x \Leftrightarrow$

$e^x+x-1=0$ (5). Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=e^x+x-1$, $x \in \mathbb{R}$.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η g είναι γνησίως αύξουσα, οπότε είναι και 1-1.

Η σχέση (5) γίνεται: $g(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=g(0) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x=0$.

12.α) Έστω $0<x_1<x_2$ (1) $\Leftrightarrow \ln x_1<\ln x_2$ (2)

Από $(1)+(2) \Rightarrow f(x_1)<f(x_2) \Rightarrow f \nearrow (0,+\infty)$.

β) $f\nearrow(0,+\infty)\Rightarrow f$ 1−1 και αντιστρέφεται. Επειδή οι $C_f, C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την $y=x$, όταν η C_f βρίσκεται πάνω από την $y=x$ τότε η $C_{f^{-1}}$ βρίσκεται κάτω από την $y=x$ και η C_f βρίσκεται πάνω από την $C_{f^{-1}}$. Άρα αρκεί $f(x)>x \Leftrightarrow \ln x + x > x \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$

γ) $\ln\dfrac{\alpha}{\beta} < \beta-\alpha \Leftrightarrow \ln\alpha - \ln b < \beta - \alpha \Leftrightarrow \ln\alpha + \alpha < \ln\beta - \beta \Leftrightarrow f(\alpha) < f(\beta) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} \alpha < \beta$ ισχύει.

δ) $\ln(\ln x + x) + \ln x = 1 - x \Leftrightarrow \ln(\ln x + x) + \ln x + x = 1 \Leftrightarrow$

$f(f(x)) = 1$ (1). Η (1) έχει λύση όταν $x>0$ και $f(x)>0$, τότε γίνεται

$f(f(x)) = f(1) \overset{f\,1-1}{\Leftrightarrow} f(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) = f(1) \overset{f\,1-1}{\Leftrightarrow} x = 1$.

13.α) Έστω ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1) \le f(x_2)$ (1), τότε $e^{f(x_1)} \le e^{f(x_2)}$ (2) και με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) έχουμε: $e^{f(x_1)} + f(x_1) \le e^{f(x_2)} + f(x_2) \Leftrightarrow -x_1 \le -x_2 \Leftrightarrow x_1 \ge x_2$ που είναι άτοπο. Άρα $f(x_1) > f(x_2)$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) $f\searrow\mathbb{R} \Rightarrow 1-1$ και αντιστρέφεται. Θέτουμε $f(x)=y$ και η αρχική σχέση γίνεται: $e^y + y + x = 0 \Leftrightarrow x = -e^y - y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = -e^y - y,\ y\in\mathbb{R}$, άρα και $f^{-1}(x) = -e^x - x,\ x\in\mathbb{R}$.

γ) Για να ανήκει το Α στη C_f πρέπει:

$f(-1) = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(f(-1)) = f^{-1}(0) \Leftrightarrow -1 = -e^0 - 0$ που ισχύει.

Για να ανήκει το Β στη C_f πρέπει:

$f(-e-1) = 1 \Leftrightarrow f^{-1}(f(-e-1)) = f^{-1}(1) \Leftrightarrow -e-1 = -e^1 - 1$ που ισχύει.

δ) $f(\ln x + e^x - 1) = x \Leftrightarrow f^{-1}(f(\ln x - e^x - 1)) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow$

$\ln x - \cancel{e^x} - 1 = -\cancel{e^x} - x \Leftrightarrow \ln x + x - 1 = 0$ (3)

Έστω $g(x) = \ln x + x - 1,\ x>0$. Για κάθε $x_1, x_2 > 0$ με $x_1 < x_2$ είναι $\ln x_1 < \ln x_2$ και $\ln x_1 + x_1 < \ln x_2 + x_2 \Leftrightarrow \ln x_1 + x_1 - 1 < \ln x_2 + x_2 - 1 \Leftrightarrow$

$g(x_1) < g(x_2) \Rightarrow g\nearrow(0,+\infty) \Rightarrow g$ 1−1. $(3) \Rightarrow g(x) = g(1) \overset{g\,1-1}{\Leftrightarrow} x = 1$.

ε) Επειδή $\alpha<\beta$ είναι $\alpha-\beta<0$, άρα: $\dfrac{e^\beta - e^\alpha}{\alpha-\beta} < 1 \Leftrightarrow e^\beta - e^\alpha > \alpha - \beta \Leftrightarrow$

$-\alpha - e^\alpha > -\beta - e^\beta \Leftrightarrow f^{-1}(\alpha) > f^{-1}(\beta) \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} \alpha < \beta$ που ισχύει.

14.α) $f(\ln x)=\ln x+x-\alpha$ για κάθε $x>0$ με $\alpha\in\mathbb{R}$.

Θέτουμε $\ln x=u\Leftrightarrow x=e^u$ με $x>0$ και $u\in\mathbb{R}$, άρα η σχέση γίνεται

$$f(u)=u+e^u-\alpha \text{ άρα } f(x)=e^x+x-\alpha\,,\ x\in\mathbb{R}$$

β) Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι

$$\begin{cases} x_1-\alpha<x_2-\alpha \\ e^{x_1}<e^{x_2}\end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} f(x_1)<f(x_2)\Rightarrow f\nearrow\mathbb{R}$$

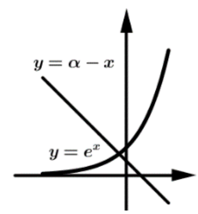
γ) $\dfrac{\alpha-x}{e^x}=1\Leftrightarrow e^x=\alpha-x\Leftrightarrow e^x+x=\alpha\Leftrightarrow e^x+x-\alpha=0\Leftrightarrow f(x)=0$.

Αφού $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ τότε υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$ και επειδή $f\nearrow\mathbb{R}$ η f είναι 1-1 άρα το x_0 είναι μοναδικό.

δ) $f(x_0)=0\Leftrightarrow e^{x_0}+x_0-\alpha=0\Leftrightarrow e^{x_0}=\alpha-x_0>0$ άρα

$x_0<\alpha$. Είναι $\dfrac{\alpha-x}{e^x}=1\Leftrightarrow e^x=\alpha-x$. Σχεδιάζουμε την

$y=e^x$ και την ευθεία $y=\alpha-x$.



ε) Επειδή $f\nearrow\mathbb{R}$ η f είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται.

$f(x)\le x\Leftrightarrow e^x+x-\alpha\le x\Leftrightarrow e^x\le\alpha$ αδύνατη.

Άρα $f(x)>x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και λόγω συμμετρίας των C_f και $C_{f^{-1}}$ ως προς την ευθεία $y=x$ είναι $f^{-1}(x)<x<f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

15.α) Για κάθε $x_1,x_2>1$ με $x_1<x_2$ είναι:

$$\ln x_1<\ln x_2\Rightarrow \ln(\ln x_1)<\ln(\ln x_2)\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)\Rightarrow f\nearrow(1,+\infty)$$

β) Η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

Θέτουμε $f(x)=y\Leftrightarrow \ln(\ln x)=y\Leftrightarrow \ln x=e^y\Leftrightarrow x=e^{e^y}$, άρα

$f^{-1}(y)=e^{e^y}, y\in\mathbb{R}$, οπότε $f^{-1}(x)=e^{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

γ) Πρέπει $e^x\in A_f\Leftrightarrow e^x>1\Leftrightarrow x>0$.

$f(e^x)=1-x\Leftrightarrow \ln(\ln(e^x))=1-x\Leftrightarrow \ln x=1-x\Leftrightarrow \ln x+x-1=0\quad(1)$

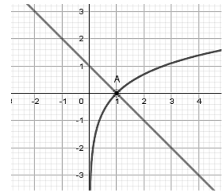
Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\ln x+x-1,\ x>0$.

Για κάθε $x_1,x_2>0$ με $x_1<x_2$ είναι: $\ln x_1<\ln x_2, x_1-1<x_2-1$ οπότε και

$\ln x_1+x_1-1<\ln x_2+x_2-1\Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2)\Leftrightarrow g\nearrow(0,+\infty)\Rightarrow g$ 1−1

$(1)\Leftrightarrow g(x)=g(1)\overset{1-1}{\Leftrightarrow} x=1$.

Γεωμετρικά η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εύρεση της τετμημένης του κοινού σημείου των γραφικών παραστάσεων των $y=\ln x$ και $y=1-x$.



Επειδή σημείο τομής είναι το A(1,0), έχουμε:

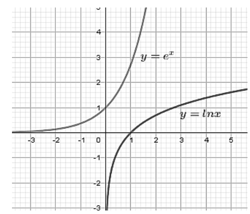
$$\ln x = 1-x \Leftrightarrow x=1$$

δ) Αρχικά θα ορίσουμε τη συνάρτηση $f\circ f$.

$$A_{f\circ f}=\left\{x\in A_f \,/\, f(x)\in A_f\right\}=\left\{x>1 \,/\, \ln(\ln x)>1\right\}=\left\{x>1 \,/\, x>e^e\right\}=\left(e^e,+\infty\right)$$

$$(f\circ f)(x)=x \Leftrightarrow f^{-1}\left(f\left(f(x)\right)\right)=f^{-1}(x)\Leftrightarrow f(x)=f^{-1}(x) \quad (2)$$

Αρκεί να δείξουμε ότι οι C_f, $C_{f^{-1}}$ δεν έχουν κοινά σημεία. Λόγω συμμετρίας με την y = x, θα βρούμε τη σχετική θέση της C_f με την y = x.



Γνωρίζουμε ότι για κάθε x > 0 είναι $e^x>\ln x$, οπότε για x > 1 είναι $\ln e^x>\ln(\ln x)\Leftrightarrow f(x)<x$ και λόγω συμμετρίας $f^{-1}(x)>x$, οπότε $f^{-1}(x)>f(x)$ για κάθε x > 1, οπότε η (2) είναι αδύνατη.

16.α) Για το πεδίο ορισμού της f πρέπει

$$-x-|-x-1|>0\Leftrightarrow|-x-1|<-x \quad (1)$$

Αν $-x<0\Leftrightarrow x>0$ τότε η (1) είναι αδύνατη. Αν $-x\geq 0\Leftrightarrow x\leq 0$ τότε

$$(1)\Leftrightarrow(-x-1)^2<(-x)^2\Leftrightarrow \cancel{x^2}+2x+1<\cancel{x^2}\Leftrightarrow x<-\frac{1}{2}.$$

Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το $D_f=\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$. Για το πεδίο ορισμού της g είναι: $2x^2+x>0\Leftrightarrow x(2x+1)>0\Leftrightarrow x\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup(0,+\infty)$ και

$-x>0\Leftrightarrow x<0$. Άρα η g έχει πεδίο ορισμού το $D_g=\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$.

β) Για $-x-1\geq 0\Leftrightarrow x\leq -1$ είναι $f(x)=\ln(-x+x+1)=\ln 1=0$

Για $-x-1<0\Rightarrow -1<x<-\frac{1}{2}$ είναι $f(x)=\ln(-x-x-1)=\ln(-2x-1)$.

Άρα $f(x)=\begin{cases} 0 & ,\ x\leq -1 \\ \ln(-2x-1) & ,\ -1<x<-\frac{1}{2}\end{cases}$.

Για $x<-\frac{1}{2}$ είναι $g(x)=\ln\left(2x^2+x\right)-\ln(-x)=\ln\left(\frac{2x^2+x}{-x}\right)=\ln(-2x-1)$.

Η g και η f έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού όμως όπως φαίνεται παραπάνω δεν ισχύει $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in D_g=D_f=\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$ άρα δεν είναι ίσες. Όμως για $-1\le x<-\frac{1}{2}$ είναι $f(x)=g(x)$ αφού $f(-1)=g(-1)=0$ άρα το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο όποιο είναι ίσες είναι το $\left[-1,-\frac{1}{2}\right)$.

γ) Για κάθε $x_1,x_2\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$ με $x_1<x_2\Rightarrow -2x_1>-2x_2\Rightarrow$

$-2x_1-1>-2x_2-1\Rightarrow\Rightarrow \ln(-2x_1-1)>\ln(-2x_2-1)\Rightarrow g(x_1)>g(x_2)$ άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα άρα 1-1 άρα αντιστρέφεται.

Είναι $y=g(x)\Leftrightarrow y=\ln(-2x-1)\overset{y\in\mathbb{R}}{\Leftrightarrow} e^y=-2x-1\Leftrightarrow x=-\frac{e^y+1}{2}, y\in\mathbb{R}$.

Πρέπει $x<-\frac{1}{2}\Leftrightarrow -\frac{e^y+1}{2}<-\frac{1}{2}\Leftrightarrow e^y+1>1\Leftrightarrow e^y>0$ ισχύει.

Άρα $g^{-1}(x)=-\frac{e^x+1}{2}\ , x\in\mathbb{R}$.

δ) $g^{-1}(x^4-1)-g^{-1}(2x^2-1)=g(2x^2-1)-g(x^4-1)\Leftrightarrow$

$g^{-1}(x^4-1)+g(x^4-1)=g^{-1}(2x^2-1)+g(2x^2-1)$.

Πρέπει $\begin{cases} x^4-1<-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x^4<\frac{1}{2}\Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}<x<\frac{1}{\sqrt[4]{2}} \\ 2x^2-1<-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x^2<\frac{1}{4}\Leftrightarrow -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$ γιατί

$\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$. (Πράγματι $\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\Leftrightarrow \sqrt[4]{2}<2\Leftrightarrow 2<16$).

Θέτω τη συνάρτηση $\nu(x)=g^{-1}(x)+g(x)\ , x<-\frac{1}{2}$.

Για κάθε $x_1,x_2\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$ με $x_1<x_2$ έχουμε $g(x_1)>g(x_2)$.

Για κάθε $x_1,x_2\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$ με

$x_1<x_2\Rightarrow g\left(g^{-1}(x_1)\right)<g\left(g^{-1}(x_2)\right)\overset{g\searrow}{\Rightarrow} g^{-1}(x_1)>g^{-1}(x_2)$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε: $\nu(x_1)>\nu(x_2)\Rightarrow \nu\searrow\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow \nu:1-1$

$g^{-1}\left(x^4-1\right)+g\left(x^4-1\right)=g^{-1}\left(2x^2-1\right)+g\left(2x^2-1\right)\Leftrightarrow v\left(x^4-1\right)=v\left(2x^2-1\right)$

$\overset{1-1}{\Leftrightarrow} x^4-1=2x^2-1\Leftrightarrow x^4-2x^2=0\Leftrightarrow x^2\left(x^2-2\right)=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ x=\sqrt{2}\\ x=-\sqrt{2}\end{cases}.$

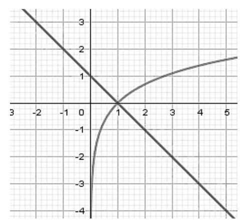
Επειδή όμως $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$ δεκτή λύση είναι μόνον η $x=0$.

ε) $\left(k\circ g^{-1}\right)(x)=\sqrt{1+e^x}$ και $g^{-1}(x)=-\frac{e^x+1}{2}$

$k\left(-\frac{e^x+1}{2}\right)=\sqrt{1+e^x}$ ΘΕΤΩ $-\frac{e^x+1}{2}=y<0$ άρα $e^x+1=-2y$.

Άρα $k(y)=\sqrt{-2y}$, $y<0$. Άρα $k(x)=\sqrt{-2x}$, $x<0$.

17.α) $f(x)=0\Leftrightarrow 1-x-\ln x=0\Leftrightarrow 1-x=\ln x$



Αρκεί να βρούμε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των $y=1-x$ και $y=\ln x$.

Μοναδικό κοινό σημείο των $y=1-x$ και $y=\ln x$ είναι το $(1,0)$, άρα $f(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι

$1-x>\ln x\Leftrightarrow 1-x-\ln x>0\Leftrightarrow f(x)>0$ και για κάθε $x>1$ είναι

$\ln x>1-x\Leftrightarrow 0>1-x-\ln x\Leftrightarrow f(x)<0$.

β) Έστω $0<x_1<x_2$, τότε: $-x_1>-x_2\Leftrightarrow 1-x_1>1-x_2$ (1) και

$\ln x_1<\ln x_2\Leftrightarrow -\ln x_1>-\ln x_2$ (2).

Από $(1)+(2)\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)\Leftrightarrow f\searrow(0,+\infty)$.

γ) i. $2\ln x<x-x^3\Leftrightarrow 3\ln x-\ln x<x-x^3\Leftrightarrow -x-\ln x<-x^3-\ln x^3\Leftrightarrow$

$1-x-\ln x<1-x^3-\ln x^3\Leftrightarrow f(x)<f\left(x^3\right)\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} x>x^3\Leftrightarrow x-x^3>0\Leftrightarrow$

$x(1-x)(1+x)>0\Leftrightarrow$

$x\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Γινόμενο		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

ii. Επειδή $D_f=(0,+\infty)$, η ανίσωση έχει νόημα όταν $x>0$ και

$2x-1>0\Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$.

Για $x > \frac{1}{2}$ είναι: $f(2x-1)+x+\ln x < 1 \Leftrightarrow f(2x-1) < 1-x-\ln x \Leftrightarrow$

$f(2x-1) < f(x) \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} 2x-1 > x \Leftrightarrow x > 1$ δεκτή.

δ) $\ln\frac{\beta}{\alpha} > \alpha-\beta \Leftrightarrow \ln\beta-\ln\alpha > \alpha-\beta \Leftrightarrow -\alpha-\ln\alpha > -\beta-\ln\beta \Leftrightarrow$

$1-\alpha-\ln\alpha > 1-\beta-\ln\beta \Leftrightarrow f(\alpha) > f(\beta) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} \alpha < \beta$ ισχύει.

18.α) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, τότε $x_1^3 < x_2^3$ και με πρόσθεση κατά μέλη: $x_1^3 + x_1 < x_2^3 + x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \nearrow \mathbb{R}$.

β) $(x^3+x)^3 + x^3 + x - 10 = 0 \Leftrightarrow f^3(x) + f(x) = 10 \Leftrightarrow f(f(x)) = 10 \Leftrightarrow$

$f(f(x)) = f(2) \overset{f\nearrow\Rightarrow 1-1}{\Leftrightarrow} f(x) = 2 \Leftrightarrow f(x) = f(1) \Leftrightarrow x = 1$.

γ) $h^3(x) - e^{3x} = e^x - h(x) \Leftrightarrow h^3(x) + h(x) = (e^x)^3 + e^x \Leftrightarrow$

$f(h(x)) = f(e^x) \overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow} h(x) = e^x$.

Επίπεδο δυσκολίας Δ Θέματος

19.α) Για $x = 2$ είναι

$$f(2) = \sqrt{2-f(2)} \Leftrightarrow f^2(2) = 2 - f(2) \Leftrightarrow f^2(2) + f(2) - 2 = 0$$

Η τελευταία είναι εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες το 1 και το -2, άρα $f(2) = 1$ ή $f(2) = -2$. Όμως για κάθε $x \geq 1$ είναι $f(x) = \sqrt{x - f(2)} \geq 0$ οπότε και $f(2) \geq 0$, άρα $f(2) = 1$. Επομένως $f(x) = \sqrt{x-1}$.

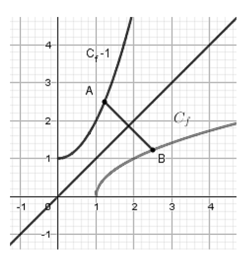
β) Για κάθε $1 \leq x_1 < x_2$ είναι $x_1 - 1 < x_2 - 1 \Leftrightarrow \sqrt{x_1 - 1} < \sqrt{x_2 - 1} \Leftrightarrow$

$f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow f \nearrow [1, +\infty)$, άρα η f είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

$f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = y$. Για $y \geq 0$ είναι $x - 1 = y^2 \Leftrightarrow x = y^2 + 1$.

Είναι $x \geq 1 \Leftrightarrow y^2 + 1 \geq 1 \Leftrightarrow y^2 \geq 0$ ισχύει, άρα $f^{-1}(y) = y^2 + 1,\ y \geq 0$, οπότε $f^{-1}(x) = x^2 + 1,\ x \geq 0$.

γ) Η γραφική παράσταση της f προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της $y = \sqrt{x}$ κατά 1 θέση δεξιά. Η γραφική παράσταση της f^{-1}, αποτελείται από το τμήμα της $y = x^2$ με $x \geq 0$ που έχει μεταφερθεί μια θέση επάνω.



δ) Έστω $A(x,y)$ με $y=x^2+1,\ x\ge 0$ σημείο της $C_{f^{-1}}$, τότε το συμμετρικό του $B(y,x)$ ως προς την y = x είναι σημείο της C_f. Η ελάχιστη απόσταση των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1} ισοδυναμεί με την ελάχιστη τιμή της απόστασης AB.

Είναι $d=(AB)=\sqrt{(y-x)^2+(x-y)^2}=\sqrt{2(y-x)^2}=\sqrt{2}|y-x|=$
$\sqrt{2}\left|x^2+1-x\right|\Leftrightarrow$

$$d=\sqrt{2}\left|x^2-x+1\right|=\sqrt{2}\left|x^2-2\cdot\frac{1}{2}x+1\right|=\sqrt{2}\left|x^2-2\cdot\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1\right|\Leftrightarrow$$

$$d=\sqrt{2}\left|\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right|=\sqrt{2}\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right].$$

Για κάθε $x\ge 0$ είναι $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\ge 0\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\ge\frac{3}{4}\Leftrightarrow$

$\sqrt{2}\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]\ge\frac{3}{4}\sqrt{2}\Leftrightarrow d\ge\frac{3\sqrt{2}}{4}$. Άρα η ελάχιστη απόσταση των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1} είναι $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ όταν

$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=0\Leftrightarrow x-\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$. Τότε $y=\left(\frac{1}{2}\right)^2+1=\frac{5}{4}$, οπότε τα σημεία που δίνουν την ελάχιστη απόσταση είναι τα $A\left(\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right)$ και $B\left(\frac{5}{4},\frac{1}{2}\right)$.

20.α) Η f ορίζεται όταν: $\left(e^{2x}-2e^x+1\right)>0\Leftrightarrow\left(e^x-1\right)^2>0\Leftrightarrow$
$e^x-1\ne 0\Leftrightarrow e^x\ne 1\Leftrightarrow x\ne 0$, άρα $D_f=\mathbb{R}^*$. Για να ορίζεται η g πρέπει:
$\left|1-e^{-x}\right|>0\Leftrightarrow 1-e^{-x}\ne 0\Leftrightarrow e^{-x}\ne 1\Leftrightarrow -x\ne 0\Leftrightarrow x\ne 0$, άρα $D_g=\mathbb{R}^*=D_f$.

$$f(x)=\ln\left(e^{2x}-2e^x+1\right)-2x=\ln\left(e^x-1\right)^2-\ln e^{2x}\Leftrightarrow$$

$$f(x)=\ln\frac{\left(e^x-1\right)^2}{e^{2x}}=\ln\left(\frac{e^x-1}{e^x}\right)^2\Leftrightarrow$$

$$f(x)=2\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x}\right|=2\ln\left|\frac{e^x}{e^x}-\frac{1}{e^x}\right|=2\ln\left|1-e^{-x}\right|=g(x).$$

β) Επειδή $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$, έχουμε:

$$f(x)-f(-x)=g(x)-g(-x)=2\ln\left|1-e^{-x}\right|-2\ln\left|1-e^x\right|\Leftrightarrow$$

$f(x)-f(-x)=2\left(\ln\left|1-e^{-x}\right|-\ln\left|1-e^{x}\right|\right)\Leftrightarrow$

$$f(x)-f(-x)=2\ln\frac{\left|1-e^{-x}\right|}{\left|1-e^{x}\right|}=2\ln\left|\frac{1-\frac{1}{e^x}}{1-e^x}\right|=2\ln\left|\frac{\frac{\cancel{e^x-1}}{e^x}}{-\left(\cancel{e^x-1}\right)}\right|=2\ln e^x=2x.$$

γ) $2f\left(\eta\mu^2x\right)=1+2f\left(1-\sigma\upsilon\nu^2x\right)\Leftrightarrow 2f\left(\eta\mu^2x\right)=1+2f\left(-\eta\mu^2x\right)\Leftrightarrow$

$2f\left(\eta\mu^2x\right)-2f\left(-\eta\mu^2x\right)=1\Leftrightarrow f\left(\eta\mu^2x\right)-f\left(-\eta\mu^2x\right)=\frac{1}{2}$ (1).

Πρέπει $\eta\mu^2x\neq 0\Leftrightarrow \eta\mu x\neq 0\overset{x\in[0,\pi]}{\Leftrightarrow} x\neq 0$ και $x\neq\pi$.

Λόγω του β σκέλους, η (1) γίνεται $2\eta\mu^2x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \eta\mu^2x=\frac{1}{4}\overset{x\in[0,\pi]}{\Leftrightarrow}$

$\eta\mu x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \eta\mu x=\eta\mu\frac{\pi}{6}\overset{x\in[0,\pi]}{\Leftrightarrow} x=\frac{\pi}{6}$ ή $\left(x=\frac{5\pi}{6}\right)$.

δ) Έστω $0<x_1<x_2$, τότε: $-x_1>-x_2\Leftrightarrow e^{-x_1}>e^{-x_2}\Leftrightarrow$

$1-e^{-x_1}<1-e^{-x_2}$ (2). Για $x>0$ είναι $-x<0\Leftrightarrow e^{-x}<1\Leftrightarrow 0<1-e^{-x}$, οπότε η (2) γίνεται: $\left|1-e^{-x_1}\right|<\left|1-e^{-x_2}\right|\Leftrightarrow \ln\left|1-e^{-x_1}\right|<\ln\left|1-e^{-x_2}\right|\Leftrightarrow$

$2\ln\left|1-e^{-x_1}\right|<2\ln\left|1-e^{-x_2}\right|\Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2)\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)\Leftrightarrow f\nearrow(0,+\infty)$.

ε) Η $f\circ f$ ορίζεται όταν: $\begin{cases}x\in D_f\\ f(x)\in D_f\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\ 2\ln\left|1-e^{-x}\right|\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}x\neq 0\\ \ln\left|1-e^{-x}\right|\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\ \left|1-e^{-x}\right|\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\ 1-e^{-x}\neq\pm 1\end{cases}$. Είναι $1-e^{-x}\neq 1\Leftrightarrow -e^{-x}\neq 0$

ισχύει και $1-e^{-x}\neq -1\Leftrightarrow 2\neq e^{-x}\Leftrightarrow -x\neq\ln 2\Leftrightarrow x\neq-\ln 2$.

Άρα $D_{f\circ f}=\mathbb{R}-\{0,-\ln 2\}$.

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=g(g(x))=2\ln\left|1-e^{-2\ln\left|1-e^{-x}\right|}\right|=$

$2\ln\left|1-e^{\ln\left|1-e^{-x}\right|^{-2}}\right|=2\ln\left|1-\left|1-e^{-x}\right|^{-2}\right|=2\ln\left|1-\left|1-\frac{1}{e^x}\right|^{-2}\right|=$

$2\ln\left|1-\left|\frac{e^x-1}{e^x}\right|^{-2}\right|==2\ln\left|1-\left(\frac{e^x}{e^x-1}\right)^2\right|=$

$2\ln\left|\frac{e^{2x}-2e^x+1}{e^{2x}-2e^x+1}-\frac{e^{2x}}{e^{2x}-2e^x+1}\right|==\ln\left|\frac{1-2e^x}{e^{2x}-2e^x+1}\right|$.

21.α) Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι $-x_1>-x_2$ (1) και $e^{-x_1}>e^{-x_2}$ (2) και με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε: $e^{-x_1}-x_1>e^{-x_2}-x_2\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f(x_1)>f(x_2)\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f(f(x_1))<f(f(x_2))\Leftrightarrow$ $(f\circ f)(x_1)<(f\circ f)(x_2)$ άρα η $f\circ f$ είναι γνησίως αύξουσα.

γ) $e^{-f(x)}-f(x)<\dfrac{1}{e}-1\Leftrightarrow f(f(x))<f(1)\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f(x)>1\Leftrightarrow$

$f(x)>f(0)\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}x<0$.

δ) $h(x)=f(x)+f(-x)=\cancel{e^{-x}}-x+e^{x}+\cancel{x}=e^{x}+\dfrac{1}{e^{x}}$. Αρκεί

$h(x)\geq 2\Leftrightarrow e^{x}+\dfrac{1}{e^{x}}\geq 2\Leftrightarrow (e^{x})^2+1\geq 2e^{x}\Leftrightarrow (e^{x})^2-2e^{x}+1\geq 0\Leftrightarrow$

$(e^{x}-1)^2\geq 0$ ισχύει. $h(x)=2\Leftrightarrow (e^{x}-1)^2=0\Leftrightarrow e^{x}=1\Leftrightarrow x=0$. Η h παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=0$.

ε) Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα, είναι και 1-1, οπότε αντιστρέφεται. Είναι $f(-1)=e+1\Leftrightarrow f^{-1}(f(-1))=f^{-1}(e+1)\Leftrightarrow f^{-1}(e+1)=-1$, οπότε η γραφική παράσταση της f^{-1} διέρχεται από το σημείο $A(e+1,-1)$.

στ) $f^{-1}(2e^{-x}-2x-1)=x\Leftrightarrow 2e^{-x}-2x-1=f(x)\Leftrightarrow 2f(x)-1=f(x)\Leftrightarrow$

$f(x)=1=f(0)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}x=0$.

22.α) $g(x)=f(x)+x\Leftrightarrow f(x)=g(x)-x$.

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2\Leftrightarrow -x_1>-x_2$ (1), τότε επειδή η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ ισχύει ότι $g(x_1)>g(x_2)$ (2)

Από (1) +(2)$\Rightarrow g(x_1)-x_1>g(x_2)-x_2\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)\Rightarrow f\searrow\mathbb{R}$.

β) Επειδή η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ είναι και 1-1.

$f(x^3)-f(x^2)=x^2-x^3\Leftrightarrow f(x^3)+x^3=f(x^2)+x^2\Leftrightarrow$

$g(x^3)=g(x^2)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}x^3=x^2\Leftrightarrow x^3-x^2=0\Leftrightarrow x^2(x-1)=0\Leftrightarrow x=0$ ή $x=1$

γ) i. $g(f(x)+x)-f(0)<0\Leftrightarrow g(f(x)+x)<f(0)+0\Leftrightarrow$

$g(g(x))<g(0)\overset{g\searrow}{\Leftrightarrow}g(x)>g(0)\overset{g\searrow}{\Leftrightarrow}x<0$.

ii. $A_g=\mathbb{R}$ οπότε για κάθε $x\in A_f, -x\in A_f$. Είναι

$g(-x)=f(-x)-x=-f(x)-x=-\big(f(x)+x\big)=-g(x)$, άρα η g είναι περιττή.

iii. Αν στη σχέση $g(-x)=-g(x)$ αντικαταστήσουμε $x=0$ προκύπτει:

$g(0)=-g(0)\Leftrightarrow 2g(0)=0\Leftrightarrow g(0)=0$ και επειδή η g είναι 1-1, η $x=0$ είναι η μοναδική της ρίζα. Για κάθε $x>0\overset{g\searrow}{\Leftrightarrow} g(x)<g(0)=0$ και για κάθε $x<0\overset{g\searrow}{\Leftrightarrow} g(x)>g(0)=0$.

iv. Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα είναι και 1-1 και αντιστρέφεται. Γνωρίζουμε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$, οπότε η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της f^{-1}, όταν η C_f βρίσκεται πάνω από την $y=x$, δηλαδή όταν $f(x)>x\Leftrightarrow f(x)+x>2x\Leftrightarrow g(x)>2x$, δηλαδή όταν η γραφική παράσταση της g βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y=2x$.

23.α) Έστω ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα. Τότε για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι $f(x_1)>f(x_2)\ (1)$ και $x_1^3<x_2^3\Leftrightarrow 2x_1^3<2x_2^3\Leftrightarrow$

$2x_1^3-1<2x_2^3-1\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f\big(2x_1^3-1\big)>f\big(2x_2^3-1\big)\ (2)$. Από $(1)+(2)\Rightarrow$

$f\big(2x_1^3-1\big)+f(x_1)>f\big(2x_2^3-1\big)+f(x_2)\Leftrightarrow x_1-\cancel{1}>x_2-\cancel{1}\Leftrightarrow x_1>x_2$ άτοπο.

Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη, είναι γνησίως αύξουσα.

β) Παρατηρούμε ότι για $x=1$ είναι

$f(2-1)+f(1)=1-1\Leftrightarrow 2f(1)=0\Leftrightarrow f(1)=0$.

Για κάθε $x<1\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x)<f(1)=0$ και για κάθε $x>1\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x)>f(1)=0$.

γ) Η δοθείσα σχέση για $x=0$ γίνεται: $f(-1)+f(0)=-1\Leftrightarrow f(-1)=-f(0)-1$, οπότε: $f\big(f(x^2-3)\big)+f(-1)<-1\Leftrightarrow f\big(f(x^2-3)\big)-\cancel{1}-f(0)<-\cancel{1}\Leftrightarrow$

$f\big(f(x^2-3)\big)<f(0)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x^2-3)<0\Leftrightarrow f(x^2-3)<f(1)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} x^2-3<1\Leftrightarrow$

$x^2<4\Leftrightarrow |x|<2\Leftrightarrow -2<x<2$.

δ) Αρκεί να βρούμε τις τιμές του x για τις οποίες

$f(x)>1-x\Leftrightarrow f(x)+x-1>0$ (3). Έστω $g(x)=f(x)+x-1,\ x\in\mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι $g(1)=f(1)+1-1=0$. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι $f(x_1)<f(x_2)\ (4)$ και $x_1-1<x_2-1\ (5)$

Από $(4)+(5)\Rightarrow f(x_1)+x_1-1<f(x_2)+x_2-1\Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2)\Leftrightarrow g\nearrow\mathbb{R}$.

$(3)\Leftrightarrow g(x)>g(1)\overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow}x>1$.

24.α) Για να ορίζεται η f πρέπει $x>0$ και $\ln x\neq 0\Leftrightarrow x\neq 1$, οπότε $D_f=(0,1)\cup(1,+\infty)$.

Έστω $0<x_1<x_2<1$, τότε: $\dfrac{x_1}{e}<\dfrac{x_2}{e}\Leftrightarrow -\dfrac{x_1}{e}>-\dfrac{x_2}{e}$ (1)

και $\ln x_1<\ln x_2\Leftrightarrow \dfrac{1}{\ln x_1}>\dfrac{1}{\ln x_2}$ (2)

Από $(1)+(2)\Rightarrow \dfrac{1}{\ln x_1}-\dfrac{x_1}{e}>\dfrac{1}{\ln x_2}-\dfrac{x_2}{e}\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)\Leftrightarrow f\searrow(0,1)$.

Έστω $1<x_1<x_2$, τότε: $\dfrac{x_1}{e}<\dfrac{x_2}{e}\Leftrightarrow -\dfrac{x_1}{e}>-\dfrac{x_2}{e}$ (3) και

$\ln x_1<\ln x_2\Leftrightarrow \dfrac{1}{\ln x_1}>\dfrac{1}{\ln x_2}$ (4).

Από $(3)+(4)\Rightarrow \dfrac{1}{\ln x_1}-\dfrac{x_1}{e}>\dfrac{1}{\ln x_2}-\dfrac{x_2}{e}\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)\Leftrightarrow f\searrow(1,+\infty)$.

β) $x^x=e^e\Leftrightarrow \ln x^x=\ln e^e\Leftrightarrow x\ln x=e$ (5)
Αν $x=1$ η (5) είναι αδύνατη, οπότε για $x\neq 1$ είναι:
$\dfrac{x}{e}=\dfrac{1}{\ln x}\Leftrightarrow \dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{e}=0\Leftrightarrow f(x)=0$.

Παρατηρούμε ότι $f(e)=\dfrac{1}{1}-\dfrac{e}{e}=0$, οπότε για κάθε $x\in(1,+\infty)$ είναι

$f(x)=0\Leftrightarrow f(x)=f(e)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}x=e$. Όταν $x\in(0,1)$ είναι $f(x)<0$, οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη στο διάστημα αυτό.

γ) $\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^e>e^{(\alpha-\beta)\ln\alpha\cdot\ln\beta}\Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^e>\ln e^{(\alpha-\beta)\ln\alpha\cdot\ln\beta}\Leftrightarrow e\ln\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)>(\alpha-\beta)\ln\alpha\cdot\ln\beta\Leftrightarrow$

$\dfrac{\ln\beta-\ln\alpha}{\ln\alpha\cdot\ln\beta}>\dfrac{\alpha-\beta}{e}\Leftrightarrow \dfrac{\cancel{\ln\beta}}{\ln\alpha\cdot\cancel{\ln\beta}}-\dfrac{\cancel{\ln\alpha}}{\cancel{\ln\alpha}\cdot\ln\beta}>\dfrac{\alpha}{e}-\dfrac{\beta}{e}\Leftrightarrow \dfrac{1}{\ln\alpha}-\dfrac{\alpha}{e}>\dfrac{1}{\ln\beta}-\dfrac{\beta}{e}\Leftrightarrow$

$f(\alpha)>f(\beta)\overset{f\searrow(1,+\infty)}{\Leftrightarrow}\alpha<\beta$ ισχύει.

δ) Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f(x)<0$.

Για $1<x<e\overset{f\searrow}{\Rightarrow}f(x)>f(e)=0$ και για κάθε $x>e\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f(x)<f(e)=0$.

ε) $f\left(g(x)\right)=\frac{1}{x}-e^{x-1} \Leftrightarrow f\left(g(x)\right)=\frac{1}{x}-\frac{e^x}{e}=\frac{1}{\ln e^x}-\frac{e^x}{e} \Leftrightarrow$

$f\left(g(x)\right)=f\left(e^x\right) \overset{f\ 1-1\ (1,+\infty)}{\Leftrightarrow} g(x)=e^x \ , x>0$.

25.α) Έστω ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1)\geq f(x_2)$ (1), τότε: $f^3(x_1)\geq f^3(x_2)$ (2) και με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) έχουμε: $f^3(x_1)+f(x_1)\geq f^3(x_2)+f(x_2) \Leftrightarrow e^{x_1}-\cancel{2}\geq e^{x_2}-\cancel{2} \Leftrightarrow$ $x_1\geq x_2$ άτοπο. Άρα $f(x_1)<f(x_2)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) $f^3(x)+f(x)=e^x-2 \Leftrightarrow f(x)\left(f^2(x)+1\right)=e^x-2 \overset{f^2(x)+1>0}{\Leftrightarrow}$

$f(x)=\frac{e^x-2}{f^2(x)+1}$. $f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{e^x-2}{f^2(x)+1}=0 \Leftrightarrow e^x=2 \Leftrightarrow x=\ln 2$.

Είναι $f(x)>0 \Leftrightarrow \frac{e^x-2}{f^2(x)+1}>0 \Leftrightarrow e^x>2 \Leftrightarrow x>\ln 2$ και αντίστοιχα

$f(x)<0 \Leftrightarrow x<\ln 2$.

γ) $f \nearrow \mathbb{R} \Rightarrow 1-1$ άρα η f αντιστρέφεται.

$f(x)=y \Leftrightarrow y^3+y=e^x-2 \Leftrightarrow e^x=y^3+y+2=(y+1)\left(y^2-y+2\right)$ (1)

Επειδή $e^x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$(y+1)\left(y^2-y+2\right)>0 \overset{y^2-y+2>0\ (\Delta<0)}{\Leftrightarrow} y+1>0 \Leftrightarrow y>-1$.

Η (1) γίνεται: $x=\ln\left(y^3+y+2\right) \Leftrightarrow f^{-1}(y)=\ln\left(y^3+y+2\right),\ y>-1$ άρα

$f^{-1}(x)=\ln\left(x^3+x+2\right),\ x>-1$.

δ) Επειδή η σχέση $f^3(x)+f(x)=e^x-2$ ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, αντικαθιστώντας όπου x το $f(x)$ προκύπτει: $f^3\left(f(x)\right)+f\left(f(x)\right)=e^{f(x)}-2$.

Τότε η εξίσωση γίνεται: $f^3\left(f(x)\right)+f\left(f(x)\right)+1=0 \Rightarrow$

$e^{f(x)}-2+1=0 \Leftrightarrow e^{f(x)}=1 \Leftrightarrow f(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=f(\ln 2) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x=\ln 2$.

26.α) Επειδή $x\geq 0$ είναι $f(x)e^{f(x)}=x\geq 0$ και επειδή $e^{f(x)}>0$ για κάθε $x\geq 0$, είναι $f(x)\geq 0$. Έστω ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1)\geq f(x_2)$ (1), τότε: $e^{f(x_1)}\geq e^{f(x_2)}$ (2) και με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των (1), (2) έχουμε: $f(x_1)e^{f(x_1)}\geq f(x_2)e^{f(x_2)} \Leftrightarrow x_1\geq x_2$ που είναι άτοπο. Άρα $f(x_1)<f(x_2)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

β) $f \nearrow [0,+\infty) \Rightarrow 1-1$ άρα η f αντιστρέφεται.

$f(x)=y \Rightarrow ye^y = x \Leftrightarrow f^{-1}(y)=ye^y,\ y\geq 0$ άρα $f^{-1}(x)=xe^x,\ x\geq 0$.

γ) $g(x)>f(x) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(g(x))>f(f(x))$ (3). Αν στη σχέση $g(x)>f(x)$ αντικαταστήσουμε όπου x το $g(x)$ προκύπτει: $g(g(x))>f(g(x))$ (4)

Από τις σχέσεις (3), (4) έχουμε: $g(g(x))>f(g(x))>f(f(x))$.

δ) Είναι $x^2-x=x(x-1)$ και $x^4-x^3=x^3(x-1)$. Για κάθε $x>1$ είναι

$x^2-x=x(x-1)>0 \Leftrightarrow x^2>x \overset{\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x^2)>f(x)$ (5) και

$x^4-x^3=x^3(x-1)>0 \Leftrightarrow x^4>x^3 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x^4)>f(x^3)$ (6) και με πρόσθεση κατά μέλη των (5), (6) προκύπτει $f(x^2)+f(x^4)>f(x)+f(x^3)$. Προφανώς για κάθε $0<x<1$ είναι $f(x^2)+f(x^4)<f(x)+f(x^3)$, άρα η ανίσωση ισχύει για $x>1$.

27.α) Επειδή $e^x+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, είναι $A_f=\mathbb{R}$. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι: $f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{e^{x_1}-1}{e^{x_1}+1}-\dfrac{e^{x_2}-1}{e^{x_2}+1}=$

$$\frac{\cancel{e^{x_1+x_2}}+e^{x_1}-e^{x_2}-\cancel{1}-\cancel{e^{x_1+x_2}}+e^{x_1}-e^{x_2}+\cancel{1}}{\left(e^{x_1}+1\right)\left(e^{x_2}+1\right)}=\frac{2\left(e^{x_1}-e^{x_2}\right)}{\left(e^{x_1}+1\right)\left(e^{x_2}+1\right)}.$$

Επειδή $x_1<x_2$ είναι $e^{x_1}<e^{x_2} \Leftrightarrow e^{x_1}-e^{x_2}<0$ και αφού $e^{x_1}+1>0,\ e^{x_2}+1>0$, είναι $f(x_1)-f(x_2)<0 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2) \Rightarrow f\nearrow\mathbb{R}$.

β) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ είναι και 1-1 και αντιστρέφεται.

$f(x)=y \Leftrightarrow \dfrac{e^x-1}{e^x+1}=y \Leftrightarrow e^x-1=ye^x+y \Leftrightarrow$

$e^x-ye^x=y+1 \Leftrightarrow e^x(1-y)=y+1$ (1)

Αν $y=1$ η (1) είναι αδύνατη, οπότε για $y\neq 1$ είναι $e^x=\dfrac{y+1}{1-y}$ (2)

Επειδή $e^x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, είναι $\dfrac{y+1}{1-y}>0 \Leftrightarrow (y+1)(1-y)>0 \Leftrightarrow$

$1-y^2>0 \Leftrightarrow y^2<1 \Leftrightarrow |y|<1 \Leftrightarrow -1<y<1$.

Τότε η (2) γίνεται: $x=\ln\dfrac{y+1}{1-y}$, άρα $f^{-1}(y)=\ln\dfrac{y+1}{1-y},\ y\in(-1,1)$, οπότε και

$f^{-1}(x)=\ln\dfrac{x+1}{1-x},\ x\in(-1,1)$.

γ) Έστω $g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$, $x\neq -1$ και $h(x)=e^x$, $x\in\mathbb{R}$. Για το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g\circ h$ ισχύει ότι: $\begin{cases} x\in A_h \\ h(x)\in A_g\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ e^x\neq -1 \text{ ισχύει}\end{cases}$, άρα $A_{g\circ h}=\mathbb{R}$.

Είναι $(g\circ h)(x)=g(h(x))=\dfrac{h(x)-1}{h(x)+1}=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}=f(x)$.

δ) Έστω ότι $\left(f^{-1}\circ f^{-1}\right)(2)=\alpha \Leftrightarrow f^{-1}\left(f^{-1}(2)\right)=\alpha$ τότε $f\left(f^{-1}\left(f^{-1}(2)\right)\right)=f(\alpha)\Leftrightarrow$ $f^{-1}(2)=f(\alpha)\Leftrightarrow f\left(f^{-1}(2)\right)=f\left(f(\alpha)\right)\Leftrightarrow f\left(f(\alpha)\right)=2 \quad (3)$. Τώρα έχουμε δύο τρόπους για να διαπιστώσουμε ότι η (3) δεν ισχύει. Προηγουμένως αποδείξαμε ότι $-1<y<1$, δηλαδή $-1<f(x)<1$, οπότε δεν μπορεί η τιμή της f να είναι 2.

Αλλιώς: $f\left(f(\alpha)\right)=2\Leftrightarrow \dfrac{e^{f(\alpha)}-1}{e^{f(\alpha)}+1}=2\Leftrightarrow e^{f(\alpha)}-1=2e^{f(\alpha)}+2\Leftrightarrow -3=e^{f(\alpha)}$ αδύνατο.

ε) Είναι $f(-x)=\dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\dfrac{\frac{1}{e^x}-1}{\frac{1}{e^x}+1}=\dfrac{\frac{1-e^x}{\cancel{e^x}}}{\frac{1+e^x}{\cancel{e^x}}}=\dfrac{1-e^x}{1+e^x}=-\dfrac{e^x-1}{1+e^x}=-f(x)$, οπότε η f είναι περιττή. Επειδή η f είναι περιττή ισχύει ότι $f(x-\eta\mu x)=-f(\eta\mu x-x)$, οπότε η εξίσωση γίνεται: $f(x-\eta\mu x)+f\left(x^3\right)+f(\eta\mu x-x)=f(x)\Leftrightarrow$

$-\cancel{f(\eta\mu x-x)}+f\left(x^3\right)+\cancel{f(\eta\mu x-x)}=f(x)\Leftrightarrow f\left(x^3\right)=f(x)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}$

$x^3=x\Leftrightarrow x^3-x=0\Leftrightarrow x\left(x^2-1\right)=0\Leftrightarrow x=0$ ή $x^2=1\Leftrightarrow x=\pm 1$.

28.α) Παρατηρούμε ότι $g(1)=f(1)-f(1)=0$, οπότε: για κάθε

$x>1\overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow} g(x)>g(1)=0$ και για κάθε $x<1\overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow} g(x)<g(1)=0$.

β) $f\left(x^2\right)<f\left(2-x^2\right)\Leftrightarrow f\left(x^2\right)-f\left(2-x^2\right)<0\Leftrightarrow g\left(x^2\right)<g(1)\overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow}$

$x^2<1\Leftrightarrow -1<x<1$.

γ) Έστω ότι η f είναι $\searrow$ στο $\mathbb{R}$. Τότε για $x>1$ είναι $f(x)<f(1)$ (1) και

$x>1\Leftrightarrow -x<-1\Leftrightarrow 2-x<1\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(2-x)>f(1)\Leftrightarrow -f(2-x)<-f(1)$ (2)

Από $(1)+(2)\Rightarrow f(x)-f(2-x)<0\Leftrightarrow g(x)<0$ που είναι άτοπο.

δ) $f(3)+f(0)-f(2)-f(-1)>0\Leftrightarrow f(3)-f(-1)>f(2)-f(0)\Leftrightarrow$

$g(3)>g(2)$ που ισχύει αφού η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

29. α) $f^{-1}(g(x)+2)+x=4 \Leftrightarrow f^{-1}(g(x)+2)=4-x \Leftrightarrow$

$f(f^{-1}(g(x)+2))=f(4-x) \Leftrightarrow g(x)+2=f(4-x)$ (1)

$g^{-1}(8-2x-f(4-x))-x=0 \Leftrightarrow g^{-1}(8-2x-f(4-x))=x \Leftrightarrow$

$8-2x-f(4-x)=g(x) \Leftrightarrow 8-2x-g(x)=f(4-x)$ (2). Από τις (1), (2) είναι:

$g(x)+2=8-2x-g(x) \Leftrightarrow 2g(x)=6-2x \Leftrightarrow g(x)=3-x$.

Από τη σχέση (1) έχουμε: $f(4-x)=3-x+2=5-x$.

Θέτουμε $4-x=u \Leftrightarrow 4-u=x$, τότε: $f(u)=5-(4-u)=1+u$ για κάθε $u \in \mathbb{R}$ άρα και $f(x)=1+x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) $h(x)=-f(x)g(x)=-(x+1)(3-x)=-3x+x^2-3+x \Leftrightarrow$

$h(x)=x^2-2x-3=x^2-2x+1-4=(x-1)^2-4,\ x \geq 1$.

Έστω $1 \leq x_1 < x_2$, τότε: $0 \leq x_1-1 < x_2-1 \Rightarrow (x_1-1)^2 < (x_2-1)^2 \Leftrightarrow$

$(x_1-1)^2-4 < (x_2-1)^2-4 \Leftrightarrow h(x_1) < h(x_2) \Rightarrow h \nearrow [1,+\infty) \Rightarrow h\ 1-1$, άρα η h αντιστρέφεται. $h(x)=y \Leftrightarrow (x-1)^2-4=y \Leftrightarrow (x-1)^2=y+4$ (3)

Επειδή $(x-1)^2 \geq 0$, είναι $y+4 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -4$.

Επειδή $x \geq 1$, η σχέση (3) γίνεται: $x-1=\sqrt{y+4} \Leftrightarrow x=\sqrt{y+4}+1$, άρα

$h^{-1}(y)=\sqrt{y+4}+1,\ y \geq -4$, οπότε $h^{-1}(x)=\sqrt{x+4}+1,\ x \geq -4$.

γ) $(x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2-4 \geq -4 \Leftrightarrow h(x) \geq -4 = h(1)$, άρα η h έχει ελάχιστο το -4 στο $x=1$.

δ) $h(x) > f(x) \Leftrightarrow x^2-2x-3 > x+1 \Leftrightarrow x^2-3x-4 > 0 \Leftrightarrow$

$(x-4)(x+1) > 0 \overset{x \geq 1}{\Leftrightarrow} x > 4$.

30.α) Η $f \circ f$ ορίζεται όταν:

$$\begin{cases} x \in A_f \\ f(x) \in A_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ \dfrac{\lambda x}{x-2} \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ \lambda x \neq 2x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ (\lambda-2)x \neq -4 \end{cases} \quad (1)$$

Αν $\lambda \neq 2$, τότε $\begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq \dfrac{-4}{\lambda-2} \end{cases}$, οπότε η σχέση $(f \circ f)(x)=x$ δεν ισχύει για κάθε $x \neq 2$. Αν $\lambda=2$, τότε από την (1) έχουμε: $\begin{cases} x \neq 2 \\ 0 \neq -4 \quad \text{ισχύει} \end{cases}$ άρα $A_{f \circ f}=\mathbb{R}-\{2\}$.

Τότε $f(x)=\dfrac{2x}{x-2}$ και

$$(f\circ f)(x)=f(f(x))=\frac{2\frac{2x}{x-2}}{\frac{2x}{x-2}-2}=\frac{\frac{4x}{\cancel{x-2}}}{\frac{\cancel{2x}-\cancel{2x}+4}{\cancel{x-2}}}=\frac{4x}{4}=x$$

β) Έστω $x_1,x_2\neq 2$ με $f(x_1)=f(x_2)$, τότε $\dfrac{2x_1}{x_1-2}=\dfrac{2x_2}{x_2-2}\Leftrightarrow$

$\cancel{2x_1x_2}-4x_1=\cancel{2x_1x_2}-4x_2\Leftrightarrow -4x_1=-4x_2\Leftrightarrow x_1=x_2$ άρα η f είναι 1 – 1 και αντιστρέφεται.

$f(x)=y\Leftrightarrow \dfrac{2x}{x-2}=y\Leftrightarrow 2x=xy-2y\Leftrightarrow 2y=xy-2x\Leftrightarrow x(y-2)=2y$ (2).

Αν $y=2$, τότε η (2) γίνεται $0=4$ και είναι αδύνατη.

Αν $x=2$, τότε και πάλι η (2) είναι αδύνατη.

Αν $y\neq 2$ τότε $x=\dfrac{2y}{y-2}$ δηλαδή $f^{-1}(y)=\dfrac{2y}{y-2}$, $y\neq 2$, άρα

$f^{-1}(x)=\dfrac{2x}{x-2}=f(x),\ x\neq 2$.

γ) Επειδή $(f\circ f)(x)=x$ για κάθε $x\neq 2$, είναι $f(f(x+1))=x+1$ με

$x+1\neq 2\Leftrightarrow x\neq 1$. $f(f(x+1))+f(x+1)=x+\dfrac{2e^{-x}}{e^{-x}-2}+1\Leftrightarrow$

$x+1+f(x+1)=x+f(e^{-x})+1\Leftrightarrow f(x+1)=f(e^{-x})\overset{1-1}{\Leftrightarrow}x+1=e^{-x}\Leftrightarrow$

$e^{-x}-x-1=0\,(3)$ με $e^{-x}\neq 2\Leftrightarrow -x\neq \ln 2\Leftrightarrow x\neq -\ln 2$.

Έστω $h(x)=e^{-x}-x-1,\ x\in\mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι $-x_1>-x_2$ (4) και $e^{-x_1}>e^{-x_2}$ (5)

Με πρόσθεση κατά μέλη των (4) και (5) έχουμε:

$e^{-x_1}-x_1>e^{-x_2}-x_2\Leftrightarrow e^{-x_1}-x_1-1>e^{-x_2}-x_2-1\Leftrightarrow h(x_1)>h(x_2)\Rightarrow$

$h\searrow\mathbb{R}\Rightarrow h\ 1-1$. $(3)\Rightarrow h(x)=h(0)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}x=0$ δεκτή.

δ) i. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $g(x_1)=g(x_2)$, τότε $f(g(x_1))=f(g(x_2))$ και

$f(g(x_1))+g(x_1)=f(g(x_2))+g(x_2)\Leftrightarrow e^{x_1}=e^{x_2}\Leftrightarrow x_1=x_2\Rightarrow g\ 1-1$ και αντιστρέφεται.

ii. $g(x)=y\Rightarrow f(y)+y=e^x\Leftrightarrow \dfrac{2y}{y-2}+y=e^x\Leftrightarrow e^x=\dfrac{y^2}{y-2}\Leftrightarrow$

$x=\ln\frac{y^2}{y-2}$, άρα $g^{-1}(y)=\ln\frac{y^2}{y-2}$, $y>2$, οπότε

$g^{-1}(x)=\ln\frac{x^2}{x-2}=\ln x^2-\ln(x-2)=2\ln x-\ln(x-2),\ x>2$.

31.α) Έστω ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1)\ge f(x_2)$ (1), τότε: $e^{f(x_1)}\ge e^{f(x_2)}$ (2) και με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) έχουμε: $e^{f(x_1)}+f(x_1)\ge e^{f(x_2)}+f(x_2)\Leftrightarrow x_1+1\ge x_2+1\Leftrightarrow$ $x_1\ge x_2$ που είναι άτοπο. Άρα $f(x_1)<f(x_2)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Για $x=0$ η αρχική σχέση γίνεται: $e^{f(0)}+f(0)=1$ (3)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=e^x+x,\ x\in\mathbb{R}$.

Έστω ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$, τότε $e^{x_1}<e^{x_2}$ και

$e^{x_1}+x_1<e^{x_2}+x_2\Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2)\Rightarrow g\nearrow\mathbb{R}\Rightarrow g\ 1-1$.

$(3)\Rightarrow g(f(0))=g(0)\overset{1-1}{\Leftrightarrow} f(0)=0$.

Για κάθε $x>0\overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(x)>f(0)=0$ και για κάθε $x<0\overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(x)<f(0)=0$.

γ) $f\nearrow\mathbb{R}\Rightarrow 1-1$ άρα η f αντιστρέφεται. $f(x)=y\Rightarrow e^y+y-1=x$, άρα $f^{-1}(y)=e^y+y-1,\ y\in\mathbb{R}$ οπότε $f^{-1}(x)=e^x+x-1,\ x\in\mathbb{R}$.

δ) Αν στη σχέση $e^{f(x)}+f(x)=x+1$ αντικαταστήσουμε όπου x το $g(e^x)$, προκύπτει: $e^{f(g(e^x))}+f(g(e^x))=g(e^x)+1$, τότε η σχέση $e^{f(g(e^x))}+f(g(e^x))=x+1$ γίνεται: $g(e^x)+1=x+1\Leftrightarrow g(e^x)=x$. Αν θέσουμε $e^x=u>0\Leftrightarrow x=\ln u$, έχουμε: $g(u)=\ln u$, $u>0$, άρα $g(x)=\ln x,\ x>0$.

32.α) Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη και $f(-1)=2>f(2)=-1$ είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα ισχύει ότι για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι $f(x_1)>f(x_2)$ και

$f(f(x_1))<f(f(x_2))\Leftrightarrow(f\circ f)(x_1)<(f\circ f)(x_2)\Rightarrow f\circ f\nearrow\mathbb{R}$.

γ) $f\searrow\mathbb{R}\Rightarrow 1-1$ άρα αντιστρέφεται.

$f\left(f^{-1}(x^3)-3\right)<2\Leftrightarrow f\left(f^{-1}(x^3)-3\right)<f(-1)\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f^{-1}(x^3)-3>-1\Leftrightarrow$

$f^{-1}(x^3)>2\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f\left(f^{-1}(x^3)\right)<f(2)\Leftrightarrow x^3<-1\Leftrightarrow x<-1$.

δ) i. Επειδή η f είναι περιττή ισχύει ότι $f(-x)=-f(x)$ (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Για $x=-1$ είναι $f(1)=-f(-1)=-2$, άρα η C_f διέρχεται από το σημείο $\Gamma(1,-2)$.

ii. Για $x=0$ η (1) γίνεται: $f(0)=-f(0)\Leftrightarrow 2f(0)=0\Leftrightarrow f(0)=0$.

iii. Για $x>0\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f(x)<f(0)=0$ και $e^x>e^0=1\Leftrightarrow e^x-1>0$, άρα $\dfrac{f(x)}{e^x-1}<0$.

Για $x<0\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f(x)>f(0)=0$ και $e^x<e^0=1\Leftrightarrow e^x-1<0$, άρα $\dfrac{f(x)}{e^x-1}<0$.

33.α) Για $x=1$ είναι $f(f(1))=4\cdot1-3=1$ και για $x=f(1)$ είναι

$$f\left(\underbrace{f(f(1))}_{1}\right)=4f(1)-3\Leftrightarrow f(1)=4f(1)-3\Leftrightarrow 3f(1)=3\Leftrightarrow f(1)=1.$$

β) Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$, τότε

$f(f(x_1))=f(f(x_2))\Leftrightarrow 4x_1-\cancel{3}=4x_2-\cancel{3}\Leftrightarrow x_1=x_2\Rightarrow f$ 1−1.

Θέτουμε $f(x)=y$ και έχουμε: $f(y)=4x-3\Leftrightarrow 4x=f(y)+3\Leftrightarrow$

$x=\dfrac{1}{4}(f(y)+3)$ άρα $f^{-1}(y)=\dfrac{1}{4}(f(y)+3)$, $y\in\mathbb{R}$ οπότε και

$f^{-1}(x)=\dfrac{1}{4}(f(x)+3)$, $x\in\mathbb{R}$.

γ) Είναι $f(f(x))=\alpha f(x)+\beta=\alpha(\alpha x+\beta)+\beta=\alpha^2x+\alpha\beta+\beta$. Όμως $f(f(x))=4x-3$, άρα πρέπει $\alpha^2x+\alpha\beta+\beta=4x-3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Η τελευταία ισότητα ισχύει μόνο όταν $\begin{cases}\alpha^2=4\\ \alpha\beta+\beta=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\pm2\\ \alpha\beta+\beta=-3\end{cases}$.

Αν $\alpha=2$ τότε $2\beta+\beta=-3\Leftrightarrow 3\beta=-3\Leftrightarrow\beta=-1$ και $f(x)=2x-1$.

Αν $\alpha=-2$ τότε $-2\beta+\beta=-3\Leftrightarrow-\beta=-3\Leftrightarrow\beta=3$ και $f(x)=-2x+3$.

δ) i. Αν στη σχέση $f(f(x))=4x-3$ αντικαταστήσουμε όπου x το $g(x)$ προκύπτει: $f(f(g(x)))=4g(x)-3$. Όμως $f(f(g(x)))=4e^x+4x-7$, άρα

$4g(x)-3=4e^x+4x-7\Leftrightarrow 4g(x)=4e^x+4x-4\Leftrightarrow g(x)=e^x+x-1$.

ii. Παρατηρούμε ότι $g(0)=0$. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$, τότε $e^{x_1}<e^{x_2}$ και $e^{x_1}+x_1<e^{x_2}+x_2\Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2)\Rightarrow g\nearrow\mathbb{R}$.

Για κάθε $x>0\overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow}g(x)>g(0)=0$ και για κάθε $x<0\overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow}g(x)<g(0)=0$.

34.α) Έστω $x_1, x_2 \in (0,+\infty)$ με $x_1 < x_2$ (1), τότε: $\ln x_1 < \ln x_2$ (2) και με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) έχουμε: $\ln x_1 + x_1 < \ln x_2 + x_2 \Leftrightarrow$ $g(x_1) < g(x_2)$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

β) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, τότε: $f(x_1) + \ln f(x_1) < f(x_2) + \ln f(x_2) \Leftrightarrow$

$g(f(x_1)) < g(f(x_2)) \overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \nearrow \mathbb{R}$.

γ) Είναι $f(1) + \ln f(1) = 1 \Leftrightarrow g(f(1)) = g(1) \overset{g\ 1-1}{\Leftrightarrow} f(1) = 1$.

δ) $f \nearrow \mathbb{R} \Rightarrow 1-1$ και αντιστρέφεται. Θέτουμε $f(x) = y$ και η αρχική σχέση γίνεται: $y + \ln y = x \Leftrightarrow f^{-1}(y) = y + \ln y,\ y > 0$ άρα $f^{-1}(x) = x + \ln x,\ x > 0$.

ε) Αν στη σχέση $f(x) + \ln f(x) = x$ αντικαταστήσουμε όπου x το $f(3^x + x^3)$, προκύπτει: $f(f(3^x + x^3)) + \ln f(f(3^x + x^3)) = f(3^x + x^3)$, τότε:

$f(f(3^x + x^3)) + \ln f(f(3^x + x^3)) < 1 \Leftrightarrow f(3^x + x^3) < 1 \Leftrightarrow f(3^x + x^3) < f(1) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}$

$3^x + x^3 < 1 \Leftrightarrow 3^x + x^3 - 1 < 0$ (3). Έστω $h(x) = 3^x + x^3 - 1,\ x \in \mathbb{R}$.

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, τότε: $3^{x_1} < 3^{x_2}$, $x_1^3 < x_2^3$ οπότε και

$3^{x_1} + x_1^3 < 3^{x_2} + x_2^3 \Leftrightarrow 3^{x_1} + x_1^3 - 1 < 3^{x_2} + x_2^3 - 1 \Leftrightarrow h(x_1) < h(x_2) \Rightarrow h \nearrow \mathbb{R}$

$(3) \Rightarrow h(x) < h(0) \overset{h\nearrow}{\Leftrightarrow} x < 0$.

35.α) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$ (1), τότε $f^3(x_1) = f^3(x_2)$ (2) και με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) έχουμε:

$f^3(x_1) + f(x_1) = f^3(x_2) + f(x_2) \Leftrightarrow 2x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ άρα η f είναι 1-1 και αντιστρέφεται. Θέτουμε $f(x) = y$ και η αρχική σχέση γίνεται:

$y^3 + y = 2x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(y^3 + y)$ άρα $f^{-1}(y) == \frac{1}{2}(y^3 + y),\ y \in \mathbb{R}$, οπότε και

$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x^3 + x),\ x \in \mathbb{R}$.

β) Παρατηρούμε ότι $f^{-1}(0) = 0$ άρα $f(f^{-1}(0)) = f(0) \Leftrightarrow 0 = f(0)$ και $f^{-1}(1) = 1$ άρα $f(f^{-1}(1)) = f(1) \Leftrightarrow 1 = f(1)$.

γ) $f(f^{-1}(e^x) - 1) = 0 \Leftrightarrow f(f^{-1}(e^x) - 1) = f(0) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} f^{-1}(e^x) - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$f^{-1}(e^x) = 1 \Leftrightarrow f(f^{-1}(e^x)) = f(1) \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

δ) Επειδή οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την $y=x$, για να είναι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της f^{-1} αρκεί η C_f να βρίσκεται πάνω από την $y=x$, δηλαδή:

$f(x)>x \Leftrightarrow f^3(x)>x^3$, οπότε

και $f^3(x)+f(x)>x^3+x \Leftrightarrow$

$2x>x^3+x \Leftrightarrow$

$x^3-x<0 \Leftrightarrow x(x^2-1)<0 \Leftrightarrow$

$x\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$.

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
x^2-1	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
Γ	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

ε) Είναι $f(g(x))=g(f(x)) \Leftrightarrow g^{-1}(f(g(x)))=g^{-1}(g(f(x))) \Leftrightarrow$

$g^{-1}(f(g(x)))=(g^{-1}\circ g)(f(x)) \Leftrightarrow g^{-1}(f(g(x)))=f(x)$ και αν αντικαταστήσουμε όπου x το $g^{-1}(x)$, έχουμε: $g^{-1}\left(f\left(g\left(g^{-1}(x)\right)\right)\right)=f\left(g^{-1}(x)\right) \Leftrightarrow$

$g^{-1}(f(x))=f(g^{-1}(x))$, δηλαδή $(g^{-1}\circ f)(x)=(f\circ g^{-1})(x)$.

36.α) Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$.

Για $x=x_1$ και $y=x_2$ έχουμε: $|f(x_1)-f(x_2)|<|x_1-x_2|=-x_1+x_2 \Leftrightarrow$

$x_1-x_2+x_1-x_2<f(x_1)-f(x_2)+x_1-x_2<-x_1+x_2+x_1-x_2 \Leftrightarrow$

$2x_1-2x_2<g(x_1)-g(x_2)<0 \Rightarrow g(x_1)-g(x_2)<0 \Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2) \Rightarrow g\nearrow\mathbb{R}$.

β) Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι

$g(x_1)<g(x_2) \overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow} g(g(x_1))<g(g(x_2)) \Leftrightarrow (g\circ g)(x_1)<(g\circ g)(x_2) \Rightarrow g\circ g\nearrow\mathbb{R}$

γ) $f(x^2)-f(x)<x-x^2 \Leftrightarrow f(x^2)+x^2<f(x)+x \Leftrightarrow$

$g(x^2)<g(x) \overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow} x^2<x \Leftrightarrow x(x-1)<0 \Leftrightarrow 0<x<1$.

δ) Επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα είναι και $1-1$.

$g\left(g\left(4^x+x\right)\right)-g\left(f(18)+18\right)=0 \Leftrightarrow g\left(g\left(4^x+x\right)\right)=g\left(f(18)+18\right) \overset{g\ 1-1}{\Leftrightarrow}$

$g\left(4^x+x\right)=f(18)+18 \Leftrightarrow g\left(4^x+x\right)=g(18) \overset{g\ 1-1}{\Leftrightarrow} 4^x+x=18 \Leftrightarrow$

$4^x+x-18=0\,(1)$. Έστω $h(x)=4^x+x-18,\ x\in\mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι $4^{x_1}<4^{x_2}$ και $4^{x_1}+x_1<4^{x_2}+x_2 \Leftrightarrow$

$4^{x_1}+x_1-18<4^{x_2}+x_2-18 \Leftrightarrow h(x_1)<h(x_2) \Rightarrow h\nearrow\mathbb{R} \Rightarrow 1-1$.

$(1) \Rightarrow h(x)=h(2) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x=2$.

37.α) Επειδή η f είναι περιττή ισχύει ότι $f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Για $x=2$ είναι $f(-2)=-f(2)=2$. Επειδή $f(-2)>f(2)$ $(-2<2)$ και η f είναι γνησίως μονότονη, θα είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$, τότε $f(x_1)>f(x_2)(1)\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}$

$f(f(x_1))<f(f(x_2))\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(f(f(x_1)))>f(f(f(x_2)))$ (2)

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) έχουμε:

$f(f(f(x_1)))+f(x_1)>f(f(f(x_2)))+f(x_2)\Leftrightarrow g(x_1)>g(x_2)\Rightarrow g\searrow\mathbb{R}$.

γ) Επειδή οι συναρτήσεις f,g είναι γνησίως μονότονες είναι και 1-1 και αντιστρέφονται.

$f^{-1}(x)=g^{-1}(f(f(x))+x)\Leftrightarrow g(f^{-1}(x))=g(g^{-1}(f(f(x))+x))\Leftrightarrow$

$g(f^{-1}(x))=f(f(x))+x$ και αντικαθιστώντας όπου x το $f(x)$ έχουμε:

$g(f^{-1}(f(x)))=f(f(f(x)))+f(x)\Leftrightarrow g(x)=f(f(f(x)))+f(x)$ που ισχύει.

δ) Για $x=-2$ είναι $g(-2)=f(f(f(-2)))+f(-2)$, άρα η ανίσωση γίνεται:

$f(f(f(-2)))+f(-2)<g(g(x)-6)\Leftrightarrow g(-2)<g(g(x)-6)\overset{g\searrow}{\Leftrightarrow}$

$-2>g(x)-6\Leftrightarrow g(x)<4$ (3).

Είναι $g(-2)=f\left(f\left(\underbrace{f(-2)}_{2}\right)\right)+f(-2)=f\left(\underbrace{f(2)}_{-2}\right)+2=f(-2)+2=2+2=4$,

άρα η (3) γίνεται: $g(x)<g(-2)\overset{g\searrow}{\Leftrightarrow} x>-2$.

38.α) Για $x=y=1$ είναι $\cancel{f(1)}=\cancel{f(1)}+f(1)\Leftrightarrow f(1)=0$.

β) Για $y=\frac{1}{x}$ προκύπτει:

$f\left(x\cdot\frac{1}{x}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow \cancel{f(1)}^{0}=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$.

γ) Όπου y το $\frac{1}{y}$ προκύπτει: $f\left(x\cdot\frac{1}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)\Leftrightarrow f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$.

δ) Με βάση το β σκέλος είναι: $f\left(\frac{1}{x^2}\right)=-f(x^2)$ (1).

Όμως $f(x^2)=f(x\cdot x)=f(x)+f(x)=2f(x)$ και η (1) γίνεται:

$f\left(\frac{1}{x^2}\right)=-2f(x)$, άρα $f(x)+f\left(\frac{1}{x^2}\right)=-\ln x \Leftrightarrow$

$f(x)-2f(x)=-\ln x \Leftrightarrow -f(x)=-\ln x \Leftrightarrow f(x)=\ln x$.

ε) Επειδή $A_f=(0,+\infty)$ η $f\circ f$ ορίζεται όταν:

$\begin{cases} x\in A_f \\ f(x)\in A_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \ln x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x>1 \end{cases} \Rightarrow x>1$, άρα $A_{f\circ f}=(1,+\infty)$.

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=\ln(\ln x)$.

39.α) Για $x=y=0$ είναι $f(0)=f(0)f(0)\Leftrightarrow f^2(0)-f(0)=0\Leftrightarrow$

$f(0)(f(0)-1)=0 \Leftrightarrow f(0)=0$ απορρίπτεται ή $f(0)=1$.

β) Για $y=-x$ είναι $f(x-x)=f(x)f(-x)\Leftrightarrow f(0)=f(x)f(-x)\Leftrightarrow$

$1=f(x)f(-x)\Leftrightarrow f(-x)=\frac{1}{f(x)}$.

γ) Αντικαθιστώντας όπου y το $-y$ στην αρχική σχέση, έχουμε:

$f(x-y)=f(x)f(-y)=f(x)\frac{1}{f(y)}=\frac{f(x)}{f(y)}$.

δ) Αντικαθιστώντας $y=x$ στην αρχική σχέση, έχουμε:

$f(x+x)=f(x)f(x)\Leftrightarrow f(2x)=f^2(x)$, οπότε $f(2x)+e^{2x}=2e^xf(x)\Leftrightarrow$

$f^2(x)-2e^xf(x)+e^{2x}=0\Leftrightarrow (f(x)-e^x)^2=0\Leftrightarrow f(x)=e^x$.

ε) Είναι $x-x^2=x(1-x)$ και $x^3-x^4=x^3(1-x)$.

Αν $x<0$ ή $x>1$, τότε $x-x^2=x(1-x)<0\Leftrightarrow x<x^2\Leftrightarrow e^x<e^{x^2}$ (2) και

$x^3-x^4=x^3(1-x)<0\Leftrightarrow x^3<x^4\Leftrightarrow e^{x^3}<e^{x^4}$ (3) και με πρόσθεση κατά μέλη

των (2), (3) προκύπτει $e^x+e^{x^3}<e^{x^2}+e^{x^4}$.

Αν $0<x<1$ τότε $x-x^2=x(1-x)>0\Leftrightarrow x>x^2\Leftrightarrow e^x>e^{x^2}$ (4) και

$x^3-x^4=x^3(1-x)>0\Leftrightarrow x^3>x^4\Leftrightarrow e^{x^3}>e^{x^4}$ (5) και με πρόσθεση κατά μέλη

των (4), (5) προκύπτει $e^x+e^{x^3}>e^{x^2}+e^{x^4}$. Τέλος για $x=0$ ή $x=1$ ισχύει ότι $e^x+e^{x^3}=e^{x^2}+e^{x^4}$. Τελικά είναι: $e^x+e^{x^3}>e^{x^2}+e^{x^4}\Leftrightarrow 0<x<1$.

40.α) Έστω ότι υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)>x_0$, τότε

$f(x_0)+x_0>2x_0 \Leftrightarrow \frac{f(x_0)+x_0}{2}>x_0$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει ότι: $f\left(\dfrac{f(x_0)+x_0}{2}\right)>f(x_0)\Leftrightarrow x_0>f(x_0)$ άτοπο.

β) Όμοια με το προηγούμενο σκέλος αποδεικνύουμε ότι δεν υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)<x_0$ οπότε $f(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ) $g(x)=x-2\sqrt{x}+1=\left(\sqrt{x}\right)^2-2\sqrt{x}+1=\left(\sqrt{x}-1\right)^2,\ x\geq 0$.

Για να ορίζεται η $g\circ g$ πρέπει: $\begin{cases} x\in A_g \\ g(x)\in A_g \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\geq 0 \\ \left(\sqrt{x}-1\right)^2\geq 0 \end{cases}\Rightarrow x\geq 0$ και

$A_{g\circ g}=[0,+\infty)$. Είναι $(g\circ g)(x)=\left(\sqrt{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}-1\right)^2=\left(\left|\sqrt{x}-1\right|-1\right)^2$.

Αν $x>1$, τότε $(g\circ g)(x)=\left(\sqrt{x}-1-1\right)^2=\left(\sqrt{x}-2\right)^2=x-4\sqrt{x}+4\neq x$, ενώ αν $0\leq x\leq 1$ είναι $\sqrt{x}-1\leq 0$, οπότε $(g\circ g)(x)=\left(-\sqrt{x}+\cancel{1}-\cancel{1}\right)^2=x$.

Άρα $x\in[0,1]$.

δ) Η $f\circ g$ ορίζεται όταν $\begin{cases} x\in A_g \\ g(x)\in A_f \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\geq 0 \\ \left(\sqrt{x}-1\right)^2\in\mathbb{R} \end{cases}\Rightarrow x\geq 0$ και

$A_{f\circ g}=[0,+\infty)$. Είναι: $(f\circ g)(x)=f(g(x))=g(x)$.

Η $g\circ f$ ορίζεται όταν: $\begin{cases} x\in A_f \\ f(x)\in A_g \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ x\geq 0 \end{cases}\Rightarrow x\geq 0$ και $A_{g\circ f}=[0,+\infty)$.

Είναι: $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x)$. Άρα $f\circ g=g\circ f$ για κάθε $x\geq 0$.

41.α) Η f ορίζεται όταν: $x^2-1>0\Leftrightarrow x^2>1\Leftrightarrow|x|>1\Leftrightarrow$

$x<-1$ ή $x>1$ (1) και $\dfrac{3x-|x|-4}{2}\left(x^2-1\right)>0$ (2)

Αν $x\leq 0$ τότε: $(2)\Leftrightarrow\dfrac{3x+x-4}{2}\left(x^2-1\right)>0\Leftrightarrow 2(x-1)\left(x^2-1\right)>0\Leftrightarrow$

$2(x-1)^2(x+1)>0\overset{(x-1)^2\geq 0}{\Leftrightarrow}\begin{cases} x+1>0 \\ x\neq 1 \end{cases}\Leftrightarrow x>-1$. Δηλαδή $\dfrac{3x-|x|-4}{2}\left(x^2-1\right)>0$ για $x\in(-1,0]$.

Αν $x>0$ τότε: $(2)\Leftrightarrow\dfrac{3x-x-4}{2}\left(x^2-1\right)>0\Leftrightarrow$

$(x-2)\left(x^2-1\right)>0\Leftrightarrow x\in(-1,1)\cup(2,+\infty)$.

Δηλαδή $\frac{3x-|x|-4}{2}\left(x^2-1\right)>0$ για $(0,1)\cup(2,+\infty)$. Επομένως

x	$-\infty \quad -1$	1	2	$+\infty$
$x-2$	-	-	- 0	+
x^2-1	+ 0	-	+ 0	+
Γινόμενο	-	+	-	+

$$(2)\Leftrightarrow \frac{3x-|x|-4}{2}\left(x^2-1\right)>0\Leftrightarrow x\in(-1,1)\cup(2,+\infty).$$

Άρα για να ορίζεται η f πρέπει: $\begin{cases} x<-1 \quad ή \quad x>1 \\ x\in(-1,1)\cup(2,+\infty) \end{cases}\Leftrightarrow x>2$.

Για $x>2$ είναι $f(x)=2\ln\left(\frac{3x-|x|-4}{2}\left(x^2-1\right)\right)-2\ln\left(x^2-1\right)\Leftrightarrow$

$$f(x)=2\ln\left((x-2)\left(x^2-1\right)\right)-2\ln\left(x^2-1\right)\Leftrightarrow$$

$$f(x)=2\left[\ln\left((x-2)\left(x^2-1\right)\right)-\ln\left(x^2-1\right)\right]\Leftrightarrow f(x)=2\ln\left(\frac{(x-2)\cancel{\left(x^2-1\right)}}{\cancel{x^2-1}}\right)\Leftrightarrow$$

$$f(x)=2\ln(x-2),\ x>2.$$

Η g ορίζεται όταν $(x-2)^2>0\Leftrightarrow x-2\neq 0\Leftrightarrow x\neq 2$ και είναι

$$g(x)=\ln\left[(x-2)^2\right]\Leftrightarrow g(x)=2\ln|x-2|\Leftrightarrow g(x)=\begin{cases} 2\ln(2-x),\ x<2 \\ 2\ln(x-2),\ x>2 \end{cases}$$

Οι f,g δεν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού άρα δεν είναι ίσες.

Για κάθε $x>2$ ισχύει $f(x)=g(x)$ άρα το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο είναι ίσες είναι το $(2,+\infty)$.

β) Για κάθε $x_1,x_2\in(2,+\infty)$ με $2<x_1<x_2$ είναι

$$0<x_1-2<x_2-2\Rightarrow \ln(x_1-2)<\ln(x_2-2)\Rightarrow$$

$2\ln(x_1-2)<2\ln(x_2-2)\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)\Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2)$ άρα οι f,g είναι γνησίως αύξουσες στο $(2,+\infty)$.

Για κάθε $x_1,x_2\in(-\infty,2)$ με $x_1<x_2<2$ είναι

$$-x_1>-x_2>-2\Rightarrow 2-x_1>2-x_2>0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln(2-x_1)<\ln(2-x_2)\Rightarrow 2\ln(2-x_1)<2\ln(2-x_2)\Rightarrow g(x_1)>g(x_2).$$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,2)$.

γ) i. Είναι για κάθε $x>y>0$: $(x-y)^2>0\Leftrightarrow x^2-2xy+y^2>0\Leftrightarrow$

$$x^2+y^2>2xy\Leftrightarrow x^2+y^2+2>2(xy+1).$$

Είναι $x>y>0$ άρα $x^2+y^2>0 \Leftrightarrow x^2+y^2+2>2$ και
$2xy>0 \Leftrightarrow 2xy+2>2 \Leftrightarrow 2(xy+1)>2$.

Άρα $x^2+y^2+2>2(xy+1)>2 \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f\left(x^2+y^2+2\right)>f\left[2(xy+1)\right]$.

ii. Ισχύει $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3=(x-y)^3>0$ αφού $x>y>0$ άρα
έχουμε: $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3>0 \Leftrightarrow x^3+3xy^2>y^3+3x^2y \Leftrightarrow$
$x^3+3xy^2+2>y^3+3x^2y+2 \quad (1)$

Επειδή $x>y>0$ τότε $x^3+3xy^2>0 \Leftrightarrow x^3+3xy^2+2>2$ και
$y^3+3x^2y>0 \Leftrightarrow y^3+3x^2y+2>2$ άρα η (1) γίνεται:
$x^3+3xy^2+2>y^3+3x^2y+2>2 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f\left(x^3+3xy^2+2\right)>f\left(y^3+3x^2y+2\right)$.

δ) Η $f\circ f$ ορίζεται όταν $\begin{cases} x>2 \\ f(x)>2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ 2\ln(x-2)>2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ \ln(x-2)>1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x>2 \\ x-2>e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x>e+2 \end{cases} \Leftrightarrow x>e+2$ άρα η $f\circ f$ έχει πεδίο ορισμού το
$(e+2,+\infty)$. Για κάθε $x>e+2$ είναι
$(f\circ f)(x)=f(f(x))=2\ln(f(x)-2)=2\ln(2\ln(x-2)-2)$.

ε) Για κάθε $x>e+2$: $2\ln\left[\ln\dfrac{(x-2)^2}{e^2}\right]>f\left(\ln(e+1)^2\right) \Leftrightarrow$

$$2\ln\left[\ln\left(\frac{x-2}{e}\right)^2\right]>f\left(\ln(e+1)^2\right) \overset{x>e+2>2}{\Leftrightarrow}$$

$$2\ln\left[2\ln\left(\frac{x-2}{e}\right)\right]>f\left(\ln(e+1)^2\right) \overset{x>e+2>2}{\Leftrightarrow}$$

$$2\ln\left[2\left(\ln(x-2)-1\right)\right]>f\left(\ln(e+1)^2\right) \Leftrightarrow$$

$$2\ln\left[2\ln(x-2)-2\right]>f\left(\ln(e+1)^2\right) \Leftrightarrow 2\ln\left[f(x)-2\right]>f\left(\ln(e+1)^2\right) \Leftrightarrow$$

$$f(f(x))>f\left(\ln(e+1)^2\right) \underset{x>e+2>2}{\overset{f\nearrow(2,+\infty)}{\Leftrightarrow}} f(x)>\ln(e+1)^2 \Leftrightarrow$$

$$f(x)>2\ln(e+1) \Leftrightarrow f(x)>f(e+3) \underset{x>e+2>2}{\overset{f\nearrow(2,+\infty)}{\Leftrightarrow}} x>e+3.$$

στ) Είναι $h(x)=|f(x)|=|2\ln(x-2)|=2|\ln(x-2)|\geq 0=h(3)$ για κάθε $x>2$
άρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=3$ το $h(3)=0$.

Για $2<x<3 \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(x)<f(3)=0$ και για $x\geq 3 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x)\geq f(3)=0$ άρα

$$h(x)=|f(x)|=\begin{cases}-f(x)\ ,\ 2<x<3\\ \ f(x)\ \ ,\ x\geq 3\end{cases}.$$

42.α) Αρχικά για το πεδίο ορισμού της $g(x)=f(|x|)$ έχουμε:

$D_g=\{|x|\in\mathbb{R}\,/\,x\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$ αφού πρόκειται για σύνθεση συναρτήσεων.

Για κάθε $x_1<x_2\leq 0 \Rightarrow |x_1|>|x_2| \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(|x_1|)>f(|x_2|)\Rightarrow$

$\Rightarrow g(x_1)>g(x_2)\Rightarrow g\searrow(-\infty,0]$.Για κάθε $0\leq x_1<x_2 \overset{x_1,x_2\geq 0}{\Rightarrow}$

$|x_1|<|x_2| \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(|x_1|)<f(|x_2|)\Rightarrow g(x_1)<g(x_2)\Rightarrow g\nearrow[0,+\infty)$.

β) 1ος τρόπος: Ισχύει $|x|\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f\nearrow\mathbb{R}$ άρα

$|x|\geq 0 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(|x|)\geq f(0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει για

$|x|=0\Leftrightarrow x=0$. Άρα η $f(|x|)=g(x)$ έχει ελάχιστο το $f(0)=g(0)$ για $x=0$

2ος τρόπος: Για $x<0 \overset{g\searrow}{\Leftrightarrow} g(x)>g(0)$, για $x>0 \overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow} g(x)>g(0)$ και για

$x=0: g(x)=g(0)$, άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $g(x)\geq g(0)$ με την ισότητα

να ισχύει για $x=0$. Άρα η g έχει ελάχιστο το $g(0)$ για $x=0$.

γ) Για $x\leq 0$: $f(x)=f(|x|)\Leftrightarrow f(x)-f(|x|)=0$. Έστω η συνάρτηση

$k(x)=f(x)-f(|x|)=f(x)-g(x)\ ,x\leq 0$. Για κάθε $x_1<x_2\leq 0 \underset{g\searrow}{\overset{f\nearrow}{\Rightarrow}}$

$$\begin{cases}f(x_1)<f(x_2)\\ g(x_1)>g(x_2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(x_1)<f(x_2)\\ -g(x_1)<-g(x_2)\end{cases}\Rightarrow k(x_1)<k(x_2)\Rightarrow k\nearrow(-\infty,0].$$

Ισχύει $k(0)=f(0)-f(|0|)=f(0)-g(0)=0$ άρα το μηδέν είναι μία ρίζα της εξίσωσης $k(x)=0\Leftrightarrow f(x)=f(|x|)$ και επειδή η $k\nearrow(-\infty,0]$ τότε το μηδέν είναι η μοναδική ρίζα στο διάστημα αυτό.

δ) Ισχύει ότι $h(x)=\sqrt{\left(\sqrt{x^2+4}\right)(|x|-x)}\ ,x\in\mathbb{R}$ άρα έχουμε ότι:

$$h(f(x))=\sqrt{\left(\sqrt{f^2(x)+4}\right)(|f(x)|-f(x))}\Leftrightarrow$$

$$(h\circ f)(x)=\sqrt{\left(\sqrt{f^2(x)+4}\right)(|f(x)|-f(x))}\quad(3)\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Επίσης $(h\circ f)(x)=\sqrt{\left(\sqrt{x^4+4x^2+4}\right)\left(|f(x)|-f(x)\right)}$, $x\le\rho$ (4)

Για $x\le\rho \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x)\le f(\rho)=0$ άρα $|f(x)|=-f(x)$ για κάθε $x\le\rho$ και η ισότητα ισχύει για $x=\rho$ και οι σχέσεις (3) και (4) γίνονται:

$(h\circ f)(x)=\sqrt{-2f(x)\sqrt{f^2(x)+4}}$, $x\in\mathbb{R}$ (3) και

$(h\circ f)(x)=\sqrt{-2f(x)\sqrt{x^4+4x^2+4}}$, $x\le\rho$ (4)

Άρα από (3) και (4) για $x<\rho$ ισχύει:

$\sqrt{-2f(x)\sqrt{f^2(x)+4}}=\sqrt{-2f(x)\sqrt{x^4+4x^2+4}} \Leftrightarrow$

$-2f(x)\sqrt{f^2(x)+4}=-2f(x)\sqrt{x^4+4x^2+4} \overset{f(x)<0}{\Leftrightarrow}$

$\sqrt{f^2(x)+4}=\sqrt{x^4+4x^2+4} \Leftrightarrow f^2(x)+4=x^4+4x^2+4 \Leftrightarrow$

$f^2(x)=x^4+4x^2 \Leftrightarrow |f(x)|=\sqrt{x^4+4x^2} \overset{f(x)<0}{\Leftrightarrow} -f(x)=\sqrt{x^2(x^2+4)} \Leftrightarrow$

$f(x)=-|x|\sqrt{x^2+4}$ (5). Ισχύει $x\le\rho\le 0$ άρα τελικά η (5) γίνεται

$f(x)=x\sqrt{x^2+4}$, $x<\rho$ και για $x=\rho: f(x)=0$ άρα τελικά

$$f(x)=\begin{cases} x\sqrt{x^2+4} & ,x<\rho \\ 0 & ,x=\rho \end{cases}.$$

43.α) Είναι $\sqrt{\ln x}-1>0 \Leftrightarrow \sqrt{\ln x}>1 \Leftrightarrow \ln x>1 \Leftrightarrow x>e$ και

$\sqrt{\ln x}-1<0 \Leftrightarrow \sqrt{\ln x}<1 \Leftrightarrow \ln x<1 \Leftrightarrow 1\le x<e$ και επίσης

$\sqrt{\ln x}-1=0 \Leftrightarrow \sqrt{\ln x}=1 \Leftrightarrow \ln x=1 \Leftrightarrow x=e$.

Για κάθε $x_1,x_2\ge 1$ με $x_1<x_2$ είναι $\ln x_1<\ln x_2 \overset{x_1,x_2\ge 1}{\Rightarrow}$

$\sqrt{\ln x_1}<\sqrt{\ln x_2} \Rightarrow \sqrt{\ln x_1}-1<\sqrt{\ln x_2}-1$ (1)

Αν $1\le x_1<x_2\le e$ τότε $(1)\Rightarrow \left(\sqrt{\ln x_1}-1\right)^2>\left(\sqrt{\ln x_2}-1\right)^2 \Rightarrow$

$f(x_1)>f(x_2)\Rightarrow f\searrow[1,e]$. Αν $e\le x_1<x_2$ τότε

$(1)\Rightarrow \left(\sqrt{\ln x_1}-1\right)^2<\left(\sqrt{\ln x_2}-1\right)^2 \Rightarrow \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)\Rightarrow f\nearrow[e,+\infty)$

Για κάθε $x\ge 1$ ισχύει $\left(\sqrt{\ln x}-1\right)^2\ge 0 \Leftrightarrow f(x)\ge f(e)$ άρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=e$ το $f(e)=0$.

β) Για κάθε $x \ge \frac{e}{2}$ είναι $\ln\left(\frac{x^2+1}{2x}\right) \le 2\left(\sqrt{\ln\left(x^2+1\right)}-\sqrt{\ln x+\ln 2}\right) \Leftrightarrow$

$\ln\left(x^2+1\right)-\ln(2x) \le 2\sqrt{\ln\left(x^2+1\right)}-2\sqrt{\ln x+\ln 2} \Leftrightarrow$

$\ln\left(x^2+1\right)-\ln(2x) \le 2\sqrt{\ln\left(x^2+1\right)}-2\sqrt{\ln(2x)} \Leftrightarrow$

$\ln\left(x^2+1\right)-2\sqrt{\ln\left(x^2+1\right)} \le \ln(2x)-2\sqrt{\ln(2x)} \Leftrightarrow$

$\ln\left(x^2+1\right)-2\sqrt{\ln\left(x^2+1\right)}+1 \le \ln(2x)-2\sqrt{\ln(2x)}+1 \Leftrightarrow$

$\left(\sqrt{\ln\left(x^2+1\right)}-1\right)^2 \le \left(\sqrt{\ln(2x)}-1\right)^2 \Leftrightarrow f\left(x^2+1\right) \le f(2x)$.

Είναι $x \ge \frac{e}{2} \Leftrightarrow x^2 \ge \frac{e^2}{4} \Leftrightarrow x^2+1 \ge \frac{e^2}{4}+1 > e$

(πράγματι $\frac{e^2}{4}+1 > e \Leftrightarrow e^2+4 > 4e \Leftrightarrow (e-2)^2 > 0$ ισχύει) και $x \ge \frac{e}{2} \Leftrightarrow 2x \ge e$.

Η $f \nearrow [e,+\infty)$ οπότε $f\left(x^2+1\right) \le f(2x) \Leftrightarrow x^2+1 \le 2x \Leftrightarrow x^2-2x+1 \le 0 \Leftrightarrow$

$(x-1)^2 \le 0 \Leftrightarrow x=1$ απορρίπτεται αφού $x \ge \frac{e}{2} > 1$ άρα η ανίσωση είναι αδύνατη.

γ) $D_{b(x)} = \left\{x \in \mathbb{R} / e^x \in D_f\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} / e^x \ge 1\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} / x \ge 0\right\} = [0,+\infty)$ και

ισχύει $b(x) = f\left(e^x\right) = \left(\sqrt{\ln e^x}-1\right)^2 = \left(\sqrt{x}-1\right)^2$, $x \ge 0$.

Πρέπει $\begin{cases}(x-1)^2 \in D_{b(x)} \\ b(x) \in \mathbb{R}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)^2 \ge 0 \\ b(x) \in \mathbb{R}\end{cases} \Rightarrow x \ge 0$. Άρα $D_{b\left((x-1)^2\right)} = [0,+\infty)$

$$b\left((x-1)^2\right) = \left(\sqrt{(x-1)^2}-1\right)^2 = \left(|x-1|-1\right)^2 = \begin{cases} x^2 & ,0 \le x < 1 \\ (x-2)^2 & , x \ge 1\end{cases}.$$

δ) $g(x) = \begin{cases} x+\lambda & , x<2 \\ b\left((x-1)^2\right) & , x \ge 2\end{cases} = \begin{cases} x+\lambda & , x<2 \\ (x-2)^2 & , x \ge 2\end{cases}$.

Για να είναι 1-1 η g πρέπει για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \ne x_2$ να είναι $g\left(x_1\right) \ne g\left(x_2\right)$.

Για κάθε $x_1, x_2 < 2$ με $x_1 \ne x_2 \Rightarrow x_1+\lambda \ne x_2+\lambda \Rightarrow$

$g\left(x_1\right) \ne g\left(x_2\right)$. Για κάθε $x_1, x_2 \ge 2$ με $x_1 \ne x_2 \Rightarrow x_1-2 \ne x_2-2 \overset{x_1,x_2 \ge 2}{\Rightarrow}$

$\left(x_1-2\right)^2 \ne \left(x_2-2\right)^2 \Rightarrow g\left(x_1\right) \ne g\left(x_2\right)$.

Για κάθε $x<2 \Leftrightarrow x+\lambda<\lambda+2 \Leftrightarrow g(x)<\lambda+2$ και για

$x \ge 2 \Leftrightarrow x-2 \ge 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 \ge 0 \Leftrightarrow g(x) \ge 0$.

Για να είναι $g(x_1) \ne g(x_2)$ πρέπει $\lambda+2 \le 0 \Leftrightarrow \lambda \le -2$.

ε) Έχουμε $g(x)=\begin{cases} x-2 & , x<2 \\ (x-2)^2 & , x \ge 2 \end{cases}$ και προφανώς αφού $\lambda=-2 \le 0$ η g αντιστρέφεται σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα.

Για $x<2: y=g(x) \Leftrightarrow y=x-2 \Leftrightarrow x=y+2,\ y+2<2 \Leftrightarrow y<0$ άρα

$g^{-1}(y)=y+2,\ y<0$ άρα τελικά $g^{-1}(x)=x+2,\ x<0$.

Για $x \ge 2: y=g(x) \Leftrightarrow y=(x-2)^2 \overset{y\ge 0}{\Leftrightarrow} |x-2|=\sqrt{y} \overset{x\ge 2}{\Leftrightarrow} x-2=\sqrt{y} \Leftrightarrow$

$x=\sqrt{y}+2,\ \sqrt{y}+2 \ge 2 \Leftrightarrow \sqrt{y} \ge 0 \Leftrightarrow y \ge 0$ άρα $g^{-1}(y)=\sqrt{y}+2,\ y \ge 0$.

Άρα έχουμε: $g^{-1}(x)=\sqrt{x}+2,\ x \ge 0$. Άρα τελικά $g^{-1}(x)=\begin{cases} x+2 & ,x<0 \\ \sqrt{x}+2 & , x \ge 0 \end{cases}$.

στ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $x-2<x$ άρα για $x<2$ είναι $g(x)<x$.

Για $x \ge 2$ είναι $g(x)-x=(x-2)^2-x=x^2-4x+4-x=$

$=x^2-5x+4=(x-1)(x-4)$.

Είναι $x^2-5x+4>0$ για κάθε $x \in (-\infty,1)\cup(4,+\infty)$, $x^2-5x+4<0$ για κάθε $x \in (1,4)$ και $x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=4$.

Άρα τελικά είναι $g(x)-x<0 \Leftrightarrow g(x)<x$ για κάθε $x \in [2,4)$, $g(x)=x$ για $x=4$ και $g(x)-x>0 \Leftrightarrow g(x)>x$ για κάθε $x \in (4,+\infty)$.

Επομένως $g(x)<x$ για κάθε $x \in (-\infty,4)$ και $g(x)>x$ για κάθε $x \in (4,+\infty)$.

Μοναδικό κοινό σημείο είναι το (4,4).

ζ) Λόγω συμμετρίας των C_g και $C_{g^{-1}}$ ως προς την $y=x$ σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα είναι $g(x)<x<g^{-1}(x)$ για κάθε $x \in (-\infty,4)$ και

$g(x)>x>g^{-1}(x)$ για κάθε $x \in (4,+\infty)$.

Είναι $g(4)=g^{-1}(4)=4$ άρα μοναδικό κοινό σημείο το (4,4).

44.α) Για $x=1$ έχουμε: $2f^2(2)-10\sqrt{2}f(2) \le -25 \Leftrightarrow$

$2f^2(2)-10\sqrt{2}f(2)+25 \le 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}f(2)-5\right)^2 \le 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}f(2)=5 \Leftrightarrow$

$f(2)=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$. Για $x=0$ έχουμε: $2f^2(1)-10\sqrt{2}f(1) \le -25 \Leftrightarrow$

$2f^2(1)-10\sqrt{2}\,f(1)+25\le 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\,f(1)-5\right)^2\le 0 \Leftrightarrow$

$\sqrt{2}\,f(1)=5 \Leftrightarrow f(1)=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ άρα αφού $f(1)=f(2)$ τότε δεν είναι 1-1.

β) Για $x=2021$ και για $x=2022$ έχουμε αντίστοιχα:

$2g(2020)\le g(2020)+g(2021)\Leftrightarrow g(2020)\le g(2021)$ και

$2g(2021)\le g(2020)+g(2021)\Leftrightarrow g(2021)\le g(2020)$.

Άρα $g(2020)=g(2021)$. Άρα δεν είναι 1-1 η g.

γ) $D_{f\circ g}=\{x\in\mathbb{R}\mid g(x)\ge 0\}=\mathbb{R}$ αφού $g(x)\in[0,+\infty)$ άρα το $g(\mathbb{R})\subseteq[0,+\infty)$ άρα $g(x)\in[0,+\infty)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αφού η g δεν είναι 1-1 τότε θα υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1\ne x_2$ τέτοια ώστε: $g(x_1)=g(x_2)\Rightarrow f(g(x_1))=f(g(x_2))\Rightarrow$ $(f\circ g)(x_1)=(f\circ g)(x_2)$. Άρα η $f\circ g$ δεν είναι 1-1.

δ) Από το ερώτημα **γ)** αφού $g(2020)=g(2021)$ προκύπτει:

$2g(x)\le 2g(2020)\Rightarrow g(x)\le g(2020)\Rightarrow g(x)\le g(2021)$. Άρα η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x=2021$ και $x=2022$ το $g(2020)=g(2021)$.

ε) Για το πεδίο ορισμού της $a\circ f$ έχουμε:

$D_{a\circ f}=\{x\in D_f\,/\,f(x)\in D_a\}=\{x\ge 0\,/\,f(x)\in\mathbb{R}\}=[0,+\infty)$.

Έστω ότι $a\circ f\nearrow[0,+\infty)$ οπότε θα είναι και 1-1 άτοπο.

Ομοίως αν $a\circ f\searrow[0,+\infty)$ τότε προκύπτει $f\searrow[0,+\infty)$ και προκύπτει ξανά άτοπο. Άρα δεν υπάρχει τέτοια συνάρτηση $a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

45.α) Το $M(x,y)$ είναι σημείο της $y=x-2$ άρα είναι $M(x,x-2)$.

Άρα $E(x)=(AM)\cdot(BM)=|x||x-2|=|x^2-2x|$, $x\in\mathbb{R}$.

β) $f(x)=E(x)=x|x-2|=x(-x+2)=-x^2+2x=$

$=-x^2+2x-1+1=-(x-1)^2+1$, $x\in[0,1]$.

Για κάθε $0\le x_1<x_2\le 1\Rightarrow -1\le x_1-1<x_2-1\le 0\Rightarrow$

$(x_1-1)^2>(x_2-1)^2\Rightarrow -(x_1-1)^2<-(x_2-1)^2\Rightarrow$

$-(x_1-1)^2+1<-(x_2-1)^2+1\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)\Rightarrow f\nearrow[0,1]$ άρα είναι $1-1$ άρα αντιστρέφεται.

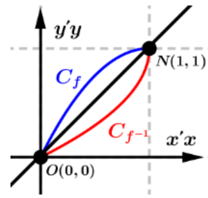
$y=f(x)\Leftrightarrow y=-(x-1)^2+1\Leftrightarrow (x-1)^2=1-y \overset{y\le 1}{\Leftrightarrow} |x-1|=\sqrt{1-y} \overset{x<1}{\Leftrightarrow}$

$-x+1=\sqrt{1-y}\Leftrightarrow x=1-\sqrt{1-y}$.

Πρέπει $0 \le x \le 1 \Leftrightarrow 0 \le 1-\sqrt{1-y} \le 1 \Leftrightarrow 0 \le \sqrt{1-y} \le 1 \Leftrightarrow 1-y \le 1 \Leftrightarrow y \ge 0$ άρα τελικά $y \in [0,1]$.

Άρα είναι $f^{-1}(x) = 1-\sqrt{1-x}$, $x \in [0,1]$.

γ) Σχεδιάζουμε ή τη γραφική παράσταση της f ή τη γραφική παράσταση της f^{-1}. Επειδή οι δύο συναρτήσεις είναι αντίστροφες τότε είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$. Έτσι σχεδιάζουμε την άλλη συμμετρική ως προς την ευθεία $y = x$.



δ) Αν $x \in [0,2]$ τότε:

$$E(x) = |x^2-2x| = -x^2+2x = -x^2+2x-1+1 = -(x-1)^2+1.$$

i. Για κάθε $x \in [0,2]$ είναι $(x-1)^2 \ge 0 \Leftrightarrow -(x-1)^2 \le 0 \Leftrightarrow$

$-(x-1)^2+1 \le 1 \Leftrightarrow E(x) \le E(1)$, άρα το εμβαδό γίνεται μέγιστο για x = 1, τότε M(1,1) και το OAMB είναι τετράγωνο πλευράς 1.

ii. Είναι $d(M, y'y) = (OB) = |x| = x$ και

$d(M, x'x) = (OA) = |y| = |x-2| = (-x+2)$.

Είναι $d^2(M, y'y) + d^2(M, x'x) = x^2 + (-x+2)^2 =$

$= x^2 + x^2 - 4x + 4 = 2x^2 - 4x + 4 = 2(x^2-2x+2) = 2\left[(x-1)^2+1\right]$.

Για κάθε $x \in [0,2]$ είναι $(x-1)^2 \ge 0 \Leftrightarrow (x-1)^2+1 \ge 1 \Leftrightarrow$

$2\left[(x-1)^2+1\right] \ge 2 \Leftrightarrow d^2(M, y'y) + d^2(M, x'x) = x^2 + (-x+2)^2 \ge 2$ με την ισότητα να ισχύει για x = 1. Άρα το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων του M από τους άξονες να γίνει ελάχιστο για x = 1, δηλαδή όταν M(1,1).

Διαγωνίσματα στις συναρτήσεις

1ο Διαγώνισμα

Θέμα Α

Α1. α. **Α2. δ.**

Α3. $f(-2)=2 \Leftrightarrow 8+\alpha=2 \Leftrightarrow \alpha=-6$, $f(3)=-6 \Leftrightarrow 9+3\alpha+\beta=-6 \Leftrightarrow \beta=3$

Α4. ε) **Α5. β)**

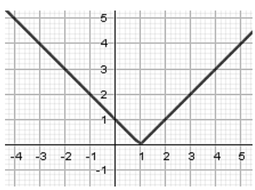
Θέμα Β

Β1. Η $g \circ f$ ορίζεται όταν $\begin{cases} x \in D_f \\ f(x) \in D_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x^2-2x+9 \geq 8 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x^2-2x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ (x-1)^2 \geq 0 \text{ ισχύει} \end{cases}$, άρα $D_{g \circ f}=\mathbb{R}$ και

$(g \circ f)(x)=g(f(x))=\sqrt{x^2-2x+1}=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$.

Β2.



Β3. $h(x)-1 \geq 0 \Leftrightarrow |x-1| \geq 1 \Leftrightarrow (x-1 \leq -1 \Leftrightarrow x \leq 0)$ ή $(x-1 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 2)$

$D_h=(-\infty,0] \cup [2,+\infty)$.

Β4. $F(x+2)=f(x)=x^2-2x+9$, θέτουμε $x+2=\omega \Leftrightarrow x=\omega-2$, οπότε

$F(\omega)=(\omega-2)^2-2(\omega-2)+9=\omega^2-6\omega+17$ άρα $F(x)=x^2-6x+17,\ x \in \mathbb{R}$.

Β5. $g(t(x))=\sqrt{t(x)-8}=x,\ x \geq 0 \Leftrightarrow t(x)-8=x^2 \Leftrightarrow t(x)=x^2+8,\ x \geq 0$.

Θέμα Γ

Γ1. Έστω $x_1,x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1<x_2 \Leftrightarrow 2x_1<2x_2$ (1) και $e^{x_1}<e^{x_2}$ (2)

Από $(1)+(2) \Rightarrow f(x_1)<f(x_2) \Rightarrow f \nearrow \mathbb{R}$.

Γ2. $\dfrac{e^{\alpha}-e^{\beta}}{\beta-\alpha}<2 \Leftrightarrow e^{\alpha}-e^{\beta}<2\beta-2\alpha \Leftrightarrow e^{\alpha}+2\alpha<e^{\beta}+2\beta \Leftrightarrow$

$f(\alpha)<f(\beta) \overset{f \nearrow}{\Leftrightarrow} \alpha<\beta$ ισχύει.

Γ3. $f\nearrow\mathbb{R}\Rightarrow f$ $1-1$ και αντιστρέφεται. $f^{-1}(1)=k\Leftrightarrow f(k)=1=f(0)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}k=0$,

$f^{-1}(e+2)=n\Leftrightarrow f(n)=e+2=f(1)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}n=1$.

Γ4. $e^{x+e^x}+2e^x+2x=e+2\Leftrightarrow f(f(x))=f(1)\overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow}f(x)=1\Leftrightarrow$

$f(x)=f(0)\overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow}x=0$.

Θέμα Δ

Δ1. Έστω ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1)\geq f(x_2)$ (1)
Τότε: $f^3(x_1)\geq f^3(x_2)$ (2) και με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) προκύπτει
$f^3(x_1)+f(x_0)\geq f^3(x_2)+f(x_2)\Leftrightarrow x_1+3\geq x_2+3\Leftrightarrow x_1\geq x_2$ που είναι άτοπο.
Άρα $f(x_1)<f(x_2)\Rightarrow f\nearrow\mathbb{R}$.

Δ2. Για $x=1: f^3(1)+3f(1)=4\Leftrightarrow f^3(1)+3f(1)-4=0\Leftrightarrow$
$(f(1)-1)(f^2(1)+f(1)+4)=0\Leftrightarrow f(1)=1$ ή $f^2(1)+f(1)+4=0$ αδύνατη.
Για $x=-3: f^3(-3)+3f(-3)=0\Leftrightarrow f(-3)(f^2(-3)+3)=0\Leftrightarrow f(-3)=0$ ή
$f^2(-3)=-3$ αδύνατη.

Δ3. α) $f(f(x^2-2))>f(f(x))\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x^2-2)>f(x)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}x^2-2>x\Leftrightarrow$
$x^2-x-2>0\Leftrightarrow x<-1$ ή $x>2$.

β) $f(x)<1\Leftrightarrow f(x)<f(1)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}x<1$.

γ) $f(f(x^2)-4)<0\Leftrightarrow f(f(x^2)-4)<f(-3)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x^2)-4<-3\Leftrightarrow$
$f(x^2)<1=f(1)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}x^2<1\Leftrightarrow -1<x<1$.

Δ4. Έστω ότι για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ είναι $g(x_1)>g(x_2)$ τότε $e^{g(x_1)}>e^{g(x_2)}$ και
$e^{g(x_1)}+g(x_1)>e^{g(x_2)}+g(x_2)\Leftrightarrow x_1+3>x_2+3\Leftrightarrow x_1>x_2$ άτοπο.

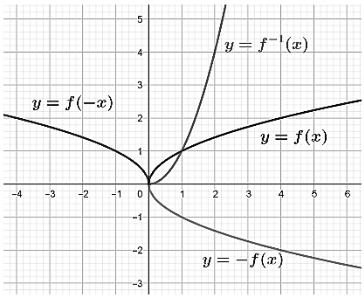
Δ5. $f(x)>0\Leftrightarrow 3f(x)>0$ (3), $f(x)>0\Leftrightarrow f^3(x)>0$ (4)
Από $(3)+(4)\Rightarrow f^3(x)+3f(x)>0\Leftrightarrow x+3>0\Leftrightarrow x>-3$.

2ο Διαγώνισμα

Θέμα Α

Α1. **α)** Λ **β)** Σ **γ)** Σ **δ)** Λ **ε)** Λ **στ)** Σ **ζ)** Λ **η)** Σ

Α2.



Θέμα Β

Β1. Για $x \le 1$ η f είναι ευθεία με κλίση $\alpha = 1 > 0$, οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$. Για $x > 1$ η f είναι ευθεία με κλίση $\alpha = 2 > 0$, οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$. Έστω $x_1 \le 1$ και $x_2 > 1$.

Είναι $x_1 - 1 \le 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x_1) \le 0$ και $2x_2 > 2 \Leftrightarrow 2x_2 + 1 > 3 \Leftrightarrow f(x_2) > 3$

άρα και πάλι $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Β2. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

Για $x \le 1$ είναι $f(x) = y \Leftrightarrow x - 1 = y \Leftrightarrow x = y + 1$. Πρέπει $y + 1 \le 1 \Leftrightarrow y \le 0$.

Για $x > 1$ είναι $f(x) = y \Leftrightarrow 2x + 1 = y \Leftrightarrow x = \frac{y-1}{2}$. Πρέπει $\frac{y-1}{2} > 1 \Leftrightarrow$

$y - 1 > 2 \Leftrightarrow y > 3$. Άρα $f^{-1}(y) = \begin{cases} y+1, & y \le 0 \\ \frac{y-1}{2}, & y > 3 \end{cases}$, οπότε $f^{-1}(x) = \begin{cases} x+1, & x \le 0 \\ \frac{x-1}{2}, & x > 3 \end{cases}$.

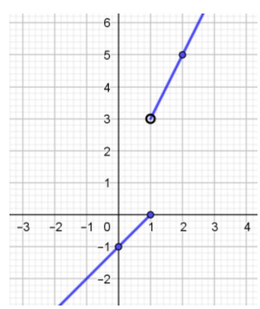
Β3. Ο κάθε κλάδος της f είναι μια ημιευθεία, για το λόγο αυτό βρίσκουμε 2 σημεία σε κάθε περίπτωση.

$y = x - 1$

x	1	0
y	0	-1

$y = 2x + 1$

x	1	2
y	3	5



Β4. Για κάθε $x_1, x_1 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, επειδή η $f \circ g$ είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει ότι: $(f \circ g)(x_1) < (f \circ g)(x_2) \Leftrightarrow$

$$f(g(x_1)) < f(g(x_2)) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} g(x_1) < g(x_2) \Rightarrow g \nearrow \mathbb{R}.$$

Β5. Έστω $f(x) = x - 1,\ x \le 1$.

Η $g \circ f$ ορίζεται όταν: $\begin{cases} x \in A_f \\ f(x) \in A_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1 \\ x - 1 \ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1 \\ x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le x \le 1$.

Τότε $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x-1)^2 + 2 = x^2 - 2x + 1 + 2 = x^2 - 2x + 3$.

Έστω $f(x) = 2x + 1,\ x > 1$. Η $g \circ f$ στη περίπτωση αυτή ορίζεται όταν:

$$\begin{cases} x \in A_f \\ f(x) \in A_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ 2x + 1 \ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x \ge -1 \end{cases} \Rightarrow x > 1.$$

Τότε $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (2x+1)^2 + 2 = 4x^2 + 4x + 1 + 2 = 4x^2 + 4x + 3$.

Δηλαδή $(g \circ f)(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3, & 0 \le x \le 1 \\ 4x^2 + 4x + 3, & x > 1 \end{cases}$.

Θέμα Γ

Γ1. Για να ορίζεται η $f \circ f$ πρέπει: $\begin{cases} x \in A_f \\ f(x) \in A_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne \alpha \\ \dfrac{\alpha x + \beta}{x - \alpha} \ne \alpha \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x \ne \alpha \\ \cancel{\alpha x} + \beta \ne \cancel{\alpha x} - \alpha^2 \quad \text{ισχύει} \end{cases}, \text{ άρα } A_{f \circ f} = \mathbb{R} - \{\alpha\}.$$

$$f(f(x)) = \frac{\alpha \cdot \dfrac{\alpha x + \beta}{x - \alpha} + \beta}{\dfrac{\alpha x + \beta}{x - \alpha} - \alpha} = \frac{\dfrac{\alpha^2 x + \cancel{\alpha\beta} + \beta x - \cancel{\alpha\beta}}{\cancel{x - \alpha}}}{\dfrac{\cancel{\alpha x} + \beta - \cancel{\alpha x} + \alpha^2}{\cancel{x - \alpha}}} = \frac{\cancel{(\alpha^2 + \beta)}x}{\cancel{\alpha^2 + \beta}} = x.$$

Γ2. Για κάθε $x_1, x_2 \in A_f$ με $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \dfrac{\alpha x_1 + \beta}{x_1 - \alpha} = \dfrac{\alpha x_2 + \beta}{x_2 - \alpha} \Leftrightarrow$

$$\cancel{\alpha x_1 x_2} - \alpha^2 x_1 + \beta x_2 - \cancel{\alpha\beta} = \cancel{\alpha x_1 x_2} - \alpha^2 x_2 + \beta x_1 - \cancel{\alpha\beta} \Leftrightarrow$$

$\alpha^2 x_2 + \beta x_2 = \alpha^2 x_1 + \beta x_1 \Leftrightarrow (\alpha^2 + \beta) x_2 = (\alpha^2 + \beta) x_1 \Leftrightarrow x_2 = x_1$ άρα η f είναι 1-1, οπότε αντιστρέφεται. Για την εύρεση της f^{-1} υπάρχουν 2 τρόποι:

1ος τρόπος: Επειδή $f(f(x)) = x$ για κάθε $x \ne -\alpha$, ισχύει ότι

$$f^{-1}(f(f(x))) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) = f^{-1}(x) \text{ για κάθε } x \ne -\alpha.$$

2ος τρόπος: $f(x)=y \Leftrightarrow \frac{\alpha x+\beta}{x-\alpha}=y \Leftrightarrow \alpha x+\beta=xy-\alpha y \Leftrightarrow \beta+\alpha y=xy-\alpha x \Leftrightarrow$

$x(y-\alpha)=\alpha y+\beta \quad (1)$

Αν $y=\alpha$ η (1) είναι αδύνατη.

Αν $y\neq\alpha$ τότε η (1) γίνεται: $x=\frac{\alpha y+\beta}{y-\alpha}\Rightarrow f^{-1}(y)=\frac{\alpha y+\beta}{y-\alpha}$, άρα

$f^{-1}(x)=\frac{\alpha x+\beta}{x-\alpha},\ x\neq\alpha$.

Γ3. Αρκεί να έχει λύση η εξίσωση $f(x)=x$.

Είναι $f(x)=x \Leftrightarrow \frac{\alpha x+\beta}{x-\alpha}=x \Leftrightarrow \alpha x+\beta=x^2-\alpha x \Leftrightarrow x^2-2\alpha x-\beta=0$.

Η τελευταία είναι εξίσωση 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta=4\alpha^2+4\beta$.

Επειδή $\beta\neq-\alpha^2$, είναι $\Delta\neq0$, οπότε η εξίσωση έχει λύση μόνο όταν

$\Delta>0 \Leftrightarrow \alpha^2+\beta>0 \Leftrightarrow \beta>-\alpha^2$.

Έστω $\alpha=1$, τότε $\beta>-1$, οπότε ένα ζεύγος τιμών α, β είναι: $\alpha=1$ και $\beta=0$.

Γ4. Πρέπει $2-x\neq\alpha \Leftrightarrow x\neq2-\alpha$.

$(f\circ f\circ f)(2-x)=\frac{\alpha x^{21}+\beta}{x^{21}-\alpha} \Leftrightarrow f\big(f\big(f(2-x)\big)\big)=f\left(x^{21}\right) \overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow}$

$f\big(f(2-x)\big)=x^{21} \overset{f(f(x))=x}{\Leftrightarrow} 2-x=x^{21} \Leftrightarrow x^{21}+x-2=0$ (2).

Έστω $g(x)=x^{21}+x-2,\ x\in\mathbb{R}$.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η g είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1, οπότε η (2) γίνεται: $g(x)=g(1) \Leftrightarrow x=1$. Αν $x=1$, τότε $1\neq2-\alpha \Leftrightarrow \alpha\neq1$ που ισχύει.

Άρα η $x=1$ είναι δεκτή λύση.

Θέμα Δ

Δ1. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, ισχύει ότι $f(x_1)<f(x_2)$ (1)

$x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1+1<x_2+1 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x_1+1)<f(x_2+1)$ (2). Από (1) + (2)$\Rightarrow$

$f(x_1)+f(x_1+1)<f(x_2)+f(x_2+1) \Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2) \Rightarrow g\nearrow\mathbb{R}$.

Δ2. $f(x+1)-f(1)=f(2)-f(x) \Leftrightarrow f(x+1)+f(x)=f(2)+f(1) \Leftrightarrow$

$g(x)=g(1) \overset{g\nearrow\Rightarrow1-1}{\Leftrightarrow} x=1$.

Δ3. Για κάθε $\alpha>0$ είναι $\alpha<2\alpha \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(\alpha)<f(2\alpha)$ (1)

και $3\alpha+1<4\alpha+1 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(3\alpha+1)<f(4\alpha+1)$ (2)

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1),(2) έχουμε $f(\alpha)+f(3\alpha+1)<f(2\alpha)+f(4\alpha+1)$

Δ4. Για κάθε $x>0$ είναι $x>-x \overset{g1}{\Leftrightarrow} g(x)>g(-x)$, οπότε η g δεν είναι άρτια. Όμοια για την f.

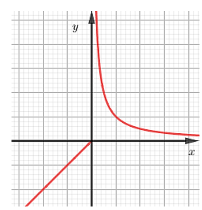
3ο Διαγώνισμα

Θέμα Α

Α1. α. Ψ

β. Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0 \\ \dfrac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$ είναι 1-1 και δεν είναι γνησίως μονότονη.

Α2. α) Λ **β)** Λ **γ)** Λ **δ)** Λ **ε)** Λ



Α3. α) Επειδή κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει την C_f σε ένα μόνο σημείο, η f είναι 1-1.
Αλλιώς: Η f είναι γνησίως αύξουσα άρα και 1-1

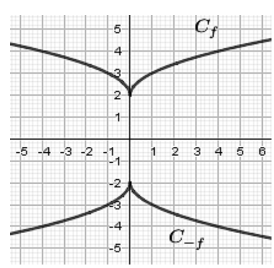
β) $f(-1)=0 \Leftrightarrow f^{-1}(0)=-1$, $f(-2)=-3 \Leftrightarrow f^{-1}(-3)=-2$,
$f(0)=1 \Leftrightarrow f^{-1}(1)=0$, $f(2)=3 \Leftrightarrow f^{-1}(3)=2$.

γ) $(g\circ f)(-1)=g(f(-1))=g(0)=2$,
$(f\circ g)(-2)=f(g(-2))=f(-2)=-3$,
$(f\circ f)(-1)=f(f(-1))=f(0)=1$, $(g\circ g)(-1)=g(g(-1))=g(0)=2$.

Θέμα Β

Β1. Στο σχήμα παρατηρούμε ότι οι τετμημένες των σημείων της C_f καλύπτουν όλο τον άξονα x΄x, άρα $D_f=\mathbb{R}$. Ακόμη παρατηρούμε ότι $y=f(x)\ge 2$ οπότε $f(A)=[2,+\infty)$.

Β2. Γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της $-f$ είναι συμμετρική της f ως προς τον άξονα x΄x, οπότε είναι αυτή του διπλανού σχήματος.



B3. Αρχικά παρατηρούμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,0\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[0,+\infty\right)$, οπότε: Για κάθε $x_1<x_2<0$ είναι

$f(x_1)>f(x_2)>0\Rightarrow f^2(x_1)>f^2(x_2)\Leftrightarrow$

$\dfrac{1}{f^2(x_1)}<\dfrac{1}{f^2(x_2)}\Leftrightarrow\dfrac{27}{f^2(x_1)}<\dfrac{27}{f^2(x_2)}\Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2)\Rightarrow g\nearrow(-\infty,0)$.

Για κάθε $0<x_1<x_2$ είναι $0<f(x_1)<f(x_2)\Rightarrow f^2(x_1)<f^2(x_2)\Leftrightarrow$

$\dfrac{1}{f^2(x_1)}>\dfrac{1}{f^2(x_2)}\Leftrightarrow\dfrac{27}{f^2(x_1)}>\dfrac{27}{f^2(x_2)}\Leftrightarrow g(x_1)>g(x_2)\Rightarrow g\searrow[0,+\infty)$.

B4. $f(x)=g(x)\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{27}{f^2(x)}\Leftrightarrow f^3(x)=27\Leftrightarrow f(x)=3$.

Στο σχήμα παρατηρούμε ότι $y=3$ έχουν τα σημεία $(-1,3)$ και $(1,3)$ άρα $f(x)=3\Leftrightarrow x=\pm1$.

B5. Είναι $f(x)\geq f(0)=2\Leftrightarrow f^2(x)\geq 4\Leftrightarrow\dfrac{1}{f^2(x)}\leq\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow$

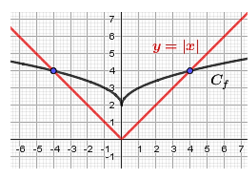
$\dfrac{27}{f^2(x)}\leq\dfrac{27}{4}\Leftrightarrow g(x)\leq g(0)$ οπότε η g έχει μέγιστο το $\dfrac{27}{4}$ για $x=0$.

B6. $\dfrac{f(x)}{|x|}-1=0\Leftrightarrow\dfrac{f(x)}{|x|}=1\Leftrightarrow f(x)=|x|\quad(1)$

Για να λύσουμε την (1) αρκεί να βρούμε τις τετμημένες των κοινών σημείων των C_f, $y=|x|$.

Για το λόγο αυτό σχεδιάζουμε στο ίδιο σχήμα τις

C_f, $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geq 0\\ -x, & x<0\end{cases}$.



Παρατηρούμε ότι τα σημεία τομής τους είναι τα $(-4,4)$ και $(4,4)$ οπότε $f(x)=|x|\Leftrightarrow x=\pm4$.

Θέμα Γ

Γ1. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$, τότε επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ είναι $f(x_1)<f(x_2)$ (1) και

$-x_1>-x_2\overset{f1}{\Leftrightarrow} f(-x_1)>f(-x_2)\Leftrightarrow -f(-x_1)<-f(-x_2)$ (2)

Από $(1)+(2)\Rightarrow f(x_1)-f(-x_1)<f(x_2)-f(-x_2)\Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2)\Rightarrow g\nearrow\mathbb{R}$.

Γ2. Για $x=0$ είναι $g(0)=2f(0)-f(0)=f(0)$, οπότε οι C_f,C_g τέμνονται στον άξονα y΄y.

Γ3. α) Όταν $g(x)=x^2+1$, τότε $2f(x)-f(-x)=x^2+1\overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow}$

$4f(x)-2f(-x)=2x^2+2$ (3) και αντικαθιστώντας όπου x το $-x$ προκύπτει:

$2f(-x)-f(x)=x^2+1$ (4)

Από $(3)+(4)\Rightarrow 3f(x)=3x^2+3\Leftrightarrow f(x)=x^2+1$ άρα $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Επειδή η f_1 είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

$f_1(x)=y\Leftrightarrow x^2+1=y\Leftrightarrow x^2=y-1$. Πρέπει $y-1\geq 0\Leftrightarrow y\geq 1$, τότε επειδή $x\geq 0$, είναι $x=\sqrt{y-1}$ άρα $f_1^{-1}(y)=\sqrt{y-1},\ y\geq 1$, οπότε

$f_1^{-1}(x)=\sqrt{x-1},\ x\geq 1$.

γ) Για να δείξουμε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f_1, f_1^{-1} δεν έχουν κοινά σημεία αρκεί η εξίσωση $f_1(x)=f_1^{-1}(x)$ να είναι αδύνατη στο $[1,+\infty)$.

Είναι: $f_1(x)=f_1^{-1}(x)\Leftrightarrow x^2+1=\sqrt{x-1}\Leftrightarrow (x^2+1)^2=\left(\sqrt{x-1}\right)^2\Leftrightarrow$

$x^4+2x^2+1=x-1\Leftrightarrow x^4+2x^2-x+2=0\Leftrightarrow\ x^4+x^2+x^2-x+2=0$ (5)

Για κάθε $x\geq 1$ είναι $x^4+x^2>0$ και $x^2-x+2>0$ αφού έχει $\Delta=-7<0$, οπότε: $x^4+x^2+x^2-x+2>0$ και η (5) είναι αδύνατη στο $[1,+\infty)$.

Θέμα Δ

Δ1. Είναι $A_f=(0,+\infty)$.

Για κάθε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$, είναι:

$$\begin{cases}\ln x_1<\ln x_2\\ x_1-1<x_2-1\end{cases}\overset{+}{\Rightarrow}\ln x_1+x_1-1<\ln x_2+x_2-1\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)\Rightarrow f\nearrow.$$

Δ2. Η h ορίζεται όταν: $\begin{cases}x\in A_f\\ f(x)\in A_f\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(0,+\infty)\\ f(x)>0\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}x\in(0,+\infty)\\ f(x)>f(1)\end{cases}\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}\begin{cases}x>0\\ x>1\end{cases}\Rightarrow x>1,\ \text{άρα}\ A_h=(1,+\infty).$$

$h(x)=f(f(x))=\ln(\ln x+x-1)+\ln x+x-1-1\Leftrightarrow$

$h(x)=\ln(\ln x+x-1)+\ln x+x-2$.

Δ3. $\ln(\ln x+x-1)+\ln x>e+2-x\Leftrightarrow\ln(\ln x+x-1)+\ln x+x-2>e\Leftrightarrow$

$f(f(x))>f(e)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x)>e\Leftrightarrow f(x)>f(e)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}x>e$.

Δ4. $g(x)=e^{x+1-g(x)} \Leftrightarrow g(x)=\dfrac{e^{x+1}}{e^{g(x)}} \Leftrightarrow g(x)e^{g(x)}=e^{x+1} \Leftrightarrow$

$\ln\left(g(x)e^{g(x)}\right)=\ln e^{x+1} \Leftrightarrow$

$\ln g(x)+\ln e^{g(x)}=x+1 \Leftrightarrow \ln g(x)+g(x)-1=x \Leftrightarrow f\left(g(x)\right)=x \quad (1)$

α) Έστω ότι υπάρχουν $x_1,x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ τέτοια ώστε $g(x_1)\geq g(x_2)$, τότε επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, είναι $f\left(g(x_1)\right)\geq f\left(g(x_2)\right) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} x_1 \geq x_2$ άτοπο. Άρα $g(x_1)<g(x_2) \Rightarrow g \nearrow \mathbb{R}$.

β) Για $x=0$ η (1) γίνεται: $f\left(g(0)\right)=0 \Leftrightarrow f\left(g(0)\right)=f(1) \overset{f\,1\Rightarrow 1-1}{\Leftrightarrow} g(0)=1$.

γ) Επειδή η f είναι 1-1, αντιστρέφεται και η σχέση (1) γίνεται:

$f\left(g(x)\right)=x \Leftrightarrow f^{-1}\left(f\left(g(x)\right)\right)=f^{-1}(x) \Leftrightarrow g(x)=f^{-1}(x)$.

8 Όριο συνάρτησης στο x_0

Ορισμός ορίου - Ιδιότητες ορίων

36. α) $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = -1,\ \ f(-2) = -1$.

β) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 3,\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1,\ \lim\limits_{x\to 0} f(x) =$ δεν υπάρχει, $f(0) = 1$.

γ) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -1,\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 2,\ \lim\limits_{x\to 2} f(x) =$ δεν υπάρχει, $f(2) = 1$.

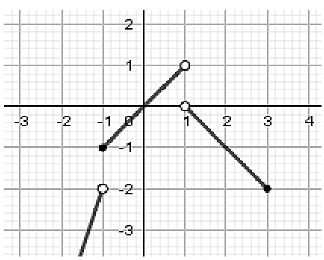
δ) $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = 1,\ \ f(4) =$ δεν ορίζεται.

37.α) $D_f = [-2,0)\cup(0,5),\ \ f(A) = [-1,4]$.

β) i. $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = 0,\ \ f(-2) = 0$ **ii.** $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0,\ \ f(0) =$ δεν ορίζεται

iii. $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 3,\ \ f(3) = 2$ **iv.** $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = 4,\ \ f(5) =$ δεν ορίζεται

38.α)



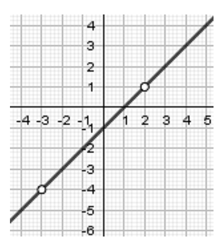
β) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -2,\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -1,\ \lim\limits_{x\to -1} f(x) =$ δεν υπάρχει

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1,\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 0,\ \lim\limits_{x\to 1} f(x) =$ δεν υπάρχει , $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = -2$

39.α) $f(x) = \dfrac{x^3 - 7x + 6}{x^2 + x - 6} = \dfrac{(x-1)\cancel{(x^2 + x - 6)}}{\cancel{x^2 + x - 6}} = x - 1,$

$x^2 + x - 6 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3,\ x \neq 2$.

β) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 1,\ \lim\limits_{x\to -3} f(x) = -4$



40. Η f ορίζεται όταν $\begin{cases} x^2 - 6x \geq 0 \\ x^2 - 16 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-6) \geq 0 \\ x^2 \geq 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \text{ ή } x \geq 6 \\ x \leq -4 \text{ ή } x \geq 4 \end{cases}$

$D_f = (-\infty,-4]\cup[6,+\infty)$.

Επειδή δεν υπάρχει στο πεδίο ορισμού περιοχή του 3, το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ δεν ορίζεται.

41. Η f ορίζεται όταν $4-x^2>0 \Leftrightarrow x^2<4 \Leftrightarrow |x|<2 \Leftrightarrow -2<x<2$,

$D_f=(-2,2)$. Η εύρεση του ορίου $\lim\limits_{x\to\lambda^2-5\lambda+6}\dfrac{3x+5}{\sqrt{4-x^2}}$ έχει νόημα όταν

$$-2\le\lambda^2-5\lambda+6\le 2 \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda^2-5\lambda+6\ge -2\\ \lambda^2-5\lambda+6\le 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda^2-5\lambda+8\ge 0\\ \lambda^2-5\lambda+4\le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta<0 \text{ ισχύει}\\ 1\le\lambda\le 4\end{cases}.$$

42.α) $\lim\limits_{x\to1}\left[\left(x^2+1\right)f^3(x)-\sqrt{g^2(x)+9}\right]=\lim\limits_{x\to1}\left[\left(x^2+1\right)f^3(x)\right]-$

$\lim\limits_{x\to1}\sqrt{g^2(x)+9}=\lim\limits_{x\to1}\left(x^2+1\right)\lim\limits_{x\to1}f^3(x)-\sqrt{\lim\limits_{x\to1}\left(g^2(x)+9\right)}=$

$2\left(\lim\limits_{x\to1}f(x)\right)^3-\sqrt{\lim\limits_{x\to1}g^2(x)+9}=2(-64)-\sqrt{\left(\lim\limits_{x\to1}g(x)\right)^2+9}=-128-\sqrt{18}$.

β) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-2)g^3(x)-xf(x)}{g^2(x)-3xf(x)+2}=\ldots=-1$.

Όριο ρητής (0/0)

43.α) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-5x+4}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\cancel{(x-1)}(x-5)}{\cancel{x-1}}=-4$.

β) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)\cancel{\left(x^2-1\right)}}{\cancel{x^2-1}}=0$.

γ) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}}=6$.

δ) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^3+27}{x^2+5x+6}=\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{(x+3)\left(x^2-3x+9\right)}{(x+3)(x+2)}=$

$\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2-3x+9}{x+2}=\dfrac{(-3)^2-3(-3)+9}{-3+2}=\dfrac{9+9+9}{-1}=-27$.

ε) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-x^2+x-6}{x^3-2x^2+3x-6}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\cancel{(x-2)}\left(x^2+x+3\right)}{\cancel{(x-2)}\left(x^2+3\right)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+x+3}{x^2+3}=\dfrac{9}{7}$.

στ) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x+2)\cancel{(x-1)}}{x\cancel{(x-1)}}=3$.

44.α) $\lim\limits_{x\to\lambda}\dfrac{x^3-\lambda^3}{x^2-\lambda^2}=\lim\limits_{x\to\lambda}\dfrac{\cancel{(x-\lambda)}\left(x^2+\lambda x+\lambda^2\right)}{\cancel{(x-\lambda)}(x+\lambda)}=\dfrac{3\lambda}{2}$.

β) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-2x^2-3x-2}{x^4-5x^3-14x^2+80}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\cancel{(x-2)}\left(x^3+2x^2+2x+1\right)}{\cancel{(x-2)}\left(x^3-3x^2-20x-40\right)}=-\dfrac{1}{4}$.

γ) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt[4]{\dfrac{x^3-8}{x^2+x-6}}=\lim\limits_{x\to 2}\sqrt[4]{\dfrac{\cancel{(x-2)}\left(x^2+2x+4\right)}{(x+3)\cancel{(x-2)}}}=\sqrt[4]{\dfrac{12}{5}}$.

45.α) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2+1}{x(x-1)}-\dfrac{2}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+1-2x}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^{\cancel{2}}}{x\cancel{(x-1)}}=0$.

β) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{3}{(x-1)(x+2)}\right)=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x-1+3}{(x-1)(x+2)}=$

$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\cancel{x+2}}{(x-1)\cancel{(x+2)}}=-\dfrac{1}{3}$.

46.α) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^\nu-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cancel{(x-1)}(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}+...+x+1)}{\cancel{(x-1)}(x+1)}=$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{\nu-1}+x^{\nu-2}+...+x+1}{x+1}=\dfrac{\underbrace{1+1+...+1}_{\nu\text{-φορές}}}{2}=\dfrac{\nu}{2}$.

β) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-(\lambda+1)x+\lambda}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-\lambda x-x+\lambda}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\left(x^2-1\right)-\lambda(x-1)}{x-1}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(x-1)(x+1)-\lambda(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cancel{(x-1)}\left[x(x+1)-\lambda\right]}{\cancel{x-1}}=2-\lambda$

γ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\kappa x^{\kappa+1}-(\kappa+1)x^\kappa+1}{x^{\kappa+1}-x^\kappa+x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\kappa x^\kappa(x-1)-\left(x^\kappa-1\right)}{x^\kappa(x-1)+(x-1)}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\kappa x^\kappa\cancel{(x-1)}-\cancel{(x-1)}\left(x^{\kappa-1}+x^{\kappa-2}+...+x+1\right)}{\cancel{(x-1)}\left(x^\kappa+1\right)}=0$.

47. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\alpha x^2+\beta x-9\alpha-3\beta}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\alpha(x-3)(x+3)+\beta(x-3)}{x-3}=$

$\lim\limits_{x\to 3}\left[\alpha(x+3)+\beta\right]=6\alpha+\beta$.

48. $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1\Leftrightarrow 1+\alpha+\beta=1\Leftrightarrow\beta=-\alpha$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+f(x)-2}{x^3-1}=1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x^2+\alpha x-\alpha-2}{x^3-1}=1\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+\alpha x-\alpha-2}{x^3-1}=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2\cancel{(x-1)}(x+1)+\alpha\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}=1 \Leftrightarrow$

$\dfrac{4+\alpha}{3}=1 \Leftrightarrow \alpha=-1$ και $\beta=1$.

49.α) Είναι: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(\kappa^2+2)x^2-2\kappa^2x-3\kappa^2-10x+12}{x-3}=2\kappa^2-5\kappa+5 \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\kappa^2x^2+2x^2-2\kappa^2x-3\kappa^2-10x+12}{x-3}=2\kappa^2-5\kappa+5 \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\kappa^2(x^2-2x-3)+2(x^2-5x+6)}{x-3}=2\kappa^2-5\kappa+5 \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\kappa^2(x-3)(x+1)+2(x-3)(x-2)}{x-3}=2\kappa^2-5\kappa+5 \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\cancel{(x-3)}\left[\kappa^2(x+1)+2(x-2)\right]}{\cancel{x-3}}=2\kappa^2-5\kappa+5 \Leftrightarrow$

$4\kappa^2+2=2\kappa^2-5\kappa+5 \Leftrightarrow 2\kappa^2+5\kappa-3=0 \Leftrightarrow \kappa=-3$ ή $\kappa=\dfrac{1}{2}$.

β) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(\kappa^2+2)x^2-4\kappa^2-6x+4}{x-2}=3\kappa^2+\kappa+4 \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\kappa^2x^2+2x^2-4\kappa^2-6x+4}{x-2}=3\kappa^2+\kappa+4 \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\kappa^2(x^2-4)+2(x^2-3x+2)}{x-2}=3\kappa^2+\kappa+4 \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\kappa^2(x-2)(x+2)+2(x-1)(x-2)}{x-2}=3\kappa^2+\kappa+4 \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\cancel{(x-2)}\left[\kappa^2(x+2)+2(x-1)\right]}{\cancel{x-2}}=3\kappa^2+\kappa+4 \Leftrightarrow$

$4\kappa^2+2=3\kappa^2+\kappa+4 \Leftrightarrow \kappa^2-\kappa-2=0 \Leftrightarrow \kappa=2$ ή $\kappa=-1$.

50. $f^3(x)-3f^2(x)+3f(x)=x+9 \Leftrightarrow (f(x)-1)^3=x+8$.

Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$, με $f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow x_1=x_2$.

Είναι $f(x)=y \Leftrightarrow (y-1)^3=x+8 \Leftrightarrow x=(y-1)^3-8$, άρα:

$f^{-1}(x)=(x-1)^3-8=(x-3)\left[(x-1)^2+2(x-1)+4\right]$.

$$\lim_{x\to3}\frac{f^{-1}(x)}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to3}\frac{\cancel{(x-3)}\left[(x-1)^2+2(x-1)+4\right]}{\cancel{(x-3)}(x-2)}=12.$$

Όριο άρρητης (0/0)

51.α) $$\lim_{x\to7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}=\lim_{x\to7}\frac{\left(2-\sqrt{x-3}\right)\left(2+\sqrt{x-3}\right)}{(x-7)(x+7)\left(2+\sqrt{x-3}\right)}=$$

$$\lim_{x\to7}\frac{-\cancel{(x-7)}}{\cancel{(x-7)}(x+7)\left(2+\sqrt{x-3}\right)}=-\frac{1}{56}.$$

β) $$\lim_{x\to1}\frac{2-\sqrt{x+3}}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\left(2-\sqrt{x+3}\right)\left(2+\sqrt{x+3}\right)}{(x-1)\left(2+\sqrt{x+3}\right)}=$$

$$\lim_{x\to1}\frac{-\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}\left(2+\sqrt{x+3}\right)}=-\frac{1}{4}.$$

γ) $$\lim_{h\to0}\frac{\sqrt{1-h}-\sqrt{1+h}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\left(\sqrt{1-h}-\sqrt{1+h}\right)\left(\sqrt{1-h}+\sqrt{1+h}\right)}{h\left(\sqrt{1-h}+\sqrt{1+h}\right)}=$$

$$\lim_{h\to0}\frac{-2\cancel{h}}{\cancel{h}\left(\sqrt{1-h}+\sqrt{1+h}\right)}=-1.$$

δ) $$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}\right)\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)}{x\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)}=$$

$$\lim_{x\to0}\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

ε) $$\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{2x+3}-1}{\sqrt{5+x}-2}=\lim_{x\to-1}\frac{\left(\sqrt{2x+3}-1\right)\left(\sqrt{2x+3}+1\right)\left(\sqrt{5+x}+2\right)}{\left(\sqrt{5+x}-2\right)\left(\sqrt{5+x}+2\right)\left(\sqrt{2x+3}+1\right)}=$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{2\cancel{(x+1)}\left(\sqrt{5+x}+2\right)}{\cancel{(x+1)}\left(\sqrt{2x+3}+1\right)}=4.$$

στ) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x-2}-1}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{x-2}+1\right)}{\left(\sqrt{x-2}-1\right)\left(\sqrt{x-2}+1\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)\left(\sqrt{x-2}+1\right)}{(x-2-1)\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\cancel{(x-3)}\left(\sqrt{x-2}+1\right)}{\cancel{(x-3)}\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)}=\dfrac{2}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}.$

52.α) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}=$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\left(\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}\right)\left(\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6}\right)}{(x-1)(x-3)\left(\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-4\cancel{(x-3)}}{(x-1)\cancel{(x-3)}\left(\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6}\right)}=-\dfrac{1}{3}.$

β) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-\sqrt{8x+1}}{\sqrt{5-x}-\sqrt{7x-3}}=$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\sqrt{x+8}-\sqrt{8x+1}\right)\left(\sqrt{x+8}+\sqrt{8x+1}\right)\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{7x-3}\right)}{\left(\sqrt{5-x}-\sqrt{7x-3}\right)\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{7x-3}\right)\left(\sqrt{x+8}+\sqrt{8x+1}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-7\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{7x-3}\right)}{-8\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{x+8}+\sqrt{8x+1}\right)}=\dfrac{7}{12}.$

γ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^3}-\sqrt{8}}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(\sqrt{x^3}-\sqrt{8}\right)\left(\sqrt{x^3}+\sqrt{8}\right)}{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{x^3}+\sqrt{8}\right)}=$

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{x^3}+\sqrt{8}\right)}==\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\cancel{(x-2)}\left(x^2+2x+4\right)}{\cancel{(x-2)}(x+2)\left(\sqrt{x^3}+\sqrt{8}\right)}=\dfrac{3\sqrt{2}}{8}.$

53. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{f(x)+7}-3}{2-\sqrt{2f^2(x)-4}}=$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\sqrt{f(x)+7}-3\right)\left(\sqrt{f(x)+7}+3\right)\left(2+\sqrt{2f^2(x)-4}\right)}{\left(2-\sqrt{2f^2(x)-4}\right)\left(2+\sqrt{2f^2(x)-4}\right)\left(\sqrt{f(x)+7}+3\right)}=$

$$= \lim_{x\to1}\frac{\cancel{\left(f(x)-2\right)}\left(2+\sqrt{2f^2(x)-4}\right)}{-2\cancel{\left(f(x)-2\right)}\left(f(x)+2\right)\left(\sqrt{f(x)+7}+3\right)} = -\frac{1}{12}\,.$$

54.α) $$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt[3]{x+5}-2}{x-3} = \lim_{x\to3}\frac{\left(\sqrt[3]{x+5}-2\right)\left[\left(\sqrt[3]{x+5}\right)^2+2\sqrt[3]{x+5}+4\right]}{(x-3)\left[\left(\sqrt[3]{x+5}\right)^2+2\sqrt[3]{x+5}+4\right]} =$$

$$= \lim_{x\to3}\frac{\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}\left[\left(\sqrt[3]{x+5}\right)^2+2\sqrt[3]{x+5}+4\right]} = \frac{1}{12}\,.$$

β) $$\lim_{x\to5}\frac{\sqrt[3]{x-2}-\sqrt[3]{3}}{x-5} = \lim_{x\to5}\frac{\left(\sqrt[3]{x-2}-\sqrt[3]{3}\right)\left[\left(\sqrt[3]{x-2}\right)^2+\sqrt[3]{x-2}\cdot\sqrt[3]{3}+\left(\sqrt[3]{3}\right)^2\right]}{(x-5)\left[\left(\sqrt[3]{x-2}\right)^2+\sqrt[3]{x-2}\cdot\sqrt[3]{3}+\left(\sqrt[3]{3}\right)^2\right]} =$$

$$= \lim_{x\to5}\frac{\cancel{x-5}}{\cancel{(x-5)}\left[\left(\sqrt[3]{x-2}\right)^2+\sqrt[3]{x-2}\cdot\sqrt[3]{3}+\left(\sqrt[3]{3}\right)^2\right]} = \frac{\sqrt[3]{3}}{9}\,.$$

γ) $$\lim_{x\to1}\frac{2x-2}{\sqrt[3]{2x+6}-2} = \lim_{x\to1}\frac{2(x-1)\left[\left(\sqrt[3]{2x+6}\right)^2+2\sqrt[3]{2x+6}+4\right]}{\left(\sqrt[3]{2x+6}-2\right)\left[\left(\sqrt[3]{2x+6}\right)^2+2\sqrt[3]{2x+6}+4\right]} =$$

$$= \lim_{x\to1}\frac{2\cancel{(x-1)}\left[\left(\sqrt[3]{2x+6}\right)^2+2\sqrt[3]{2x+6}+4\right]}{2\cancel{(x-1)}} = 12\,.$$

δ) $$\lim_{h\to0}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x+h}}{h} = \lim_{h\to0}\frac{\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x+h}\right)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x+h}+\left(\sqrt[3]{x+h}\right)^2\right)}{h\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x+h}+\left(\sqrt[3]{x+h}\right)^2\right)} =$$

$$= \lim_{h\to0}\frac{-\cancel{h}}{\cancel{h}\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x+h}+\left(\sqrt[3]{x+h}\right)^2\right)} = -\frac{\sqrt[3]{x}}{3x}\,.$$

ε) $$\lim_{x\to2}\frac{x^2+2x-8}{\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{3x-2}} =$$

$$\lim_{x\to2}\frac{\left(x^2+2x-8\right)\left[\sqrt[3]{(x+2)^2}+\sqrt[3]{x+2}\cdot\sqrt[3]{3x-2}+\sqrt[3]{(3x-2)^2}\right]}{\left(\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{3x-2}\right)\left[\sqrt[3]{(x+2)^2}+\sqrt[3]{x+2}\cdot\sqrt[3]{3x-2}+\sqrt[3]{(3x-2)^2}\right]}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{\left(x^2+2x-8\right)\left[\sqrt[3]{(x+2)^2}+\sqrt[3]{x+2}\cdot\sqrt[3]{3x-2}+\sqrt[3]{(3x-2)^2}\right]}{\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^3-\left(\sqrt[3]{3x-2}\right)^3}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}\,(x+4)\left(\sqrt[3]{(x+2)^2}+\sqrt[3]{x+2}\cdot\sqrt[3]{3x-2}+\sqrt[3]{(3x-2)^2}\right)}{-2\,\cancel{(x-2)}} = -18\sqrt[3]{2}\,.$$

στ) $$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x+6}-2}{\sqrt{x+7}-3} = \lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt[3]{x+6}-2\right)\left[\left(\sqrt[3]{x+6}\right)^2+2\sqrt[3]{x+6}+4\right]\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{\left(\sqrt{x+7}-3\right)\left(\sqrt{x+7}+3\right)\left[\left(\sqrt[3]{x+6}\right)^2+2\sqrt[3]{x+6}+4\right]}=$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{\cancel{(x-2)}\left[\left(\sqrt[3]{x+6}\right)^2+2\sqrt[3]{x+6}+4\right]}=\frac{1}{2}\,.$$

55.α) $$\lim_{x\to 4^+}\frac{(x-4)(x+4)}{\sqrt{(x-4)(x+2)}} = \lim_{x\to 4^+}\frac{\cancel{(x-4)}\,(x+4)\sqrt{x-4}}{\cancel{(x-4)}\sqrt{x+2}}=0\,.$$

β) $$\lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x-2}} = \lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{(x-2)(x+2)}}{\sqrt{x-2}}=$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{x-2}\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}} = \lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{x-2}\left(1-\sqrt{x+2}\right)}{\sqrt{x-2}} = \lim_{x\to 2^+}\left(1-\sqrt{x+2}\right)=-1\,.$$

γ) $$\lim_{x\to 1}\frac{(x+5)-3\sqrt{x+3}}{(x+2)-\sqrt{x+8}}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\left[(x+5)-3\sqrt{x+3}\right]\left[(x+5)+3\sqrt{x+3}\right]\left[(x+2)+\sqrt{x+8}\right]}{\left[(x+2)-\sqrt{x+8}\right]\left[(x+2)+\sqrt{x+8}\right]\left[(x+5)+3\sqrt{x+3}\right]}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}\,(x+2)\left[(x+2)+\sqrt{x+8}\right]}{\cancel{(x-1)}\,(x+4)\left[(x+5)+3\sqrt{x+3}\right]}=\frac{3}{10}\,.$$

δ) Θέτουμε $\sqrt{x}=u$, $u>0$, άρα $x=u^2$, και για $x\to 4$ είναι $u\to 2$.

$$\lim_{x\to 4}\frac{x\cdot\sqrt{x}-8}{x+\sqrt{x}-6} = \lim_{u\to 2}\frac{u^2u-8}{u^2+u-6} = \lim_{u\to 2}\frac{u^3-8}{u^2+u-6}=$$

$$\lim_{u\to 2}\frac{\cancel{(u-2)}\left(u^2+2u+4\right)}{(u+3)\,\cancel{(u-2)}}=\frac{12}{5}\,.$$

ε) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x(x-4)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x\cancel{(x-4)}(\sqrt{x}+2)}{\cancel{(x-4)}(\sqrt{x}-3)}=-16$.

στ) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x})^2+3\sqrt{x}-10}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\cancel{\sqrt{x}-2}}{\cancel{(\sqrt{x}-2)}(\sqrt{x}+5)}=\dfrac{1}{7}$.

56.α) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{x^2-1}\overset{\sqrt[6]{x}=u}{=}\lim\limits_{u\to1}\dfrac{u^3-u^2}{u^{12}-1}=$

$\lim\limits_{u\to1}\dfrac{u^2\cancel{(u-1)}}{\cancel{(u-1)}(u^2+u+1)(u^3+1)(u^6+1)}=\dfrac{1}{12}$.

β) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}-2}{x-1}\underset{u\to1}{\overset{\sqrt[12]{x}=u}{=}}\lim\limits_{u\to1}\dfrac{u^4+u^3-2}{u^{12}-1}=$

$\lim\limits_{u\to1}\dfrac{\cancel{(u-1)}(u^3+2u^2+2u+2)}{\cancel{(u-1)}(u^2+u+1)(u^3+1)(u^6+1)}=\dfrac{7}{12}$.

γ) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[5]{x}-1}\underset{u\to1}{\overset{\sqrt[20]{x}=u}{=}}\lim\limits_{u\to1}\dfrac{u^5-1}{u^4-1}=\lim\limits_{u\to1}\dfrac{\cancel{(u-1)}(u^4+u^3+u^2+u+1)}{\cancel{(u-1)}(u+1)(u^2+1)}=\dfrac{5}{4}$.

δ) Θέτουμε $\sqrt[6]{x+1}=y$, άρα $\sqrt[3]{x+1}=\sqrt[6]{(x+1)^2}=y^2$ και $\sqrt{x+1}=\sqrt[6]{(x+1)^3}=y^3$ και επειδή $x\to0$, τότε $y\to1$.

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+1}-2\sqrt[3]{x+1}+1}{\sqrt[6]{x+1}+\sqrt{x+1}-2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{y^3-2y^2+1}{y+y^3-2}=$

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\cancel{(y-1)}(y^2-y-1)}{\cancel{(y-1)}(y^2+y+2)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{y^2-y-1}{y^2+y+2}=-\dfrac{1}{4}$.

ε) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{3x+1}-\sqrt[6]{3x+1}}{\sqrt[3]{3x+1}-\sqrt[6]{3x+1}}\underset{u\to1}{\overset{\sqrt[6]{3x+1}=u}{=}}\lim\limits_{u\to1}\dfrac{u^3-u}{u^2-u}=\lim\limits_{u\to1}\dfrac{u\cancel{(u-1)}(u+1)}{u\cancel{(u-1)}}=2$.

Αυξημένης δυσκολίας

57.α) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt[3]{x+24}-\sqrt{x+13}+1}{x-3}==\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{\sqrt[3]{x+24}-3}{x-3}-\dfrac{\sqrt{x+13}-4}{x-3}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to3}\left[\dfrac{\left(\sqrt[3]{x+24}^{\,3}-3^3\right)}{(x-3)\left[\left(\sqrt[3]{x+24}\right)^2+3\sqrt[3]{x+24}+9\right]}-\dfrac{x+13-16}{(x-3)\left(\sqrt{x+13}+4\right)}\right]=$

$$=\lim_{x\to3}\left[\frac{\cancel{x-3}}{\cancel{(x-3)}\left[\left(\sqrt[3]{x+24}\right)^2+3\sqrt[3]{x+24}+9\right]}-\frac{\cancel{x-3}}{\cancel{(x-3)}\left(\sqrt{x+13}+4\right)}\right]=$$

$$=\lim_{x\to3}\left[\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x+24}\right)^2+3\sqrt[3]{x+24}+9}-\frac{1}{\sqrt{x+13}+4}\right]=\frac{1}{27}-\frac{1}{8}=-\frac{19}{216}.$$

β) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt[3]{x+3}-\sqrt{x+4}+1}{x^2-8x+15}=\lim\limits_{x\to5}\left[\dfrac{\sqrt[3]{x+3}-2}{(x-3)(x-5)}-\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{(x-3)(x-5)}\right]=$

$$\lim_{x\to5}\left[\frac{\left(\sqrt[3]{x+3}-2\right)\left[\left(\sqrt[3]{x+3}\right)^2+2\sqrt[3]{x+3}+2\right]}{(x-3)(x-5)\left[\left(\sqrt[3]{x+3}\right)^2+2\sqrt[3]{x+3}+2\right]}-\frac{\left(\sqrt{x+4}-3\right)\left(\sqrt{x+4}+3\right)}{(x-3)(x-5)\left(\sqrt{x+4}+3\right)}\right]=$$

$$\lim_{x\to5}\left[\frac{\cancel{x-5}}{(x-3)\cancel{(x-5)}\left[\left(\sqrt[3]{x+3}\right)^2+2\sqrt[3]{x+3}+4\right]}-\right.$$

$$\left.\frac{\cancel{x-5}}{(x-3)\cancel{(x-5)}\left(\sqrt{x+4}+3\right)}\right]=-\frac{1}{24}.$$

γ) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}-\sqrt{6-x}}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\left[\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}{x-2}+\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}{x-2}\right]=$

$$\lim_{x\to2}\left[\frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}\right)}+\right.$$

$$\left.\frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}\right)}\right]=$$

$$\lim_{x\to2}\left[\frac{-2\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}\right)}+\frac{2\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}\right)}\right]=0.$$

δ) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{3x^2+4}\cdot\sqrt[3]{3x+2}-8}{x-2}=$

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{3x^2+4}\cdot\sqrt[3]{3x+2}-4\sqrt[3]{3x+2}+4\sqrt[3]{3x+2}-8}{x-2}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\left[\sqrt[3]{3x+2}\,\frac{\sqrt{3x^2+4}-4}{x-2}+4\frac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2}\right]=2\cdot\frac{3}{2}+4\cdot\frac{3}{12}=4 \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{3x^2+4}-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{3x^2+4}-4\right)\left(\sqrt{3x^2+4}+4\right)}{(x-2)\left(\sqrt{3x^2+4}+4\right)}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2+4-16}{(x-2)\left(\sqrt{3x^2+4}+4\right)}==\lim_{x\to 2}\frac{3\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{3x^2+4}+4\right)}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2} \text{ και}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt[3]{3x+2}-2\right)\left[\left(\sqrt[3]{3x+2}\right)^2+2\sqrt[3]{3x+2}+4\right]}{(x-2)\left[\left(\sqrt[3]{3x+2}\right)^2+2\sqrt[3]{3x+2}+4\right]}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt[3]{3x+2}\right)^3-2^3}{(x-2)\left[\left(\sqrt[3]{3x+2}\right)^2+2\sqrt[3]{3x+2}+4\right]}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x+2-8}{(x-2)\left[\left(\sqrt[3]{3x+2}\right)^2+2\sqrt[3]{3x+2}+4\right]}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{3\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}\left[\left(\sqrt[3]{3x+2}\right)^2+2\sqrt[3]{3x+2}+4\right]}=\frac{3}{4+4+4}=\frac{1}{4}.$$

58.α) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{x\sqrt{x}-3x+2\sqrt{x}}\underset{u\to 1}{\overset{\sqrt{x}=u}{=}}\lim\limits_{u\to 1}\dfrac{u^4-4u^2+3}{u^3-3u^2+2u}=$

$$\lim_{u\to 1}\frac{\cancel{(u-1)}(u+1)\left(u^2-3\right)}{u\cancel{(u-1)}(u-2)}=4.$$

β) $\dfrac{2\sqrt{x}+\sqrt{x+5}-7}{x-4}=\dfrac{2\sqrt{x}+\sqrt{x+5}-4-3}{x-4}=\dfrac{2\sqrt{x}-4}{x-4}+\dfrac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}=$

$$=\frac{\left(2\sqrt{x}-4\right)\left(2\sqrt{x}+4\right)}{(x-4)\left(2\sqrt{x}+4\right)}+\frac{\left(\sqrt{x+5}-3\right)\left(\sqrt{x+5}+3\right)}{(x-4)\left(\sqrt{x+5}+3\right)}=$$

$$=\frac{4(x-4)}{(x-4)\left(2\sqrt{x}+4\right)}+\frac{x-4}{(x-4)\left(\sqrt{x+5}+3\right)}=\frac{4}{2\sqrt{x}+4}+\frac{1}{\sqrt{x+5}+3}.$$

Οπότε $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2\sqrt{x}+\sqrt{x+5}-7}{x-4}=\dfrac{4}{8}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{2}{3}$ άρα $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{2\sqrt{x}+\sqrt{x+5}-7}=\dfrac{3}{2}$.

γ) Επειδή $x\to 6^+$ είναι $x-6>0$, οπότε $x-6=|x-6|=\sqrt{(x-6)^2}$ και:

$$\lim_{x\to 6^+} = \frac{x-6}{\sqrt{x-2-2\sqrt{x-2}}} = \lim_{x\to 6^+}\frac{\sqrt{(x-6)^2}}{\sqrt{\dfrac{(x-2)^2-4(x-2)}{x-2+2\sqrt{x-2}}}} =$$

$$\lim_{x\to 6^+}\sqrt{\frac{(x-6)^2}{\dfrac{(x-2)(x-2-4)}{x-2+2\sqrt{x-2}}}} = \lim_{x\to 6^+}\sqrt{\frac{(x-6)^2\left(x-2+2\sqrt{x-2}\right)}{(x-2)(x-6)}} =$$

$$\lim_{x\to 6^+}\sqrt{\frac{(x-6)\left(x-2+2\sqrt{x-2}\right)}{x-2}} = 0\,.$$

δ) $$\lim_{x\to 4^+}\frac{x-4}{\sqrt{x+2-\sqrt{9x}}} = \lim_{x\to 4^+}\frac{x-4}{\sqrt{\dfrac{\left(x+2-\sqrt{9x}\right)\left(x+2+\sqrt{9x}\right)}{x+2+\sqrt{9x}}}} =$$

$$\lim_{x\to 4^+}\frac{x-4}{\dfrac{\sqrt{(x+2)^2-\sqrt{9x}^{\,2}}}{\sqrt{x+2+\sqrt{9x}}}} = \lim_{x\to 4^+}\frac{(x-4)\sqrt{x+2+\sqrt{9x}}}{\sqrt{x^2+4x+4-9x}} =$$

$$\lim_{x\to 4^+}\frac{(x-4)\sqrt{x+2+\sqrt{9x}}}{\sqrt{x^2-5x+4}} = \lim_{x\to 4^+}\frac{(x-4)\sqrt{x+2+\sqrt{9x}}}{\sqrt{(x-4)(x-1)}} =$$

$$\lim_{x\to 4^+}\frac{\left(\sqrt{x-4}\right)^{\cancel{2}}\sqrt{x+2+\sqrt{9x}}}{\cancel{\sqrt{x-4}}\cdot\sqrt{x-1}} = \lim_{x\to 4^+}\frac{\sqrt{x-4}\sqrt{x+2+\sqrt{9x}}}{\sqrt{x-1}} = 0\,.$$

59. $$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+x-2}+2-2\sqrt{x-1}-\sqrt{x+2}}{x^2-2x} =$$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{x^2+x-2}-2\sqrt{x-1}}{x^2-2x}+\frac{2-\sqrt{x+2}}{x^2-2x}\right) =$$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{\left(\sqrt{x^2+x-2}-2\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x^2+x-2}+2\sqrt{x-1}\right)}{x(x-2)\left(\sqrt{x^2+x-2}+2\sqrt{x-1}\right)}+\frac{\left(2-\sqrt{x+2}\right)\left(2+\sqrt{x+2}\right)}{x(x-2)\left(2+\sqrt{x+2}\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2+x-2-4(x-1)}{x(x-2)\left(\sqrt{x^2+x-2}+2\sqrt{x-1}\right)}+\frac{4-(x+2)}{x(x-2)\left(2+\sqrt{x+2}\right)}\right) =$$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-3x+2}{x(x-2)\left(\sqrt{x^2+x-2}+2\sqrt{x-1}\right)}+\frac{2-x}{x(x-2)\left(2+\sqrt{x+2}\right)}\right)=$$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{(x-1)\cancel{(x-2)}}{x\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{x^2+x-2}+2\sqrt{x-1}\right)}+\frac{-\cancel{(x-2)}}{x\cancel{(x-2)}\left(2+\sqrt{x+2}\right)}\right)=0\,.$$

60. $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+7}-5}{\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-3}-x}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2+\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{x-1}-1+\sqrt{2x-3}-x+1}=$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\dfrac{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{\sqrt{x+2}+2}+\dfrac{\left(\sqrt{x+7}-3\right)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{\sqrt{x+7}+3}}{\dfrac{\left(\sqrt{x-1}-1\right)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}{\sqrt{x-1}+1}+\dfrac{\left(\sqrt{2x-3}-(x-1)\right)\left(\sqrt{2x-3}+(x-1)\right)}{\sqrt{2x-3}+(x-1)}}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\dfrac{x+2-4}{\sqrt{x+2}+2}+\dfrac{x+7-9}{\sqrt{x+7}+3}}{\dfrac{x-1-1}{\sqrt{x-1}+1}+\dfrac{2x-3-(x-1)^2}{\sqrt{2x-3}+(x-1)}}=\lim_{x\to 2}\frac{\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}+2}+\dfrac{x-2}{\sqrt{x+7}+3}}{\dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}+\dfrac{2x-3-x^2+2x-1}{\sqrt{2x-3}+(x-1)}}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2}+\dfrac{1}{\sqrt{x+7}+3}\right)}{\dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}+\dfrac{-(x-2)^2}{\sqrt{2x-3}-(x-1)}}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2}+\dfrac{1}{\sqrt{x+7}+3}\right)}{\cancel{(x-2)}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1}+\dfrac{-(x-2)}{\sqrt{2x-3}-(x-1)}\right)}=\frac{5}{6}\,.$$

61. $\lim_{x\to 1}\frac{x(x+\lambda)-\sqrt{x^2+3}-\lambda+1}{x^2-1}=2\Leftrightarrow\lim_{x\to 1}\frac{x^2+\lambda x-\sqrt{x^2+3}-\lambda+1}{x^2-1}=2\Leftrightarrow$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1-\sqrt{x^2+3}+\lambda(x-1)}{x^2-1}=2\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2+1-\sqrt{x^2+3}}{x^2-1}+\frac{\lambda\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)}\right)=2\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{\left(x^2+1-\sqrt{x^2+3}\right)\left(x^2+1+\sqrt{x^2+3}\right)}{(x-1)(x-1)\left(x^2+1+\sqrt{x^2+3}\right)}+\frac{\lambda}{x+1}\right)=2\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{\left(x^2+1\right)^2-\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)\left(x^2+1+\sqrt{x^2+3}\right)}+\frac{\lambda}{x+1}\right)=2\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{x^4+2x^2+1-x^2-3}{\left(x^2-1\right)\left(x^2+1+\sqrt{x^2+3}\right)}+\frac{\lambda}{x+1}\right)=2\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{x^4+x^2-2}{\left(x^2-1\right)\left(x^2+1+\sqrt{x^2+3}\right)}+\frac{\lambda}{x+1}\right)=2\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{\cancel{\left(x^2-1\right)}\left(x^2+2\right)}{\cancel{\left(x^2-1\right)}\left(x^2+1+\sqrt{x^2+3}\right)}+\frac{\lambda}{x+1}\right)=2\Leftrightarrow$$

$$\frac{3}{4}+\frac{\lambda}{2}=2\Leftrightarrow 3+2\lambda=8\Leftrightarrow 2\lambda=5\Leftrightarrow\lambda=\frac{5}{2}.$$

62.α) Η f ορίζεται όταν: $\begin{cases}x^2-2x\geq0\\-x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(x-2)\geq0\\x<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq0 \text{ ή } x\geq2\\x<0\end{cases}\Leftrightarrow$

$x<0$ άρα $D_f=(-\infty,0)$.

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{x^2-2x}-x}{\sqrt{-x}}=\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{x(x-2)}-x}{\sqrt{-x}}=$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{-x(2-x)}-x}{\sqrt{-x}}=\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{-x}\cdot\sqrt{2-x}-x}{\sqrt{-x}}=\lim_{x\to0^-}\frac{\cancel{\sqrt{-x}}\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{-x}\right)}{\cancel{\sqrt{-x}}}=\sqrt{2}$$

γιατί είναι $x<0$, $x-2<0$.

β) Η f ορίζεται όταν: $\begin{cases}x-1>0\\-x^2+4x-3>0\\(x-3)^2>0\\\ln(x-1)\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\1<x<3\\x\neq3\\x-1\neq1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\x\in(1,3)\\x\neq2\end{cases}\Leftrightarrow$

$x\in(1,2)\cup(2,3)$ άρα $D_f=(1,2)\cup(2,3)$.

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\ln(x-3)^2 - 2\ln(-x^2+4x-3) + \ln^2(x-1)}{\ln(x-1)} =$

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2\ln(3-x) - 2\ln[(3-x)(x-1)] + \ln^2(x-1)}{\ln(x-1)} =$

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2\ln(3-x) - 2\ln[(3-x)(x-1)] + \ln^2(x-1)}{\ln(x-1)} =$

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\cancel{2\ln(3-x)} - \cancel{2\ln(3-x)} - 2\ln(x-1) + \ln^2(x-1)}{\ln(x-1)} =$

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\cancel{\ln(x-1)}\left[-2+\ln(x-1)\right]}{\cancel{\ln(x-1)}} = -2$.

Όριο κλαδωτών συναρτήσεων

63.α) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+x-1) = 1^2+1-1 = 1$,

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(2x-1) = 2\cdot 1-1 = 1$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1$, άρα και $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$.

β) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2\sqrt{x+1}-2}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)} =$

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2(x+1-1)}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2x}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2}{\sqrt{x+1}+1} = \dfrac{2}{1+1} = 1$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(6x+1) = 1$. Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$, άρα και $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

64. Είναι: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}(\lambda^2x^2 - 3\lambda x + 5) = 4\lambda^2 - 6\lambda + 5$ και

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 2\lambda^2 + 5$. Πρέπει: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 2\lambda^2 + 5$

$\Leftrightarrow 2\lambda^2 - 6\lambda = 0 \Leftrightarrow 2\lambda(\lambda-3) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ απορρίπτεται ή $\lambda = 3$.

65. Επειδή η C_f διέρχεται από το σημείο $A(-2,-8)$, ισχύει:

$f(-2) = -8 \Leftrightarrow 2\alpha(-2) + 3\beta = -8 \Leftrightarrow -4\alpha + 3\beta = -8 \quad (1)$.

Επειδή υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, ισχύει: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.

Είναι: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(2\alpha x+3\beta) = 2\alpha+3\beta$ και

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\cancel{(x-1)}(x+1)(\sqrt{x}+1)}{\cancel{x-1}} = 4$. Οπότε $2\alpha+3\beta = 4$ (2).

Από τις $(1),(2)$ έχουμε: $\left.\begin{array}{r} -4\alpha+3\beta=-8 \\ 2\alpha+3\beta=4 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \alpha=2 \\ \beta=0 \end{array}$.

66. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \Leftrightarrow \alpha+\beta=2$ (1),

$\lim\limits_{x\to 2^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} g(x) \Leftrightarrow 2\alpha-\beta=4$ (2). Από $(1),(2)$ είναι $\alpha=2$, $\beta=0$.

67. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \Leftrightarrow \alpha+\beta=6$ (1),

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) \Leftrightarrow -\alpha+3\beta=2$ (2). Από $(1),(2)$ είναι $\alpha=4$, $\beta=2$.

Αυξημένης δυσκολίας

68.α) $f(x) = x^3-3x^2+3x-1 = (x-1)^3$.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η f είναι 1-1. $f(x)=y \Leftrightarrow (x-1)^3 = y$ (1).

Αν $y\geq 0: x-1=\sqrt[3]{y} \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{y}+1$ και αν $y<0$: $x-1=-\sqrt[3]{-y} \Leftrightarrow x = 1-\sqrt[3]{-y}$.

Άρα $f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}+1, & x\geq 0 \\ 1-\sqrt[3]{-x}, & x<0 \end{cases}$.

β) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f^{-1}(x)-1}{\sqrt[3]{|x|}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt[3]{x}+\cancel{1}-\cancel{1}}{\sqrt[3]{x}} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f^{-1}(x)-1}{\sqrt[3]{|x|}} =$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-\sqrt[3]{-x}+\cancel{1}-\cancel{1}}{\sqrt[3]{-x}} = -1$, άρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^{-1}(x)-1}{\sqrt[3]{|x|}}$.

Όριο της μορφής 0/0 με απόλυτες τιμές

69.α) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{|x^2-x|-6}{|x-4|-1} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{-x+4-1} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+2)}{-(x-3)} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+2}{-1} = -5$.

β) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x-2|-1}{|x|-1}$ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-x+2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-x+1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-(x-1)}{x-1} = -1$.

γ) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{|x+1|+|x^2-4|-9}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{|x+1|+|x-2|\cdot|x+2|-9}{x-3}$ (1)

Είναι $\lim\limits_{x\to 3}(x+1)=4 \Rightarrow x+1>0$ σε περιοχή του 3, $\lim\limits_{x\to 3}(x-2)=1 \Rightarrow x-2>0$ σε περιοχή του 3, $\lim\limits_{x\to 3}(x+2)=5 \Rightarrow x+2>0$ σε περιοχή του 3, οπότε

$$\lim_{x\to 3}\frac{|x+1|+|x^2-4|-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{x+1+x^2-4-9}{x-3}=$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+4)\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}}=\lim_{x\to 3}(x+4)=7.$$

δ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x-2|-|x+2|}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x+2-x-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2x}{x}=-2$.

ε) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{|x|-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^{\cancel{2}}}{\cancel{x-1}}=0$.

στ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x^2-7x+10|-|x-5|}{|x^2-2x|-|x|}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-7x+10+x-5}{-x^2+2x-x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-6x+5}{-x^2+x}=$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x-5)}{-x\cancel{(x-1)}}=4.$$

70.α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2+4|x|}{x^2+2|x|}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5|x|^2-4|x|}{|x|^2-2|x|}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cancel{|x|}(5|x|-4)}{\cancel{|x|}(|x|-2)}=2$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{5x^2+4|x|}{x^2+2|x|}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{5x^2+4x}{x^2+2x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\cancel{x}(5x+4)}{\cancel{x}(x+2)}=2$, άρα $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2+4|x|}{x^2+2|x|}=2$

β) $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{|x+1|+|x+2|-1}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{-x-1+x+2-1}{x^2+x}=0$ και

$\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x+1+x+2-1}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{2\cancel{(x+1)}}{x\cancel{(x+1)}}=-2$, άρα δεν υπάρχει το

$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{|x+1|+|x+2|-1}{x^2+x}$.

γ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x^2-x-2|-|2-x|}{|4-x^2|}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x+1|\cdot\cancel{|x-2|}-\cancel{|x-2|}}{\cancel{|x-2|}\,|x+2|}=\dfrac{1}{2}$.

δ) Έστω $f(x)=\dfrac{|x^2-5x+6|-|9-x^2|}{x^2-3|x|+|x-3|}$, $x\neq 3$.

x	$-\infty$		-3		0		2		3		$+\infty$
x^2-5x+6		+		+		+	0	-	0	+	
$9-x^2$		-	0	+		+		+	0	-	
x		-		-	0	+		+		+	
$x-3$		-		-		-		-	0	+	

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{-\left(x^2-5x+6\right)-\left(9-x^2\right)}{x^2-3x-(x-3)} = \lim_{x\to 3^-} \frac{-x^2+5x-6-9+x^2}{x^2-3x-x+3} =$$

$$= \lim_{x\to 3^-} \frac{5x-15}{x^2-4x+3} = \lim_{x\to 3^-} \frac{5\cancel{(x-3)}}{(x-1)\cancel{(x-3)}} = \lim_{x\to 3^-} \frac{5}{x-1} = \frac{5}{2} \text{ και}$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{\left(x^2-5x+6\right)+\left(9-x^2\right)}{x^2-3x+(x-3)} =$$

$$= \lim_{x\to 3^+} \frac{-5x+15}{x^2-2x-3} = \lim_{x\to 3^+} \frac{-5(x-3)}{(x-3)(x+1)} = \lim_{x\to 3^+} \frac{-5x}{x+1} = -\frac{5}{4}.$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

ε) $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{\sqrt{x^2+8x+16}}{x+4} = \lim\limits_{x\to -4} \dfrac{\sqrt{(x+4)^2}}{x+4} = \lim\limits_{x\to -4} \dfrac{|x+4|}{x+4}$

$\lim\limits_{x\to -4^-} \dfrac{|x+4|}{x+4} = \lim\limits_{x\to -4^-} \dfrac{-(x+4)}{x+4} = -1$, $\lim\limits_{x\to -4^+} \dfrac{|x+4|}{x+4} = \lim\limits_{x\to -4^+} \dfrac{x+4}{x+4} = 1$, άρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{\sqrt{x^2+8x+16}}{x+4}$.

στ) $\lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{\left|x^2-5x+4\right|}{|x-2|-2} = \lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{-(x-1)\cancel{(x-4)}}{\cancel{x-4}} = -3$ και

$\lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{\left|x^2-5x+4\right|}{|x-2|-2} = \lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{(x-1)\cancel{(x-4)}}{\cancel{x-4}} = 3$ άρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\left|x^2-5x+4\right|}{|x-2|-2}$.

Αυξημένης δυσκολίας

71.α) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2-4x+4}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{(x-2)^2}\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}\right)}{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}\right)} =$

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{|x-2|\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}\right)}{-2(x-2)}$,

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{|x-2|\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}\right)}{-2(x-2)}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}\right)}{-2\cancel{(x-2)}}=2\,,$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{|x-2|\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}\right)}{-2(x-2)}=\lim_{x\to 2^+}\frac{\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}\right)}{-2\cancel{(x-2)}}=-2\,,$$ δεν υπάρχει το όριο.

β) $$\lim_{x\to 2^-}\frac{\left|\sqrt{x^2+5}-\sqrt{11-x}\right|}{x^2-4}=\lim_{x\to 2^-}\frac{\left|\sqrt{x^2+5}-\sqrt{11-x}\right|\left|\sqrt{x^2+5}+\sqrt{11-x}\right|}{(x-2)(x+2)\left|\sqrt{x^2+5}+\sqrt{11-x}\right|}=$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{\left|x^2+x-6\right|}{(x-2)(x+2)\left|\sqrt{x^2+5}+\sqrt{11-x}\right|}=$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{|x+3||x-2|}{(x-2)(x+2)\left|\sqrt{x^2+5}+\sqrt{11-x}\right|}=$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{-\cancel{(x-2)}\,|x+3|}{\cancel{(x-2)}\,(x+2)\left|\sqrt{x^2+5}+\sqrt{11-x}\right|}=-\frac{5}{24}\,.$$

72. $$\lim_{x\to 3^-}\frac{-(\alpha-1)\cancel{(x-3)}+\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}}=-\alpha+7\,,$$

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{(\alpha-1)\cancel{(x-3)}+\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}}=\alpha+5\Leftrightarrow -\alpha+7=\alpha+5\Leftrightarrow \alpha=1\,.$$

73.α) Αν $\alpha=0:\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left|x^2-\alpha\right|-\left|x^2+\alpha\right|}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left|x^2\right|-\left|x^2\right|}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}0=0\,.$

Αν $\alpha>0$ τότε $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2-\alpha\right)=-\alpha<0$ και $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+\alpha\right)=\alpha>0$ άρα

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left|x^2-\alpha\right|-\left|x^2+\alpha\right|}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2+\cancel{\alpha}-x^2-\cancel{\alpha}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}=-2\,.$$

Αν $\alpha<0$ τότε $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2-\alpha\right)=-\alpha>0$ και $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+\alpha\right)=\alpha<0$ άρα

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left|x^2-\alpha\right|-\left|x^2+\alpha\right|}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\cancel{\alpha}+x^2+\cancel{\alpha}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}=2\,.$$

β) Παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{x\to\alpha}\left(\sqrt{x^2-2\alpha x+2\alpha^2}-\alpha\right)=|\alpha|-\alpha$ και $\lim\limits_{x\to\alpha}(x+1-\alpha)=1>0$. Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

Αν $\alpha=0$: $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{\sqrt{x^2-2\alpha x+2\alpha^2}-\alpha}{|x+1-\alpha|(|x|-\alpha)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2}}{|x+1||x|}=\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{|x|}{|x+1|\cdot|x|}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{|x+1|}=1$.

Αν $\alpha\neq 0$: Είναι $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{\sqrt{x^2-2\alpha x+2\alpha^2}-\alpha}{|x+1-\alpha|(|x|-\alpha)}=\dfrac{|\alpha|-\alpha}{|\alpha|-\alpha}=1$.

74.α) Είναι $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$ και $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$.

Θα βρούμε την κλίση της κάθε ευθείας. Η f διέρχεται από τα σημεία (0,1) και (x,f(x)) άρα έχει κλίση $\lambda_1=\dfrac{f(x)-1}{x}$, $x\neq 0$. Η g διέρχεται από τα σημεία (0,0) και (x,g(x)) άρα έχει κλίση $\lambda_2=\dfrac{g(x)}{x}$, $x\neq 0$.

Έστω ω_1,ω_2 οι γωνίες που σχηματίζουν με τον άξονα x΄x οι f και g αντίστοιχα.

Θα είναι $\lambda_1=\varepsilon\varphi\omega_1\Leftrightarrow\dfrac{f(x)-1}{x}=\dfrac{1}{|-\alpha|}\overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow}\dfrac{f(x)-1}{x}=\dfrac{1}{\alpha}$ και $\lambda_2=\varepsilon\varphi\omega_2\Leftrightarrow$

$\dfrac{g(x)}{x}=\dfrac{1}{|\alpha|}\overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow}\dfrac{g(x)}{x}=\dfrac{1}{\alpha}$. Άρα είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{f(x)-1}{x}}{\frac{g(x)}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{\alpha}}{\frac{1}{\alpha}}=1$.

β) Είναι $f(x)<1$ για κάθε $x<0$ και $f(x)>1$ για κάθε $x>0$ άρα

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|xf(x)-x|}{f(x)-1}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x||f(x)-1|}{f(x)-1}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x\left(\cancel{f(x)-1}\right)}{\cancel{f(x)-1}}=0 \text{ και}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|xf(x)-x|}{f(x)-1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x||f(x)-1|}{f(x)-1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\left(\cancel{f(x)-1}\right)}{\cancel{f(x)-1}}=0 \text{ άρα}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{|xf(x)-x|}{f(x)-1}=0.$$

75.α) Έστω ότι η C_1 παριστάνει την f. Τότε $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$ και για $x<1$ είναι $f(x)<1$ ενώ για $x>1$ είναι $f(x)>1$. Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{(\alpha-1)|f(x)-1|-f(x)+1}{f(x)-1}=$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{(\alpha-1)(1-f(x))+1-f(x)}{-(1-f(x))} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\cancel{(1-f(x))}(\alpha-\cancel{1}+\cancel{1})}{-\cancel{(1-f(x))}} = -\alpha \, .$$

Είναι $\lim_{x\to 0^+} \frac{(\alpha-1)|f(x)-1|-f(x)+1}{f(x)-1} =$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{(\alpha-1)(f(x)-1)-(f(x)-1)}{f(x)-1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{(f(x)-1)}(\alpha-1-1)}{\cancel{f(x)-1}} = \alpha-2 \, .$$

Επειδή υπάρχει το όριο είναι $-\alpha = \alpha-2 \Leftrightarrow 2\alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha = 1$ πράγμα άτοπο γιατί είναι $\alpha < 0$. Άρα η f παριστάνεται από την C_2.

β) Αφού η f παριστάνεται από την C_2 είναι $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ και για κάθε $x \neq 1$ είναι $f(x) < 1$. Είναι $\lim_{x\to 0} \frac{(\alpha-1)|f(x)-1|-f(x)+1}{f(x)-1} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\alpha-1)(1-f(x))+1-f(x)}{-(1-f(x))} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{(1-f(x))}(\alpha-\cancel{1}+\cancel{1})}{-\cancel{(1-f(x))}} = -\alpha \, .$$

Όριο και διάταξη - Κριτήριο παρεμβολής

76. Είναι $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4} \frac{\cancel{x-4}}{\cancel{(x-4)}(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{4}$ και

$$\lim_{x\to 4} \frac{4-x}{x^2-12x+32} = \lim_{x\to 4} \frac{-\cancel{(x-4)}}{\cancel{(x-4)}(x-8)} = \lim_{x\to 4} \frac{-1}{x-8} = \frac{1}{4} \, .$$

Οπότε από το κριτήριο παρεμβολής $\lim_{x\to 4} f(x) = \frac{1}{4}$.

77. Για $x > 0$ είναι: $\frac{x^4-x^8}{x} \le \frac{g(x)}{x} \le \frac{x^4+x^8}{x} \Leftrightarrow x^3-x^7 \le \frac{g(x)}{x} \le x^3+x^7$.

Επειδή $\lim_{x\to 0^+}(x^3+x^7) = 0$, $\lim_{x\to 0^+}(x^3-x^7) = 0$, είναι και $\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)}{x} = 0 \quad (1)$

Για $x < 0$ είναι: $\frac{x^4-x^8}{x} \ge \frac{g(x)}{x} \ge \frac{x^4+x^8}{x} \Leftrightarrow x^3+x^7 \le \frac{g(x)}{x} \le x^3-x^7$

και $\lim_{x\to 0^+}(x^3+x^7) = 0$, $\lim_{x\to 0^+}(x^3-x^7) = 0$, άρα $\lim_{x\to 0^-} \frac{g(x)}{x} = 0 \quad (2)$

Από τις $(1),(2)$ διαπιστώνουμε ότι $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x} = 0$.

78. Είναι: $(x-1)^2=|x-1|^2$, οπότε η ανισότητα γίνεται:

$\left|(x-1)f(x)-(x^3-1)\right|\le|x-1|^2$.

Για $x\ne1$ είναι: $\dfrac{\left|(x-1)f(x)-(x^3-1)\right|}{|x-1|}\le\dfrac{|x-1|^2}{|x-1|}\Leftrightarrow$

$\left|\dfrac{(x-1)f(x)-(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{x-1}\right|\le|x-1|\Leftrightarrow\left|f(x)-\left(x^2+x+1\right)\right|\le|x-1|\Leftrightarrow$

$-|x-1|\le f(x)-\left(x^2+x+1\right)\le|x-1|\Leftrightarrow$

$\left(x^2+x+1\right)-|x-1|\le f(x)\le\left(x^2+x+1\right)+|x-1|$.

Όμως: $\lim\limits_{x\to1}\left[\left(x^2+x+1\right)-|x-1|\right]=3$ και $\lim\limits_{x\to1}\left[\left(x^2+x+1\right)+|x-1|\right]=3$.

Άρα σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα είναι και $\lim\limits_{x\to1}f(x)=3$.

79.α) Είναι $\lim\limits_{x\to2}2\sqrt{2x}=2\sqrt{4}=4$ και $\lim\limits_{x\to2}(x+2)=4$ οπότε από κριτήριο παρεμβολής είναι: $\lim\limits_{x\to2}f(x)=4$.

β) Είναι: $2\sqrt{2x}-4\le f(x)-4\le x-2$.

Για $x<2$ είναι $\dfrac{2\sqrt{2x}-4}{x-2}\ge\dfrac{f(x)-4}{x-2}\ge\dfrac{x-2}{x-2}\Leftrightarrow1\le\dfrac{f(x)-4}{x-2}\le\dfrac{2\left(\sqrt{2x}-2\right)}{x-2}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{2\left(\sqrt{2x}-2\right)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{2(2x-4)}{(x-2)\left(\sqrt{2x}+2\right)}=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{4\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{2x}+2\right)}=\dfrac{4}{4}=1$

οπότε $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{f(x)-4}{x-2}=1\ (1)$. Για $x>2$ είναι $\dfrac{2\sqrt{2x}-4}{x-2}\le\dfrac{f(x)-4}{x-2}\le1$ και

$\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{2\sqrt{2x}-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{2(2x-4)}{(x-2)\left(\sqrt{2x}+2\right)}=1$, οπότε $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{f(x)-4}{x-2}=1\ (2)$

Από $(1),(2)$ είναι $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{f(x)-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{f(x)-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-4}{x-2}=1$.

γ) Είναι: $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{f(x)+5}-3}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)+5-9}{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{f(x)+5}+3\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to2}\left[\dfrac{f(x)-4}{x-2}\cdot\dfrac{1}{(x+2)\left(\sqrt{f(x)+5}+3\right)}\right]=1\cdot\dfrac{1}{4\cdot(3+3)}=\dfrac{1}{24}$.

δ) Επειδή $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$ τότε $\lim\limits_{x\to 2}\big(f(x)-3\big)=1>0$, οπότε σε περιοχή του 2 είναι $f(x)-3>0$.

Οπότε $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\big(f(x)-3\big)-1}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-4}{(x-2)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{f(x)-4}{x-2}\cdot\dfrac{1}{x-3}\right]=1\cdot\dfrac{1}{-1}=-1$.

80.α) $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+4x\right)=5$, $\lim\limits_{x\to 1}\left(3x^2+2\right)=5$, άρα από κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=5$.

β) $x^2+4x-5\le f(x)-5\le 3x^2-3$. Για $x>1$ είναι

$\dfrac{(x+5)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}\le\dfrac{f(x)-5}{x-1}\le 3\dfrac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}$ και από Κ.Π είναι $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-5}{x-1}=6$.

Όμοια για $x<1$, είναι $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-5}{x-1}=6$ άρα $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-5}{x-1}=6$.

γ) Επειδή $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=5$, είναι $f(x)-1>0$, όταν $x\to 1$, άρα

$$\lim_{x\to 1}\frac{|f(x)-1|-4}{\sqrt{x+3}-2}=\lim_{x\to 1}\frac{\big(f(x)-5\big)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\lim_{x\to 1}\left[\frac{f(x)-5}{x-1}\left(\sqrt{x+3}+2\right)\right]=24$$

δ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\sqrt{f(x)+4}-3\right)\left(\sqrt{f(x)+4}+3\right)\left(\sqrt{2f(x)-6}+2\right)}{\left(\sqrt{2f(x)-6}-2\right)\left(\sqrt{2f(x)-6}+2\right)\left(\sqrt{f(x)+4}+3\right)}=$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cancel{\big(f(x)-5\big)}\left(\sqrt{2f(x)-6}+2\right)}{2\cancel{\big(f(x)-5\big)}\left(\sqrt{f(x)+4}+3\right)}=\dfrac{1}{3}$.

Αυξημένης δυσκολίας

81. $4g(x)<0<3f(x)\Leftrightarrow 4g(x)-3f(x)<-3f(x)<0$, επειδή $\lim\limits_{x\to x_0}\left[4g(x)-3f(x)\right]=0$, είναι $\lim\limits_{x\to x_0}\left(-3f(x)\right)=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$.

Έστω $4g(x)-3f(x)=h(x)\Leftrightarrow g(x)=\dfrac{h(x)+3f(x)}{4}$.

$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{h(x)+3f(x)}{4}=0$.

82. $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f^2(x)-8f(x)\right]=-16\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}\left(f^2(x)-8f(x)+16\right)=0\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)-4\big)^2=0$. Είναι $-|f(x)-4|\le f(x)-4\le|f(x)-4|\Leftrightarrow$

$-\sqrt{(f(x)-4)^2} \le f(x)-4 \le \sqrt{(f(x)-4)^2}$. Επειδή $\lim_{x\to x_0}\left(-\sqrt{(f(x)-4)^2}\right)=0$ και $\lim_{x\to x_0}\sqrt{(f(x)-4)^2}=0$, λόγω του κριτηρίου παρεμβολής θα είναι και $\lim_{x\to x_0}(f(x)-4)=0$. Άρα $\lim_{x\to x_0} f(x)=4$.

83. $\lim_{x\to 2}\left[4f(x)-f^2(x)\right]=4 \Leftrightarrow \lim_{x\to 2}\left[4f(x)-f^2(x)-4\right]=0 \Leftrightarrow$

$\lim_{x\to 2}\left[-(f(x)-2)^2\right]=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 2}(f(x)-2)^2=0$.

$-\sqrt{(f(x)-2)^2} \le f(x)-2 \le \sqrt{(f(x)-2)^2} \Leftrightarrow$

$-\sqrt{(f(x)-2)^2}+2 \le f(x) \le \sqrt{(f(x)-2)^2}+2$ και από Κ.Π είναι $\lim_{x\to 2} f(x)=2$.

84. $0 \le f^2(x) \le f^2(x)+g^2(x)$ και από Κ.Π είναι $\lim_{x\to \chi_0} f^2(x)=0$ και από τα προηγούμενα $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$. Όμοια για την g.

85. $\lim_{x\to 1}\left[f^2(x)+g^2(x)+6f(x)-8g(x)\right]=-25 \Leftrightarrow$

$\lim_{x\to 1}\left[(f(x)+3)^2+(g(x)-4)^2\right]=0$.

$0 \le (f(x)+3)^2 \le (f(x)+3)^2+(g(x)-4)^2$ και από Κ.Π είναι $\lim_{x\to 1}(f(x)+3)^2=0$

… $\lim_{x\to 1} f(x)=-3$. Όμοια για την g.

86. $f^2(x)-2f(x)+\text{συν}^2x \le 0 \Leftrightarrow 0 \le (f(x)-1)^2 \le \text{ημ}^2x$ και από Κ.Π είναι $\lim_{x\to 0}(f(x)-1)^2=0$. Είναι $-\sqrt{(f(x)-1)^2} \le f(x)-1 \le (f(x)-1)^2 \Leftrightarrow$

$-\sqrt{(f(x)-1)^2}+1 \le f(x) \le (f(x)-1)^2+1$ και από Κ.Π είναι $\lim_{x\to 0} f(x)=1$.

87. $f^2(x)-4f(x) \le x^2-4 \Leftrightarrow (f(x)-2)^2 \le x^2$.

Επειδή $0 \le (f(x)-2)^2$ και $\lim_{x\to 0} x^2=0$, είναι και $\lim_{x\to 0}(f(x)-2)^2=0$.

Είναι $-\sqrt{(f(x)-2)^2} \le f(x)-2 \le \sqrt{(f(x)-2)^2}$ και από το Κ.Π είναι

$\lim_{x\to 0}(f(x)-2)=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=2$.

88. $f^2(x)+g^2(x)\le 2xf(x)\Leftrightarrow (f(x)-x)^2+g^2(x)\le x^2$.

Είναι $0\le (f(x)-x)^2\le (f(x)-x)^2+g^2(x)\le x^2$ και από το Κ.Π είναι

$\lim\limits_{x\to 0}(f(x)-x)^2=0$. Είναι $-\sqrt{(f(x)-x)^2}\le f(x)-x\le \sqrt{(f(x)-x)^2}\Leftrightarrow$

$x-\sqrt{(f(x)-x)^2}\le f(x)\le \sqrt{(f(x)-x)^2}+x$, από το Κ.Π.: $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.

Όμοια για την g.

89. Έστω $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\alpha,\alpha\in\mathbb{R}$. Τότε $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\alpha,\alpha\in\mathbb{R}$.

Αν $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ τότε $f(x)\ge \frac{\eta\mu 7x}{\eta\mu x}\Rightarrow$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)\ge \lim_{x\to 0^-}\frac{\eta\mu 7x}{\eta\mu x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{7\frac{\eta\mu 7x}{7x}}{\frac{\eta\mu x}{x}}=7 \quad \text{οπότε } \alpha\ge 7 \quad (1)$$

Αν $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τότε $f(x)\le \frac{\eta\mu 7x}{\eta\mu x}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\le \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu 7x}{\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{7\frac{\eta\mu 7x}{7x}}{\frac{\eta\mu x}{x}}=7$

οπότε $\alpha\le 7$ (2). Από (1),(2): $\alpha=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=7$.

90. $f^5(x)+f(x)+3=x\Leftrightarrow f(x)=\frac{x-3}{f^4(x)+1}$,

$|f(x)|=\left|\frac{x-3}{f^4(x)+1}\right|=\frac{|x-3|}{|f^4(x)+1|}\le |x-3|$ γιατί $f^4(x)+1\ge 1\Leftrightarrow \frac{1}{f^4(x)+1}\le 1$.

Άρα $-|x-3|\le f(x)\le |x-3|$ και από Κ.Π είναι $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=0$.

91. $f^2(x)\le f^2(x)+g^2(x)\le 16f^2(x)+9g^2(x)\Leftrightarrow$

$f^2(x)\le [4f(x)+3g(x)]^2-24f(x)g(x)=\varphi(x)$. Οπότε $0\le f^2(x)\le \varphi(x)$ και

$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\left([4f(x)+3g(x)]^2-24f(x)g(x)\right)=0$.

Άρα από το κριτήριο παρεμβολής θα είναι και $\lim\limits_{x\to x_0}f^2(x)=0\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$.

Έστω $h(x)=4f(x)+3g(x)\Leftrightarrow g(x)=\frac{h(x)-4f(x)}{3}$ και

$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{h(x)-4f(x)}{3}=\frac{0-4\cdot 0}{3}=0$.

92. Έστω $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\alpha, \alpha\in\mathbb{R}$. Τότε $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\alpha, \alpha\in\mathbb{R}$.

Για $x>0: f(x)>2x^2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\geq \lim\limits_{x\to 0^+} 2x^2=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)\geq 0\ (1)$

Για $x>0: f(x)<2x^2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\leq \lim\limits_{x\to 0^-} 2x^2=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)\leq 0\ (2)$.

Από (1),(2) είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

93.α) Αν $x>0: \dfrac{xf^2(x)}{x}>\dfrac{\eta\mu^2 x}{x} \Leftrightarrow f^2(x)>\dfrac{\eta\mu x}{x}\cdot\eta\mu x \Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f^2(x)\geq \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\cdot\eta\mu x\right) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f^2(x)\geq 0 \quad (1)$

Αν $x<0: \dfrac{xf^2(x)}{x}<\dfrac{\eta\mu^2 x}{x} \Leftrightarrow f^2(x)<\dfrac{\eta\mu x}{x}\cdot\eta\mu x \Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f^2(x)\leq \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\cdot\eta\mu x\right) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f^2(x)\leq 0 \quad (2)$.

Από (1),(2) $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f^2(x)=0$.

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $-|f(x)|\leq f(x)\leq |f(x)| \Leftrightarrow -\sqrt{f^2(x)}\leq f(x)\leq \sqrt{f^2(x)}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f^2(x)}=\sqrt{0}=0,\ \lim\limits_{x\to x_0}\left(-\sqrt{f^2(x)}\right)=0$, από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$.

94. $2+x^2<f(x)<2e^{x-1}+1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}(2+x^2)\leq \lim\limits_{x\to 1} f(x)\leq \lim\limits_{x\to 1}(2e^{x-1}+1) \Leftrightarrow$

$3\leq \lim\limits_{x\to 1} f(x)\leq 3 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)=3$.

95. $f^2(x)+x^3<x(x+1)f(x) \Leftrightarrow f^2(x)-x^2f(x)-xf(x)+x^3<0 \Leftrightarrow$

$f(x)(f(x)-x)-x^2(f(x)-x)<0 \Leftrightarrow (f(x)-x)(f(x)-x^2)<0$ άρα οι $f(x)-x,\ f(x)-x^2$ είναι ετερόσημοι.

Αν $f(x)-x<0<f(x)-x^2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}(f(x)-x)\leq 0\leq \lim\limits_{x\to 0}(f(x)-x^2) \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)\leq 0\leq \lim\limits_{x\to 0} f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

Αν $f(x)-x>0>f(x)-x^2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}(f(x)-x)\geq 0\geq \lim\limits_{x\to 0}(f(x)-x^2) \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)\geq 0\geq \lim\limits_{x\to 0} f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$. Όμοια $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$.

96.α) $\lim\limits_{x\to 3}|f(x)| = \lim\limits_{x\to 3}\sqrt{f^2(x)} = 2$.

β) $f(x) < -x+1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 3} f(x) \le \lim\limits_{x\to 3}(-x+1) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 3} f(x) \le -2 \ (1)$

$f(x) \ge -|f(x)| \Rightarrow \lim\limits_{x\to 3} f(x) \ge -\lim\limits_{x\to 3}|f(x)| = -2 \ (2)$

Από (1),(2): $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = -2$.

97.α) Αν $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ τότε $xf^2(x) > \eta\mu x \Leftrightarrow f^2(x) < \frac{\eta\mu x}{x} \Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f^2(x) \le \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\eta\mu x}{x} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f^2(x) \le 1$ (1). Αν $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τότε:

$xf^2(x) > \eta\mu x \Leftrightarrow f^2(x) > \frac{\eta\mu x}{x} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f^2(x) \ge \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} = 1 \Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to 0} f^2(x) \ge 1$ (2). Από (1),(2): $\lim\limits_{x\to 0} f^2(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 0}|f(x)| = \lim\limits_{x\to 0}\sqrt{f^2(x)} = 1$.

β) Είναι $-|f(x)| \le f(x) \le -e^x$ και από το Κ.Π: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1$.

98.α) Επειδή η f είναι περιττή, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(-x) = -f(x)$.

Για x = 0 είναι $f(0) = -f(0) \Leftrightarrow 2f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$.

β) Επειδή υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, είναι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Για κάθε $x < 0 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(0) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \ge 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) \ge 0 \ (1)$

Για κάθε $x > 0 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(x) < f(0) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \le 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) \le 0 \ (2)$

Απο (1), (2) $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

2ος τρόπος: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left[-f(-x)\right] \underset{\substack{x\to 0,\ u\to 0 \\ u\to 0}}{\overset{u=-x}{=}} \lim\limits_{u\to 0}\left[-f(u)\right] \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\lim\limits_{x\to 0} f(x) \Leftrightarrow 2\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

99. Επειδή υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, είναι $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

Για κάθε $x < 1 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) < f(1) = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \le 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x) \le 1 \ (1)$

Για κάθε $x > 1 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(1) = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \ge 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x) \ge 1 \ (2)$

Απο (1), (2) $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$.

100. α) Είναι: $\left(h(x)+g(x)\right)^2 = h^2(x)+g^2(x)+2h(x)g(x) \Leftrightarrow$

$h(x)g(x)=\frac{1}{2}\left[\left(h(x)+g(x)\right)^2-\left(h^2(x)+g^2(x)\right)\right]$.

Είναι $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)g(x)=0$.

β) $\left(h(x)-g(x)\right)^2 = h^2(x)+g^2(x)-2h(x)g(x)$

$\lim\limits_{x\to x_0}\left(h(x)-g(x)\right)^2 = \lim\limits_{x\to x_0}\left(h^2(x)+g^2(x)\right)-2\lim\limits_{x\to x_0} h(x)g(x)=0$.

γ) $0\le h^2(x)\le h^2(x)+g^2(x)$, από κριτήριο παρεμβολής είναι: $\lim\limits_{x\to x_0} h^2(x)=0$,

άρα $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=0$.

δ) $0\le g^2(x)\le h^2(x)+g^2(x)$... $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$.

Τριγωνομετρικά όρια

101. α) Έστω $3x=u \Leftrightarrow x=\frac{u}{3}$. Για $x\to 0$ είναι $u\to 0$, οπότε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{ημ3x}{x}=\lim_{u\to 0}\frac{ημu}{\frac{u}{3}}=\lim_{u\to 0}\frac{3ημu}{u}=3\lim_{u\to 0}\frac{ημu}{u}=3\cdot 1=3.$$

β) $$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{ημx}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{x}}{\frac{ημx}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\frac{ημx}{x}}=\frac{2}{1}=2.$$

γ) $$\lim_{x\to 0}\frac{εφx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{ημx}{συνx}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{ημx}{xσυνx}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{ημx}{x}\cdot\frac{1}{συνx}\right)=1.$$

δ) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-ημx}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1-ημx}-1\right)\left(\sqrt{1-ημx}+1\right)}{x\left(\sqrt{1-ημx}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-ημx-1}{x\left(\sqrt{1-ημx}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{ημx}{x}\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-ημx}+1}\right)=1\cdot\frac{-1}{1+1}=-\frac{1}{2}.$$

ε) $$\lim_{x\to 0}\frac{ημ3x-ημx}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{ημ3x}{x}-\frac{ημx}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{ημ3x}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{ημx}{x}=3-1=2.$$

στ) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-συν2x}{x^2+x}=\lim_{x\to 0}\left(2\frac{1-συν2x}{2x}\frac{1}{x+1}\right)=0.$$

ζ) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{συν2x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(συν2x-1)(συν2x+1)}{x^2(συν2x+1)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-ημ^2 2x}{x^2(συν2x+1)}=$

$\lim\limits_{x\to0}\left[-4\left(\dfrac{ημ2x}{2x}\right)^2\dfrac{1}{συν2x+1}\right]=-2$.

η) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4ημx}{x^2-2x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{ημx}{x}\dfrac{4}{x-2}\right)=-2$.

θ) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ημ2x}{εφ2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ημ2x}{\dfrac{ημ2x}{συν2x}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ημ2x\cdot συν2x}{ημ2x}=\lim\limits_{x\to0}συν2x=συν0=1$.

102. α) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+ημx}-\sqrt{1-ημx}}{x}=$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\sqrt{1+ημx}-\sqrt{1-ημx}\right)\left(\sqrt{1+ημx}+\sqrt{1-ημx}\right)}{x\left(\sqrt{1+ημx}+\sqrt{1-ημx}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to0}\left(2\dfrac{ημx}{x}\dfrac{1}{\sqrt{1+ημx}+\sqrt{1-ημx}}\right)=1$.

β) Είναι: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ημx\cdot ημ2x\cdot ημ3x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{ημx}{x}\dfrac{ημ2x}{x}\dfrac{ημ3x}{x}\right)=$

$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{ημx}{x}\cdot2\dfrac{ημ2x}{2x}\cdot3\dfrac{ημ3x}{3x}\right)=1\cdot2\cdot3=6$.

γ) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ημ3x}{ημ4x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\dfrac{ημ3x}{3x}}{4\dfrac{ημ4x}{4x}}=\dfrac{3}{4}$.

δ) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4xσυνx+ημ5x}{x+ημ2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4συνx+5\dfrac{ημ5x}{5x}}{1+2\dfrac{ημ2x}{2x}}=3$.

ε) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x-ημx}{3x+ημx}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3-\dfrac{ημx}{x}}{3+\dfrac{ημx}{x}}=\dfrac{1}{2}$.

στ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημ3x}{\sqrt{x+9}-3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημ3x\left(\sqrt{x+9}+3\right)}{\left(\sqrt{x+9}-3\right)\left(\sqrt{x+9}+3\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\left(3\dfrac{ημ3x}{3x}\left(\sqrt{x+9}+3\right)\right)=18$.

103. α) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{ημ(x-3)}{x^2-7x+12}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{ημ(x-3)}{(x-3)(x-4)}\overset{x-3=u}{\underset{u\to 0}{=}}\lim\limits_{u\to 0}\left(\dfrac{ημu}{u}\dfrac{1}{u-1}\right)=-1$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημ(ημx)}{4x^2+3x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{ημ(ημx)}{ημx}\cdot\dfrac{ημx}{4x^2+3x}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{ημ(ημx)}{ημx}\cdot\dfrac{ημx}{x}\cdot\dfrac{1}{4x+3}\right)=1\cdot 1\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$.

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+ημx}-\sqrt{2-ημx}}{x}=$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{2+ημx}-\sqrt{2-ημx}\right)\left(\sqrt{2+ημx}+\sqrt{2-ημx}\right)}{x\left(\sqrt{2+ημx}+\sqrt{2-ημx}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(2\dfrac{ημx}{x}\dfrac{1}{\sqrt{2+ημx}+\sqrt{2-ημx}}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

δ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xεφx+1-συν2x}{xημx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{εφx}{x}+\dfrac{1-συν2x}{x^2}}{\dfrac{ημx}{x}}=$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{ημx}{x}\dfrac{1}{συνx}+4\dfrac{ημ^2 2x}{4x^2}\dfrac{1}{1+συν2x}}{\dfrac{ημx}{x}}=3$.

104. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{εφ(ημx)}{ημ(εφx)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημ(ημx)}{συν(ημx)ημ(εφx)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημx\cdot\dfrac{ημ(ημx)}{ημx}}{εφx\cdot συν(ημx)\dfrac{ημ(εφx)}{εφx}}=$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cancel{ημx}\,\dfrac{ημ(ημx)}{ημx}}{\dfrac{\cancel{ημx}}{συνx}\cdot συν(ημx)\dfrac{ημ(εφx)}{εφx}}=\dfrac{1}{1\cdot 1}=1$ γιατί $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημ(ημx)}{ημx}\overset{ημx=u}{\underset{u\to 0}{=}}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{ημu}{u}=1$

και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημ(εφx)}{εφx}\overset{εφx=u}{\underset{u\to 0}{=}}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{ημu}{u}=1$.

105. $f(x)=y\Leftrightarrow\ldots\quad f^{-1}(x)=x^3+3x^2+3x+1$,

$$\lim_{x\to0}\frac{f^{-1}(x)-1}{\eta\mu x}=\lim_{x\to0}\frac{x^3+3x^2+3x+1-1}{\eta\mu x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2+3x+3}{\frac{\eta\mu x}{x}}=3.$$

Αυξημένης δυσκολίας

106. $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\kappa\eta\mu x+\lambda|x|}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\kappa\eta\mu x-\lambda x}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\kappa\frac{\eta\mu x}{x}-\lambda}{x+1}=\kappa-\lambda$,

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\kappa\eta\mu x+\lambda|x|}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\kappa\frac{\eta\mu x}{x}+\lambda}{x+1}=\kappa+\lambda$, άρα

$\kappa-\lambda=\kappa+\lambda=2-\kappa\Leftrightarrow\kappa=1,\ \lambda=0$.

107. $$\lim_{x\to0}\frac{\frac{xf(4x)}{x^2}-\frac{f(-x)\eta\mu3x}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2}-\frac{\eta\mu^2x}{x^2}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{f(4x)}{x}-\frac{f(-x)}{x}\cdot\frac{\eta\mu3x}{x}}{4-\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2}=$$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4\frac{f(x)}{4x}+\frac{f(-x)}{(-x)}\cdot3\frac{\eta\mu3x}{3x}}{4-\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2}$. Όμως $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(4x)}{4x}\underset{u\to0}{\overset{4x=u}{=}}\lim\limits_{u\to0}\dfrac{f(u)}{u}=3$,

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(-x)}{-x}\underset{\omega\to0}{\overset{-x=\omega}{=}}\lim\limits_{\omega\to0}\dfrac{f(\omega)}{\omega}=3$ και $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\eta\mu3x}{3x}=1$.

Άρα το ζητούμενο όριο γίνεται: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4\frac{f(x)}{4x}+\frac{f(-x)}{-x}\cdot3\frac{\eta\mu3x}{3x}}{4-\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2}=\dfrac{4\cdot3+3\cdot3\cdot1}{4-1^2}=7$.

108. $\dfrac{f(x)}{x}=g(x)\overset{x\neq0}{\Leftrightarrow}f(x)=xg(x)$.

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)\eta\mu x-f^2(x)(x+3)}{x^3+3x^2-\eta\mu^2x}=\lim_{x\to0}\frac{xg(x)\eta\mu x-x^2g^2(x)(x+3)}{x^3+3x^2-\eta\mu^2x}=$$

$$\lim_{x\to0}\frac{g(x)\frac{\eta\mu x}{x}-g^2(x)(x+3)}{x+3-\frac{\eta\mu^2x}{x^2}}=-1.$$

109. $\eta\mu x-4x^2+4xf(x)\le f^2(x)\le 1-\sigma\upsilon\nu x-4x^2+4xf(x)\Leftrightarrow$

$\eta\mu x\le (f(x)-2x)^2\le 1-\sigma\upsilon\nu x$ και από Κ.Π είναι $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)-2x)^2=0$.

$-\sqrt{(f(x)-2x)^2}\le f(x)-2x\le \sqrt{(f(x)-2x)^2}\Leftrightarrow$

$-\sqrt{(f(x)-2x)^2}+2x\le f(x)\le \sqrt{(f(x)-2x)^2}+2x$ και από Κ.Π είναι

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.

110. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\underset{h\to 0}{\overset{x=x_0+h}{=}}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0}=$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0)\sigma\upsilon\nu 2h+f(h)\sigma\upsilon\nu 2x_0-f(x_0)}{h}=$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0)(\sigma\upsilon\nu 2h-1)+f(h)\sigma\upsilon\nu 2x_0}{h}=$

$\lim\limits_{h\to 0}\left(2f(x_0)\dfrac{\sigma\upsilon\nu 2h-1}{2h}+\dfrac{f(h)}{h}\sigma\upsilon\nu 2x_0\right)=f(x_0)\cdot 0+2\cdot\sigma\upsilon\nu 2x_0=2\sigma\upsilon\nu 2x_0$.

111. Είναι $3f(x)-\eta\mu f(x)=2x\Leftrightarrow 3f(x)-2x=\eta\mu f(x)$, άρα

$|3f(x)-2x|=|\eta\mu f(x)|$, όμως $|\eta\mu f(x)|\le|f(x)|$, οπότε $|3f(x)-2x|\le|f(x)|\ (1)$

Επίσης, από την τριγωνική ανισότητα είναι $|3f(x)-2x|\ge 3|f(x)|-2|x|\ \ (2)$

Οπότε από (1) και (2) είναι: $|3f(x)|-|2x|\le|3f(x)-2x|\le|f(x)|\Leftrightarrow$

$3|f(x)|-2|x|\le|f(x)|\Leftrightarrow 2|f(x)|\le 2|x|\Leftrightarrow|f(x)|\le|x|\Leftrightarrow -|x|\le f(x)\le|x|\ \ (3)$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}(-|x|)=0$ και $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$, άρα και $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$. Επίσης στην (3),

για $x=0$ είναι $0\le f(0)\le 0\Leftrightarrow f(0)=0$. Στην αρχική σχέση για $x\ne 0$ και

$f(x)\ne 0$, έχουμε: $3-\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}=2\dfrac{x}{f(x)}\Leftrightarrow\dfrac{x}{f(x)}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\Leftrightarrow$,

$\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{1}{\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}}$ άρα $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}}=\dfrac{1}{\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\cdot 1}=1$.

112. Θέτουμε $x-\rho=u$ οπότε $x=\rho+u$ και αφού $x\to\rho$ τότε $u\to 0$.

Άρα το όριο γίνεται: $\lim\limits_{x\to\rho}\left(\eta\mu\dfrac{x-\rho}{2}\cdot\varepsilon\varphi\dfrac{\pi x}{2\rho}\right)=\lim\limits_{u\to 0}\left(\eta\mu\dfrac{u}{2}\cdot\varepsilon\varphi\dfrac{\pi(\rho+u)}{2\rho}\right)=$

$$\lim_{u\to 0}\left(\eta\mu\frac{u}{2}\cdot\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi\cdot u}{2\rho}\right)\right)=\lim_{u\to 0}\left(-\eta\mu\frac{u}{2}\cdot\sigma\varphi\frac{\pi u}{2\rho}\right)=$$

$$\lim_{u\to 0}\left(-\frac{\rho}{\pi}\cdot\frac{\dfrac{\eta\mu\frac{u}{2}}{\frac{u}{2}}\cdot\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi u}{2\rho}}{\dfrac{\eta\mu\frac{\pi u}{2\rho}}{\frac{\pi u}{2\rho}}}\right)=-\frac{\rho}{\pi}\cdot\frac{1\cdot\sigma\upsilon\nu 0}{1}=-\frac{\rho}{\pi}.$$

Όριο με βοηθητική συνάρτηση- Όριο σύνθετης

113. Έστω $\dfrac{f(x)-5x}{x^2-5x+6}=g(x)\overset{x\neq 2}{\underset{x\neq 3}{\Leftrightarrow}} f(x)=g(x)\left(x^2-5x+6\right)+5x$ και

$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left(g(x)\left(x^2-5x+6\right)+5x\right)=10$.

114. Έστω $\dfrac{xf(x)-x^2}{x+\eta\mu 2x}=g(x)\overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow}$

$$f(x)=\frac{g(x)(x+\eta\mu 2x)+x^2}{x}=g(x)\left(1+2\frac{\eta\mu 2x}{2x}\right)+x$$

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left[g(x)\left(1+2\frac{\eta\mu 2x}{2x}\right)+x\right]=6.$$

115. Έστω $\dfrac{f(x)-x}{x-1}=g(x)\overset{x\neq 1}{\Leftrightarrow} f(x)=(x-1)g(x)+x$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)f(x)-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)\left((x-1)g(x)+x\right)-2}{x-1}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)g(x)+x^2+x-2}{x-1}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)\cancel{(x-1)}g(x)+(x+2)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=9$$

116. Έστω $\dfrac{f(x)-2x}{x-2}=g(x)\overset{x\neq 2}{\Leftrightarrow} f(x)=g(x)(x-2)+2x$,

$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left[g(x)(x-2)+2x\right]=4$.

$$\lim_{x\to 2}\frac{f^2(x)-2f(x)-8}{\sqrt{f(x)+12}-2x}=\lim_{x\to 2}\frac{(f(x)-4)(f(x)+2)\left(\sqrt{f(x)+12}+2x\right)}{\left(\sqrt{f(x)+12}-2x\right)\left(\sqrt{f(x)+12}+2x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(f(x)-4)(f(x)+2)\left(\sqrt{f(x)+12}+2x\right)}{\left(\sqrt{f(x)+12}-2x\right)\left(\sqrt{f(x)+12}+2x\right)}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(f(x)-4)(f(x)+2)\left(\sqrt{f(x)+12}+2x\right)}{f(x)+12-4x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(g(x)(x-2)+2x-4)(g(x)(x-2)+2x+2)\left(\sqrt{g(x)(x-2)+2x+12}+2x\right)}{g(x)(x-2)+2x+12-4x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(g(x)+2)(g(x)(x-2)+2x+2)\left(\sqrt{g(x)(x-2)+2x+12}+2x\right)}{\cancel{(x-2)}(g(x)-2(2x+3))}=-\frac{144}{13}.$$

117. α) Έστω $\dfrac{f(x)-\eta\mu^2 x}{x^2}=g(x),\ x\neq 0\Leftrightarrow f(x)=x^2 g(x)+\eta\mu^2 x$

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2g(x)+\eta\mu^2x\right)=0$.

β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(g(x)+\dfrac{\eta\mu^2x}{x^2}\right)=1+1=2$ **.**

γ) Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}(4x-f(x)+1)=1>0$ είναι $4x-f(x)+1>0$ κοντά στο 0, οπότε

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left|4x^3-f(x)+1\right|-\sigma\upsilon\nu^2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{4x^3-f(x)+1-\sigma\upsilon\nu^2x}{x^2}=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(4x-\frac{f(x)}{x^2}+\frac{\eta\mu^2x}{x^2}\right)=-2+1=-1.$$

Αυξημένης δυσκολίας

118. Έστω $\dfrac{f(x)}{x^2-3x+2}=h(x)$, $x\neq 1, x\neq 2$ και $\lim\limits_{x\to 2}h(x)=3$, τότε

$f(x)=h(x)\left(x^2-3x+2\right)$. Έστω $g(x)\left(x^2-4\right)=\varphi(x)$, $\lim\limits_{x\to 2}\varphi(x)=1$.

Τότε για $x\neq\pm 2$ είναι: $g(x)=\dfrac{\varphi(x)}{x^2-4}$, οπότε: $\lim\limits_{x\to 2}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=$

$$\lim_{x\to 2}\left[h(x)\cdot\left(x^2-3x+2\right)\cdot\frac{\varphi(x)}{x^2-4}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{h(x)(x-1)\cancel{(x-2)}\varphi(x)}{\cancel{(x-2)}(x+2)}=\frac{3}{4}.$$

119. Θέτουμε $h(x)=3f(x)-g(x)$ και $\varphi(x)=f(x)+2g(x)$, οπότε προκύπτει: $f(x)=\dfrac{\varphi(x)+2h(x)}{7}$ και $g(x)=\dfrac{3\varphi(x)-h(x)}{7}$, οπότε:

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{\varphi(x)+2h(x)}{7}=\frac{2+26}{7}=4.$$

$$\lim_{x\to 2} g(x)=\lim_{x\to 2}\frac{3\varphi(x)-h(x)}{7}=\frac{6-13}{7}=-1.$$

120. Έστω $3xg(x)-xf(x)=h(x)\ (1)$ και $x^2g(x)+f(x)=t(x)\ (2)$

Το σύστημα των $(1),(2)$ έχει: $D=x(x^2+3)$, $D_g=h(x)+xt(x)$, $D_f=3xt(x)-x^2h(x)$.

Για $x\neq 0$, είναι $g(x)=\dfrac{D_g}{D}=\dfrac{h(x)+xt(x)}{x(x^2+3)}$ και

$$f(x)=\frac{D_f}{D}=\frac{3xt(x)-x^2h(x)}{x(x^2+3)}.$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{3xt(x)-x^2h(x)}{x(x^2+3)}=2 \text{ και } \lim_{x\to 1} g(x)=\lim_{x\to 1}\frac{h(x)+xt(x)}{x(x^2+3)}=1.$$

121. Έστω $\dfrac{f(x)-2}{x-1}=h(x)\overset{x\neq 1}{\Leftrightarrow} f(x)=h(x)(x-1)+2$,

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left[h(x)(x-1)+2\right]=2$, $\dfrac{g(x)-3}{x-1}=t(x)\overset{x\neq 2}{\Leftrightarrow}$

$g(x)=t(x)(x-1)+3$ και $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left[t(x)(x-1)+3\right]=3$.

$$\lim_{x\to 1}\varphi(x)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2x}{g(x)-3x}=\lim_{x\to 1}\frac{h(x)(x-1)+2-2x}{t(x)(x-1)+3-3x}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(h(x)-2)}{\cancel{(x-1)}(t(x)-3)}=1.$$

122. $\eta\mu^2 x-3x^2+f^2(x)=xf(x)\overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^2-3+\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^2=\dfrac{f(x)}{x}$.

Αν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=k\in\mathbb{R}$, τότε $\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^2-3+\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^2\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\Leftrightarrow$

$1-3+k^2=k \Leftrightarrow k^2-k-2=0 \Leftrightarrow k=2$ ή $k=-1$ που απορρίπτεται αφού για $x>0$ είναι $f(x)>0$.

123. α) $f^2(x)+4=4xf(x)+4\sigma\upsilon\nu^2 x \Leftrightarrow f^2(x)-4xf(x)=4\sigma\upsilon\nu^2 x-4 \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow}$

$\frac{f^2(x)}{x^2}-4\frac{f(x)}{x}=-4\frac{\eta\mu^2 x}{x^2}$ και $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{f^2(x)}{x^2}-4\frac{f(x)}{x}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left(-4\frac{\eta\mu^2 x}{x^2}\right)$,

αν $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=k$, τότε $k^2-4k=-4 \Leftrightarrow (k-2)^2=0 \Leftrightarrow k=2$.

β) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu x)}{x^2+2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu x)}{x(x+2)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\frac{\eta\mu x}{x}\frac{1}{x+2}=2\cdot\frac{1}{2}=1$ γιατί

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\underset{x\to 0,\ u\to 0}{\overset{u=\eta\mu x}{=}}\lim\limits_{u\to 0}\frac{f(u)}{u}=2$.

124. $f(x)+x^3-\eta\mu\frac{\pi x}{2}+1=g(x) \Leftrightarrow f(x)=g(x)-x^3+\eta\mu\frac{\pi x}{2}-1$.

$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left(g(x)-x^3+\eta\mu\frac{\pi x}{2}-1\right)=1$.

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}f(2-x)\underset{u\to 2}{\overset{2-x=u}{=}}\lim\limits_{u\to 2}f(u)=1$.

125. $\frac{f(x)+\eta\mu(x-1)-1}{x-1}=g(x)\overset{x\neq 1}{\Leftrightarrow} f(x)=g(x)(x-1)-\eta\mu(x-1)+1$.

$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\big(g(x)(x-1)-\eta\mu(x-1)+1\big)=1$.

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-1}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(3-x)-1}{x-2}\underset{u\to 1}{\overset{3-x=u}{=}}\lim\limits_{u\to 1}\frac{f(u)-1}{-(u-1)}=$

$\lim\limits_{u\to 1}\frac{g(u)(u-1)-\eta\mu(u-1)+1-1}{-(u-1)}=\lim\limits_{u\to 1}\left(-g(u)+\frac{\eta\mu(u-1)}{u-1}\right)=-1$.

126. Έστω $g(x)=f(x)+4x-2$ με $\lim\limits_{x\to -2}g(x)=2$.

Τότε: $f(x)=g(x)-4x+2$ και $\lim\limits_{x\to -2}f(x)=\lim\limits_{x\to -2}\big(g(x)-4x+2\big)=12$.

Όπου x το $x-2$ έχουμε

$f(x-2)+f(x)=2(x-2)+2=2x-2 \Leftrightarrow f(x)=2x-2-f(x-2)$.

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\big(2x-2-f(x-2)\big)\underset{u\to -2}{\overset{x-2=u}{=}}\lim\limits_{u\to -2}\big(2(u+2)-2-f(u)\big)=-14$.

127. Έστω $g(x)=f(x)-x^2+x$ με $\lim\limits_{x\to 2} g(x)=2$ οπότε $f(x)=g(x)+x^2-x$ και $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left[g(x)+x^2-x\right]=4$.

Επειδή $f(x)=f(2-x)$ τότε $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2} f(2-x)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(2-x)=4$.

Θέτουμε $2-x=u$ οπότε όταν $x\to 2$ τότε $u\to 0$ και γίνεται $\lim\limits_{u\to 0} f(u)=4$.

Άρα $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=4$.

128. Θέτουμε $x=2-u$ και έχουμε

$$\lim_{u\to 1}\big(2f(2-u)+f(u)\big)=6\Leftrightarrow \lim_{x\to 1}\big(2f(2-x)+f(x)\big)=6$$

Έστω $2f(2-x)+f(x)=h(x)$ (1) με $\lim\limits_{x\to 1} h(x)=6$ και

$2f(x)+f(2-x)=g(x)\Leftrightarrow -4f(x)-2f(2-x)=-2g(x)$ (2) με $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=6$.

Από $(1)+(2)\Rightarrow -3f(x)=h(x)-2g(x)\Leftrightarrow f(x)=-\frac{1}{3}\big(h(x)-2g(x)\big)$ και

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left[-\frac{1}{3}\big(h(x)-2g(x)\big)\right]=-\frac{1}{3}(6-12)=2$.

129. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(2x^2+3x)}{2x^2-3x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{f(2x^2+3x)}{2x^2+3x}\frac{2x^2+3x}{2x^2-3x}\right]=$

$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{f(2x^2+3x)}{2x^2+3x}\frac{\cancel{x}(2x+3)}{\cancel{x}(2x-3)}\right]=-2$ αφού $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(2x^2+3x)}{2x^2+3x}\underset{x\to 0,\ u\to 0}{\overset{u=2x^2+3x}{=}}\lim\limits_{u\to 0}\frac{f(u)}{u}=2$.

130. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(27x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{f(27x)}{f(9x)}\frac{f(9x)}{f(3x)}\frac{f(3x)}{f(x)}\right]=64$ γιατί

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(27x)}{f(9x)}\overset{9x=u}{=}\lim\limits_{u\to 0}\frac{f(3u)}{f(u)}=4$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(9x)}{f(3x)}\overset{3x=u}{=}\lim\limits_{u\to 0}\frac{f(3u)}{f(u)}=4$.

Σύνθετες ασκήσεις

131. α) $x-1=u$, τότε $f(x)=4x^3+3x$, $f(\eta\mu x)=4\eta\mu^3 x+3\eta\mu x$ και

$g(x)=4f^3(\eta\mu x)+3f(\eta\mu x)=4\left(4\eta\mu^3 x+3\eta\mu x\right)^3+3\left(4\eta\mu^3 x+3\eta\mu x\right)=\ldots$

β) Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2\ \ldots\ldots\ f(x_1)<f(x_2)$ άρα η f γνησίως αύξουσα οπότε είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται.

γ) $\lim\limits_{x\to 0} f(\eta\mu x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\eta\mu x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(4\eta\mu^2 x\dfrac{\eta\mu x}{x}+3\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)=3$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=3$

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{f^{-1}(f(x))}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(f(\eta\mu x))}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(f(\eta\mu x))}{f(\eta\mu x)}\frac{f(\eta\mu x)}{x}=9\,.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(f(\eta\mu x))}{f(\eta\mu x)}\overset{f(\eta\mu x)=u}{=}\lim_{u\to 0}\frac{f(u)}{u}=3\,.$$

δ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(g(x))}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(g(x))}{g(x)}\dfrac{g(x)}{x}=81$, γιατί $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\big(f(f(x))\big)=$

$\lim\limits_{x\to 0}\big(4f^3(\eta\mu x)+3f(\eta\mu x)\big)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(g(x))}{g(x)}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{g(y)}{y}=9$.

132. α) Έστω ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$, τέτοια ώστε $f(x_1)\ge f(x_2)$, τότε $f^3(x_1)\ge f^3(x_2)$ και $f^3(x_1)+f(x_1)\ge f^3(x_2)+f(x_2)\Leftrightarrow$
$x_1+2\ge x_2+2\Leftrightarrow x_1\ge x_2$ άτοπο. Άρα για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

β) Έστω $f(x)=y$, τότε …. $f^{-1}(x)=x^3+x-2$.

γ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f^{-1}(x)}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-2}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+2)}{\cancel{(x-1)}(x+2)}=\dfrac{4}{3}$.

δ) $f^3(x)+f(x)=x+2\Leftrightarrow f(x)\big(f^2(x)+2\big)=x+2\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{x+2}{f^2(x)+2}$

$$|f(x)|=\left|\frac{x+2}{f^2(x)+2}\right|=\frac{|x+2|}{f^2(x)+2}\le\frac{|x+2|}{2}\Leftrightarrow -\frac{|x+2|}{2}\le f(x)\le\frac{|x+2|}{2}\,.$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{|x+2|}{2}=0=\lim\limits_{x\to -2}\left(-\dfrac{|x+2|}{2}\right)$, από το Κ.Π. είναι και $\lim\limits_{x\to -2}f(x)=0$.

133. α) Έστω $g(x)=\dfrac{f(x)-2f(-x)}{x}\overset{x\ne 0}{\Leftrightarrow}f(x)-2f(-x)=xg(x)\quad(1)$

Για $x=-u$ έχουμε: $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(-u)-2f(u)}{-u}=3\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2f(x)-f(-x)}{x}=3$.

$$h(x)=\frac{2f(x)-f(-x)}{x}\overset{x\ne 0}{\Leftrightarrow}2f(x)-f(-x)=xh(x)\quad(2)$$

Από το σύστημα των $(1),(2)$ προκύπτει: $f(x)=\dfrac{2xh(x)-xg(x)}{3}$ και $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

β) i. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2h(x)-g(x)}{3}=1$.

ii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(f(x))}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(f(x))}{f(x)}\dfrac{f(x)}{x}=1$, γιατί $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(f(x))}{f(x)}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(u)}{u}=1$.

iii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\eta\mu x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(u)}{u}=1$.

134. α) $\eta\mu^2x-2x(f(x)+x)\le f^2(x)\le 2(\eta\mu^2x-xf(x))\Leftrightarrow$

$\eta\mu^2x-2x^2\le f^2(x)+2xf(x)\le 2\eta\mu^2x\Leftrightarrow$

$\eta\mu^2x-2x^2\le f^2(x)+2xf(x)\le 2\eta\mu^2x\Leftrightarrow$

$\eta\mu^2x-x^2\le f^2(x)+2xf(x)+x^2\le 2\eta\mu^2x+x^2\Leftrightarrow$

$\eta\mu^2x-x^2\le (f(x)+x)^2\le 2\eta\mu^2x+x^2$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}(\eta\mu^2x-x^2)=\lim\limits_{x\to 0}(2\eta\mu^2x+x^2)=0$, άρα και $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)+x)^2=0$.

β) Είναι $-|f(x)+x|\le f(x)+x\le |f(x)+x|\Leftrightarrow$

$-\sqrt{(f(x)+x)^2}\le f(x)+x\le\sqrt{(f(x)+x)^2}\Leftrightarrow$

$-\sqrt{(f(x)+x)^2}-x\le f(x)\le\sqrt{(f(x)+x)^2}-x$ άρα από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

γ) $\lim\limits_{x\to -k} f(x+k)\underset{u\to 0}{\overset{x+k=u}{=}}\lim\limits_{u\to 0} f(u)=0$.

135. α) $f(x)=x^3-3x^2+3x-2=(x-1)^3-1$. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$, τότε $x_1-1<x_2-1\Leftrightarrow (x_1-1)^3<(x_2-1)^3\Leftrightarrow (x_1-1)^3-1<(x_2-1)^3-1\Leftrightarrow$ $f(x_1)<f(x_2)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα οπότε είναι $1-1$.

$f(x)=y\Leftrightarrow (x-1)^3-1=y\Leftrightarrow (x-1)^3=y+1$.

Αν $y\ge -1$, τότε $x-1=\sqrt[3]{y+1}\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{y+1}+1$ και αν $y<-1$ τότε $x-1=-\sqrt[3]{-y-1}\Leftrightarrow x=-\sqrt[3]{-y-1}+1$, άρα $f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x+1}+1 & ,\ x\ge -1\\ -\sqrt[3]{-x-1}+1 & ,\ x<-1\end{cases}$.

β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\eta\mu x)+2}{\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu^3x-3\eta\mu^2x+3\eta\mu x}{\eta\mu x}=$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cancel{\eta\mu x}\left(\eta\mu^2x-3\eta\mu x+3\right)}{\cancel{\eta\mu x}}=3$.

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^{-1}(x)+f(0)}{f^{-1}(f(x))}\overset{\alpha)}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}+1-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cancel{+1}\cancel{-1}}{x\left[\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+\sqrt[3]{x+1}+1\right]}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left[\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+\sqrt[3]{x+1}+1\right]}=\dfrac{1}{3}$.

δ) Έστω ότι υπάρχει γνησίως αύξουσα συνάρτηση $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία να ισχύει ότι $h(h(x))+f(h(x))=e^{-x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Τότε για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι $h(x_1)<h(x_2)\Leftrightarrow h(h(x_1))<h(h(x_2))\ (1)$,

$f(h(x_1))<f(h(x_2))\ (2)$ και από $(1)+(2)\Rightarrow$

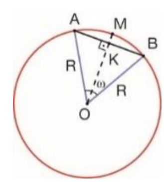
$e^{-x_1}<e^{-x_2}\Leftrightarrow -x_1<-x_2\Leftrightarrow x_1>x_2$ άτοπο.

ε) Αν $x>2$ τότε $g(x)-f(x)>0\Leftrightarrow g(x)>f(x)\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^+}g(x)\geq\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)\Leftrightarrow$

$\lambda\geq 0\ (3)$. Αν $x<2$ τότε $g(x)-f(x)<0\Leftrightarrow g(x)<f(x)\Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to 2^-}g(x)\leq\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)\Leftrightarrow\lambda\leq 0\ (4)$. Από $(3),(4)\Rightarrow\lambda=0$.

136. α) Είναι $OA=OB=R$. Στο τρίγωνο OAK είναι



$\eta\mu\dfrac{\omega}{2}=\dfrac{AK}{R}\Leftrightarrow AK=R\eta\mu\dfrac{\omega}{2}$, οπότε $AB=2AK=2R\eta\mu\dfrac{\omega}{2}$.

Επίσης, $\sigma\upsilon\nu\dfrac{\omega}{2}=\dfrac{OK}{R}\Leftrightarrow OK=R\sigma\upsilon\nu\dfrac{\omega}{2}$.

Επίσης ισχύει $S=\omega R$.

β) Έχουμε $\lim\limits_{\omega\to 0}\dfrac{S}{AB}=\lim\limits_{\omega\to 0}\dfrac{\omega R}{2R\eta\mu\frac{\omega}{2}}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{\omega\to 0}\dfrac{\omega}{\frac{\omega}{2}\cdot\dfrac{\eta\mu\frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\frac{1}{2}\cdot 1}=1$.

$\lim\limits_{\omega\to 0}\dfrac{AB}{\omega}=\lim\limits_{\omega\to 0}\dfrac{2R\eta\mu\frac{\omega}{2}}{\omega}=\lim\limits_{\omega\to 0}R\dfrac{\eta\mu\frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}=R\cdot 1=R$.

$$(AMB)=\frac{1}{2}AB\cdot MK=\frac{1}{2}2R\eta\mu\frac{\omega}{2}(R-OK)=R\eta\mu\frac{\omega}{2}\left(R-R\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2}\right)=$$

$=R^2\eta\mu\frac{\omega}{2}\left(1-\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2}\right)$ και $(OAB)=\frac{1}{2}OA\cdot OB\eta\mu\omega=\frac{1}{2}R^2\eta\mu\omega$ οπότε

$$\lim_{\omega\to\frac{2\pi}{3}}\frac{(AMB)}{(OAB)}=\lim_{\omega\to\frac{2\pi}{3}}\frac{\cancel{R^2}\eta\mu\frac{\omega}{2}\left(1-\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2}\right)}{\frac{1}{2}\cancel{R^2}\eta\mu\omega}=2\frac{\eta\mu\frac{\pi}{3}\left(1-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\right)}{\eta\mu^2\frac{2\pi}{3}}=2\frac{\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(1-\frac{1}{2}\right)}{\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}}}=1$$

137. α) Για κάθε $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ είναι

$x_1^2<x_2^2\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)\Leftrightarrow f\nearrow[0,+\infty)$ άρα f 1-1 στο $[0,+\infty)$.

Έστω $x_1,x_2\in(-\infty,0)$ με $x_1<x_2$ τότε $x_1^2>x_2^2\Leftrightarrow$

$-x_1^2<-x_2^2\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)\Leftrightarrow f\nearrow(-\infty,0)$ άρα η f είναι 1-1 στο $(-\infty,0)$.

Για κάθε $x\geq 0$ είναι $f(x)=y\Leftrightarrow x^2=y\geq 0\overset{y\geq 0}{\Leftrightarrow} x=\sqrt{y}$.

Για κάθε $x<0$ είναι $f(x)=y\Leftrightarrow -x^2=y<0\Leftrightarrow x^2=-y\overset{y<0}{\Leftrightarrow} x=-\sqrt{-y}$.

Στο διάστημα $A_1=(-\infty,0)$ η f έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(A_1)=(-\infty,0)$ και στο διάστημα $A_2=[0,+\infty)$ η f έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(A_2)=[0,+\infty)$. Επειδή $f(A_1)\cap f(A_2)=\varnothing$ η f είναι 1-1 οπότε αντιστρέφεται

με $f^{-1}(y)=\begin{cases}\sqrt{y}, & y\geq 0\\ -\sqrt{-y}, & y<0\end{cases}$, άρα

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\geq 0\\ -\sqrt{-x}, & x<0\end{cases}.$$

β) i. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{f(x)}+f^{-1}(x)-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}-2}{x-1}=$

$\lim_{\omega\to 1}\frac{\omega^4+\omega^3-2}{\omega^6-1}=$

$\lim_{\omega\to 1}\frac{\cancel{(\omega-1)}(\omega^3+2\omega^2+2\omega+2)}{\cancel{(\omega-1)}(\omega^5+\omega^4+\omega^3+\omega^2+\omega+1)}=\frac{7}{6}$.

Θέτουμε
$\sqrt[6]{x}=\omega\Leftrightarrow x=\omega^6$

$\left(\sqrt[6]{x}\right)^3=\omega^3\Leftrightarrow\sqrt{x}=\omega^3$

$\left(\sqrt[6]{x}\right)^4=\omega^4\Leftrightarrow\sqrt[3]{x^2}=\omega^4$

όταν $x\to 1$ τότε $\omega\to 1$

ii. $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(\eta\mu x)}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\eta\mu^2 x}{x^2}\right)=1$.

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(\eta\mu x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{-\eta\mu^2 x}{x^2}\right)=-1$. Επομένως δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\eta\mu x)}{x^2}$.

iii. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\eta\mu f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\eta\mu\left(x^2\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\eta\mu\left(x^2\right)}{x^2}\cdot x\right)=1\cdot 0=0$,

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\eta\mu f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\eta\mu\left(-x^2\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-\dfrac{\eta\mu\left(x^2\right)}{x^2}\cdot x\right)=-1\cdot 0=0$, άρα

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu f(x)}{x}=0$.

γ) i. Έστω ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ τέτοια, ώστε $g(x_1)\ge g(x_2)$ τότε επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ ισχύει ότι $f\left(g(x_1)\right)\ge f\left(g(x_2)\right)\Leftrightarrow h(x_1)\ge h(x_2)$ που είναι άτοπο αφού η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Άρα $g(x_1)<g(x_2)\Rightarrow g\nearrow(0,+\infty)$.

ii. $h(x)=(g\circ f)(x)\Leftrightarrow f\left(g(x)\right)=g\left(f(x)\right)$ άρα

$f^{-1}\left(f\left(g(x)\right)\right)=f^{-1}\left(g\left(f(x)\right)\right)\Leftrightarrow\ g(x)=f^{-1}\left(g\left(f(x)\right)\right)$.

Αντικαθιστώντας όπου x το $f^{-1}(x)$ προκύπτει:

$g\left(f^{-1}(x)\right)=f^{-1}\left(g\left(f\left(f^{-1}(x)\right)\right)\right)\Leftrightarrow\left(f^{-1}\circ g\right)(x)=\left(g\circ f^{-1}\right)(x)$.

138. α) $f(x)=2x-\lim\limits_{x\to 1}f^2(x)\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 1}f^2(x)=2x-f(x)$.

Επειδή για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $\left(2x-f(x)\right)\in\mathbb{R}$, το $\lim\limits_{x\to 1}f^2(x)$ είναι πραγματικός αριθμός. Έστω $\lim\limits_{x\to 1}f^2(x)=\alpha\in\mathbb{R}$, τότε $f(x)=2x-\alpha$ και

$\lim\limits_{x\to 1}f^2(x)=\alpha\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 1}(2x-\alpha)^2=\alpha\Leftrightarrow(2-\alpha)^2=\alpha\Leftrightarrow 4-4\alpha+\alpha^2=\alpha\Leftrightarrow$

$\alpha^2-5\alpha+4=0\Leftrightarrow\alpha=1$ ή $\alpha=4$. Άρα $f(x)=2x-1$ ή $f(x)=2x-4$.

β) Επειδή $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}g(x)\in\mathbb{R}$, είναι $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}g(x)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-}g(x)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+}g(x)$.

$f(x)g(x)-f(x)>0\Leftrightarrow f(x)\left(g(x)-1\right)>0\Leftrightarrow(2x-1)\left(g(x)-1\right)>0$.

Αν $x>\dfrac{1}{2}$ τότε $2x-1>0$, οπότε και $g(x)-1>0\Leftrightarrow g(x)>1$, άρα

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+}g(x)\ge 1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}g(x)\ge 1$ (1). Αν $x<\dfrac{1}{2}$ τότε $2x-1<0$, οπότε και

$g(x)-1<0 \Leftrightarrow g(x)<1$, άρα $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} g(x)\le 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} g(x)\le 1$ (2)

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} g(x)=1$.

γ) i. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{f(x)-x+1}-2}{x-4}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{2x-1-x+1}-2}{x-4}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

$=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\left(\sqrt{x}\right)^2-2^2}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x-4}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}=$

$\lim\limits_{x\to4}\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}=\dfrac{1}{\sqrt{4}+2}=\dfrac{1}{4}$.

ii. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x-1-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2(x-1)\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1\right]}{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1\right]}=$

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2(x-1)\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1\right]}{\left(\sqrt[\cancel{3}]{x}\right)^{\cancel{3}}-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2\cancel{(x-1)}\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1\right]}{\cancel{x-1}}=6$.

iii. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}-2}{f(x)-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}-2}{2x-2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}-2}{2(x-1)}=$

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}+\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to1}\left[\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1\right]}{(x-1)\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1\right]}+\right.$

$\left.\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}\right]=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1\right]}+\dfrac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{x}+1\right)}\right]=$

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}\right]=\dfrac{5}{12}$.

iv. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\left|x^2-2x\right|-3}{\left|f(x)-x\right|-2}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\left|x^2-2x\right|-3}{\left|2x-1-x\right|-2}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\left|x^2-2x\right|-3}{\left|x-1\right|-2}=$

$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-2x-3}{x-1-2}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\cancel{(x-3)}(x+1)}{\cancel{x-3}}=3+1=4$ γιατί:

$\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2-2x\right)=3>0$, άρα $x^2-2x>0$ για κάθε x πολύ κοντά στο 3,

$\lim\limits_{x\to 3}\left(x-1\right)=2>0$, άρα $x-1>0$ για κάθε x πολύ κοντά στο 3.

δ) Η C_f είναι ευθεία με κλίση α > 0, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

$f(x)=y\Leftrightarrow 2x-1=y\Leftrightarrow 2x=y+1\Leftrightarrow x=\dfrac{y+1}{2}$, άρα $f^{-1}(y)=\dfrac{y+1}{2}$, $y\in\mathbb{R}$,

οπότε $f^{-1}(x)=\dfrac{x+1}{2}$, $x\in\mathbb{R}$.

Τράπεζα θεμάτων ΙΕΠ

24768. α) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)\geq\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow x^2-x+1\geq\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow$

$4x^2-4x+4\geq 3\Leftrightarrow 4x^2-4x+1\geq 0\Leftrightarrow (2x-1)^2\geq 0$ ισχύει.

β) Η g ορίζεται όταν $4x-3\geq 0\Leftrightarrow 4x\geq 3\Leftrightarrow x\geq\dfrac{3}{4}$, άρα $A_g=\left[\dfrac{3}{4},+\infty\right)$.

Είναι $A_h=\left\{x\in A_f\,/\,f(x)\in A_g\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,f(x)\geq\dfrac{3}{4}\right\}=\mathbb{R}$ και

$h(x)=g\left(f(x)\right)=\sqrt{4\left(x^2-x+1\right)-3}=\sqrt{4x^2-4x+4-3}=\sqrt{4x^2-4x+1}\Leftrightarrow$

$h(x)=\sqrt{(2x-1)^2}=|2x-1|$.

γ) Είναι $\lim\limits_{x\to 0}(2x-1)=-1$ άρα $2x-1<0$ για τιμές του x πολύ κοντά στο μηδέν,

άρα $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{h(x)-1}{\sqrt{x+1}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2x+1-1}{\sqrt{x+1}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-1^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x+1-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\cancel{x}\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\cancel{x}}=-4$.

28477. α) Η g ορίζεται όταν $x^2>0\neq x\neq 0$, άρα $D_g=\mathbb{R}^*$.

β) Είναι $D_{gof}=\left\{x\in D_f\,/\,f(x)\in D_g\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,e^{3x+2}\neq 0\right\}=\mathbb{R}$ και

$(gof)(x)=g\left(f(x)\right)=\ln\left(e^{3x+2}\right)^2=\ln e^{6x+4}=6x+4,\ x\in\mathbb{R}$.

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(gof)(x)-\eta\mu^2x-4}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x+\cancel{4}-\eta\mu^2x-\cancel{4}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(6+\eta\mu x\cdot\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)=6$.

Ερωτήσεις Σωστού - Λάθους

1. Λ	**2.**Σ	**3.**Σ	**4.** Σ	**5.** Σ	**6.**Σ	**7.** Λ	**8.** Λ	**9.** Λ	**10.**Λ
11.Λ	**12.** Λ	**13.**Σ	**14.**Σ	**15.**Σ	**16.**Σ	**17.**Σ	**18.**Σ	**19.**Σ	**20.**Σ
21.Λ	**22.** Λ	**23.**Σ	**24.**Λ	**25.**Λ	**26.**Σ	**27.**Λ	**28.**Λ	**29.**Σ	**30.**Σ
31.Σ	**32.** Λ								

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Για $x \neq 1, 4$ είναι

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+3x+5}-\sqrt[3]{x}-x-1}{x^2-5x+4}=\frac{\sqrt{x^2+3x+5}-\sqrt[3]{x}-3x+x+x-1}{x^2-5x+4}=$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+3x+5}-3x}{x^2-5x+4}-\frac{\sqrt[3]{x}-x}{x^2-5x+4}+\frac{x-1}{x^2-5x+4}$$. Είναι:

- $$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+3x+5}-3x}{x^2-5x+4}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+3x+5-9x^2}{(x-1)(x-4)\left(\sqrt{x^2+3x+5}+3x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-8x^2+3x+5}{(x-1)(x-4)\left(\sqrt{x^2+3x+5}+3x\right)}=$$

$$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(-8x-5)}{(x-1)(x-4)\left(\sqrt{x^2+3x+5}+3x\right)}=\frac{13}{18}.$$

- $$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-x}{x^2-5x+4}\underset{x=\omega^3}{\overset{\sqrt[3]{x}=\omega}{=}}\lim_{\omega\to1}\frac{\omega-\omega^3}{\omega^6-5\omega^3+4}=$$

$$\lim_{\omega\to1}\frac{\omega(1-\omega)(1+\omega)}{(\omega-1)\left(\omega^5+\omega^4+\omega^3-4\omega^2-4\omega-4\right)}=\frac{2}{9}.$$

- $$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2-5x+4}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x-4)}=-\frac{1}{3}$$. Οπότε

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\left(\frac{\sqrt{x^2+3x+5}-3x}{x^2-5x+4}-\frac{\sqrt[3]{x}-x}{x^2-5x+4}+\frac{x-1}{x^2-5x+4}\right)=\frac{13}{18}-\frac{2}{9}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

Σωστή απάντηση Γ.

2. $$\lim_{x\to\pi}\frac{\eta\mu(1+\sigma\upsilon\nu x)}{(x-\pi)^2}\underset{x=\pi+y}{\overset{x-\pi=y}{=}}\lim_{y\to0}\frac{\eta\mu(1+\sigma\upsilon\nu(\pi+y))}{y^2}=\lim_{y\to0}\left(\frac{\eta\mu(1-\sigma\upsilon\nu y)}{(1-\sigma\upsilon\nu y)}\frac{(1-\sigma\upsilon\nu y)}{y^2}\right)=\frac{1}{2}.$$

Γιατί $\lim\limits_{y\to 0}\frac{ημ(1-συνy)}{(1-συνy)}=\lim\limits_{ω\to 0}\frac{ημω}{ω}=1$ και $\lim\limits_{y\to 0}\frac{1-συνy}{y^2}=$

$\lim\limits_{y\to 0}\frac{(1-συνy)(1+συνy)}{y^2(1+συνy)}$, $\lim\limits_{y\to 0}\frac{1-συν^2y}{y^2(1+συνy)}=\lim\limits_{y\to 0}\left(\frac{ημ^2y}{y^2}\frac{1}{(1+συνy)}\right)=\frac{1}{2}$.

Σωστή απάντηση Β.

3. Αν $x\in\left(0,\frac{π}{2}\right)$ τότε $x>0, ημx>0$ και $ημx<x$ οπότε

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x+ημx|+|x-ημx|}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x+ημx+x-ημx}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x}=4$$

Αν $x\in\left(-\frac{π}{2},0\right)$ τότε $x<0, ημx<0$ και $x>ημx$ οπότε

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x+ημx|+|x-ημx|}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x-ημx-x+ημx}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-2x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x}=-4$$

Άρα δεν υπάρχει $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x+ημx|+|x-ημx|}{\sqrt{x+1}-1}$. **Σωστή απάντηση Δ.**

4. Είναι $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(2-x)}{f(x)}\overset{2-x=ω}{\underset{x=2-ω}{=}}\lim\limits_{ω\to 1}\frac{f(ω)}{f(2-ω)}=\lim\limits_{ω\to 1}\frac{1}{\frac{f(2-ω)}{f(ω)}}=\frac{1}{α}$, οπότε

$α=\frac{1}{α}\Leftrightarrow α^2=1\overset{α>0}{\Rightarrow}α=1$. **Σωστή απάντηση Α.**

5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x^2+3x)}{x^2+3x}\overset{x^2+3x=ω}{\underset{ω\to 0}{=}}\lim\limits_{ω\to 0}\frac{f(ω)}{ω}=1$. **Σωστή απάντηση Β.**

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x^2+3x)}{x^2-3x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{f(x^2+3x)}{x^2+3x}\,\frac{x^2+3x}{x^2-3x}\right)=1(-1)=-1$ γιατί

6. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}ημ\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}ημ\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)\right]=$

$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{ημ\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}}{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}\right]=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ γιατί $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}=0$.

Σωστή απάντηση Δ.

9	Μη πεπερασμένο όριο στο x_0

Υπολογισμός ορίων κ/0

13. Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left[x\left(\dfrac{1}{x^2+x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}(x+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{1}=1$.

Για να εφαρμοστεί η ιδιότητα $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)g(x)\right]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ πρέπει να υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ και να είναι επιτρεπτή η πράξη. Δηλαδή να ισούνται και τα δύο με πραγματικό αριθμό ή το ένα να ισούται με $\pm\infty$ και το άλλο με πραγματικό αριθμό διάφορο του μηδέν ή να ισούνται και τα δύο με $\pm\infty$.

Στην προκειμένη περίπτωση δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2+x}$.

14. Ισχύει $-1\le \eta\mu x\le 1$ άρα $-1\le u\le 1$, επομένως $u\to 1^-$.

Άρα $L=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{1-\eta\mu x}=\lim\limits_{u\to 1^-}\dfrac{1}{1-u}=+\infty$.

15.α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{|g(x)+6|}=\lim\limits_{x\to 0}\left[f(x)\cdot\dfrac{1}{|g(x)+6|}\right]=+\infty\cdot(+\infty)=+\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{|g(x)+6|}\underset{\substack{\lim\limits_{x\to 0}u=0,\\ u>0 \text{ για } x\neq 0}}{\overset{|g(x)+6|=u}{=}}\lim\limits_{u\to 0^+}\dfrac{1}{u}=+\infty$.

β) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[f(x)g(x)\right]=+\infty\cdot(-6)=-\infty$.

γ) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{g(x)+6}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[(g(x)+6)\cdot\dfrac{1}{f(x)}\right]=0\cdot 0=0$, αφού

$\lim\limits_{x\to 0^+}(g(x)+6)=-6+6=0$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{f(x)}\underset{\lim\limits_{x\to 0^+}u=+\infty}{\overset{f(x)=u}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{1}{u}=0$.

δ) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(x-2)}{g(x)+2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\left[f(x-2)\dfrac{1}{g(x)+2}\right]=+\infty\cdot(-\infty)=-\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x\to 2^+}f(x-2)\underset{\lim\limits_{x\to 2^+}u=0}{\overset{x-2=u}{=}}\lim\limits_{u\to 0^+}f(u)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{g(x)+2}=-\infty$ αφού

$\lim\limits_{x\to 2^+}(g(x)+2)=-2+2=0$ και $g(x)<-2\Leftrightarrow g(x)+2<0$ για κάθε $x\neq 2$.

ε) Για κάθε $x \neq 0, -1$ $\left|\left(g(x)+6\right)\cdot ημf(x)\right| = \left|g(x)+6\right|\left|ημf(x)\right| \leq \left|g(x)+6\right| \Leftrightarrow$

$-\left|g(x)+6\right| \leq \left(g(x)+6\right)\cdot ημf(x) \leq \left|g(x)+6\right|$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+}\left|g(x)+6\right| = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\left|g(x)+6\right|\right) = 0$, από το κριτήριο παρεμβολής είναι

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\left(g(x)+6\right)\cdot ημf(x)\right] = 0$.

16.α) Είναι $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x-7}{|x-3|} = \lim\limits_{x\to 3}\left[(2x-7)\cdot\frac{1}{|x-3|}\right] = -\infty$ επειδή $\lim\limits_{x\to 3}(2x-7) = -1 < 0$,

$\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{|x-3|} = +\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to 3}|x-3| = 0$ και $|x-3| > 0$ για $x \neq 3$.

β) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x+1}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to 1}\left[(2x+1)\frac{1}{(x-1)^2}\right] = +\infty$, γιατί $\lim\limits_{x\to 1}(2x+1) = 3$ και

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$.

γ) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{|x-3|+4}{x^2-4x+4} = \lim\limits_{x\to 2}\left[\left(|x-3|+4\right)\frac{1}{(x-2)^2}\right] = +\infty$, γιατί $\lim\limits_{x\to 2}\left(|x-3|+4\right) = 5$ και

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$.

δ) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{|x-3|-2}{|x+1|} = \lim\limits_{x\to -1}\left[\left(|x-3|-2\right)\frac{1}{|x+1|}\right] = +\infty$, γιατί $\lim\limits_{x\to -1}\left(|x-3|-2\right) = 2$ και

$\lim\limits_{x\to -1}\frac{1}{|x+1|} = +\infty$.

ε) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{(x-2)^3} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x-3)}{(x-2)^{\cancel{3}2}} = \lim\limits_{x\to 2}\left[(x-3)\frac{1}{(x-2)^2}\right] = -\infty$, γιατί

$\lim\limits_{x\to 2}(x-3) = -1$ και $\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$.

στ) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+8}-2}{x^2-2x+1} = \lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{x+8}-2\right)\frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$, γιατί $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{x+8}-2\right) = 1$

και $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$.

17.α) $\lim\limits_{x\to 5^-}\dfrac{3x+1}{x^2-25}=\lim\limits_{x\to 5^-}\left(\dfrac{3x+1}{x+5}\cdot\dfrac{1}{x-5}\right)=-\infty$ και

$\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{3x+1}{x^2-25}=\lim\limits_{x\to 5^+}\left(\dfrac{3x+1}{x+5}\cdot\dfrac{1}{x-5}\right)=+\infty$ άρα δεν υπάρχει το όριο.

β) Έστω $f(x)=\dfrac{4x+5}{x^2-4}=\dfrac{4x+5}{x+2}\cdot\dfrac{1}{x-2}$, $x\neq\pm 2$. Είναι $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x+5}{x+2}=\dfrac{13}{4}>0$,

$\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{x-2}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{x-2}=+\infty$, οπότε $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=-\infty$, και $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=+\infty$,

άρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$.

γ) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2+x}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\left[\left(x^2+x\right)\dfrac{1}{x-2}\right]=-\infty$,

$\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2+x}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\left[\left(x^2+x\right)\dfrac{1}{x-2}\right]=+\infty$, δεν υπάρχει το όριο.

δ) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{|x-1|+2x}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{|x-1|+2x}{x^2+x+1}\cdot\dfrac{1}{x-1}\right)=-\infty$,

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{|x-1|+2x}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{|x-1|+2x}{x^2+x+1}\cdot\dfrac{1}{x-1}\right)=+\infty$ δεν υπάρχει το όριο.

ε) $\lim\limits_{x\to 5^-}\dfrac{x+1}{x^2-7x+10}=\lim\limits_{x\to 5^-}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\cdot\dfrac{1}{x-5}\right)=-\infty$,

$\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{x+1}{x^2-7x+10}=\lim\limits_{x\to 5^+}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\cdot\dfrac{1}{x-5}\right)=+\infty$, δεν υπάρχει το όριο.

στ) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(x-1)\dfrac{1}{x^2}\right]=-\infty$.

18.α) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x-4}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\cancel{(x-1)}(x-4)}{\cancel{(x-1)}(x+1)}$, $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x-4}{x+1}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x-4}{x+1}=-\infty$,

δεν υπάρχει το όριο.

β) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+6x+10}{x^3-x^2-x+1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+6x+10}{x+1}\cdot\dfrac{1}{(x-1)^2}=+\infty$.

γ) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x-7}{\sqrt{x^3-6x^2+9x}}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x-7}{\sqrt{x(x-3)^2}}=\lim\limits_{x\to 3}\left[\dfrac{4x-7}{\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{|x-3|}\right]=+\infty$.

δ) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^3-3x^2-9x+27}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\cancel{(x-3)}\,\cancel{(x+3)}}{(x-3)^{\cancel{2}}\,\cancel{(x+3)}}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x-3}$,

$\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{1}{x-3}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{1}{x-3}=+\infty$, δεν υπάρχει το όριο.

19.α) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{2x}{x-3}-\dfrac{3}{x^2-7x+12}\right)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x(x-4)-3}{x^2-7x+12}=\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{2x^2-8x-3}{x-4}\,\dfrac{1}{x-3}\right)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-8x-3}{x-4}=9$ και $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{1}{x-3}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{1}{x-3}=+\infty$, άρα δεν υπάρχει το όριο.

β) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{x^2+x-2}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}+\dfrac{1}{(x-1)(x+2)}\right]=$

$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x}{x^2-4}\cdot\dfrac{1}{x-1}\right)$. Είναι $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x}{x^2-4}=-\dfrac{2}{3}$ και $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x-1}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x-1}=+\infty$, άρα δεν υπάρχει το όριο.

20. $x^4 g(x)\ge 4x^2+2x+1\Leftrightarrow g(x)\ge\left(4x^2+2x+1\right)\dfrac{1}{x^4}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left(4x^2+2x+1\right)=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^4}=+\infty$ άρα $\lim\limits_{x\to 0}\left(4x^2+2x+1\right)\dfrac{1}{x^4}=+\infty$, οπότε και $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=+\infty$.

21. $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{\eta\mu x}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2}{\eta\mu x}=+\infty$, δεν υπάρχει το όριο.

22. Έστω $\dfrac{4x^2-1}{f(x)}=g(x)\Leftrightarrow f(x)=\left(4x^2-1\right)\dfrac{1}{g(x)}$ και

$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left[\left(4x^2-1\right)\dfrac{1}{g(x)}\right]=0$.

23. Έστω $g(x)=\left(x^2-2x+5\right)f(x)\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x+5}g(x)$

και $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{1}{x^2-2x+5}g(x)\right]=+\infty$.

24. Επειδή η f είναι άρτια ισχύει ότι: $f(-x)=f(x)$ (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \lim\limits_{x\to 0^+}\left[f(-x)\right]=+\infty$ (2). Έστω $-x=\omega$. Όταν $x\to 0^+$, τότε $\omega\to 0^-$. Η σχέση (2) γίνεται: $\lim\limits_{\omega\to 0^-}\left[f(\omega)\right]=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{\omega\to 0^-} f(\omega)=+\infty \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{\omega\to 0^-} f(\omega)=+\infty$. Άρα $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$.

Αυξημένης δυσκολίας

25.α) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x^2-3}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\left(2x^2-3\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\left(2x^2-3\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)\dfrac{1}{2x}\right]=-\infty$.

β) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x+5}{\sqrt[3]{x+27}-3}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[(2x+5)\left(\left(\sqrt[3]{x+27}\right)^2+3\sqrt[3]{x+27}+9\right)\dfrac{1}{x}\right]=+\infty$.

γ) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2+4x}{|x|-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\left[\left(x^2+4x\right)\dfrac{1}{x-1}\right]=+\infty$.

δ) $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x^2-x-3}{1-|x|}=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x^2-x-3}{1+x}=\lim\limits_{x\to -1^-}\left[\left(x^2-x-3\right)\dfrac{1}{1+x}\right]=+\infty$.

ε) $\lim\limits_{x\to 2}\left|\dfrac{x+2}{x-2}\right|=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x+2|}{|x-2|}=\lim\limits_{x\to 2}\left[|x+2|\dfrac{1}{|x-2|}\right]=+\infty$.

στ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x-2|+2|x+3|}{|x-1|-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x+2+2x+6}{-x+1-1}=\lim\limits_{x\to 0}(-x+8)\dfrac{1}{x}$.

$\lim\limits_{x\to 0^-}(-x+8)\dfrac{1}{x}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+}(-x+8)\dfrac{1}{x}=+\infty$, δεν υπάρχει το όριο.

26.α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu(3x)}{x|x|}=\lim\limits_{x\to 0}\left(3\dfrac{\eta\mu(3x)}{3x}\dfrac{1}{|x|}\right)=+\infty$, γιατί $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu(3x)}{3x}=1$ και

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{|x|}=+\infty$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x-\pi}{\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\left[(x-\pi)\dfrac{1}{\eta\mu x}\right]=+\infty$, γιατί $\lim\limits_{x\to 0}(x-\pi)=-\pi$ και

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{\eta\mu x}\underset{\substack{x\to 0^-\Rightarrow\\ u\to 0^-}}{\overset{\eta\mu x=u}{=}}\lim\limits_{u\to 0^-}\dfrac{1}{u}=-\infty$ αφού $\eta\mu x<0$ για κάθε $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-\pi}{\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[(x-\pi)\dfrac{1}{\eta\mu x}\right]=-\infty$, γιατί $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\eta\mu x}\underset{\substack{x\to 0^+\Rightarrow\\ u\to 0^+}}{\overset{\eta\mu x=u}{=}}\lim\limits_{u\to 0^+}\dfrac{1}{u}=+\infty$,

Γιατί $\eta\mu x>0$ για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x-\pi}{\eta\mu x}\neq\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-\pi}{\eta\mu x}$, δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\pi}{\eta\mu x}$.

γ) Είναι $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\dfrac{2x+\pi}{\sigma\upsilon\nu x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left[(2x+\pi)\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right]=+\infty$, γιατί $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(2x+\pi)=2\pi$ και

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\underset{x\to\frac{\pi}{2}^-\Rightarrow u\to 0^+}{\overset{\sigma\upsilon\nu x=u}{=}}\lim\limits_{u\to 0^+}\dfrac{1}{u}=+\infty$ αφού $\sigma\upsilon\nu x>0$ για $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\dfrac{2x+\pi}{\sigma\upsilon\nu x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\left[(2x+\pi)\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right]=-\infty$, γιατί

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\underset{x\to\frac{\pi}{2}^+\Rightarrow u\to 0^-}{\overset{\sigma\upsilon\nu x=u}{=}}\lim\limits_{u\to 0^-}\dfrac{1}{u}=-\infty$, αφού $\sigma\upsilon\nu x<0$ για $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\dfrac{2x+\pi}{\sigma\upsilon\nu x}\neq\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\dfrac{2x+\pi}{\sigma\upsilon\nu x}$, δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{2x+\pi}{\sigma\upsilon\nu x}$.

δ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-x}{1-\sigma\upsilon\nu x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(2-x)\dfrac{1}{1-\sigma\upsilon\nu x}\right]=+\infty$, γιατί $\lim\limits_{x\to 0}(2-x)=2$,

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1-\sigma\upsilon\nu x}\underset{\substack{x\to 0\Rightarrow\\ u\to 0}}{\overset{1-\sigma\upsilon\nu x=u}{=}}\lim\limits_{u\to 0^+}\dfrac{1}{u}=+\infty$ αφού $1-\sigma\upsilon\nu x>0$ για κάθε

$x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

ε) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x-3}{\sigma\upsilon\nu x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(\eta\mu x-3)\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x-1}\right]=+\infty$, γιατί $\lim\limits_{x\to 0}(\eta\mu x-3)=-3$,

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x-1}=-\infty$.

στ) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2-7\sigma\upsilon\nu x}{3\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[(2-7\sigma\upsilon\nu x)\dfrac{1}{3\eta\mu x}\right]=-\infty$, γιατί $\lim\limits_{x\to 0^+}(2-7\sigma\upsilon\nu x)=-5$,

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{3\eta\mu x}=+\infty$.

27.α) Έστω $f(x)=x\cdot ημ\dfrac{5}{x}$, $A=\mathbb{R}^*$.

$|f(x)|=\left|x\cdot ημ\dfrac{5}{x}\right|=|x|\cdot\left|ημ\dfrac{5}{x}\right|\le |x|\cdot 1=|x| \Leftrightarrow -|x|\le f(x)\le |x|$. Είναι $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$ και $\lim\limits_{x\to 0}(-|x|)=0$, οπότε λόγω κριτηρίου παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.

β) Για $x\ne 3$ είναι: $\left|(x^2-3x)ημ\dfrac{2x+5}{x-3}\right|=|x^2-3x|\left|ημ\dfrac{2x+5}{x-3}\right|\le |x^2-3x| \overset{x\ne 0}{\Leftrightarrow}$

$-|x^2-3x|\le (x^2-3x)ημ\dfrac{2x+5}{x-3}\le |x^2-3x|$.

Από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to 3}\left[(x^2-3x)\ ημ\dfrac{2x+5}{x-3}\right]=0$.

γ) Για $x\ne 0$ είναι $\left|\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{x}\cdot συν\dfrac{3}{x}\right|=\left|\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{x}\right|\left|συν\dfrac{3}{x}\right|\le\left|\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{x}\right|\Leftrightarrow$

$-\left|\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{x}\right|\le\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{x}\cdot συν\dfrac{3}{x}\le\left|\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{x}\right|$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+9}-3\right)\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}{x\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}=0$,

οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{x}\cdot συν\dfrac{3}{x}\right]=0$.

δ) $\left|xημ\dfrac{x}{x^2+1}\right|=|x|\left|ημ\dfrac{x}{x^2+1}\right|\le |x| \overset{x\ne 0}{\Leftrightarrow} -|x|\le xημ\dfrac{x}{x^2+1}\le |x|$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}|x|=\lim\limits_{x\to 0}(-|x|)=0$,από το κριτήριο παρεμβολής είναι και

$\lim\limits_{x\to 2}\left[(x^2-2x)ημ\dfrac{4x+1}{x-2}\right]=0$.

Όμοια $\lim\limits_{x\to 0}2x^2συν\dfrac{3}{x}=0$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0}\left(xημ\dfrac{x}{x^2+1}-2x^2συν\dfrac{3}{x}\right)=0$.

28.α) $\left|xημ\dfrac{x+2}{x}+x^{1821}\right|\le |x|\left|ημ\dfrac{x+2}{x}\right|+\left|x^{1821}\right|\le |x|+\left|x^{1821}\right|\Leftrightarrow$

$-|x|-\left|x^{1821}\right|\le xημ\dfrac{x+2}{x}+x^{1821}\le |x|+\left|x^{1821}\right|$.

Από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left(xημ\dfrac{x+2}{x}+x^{1821}\right)=0$.

β) $\left|(x+1)\eta\mu\frac{2}{x^2-1}+x^{200}-1\right|\le\left|(x+1)\eta\mu\frac{2}{x^2-1}\right|+\left|x^{200}-1\right|\le$

$|x+1|\left|\eta\mu\frac{2}{x^2-1}\right|+\left|x^{200}-1\right|\le|x+1|+\left|x^{200}-1\right|\Leftrightarrow$

$-|x+1|-\left|x^{200}-1\right|\le(x+1)\eta\mu\frac{2}{x^2-1}+x^{200}-1\le|x+1|+\left|x^{200}-1\right|$.

Από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to-1}\left[(x+1)\eta\mu\frac{2}{x^2-1}+x^{200}-1\right]=0$.

29.α) Για $x\ne0$ είναι: $|g(x)|=\left|\eta\mu^2x\eta\mu\frac{2}{x}\right|=\left|\eta\mu^2x\right|\left|\eta\mu\frac{2}{x}\right|\le\eta\mu^2x\Leftrightarrow$

$-\eta\mu^2x\le\eta\mu^2x\eta\mu\frac{2}{x}\le\eta\mu^2x$. Από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to0}g(x)=0$.

β) Για $x\ne0$ είναι: $\left|\frac{g(x)}{x}\right|=\left|\eta\mu x\frac{\eta\mu x}{x}\eta\mu\frac{2}{x}\right|=\left|\eta\mu x\frac{\eta\mu x}{x}\right|\left|\eta\mu\frac{2}{x}\right|\le\left|\eta\mu x\frac{\eta\mu x}{x}\right|\Leftrightarrow$

$-\left|\eta\mu x\frac{\eta\mu x}{x}\right|\le\frac{g(x)}{x}\le\left|\eta\mu x\frac{\eta\mu x}{x}\right|$.

Από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to0}\frac{g(x)}{x}=0$.

γ) $\lim\limits_{x\to0}\frac{g(x)}{\eta\mu3x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{g(x)}{x}\cdot\frac{1}{3\cdot\frac{\eta\mu3x}{3x}}\right)=0\cdot\frac{1}{3}=0$.

30.α) Έστω $\lim\limits_{x\to4}\frac{9}{x\sqrt{x}-3x-9\sqrt{x}+27}=\lim\limits_{x\to4}\frac{9}{\sqrt{x}(x-9)-3(x-9)}=$

$\lim\limits_{x\to4}\frac{9}{(x-9)(\sqrt{x}-3)}=\lim\limits_{x\to4}\frac{9(\sqrt{x}+3)}{(x-9)(x-9)}=\lim\limits_{x\to4}\left[9(\sqrt{x}+3)\frac{1}{(x-9)^2}\right]=+\infty$.

β) $\lim\limits_{x\to3}\frac{2x-1}{x\sqrt{x+1}+6-3\sqrt{x+1}-2x}=\lim\limits_{x\to3}\frac{2x-1}{\sqrt{x+1}(x-3)-2(x-3)}=$

$=\lim\limits_{x\to3}\frac{2x-1}{(x-3)(\sqrt{x+1}-2)}=\lim\limits_{x\to3}\frac{(2x-1)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(x+1-4)}=$

$\lim\limits_{x\to3}\left[(2x-1)(\sqrt{x+1}+2)\frac{1}{(x-3)^2}\right]=+\infty$.

31. $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{\ln(\etaμx)}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{\ln(\etaμx)-\ln x+\ln x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{\ln\left(\dfrac{\etaμx}{x}\right)+\ln x}=$

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\dfrac{\ln x}{\ln x}}{\dfrac{\ln\left(\dfrac{\etaμx}{x}\right)}{\ln x}+1}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{\dfrac{1}{\ln x}\ln\left(\dfrac{\etaμx}{x}\right)+1}=1$ γιατί $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{\ln x}\ln\left(\dfrac{\etaμx}{x}\right)=0\cdot0=0$

αφού $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{\ln x}\underset{u\to-\infty}{\overset{u=\ln x}{=}}\lim\limits_{x\to0^+,\,u\to-\infty}\dfrac{1}{u}=0$ και $\lim\limits_{x\to0^+}\ln\left(\dfrac{\etaμx}{x}\right)\underset{k\to1^+}{\overset{k=\frac{\etaμx}{x}}{=}}\lim\limits_{x\to0^+,\,k\to1^+}\ln k=0$.

32. Έστω $h(x)=\dfrac{g(x)\left(\sqrt{x+8}-3\right)}{\etaμ\pi x}$, $x\neq1$ με $\lim\limits_{x\to1}h(x)=+\infty$.

Τότε $g(x)=\dfrac{h(x)\etaμ\pi x}{\sqrt{x+8}-3}=\dfrac{h(x)\etaμ(\pi-\pi x)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{x-1}=$

$h(x)\pi\dfrac{\etaμ\left(\pi(1-x)\right)}{\pi(1-x)}\left(-\sqrt{x+8}-3\right)$ οπότε $\lim\limits_{x\to1}g(x)=-\infty$ αφού

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\etaμ\left(\pi(1-x)\right)}{\pi(1-x)}\underset{x\to1,\ u\to0}{\overset{u=\pi(1-x)}{=}}\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\etaμu}{u}=1$.

33. Έστω $\dfrac{f(x)-2}{f(x)-x+1}=g(x)\Leftrightarrow f(x)-2=f(x)g(x)-xg(x)+g(x)\Leftrightarrow$

$xg(x)-g(x)-2=f(x)\left(g(x)-1\right)$. Είναι $\lim\limits_{x\to1}\left(g(x)-1\right)=+\infty$ άρα $g(x)-1>0$ κοντά στο 1, οπότε

$f(x)=\dfrac{xg(x)-g(x)-2}{g(x)-1}\Rightarrow\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\cancel{g(x)}\left(x-1-\overset{0}{\cancel{\dfrac{2}{g(x)}}}\right)}{\cancel{g(x)}\left(1-\overset{0}{\cancel{\dfrac{1}{g(x)}}}\right)}=0$.

34. Έστω $\begin{cases}4f(x)-3xg(x)=\varphi(x) \text{ με } \lim\limits_{x\to1}\varphi(x)=+\infty\\-2xf(x)-3g(x)=h(x) \text{ με } \lim\limits_{x\to1}h(x)=+\infty\end{cases}$

και $D=\begin{vmatrix}4 & -3x\\-2x & -3\end{vmatrix}=-12-6x^2$, $D_f=\begin{vmatrix}\varphi(x) & -3x\\h(x) & 3\end{vmatrix}=3\varphi(x)+3xh(x)$.

$D_g = \begin{vmatrix} 4 & \varphi(x) \\ -2x & h(x) \end{vmatrix} = 4h(x) + 2x\varphi(x)$.

Άρα $f(x) = \dfrac{3\varphi(x) + 3xh(x)}{-12 - 6x^2}$, οπότε $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{3\varphi(x) + 3xh(x)}{-12 - 6x^2} = -\infty$

και $g(x) = \dfrac{4h(x) + 2x\varphi(x)}{-12 - 6x^2}$, επομένως $\lim\limits_{x\to1} g(x) = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{4h(x) + 2x\varphi(x)}{-12 - 6x^2} = -\infty$.

35.α) Θέτουμε $h(x) = (x-2)^2 f(x)$ με $\lim\limits_{x\to2} h(x) = -4$. Για $x \neq 2$ είναι:

$f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2} h(x)$ και $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{1}{(x-2)^2} = +\infty$ άρα και $\lim\limits_{x\to2} f(x) = -\infty$.

β) Επειδή $\lim\limits_{x\to2} f(x) = +\infty$ είναι $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{1}{f(x)} = 0$. Οπότε:

$$\lim_{x\to2} \frac{3f^2(x) - 5f(x) + 7}{f^2(x) + 2} = \lim_{x\to2} \frac{\cancel{f^2(x)}\left(3 - \dfrac{5}{f(x)} + \dfrac{7}{f^2(x)}\right)}{\cancel{f^2(x)}\left(1 + \dfrac{2}{f^2(x)}\right)} = 3.$$

36. Έστω $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - \lambda}{|x-1|} = \dfrac{1}{|x-1|} \cdot (x^2 + 3x - \lambda)$ με $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to1} (x^2 + 3x - \lambda) = 4 - \lambda$ και $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{1}{|x-1|} = +\infty$.

- $4 - \lambda > 0 \Leftrightarrow \lambda < 4$, τότε $\lim\limits_{x\to1} f(x) = +\infty$.
- $4 - \lambda < 0 \Leftrightarrow \lambda > 4$, τότε $\lim\limits_{x\to1} f(x) = -\infty$.
- $4 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4$, τότε $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 4}{|x-1|} = \dfrac{(x+4)(x-1)}{|x-1|}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{(x+4)(x-1)}{-(x-1)} = \lim\limits_{x\to1^-} (-x-4) = -5$ και

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{(x+4)(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+} (x+4) = 5$, οπότε δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ στην περίπτωση αυτή.

37.α) Έστω $f(x) = (x^2 - 2x + \lambda)\dfrac{1}{|x-1|}$, $x \neq 1$. Είναι $\lim\limits_{x\to1} (x^2 - 2x + \lambda) = \lambda - 1$

και $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{1}{|x-1|} = +\infty$.

Αν $\lambda>1$, τότε $\lim_{x\to1}f(x)=+\infty$, αν $\lambda<1$, τότε $\lim_{x\to1}f(x)=-\infty$ και αν $\lambda=1$, τότε,

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2}{|x-1|}=\lim_{x\to1}\frac{|x-1|^{\cancel{2}}}{\cancel{|x-1|}}=\lim_{x\to1}|x-1|=0.$$

β) Έστω $f(x)=(x-\lambda)\dfrac{1}{(x+2)^2}$, $x\neq-2$. Είναι $\lim_{x\to-2}(x-\lambda)=-\lambda-2$ και

$\lim_{x\to-2}\dfrac{1}{(x+2)^2}=+\infty$. Αν $\lambda>-2$, τότε $\lim_{x\to-2}f(x)=-\infty$, αν $\lambda<-2$, τότε

$\lim_{x\to-2}f(x)=+\infty$ και αν $\lambda=-2$, τότε $\lim_{x\to-2^-}f(x)=\lim_{x\to-2^-}\dfrac{\cancel{x+2}}{(x+2)^{\cancel{2}}}=-\infty$,

$\lim_{x\to-2^+}f(x)=\lim_{x\to-2^+}\dfrac{\cancel{x+2}}{(x+2)^{\cancel{2}}}=+\infty$ οπότε δεν υπάρχει το όριο.

38. Είναι $f(x)=\dfrac{1}{x-2}\left(x^2+\kappa x-2\right)$, $x\neq2$. Είναι $\lim_{x\to2}\left(x^2+\kappa x-2\right)=2+2\kappa$.

- Αν $2+2\kappa>0\Leftrightarrow\kappa>-1$ τότε $\lim_{x\to2^-}\dfrac{1}{x-2}=-\infty$, $\lim_{x\to2^+}\dfrac{1}{x-2}=+\infty$ άρα $\lim_{x\to2^-}f(x)=-\infty$ και $\lim_{x\to2^+}f(x)=+\infty$, οπότε δεν υπάρχει το $\lim_{x\to2}f(x)$.
- Αν $2+2\kappa<0\Leftrightarrow\kappa<-1$ τότε $\lim_{x\to2^-}\dfrac{1}{x-2}=-\infty$, $\lim_{x\to2^+}\dfrac{1}{x-2}=+\infty$ άρα $\lim_{x\to2^-}f(x)=+\infty$ και $\lim_{x\to2^+}f(x)=-\infty$, οπότε δεν υπάρχει το $\lim_{x\to2}f(x)$.
- Αν $2+2\kappa=0\Leftrightarrow\kappa=-1$ τότε: $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x-2}=\dfrac{\cancel{(x-2)}(x+1)}{\cancel{x-2}}=x+1$ και $\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}(x+1)=3$.

39. Για $x\neq\pm1$ είναι: $f(x)=\dfrac{3x^2-\alpha x+2\beta}{x^2-1}=\dfrac{3x^2-\alpha x+2\beta}{x+1}\cdot\dfrac{1}{x-1}$.

Είναι: $\lim_{x\to1}(x-1)=0$ και $\lim_{x\to1}\dfrac{3x^2-\alpha x+2\beta}{x+1}=\dfrac{3-\alpha+2\beta}{2}$, οπότε:

- Αν $\dfrac{3-\alpha+2\beta}{2}>0\Leftrightarrow3-\alpha+2\beta>0$, τότε: $\lim_{x\to1^-}\dfrac{1}{x-1}=-\infty$, $\lim_{x\to1^-}f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to1^+}\dfrac{1}{x-1}=+\infty$ και $\lim_{x\to1^+}f(x)=+\infty$, άρα δεν υπάρχει το $\lim_{x\to1}f(x)$.

• Αν $\frac{3-\alpha+2\beta}{2}<0 \Leftrightarrow 3-\alpha+2\beta<0$, τότε: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-\infty$, οπότε δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

• Αν $3-\alpha+2\beta=0 \Leftrightarrow 2\beta=\alpha-3$, τότε

$$f(x)=\frac{3x^2-\alpha x+\alpha-3}{x^2-1}=\frac{3(x-1)(x+1)-\alpha(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{\cancel{(x-1)}(3x+3-\alpha)}{\cancel{(x-1)}(x+1)} \text{ ή}$$

$$f(x)=\frac{3x+3-\alpha}{x+1}, \text{ οπότε } \lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{3x+3-\alpha}{x+1}=\frac{6-\alpha}{2}\in\mathbb{R}.$$

40. Έστω $f(x)=\frac{x-\alpha}{\sqrt{x+1}-\beta}$ με $x\ge -1$ και $x\ne \beta^2+1$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 3}(x-\alpha)=3-\alpha$, $\lim\limits_{x\to 3}\left(\sqrt{x+1}-\beta\right)=2-\beta$, οπότε:

Αν $2-\beta\ne 0 \Leftrightarrow \beta\ne 2$ είναι: $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-\alpha}{\sqrt{x+1}-\beta}=\frac{3-\alpha}{2-\beta}$.

Αν $2-\beta=0 \Leftrightarrow \beta=2$ είναι:

$$f(x)=\frac{x-\alpha}{\sqrt{x+1}-2}=\frac{(x-\alpha)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{x-3}=(x-\alpha)\left(\sqrt{x+1}+2\right)\frac{1}{x-3}.$$

$$\lim_{x\to 3}\left[(x-\alpha)\left(\sqrt{x+1}+2\right)\right]=(3-\alpha)\cdot 4 \text{ και } \lim_{x\to 3^-}\frac{1}{x-3}=-\infty,\ \lim_{x\to 3^+}\frac{1}{x-3}=+\infty$$

οπότε:

• Αν $3-\alpha>0 \Leftrightarrow \alpha<3$ είναι $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=+\infty$ οπότε δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

• Αν $3-\alpha<0 \Leftrightarrow \alpha>3$ είναι $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=-\infty$ οπότε δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

• Αν $3-\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=3$ είναι $f(x)=\frac{x-\alpha}{\sqrt{x+1}-2}=\frac{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{x-3}=\sqrt{x+1}+2$ οπότε $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\left(\sqrt{x+1}+2\right)=4$.

41. Έστω ότι $C_1\equiv C_f$ και $C_2\equiv C_g$, τότε $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=+\infty$.

Θα είναι $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{f(x)}\left(\sqrt{x}-1\right)\right)=0\cdot 0=0$ άτοπο.

Έστω ότι $C_1 \equiv C_g$ και $C_2 \equiv C_f$, τότε $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = +\infty$.

Θα είναι $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{g(x)}\left(\sqrt{x}-1\right)\right) = 0\cdot 0 = 0$ άτοπο.

42.α) i. Αν οι f,g παριστάνονται από τις C_1, C_2 τότε $\lim\limits_{x\to 1}\left(f(x)g(x)\right) = +\infty$ πράγμα άτοπο. Άρα κάποια παριστάνεται από την C_3 και κάποια από τη C_1 ή τη C_2.

ii. Αφού $\lim\limits_{x\to 1}\left(f(x)g(x)\right) = 0$ τότε $\lim\limits_{x\to 1} h(x) = \lim\limits_{x\to 1} e^{f(x)g(x)} \overset{f(x)g(x)=u}{=} \lim\limits_{u\to 0} e^u = 1$ άρα καμία από τις C_1, C_2, C_3 δεν είναι η γραφική παράσταση της h.

β) i. Είναι $f(x) = g(x) + c$ με $c \neq 0$. Το μοναδικό ζευγάρι γραφικών που μπορεί η μία να είναι μετατόπιση της άλλης είναι οι C_1, C_2.

Άρα $\lim\limits_{x\to 1}\left(f(x)g(x)\right) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x)+c}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 1}\left(1 + \dfrac{c}{g(x)}\right) = 1$.

ii. $\lim\limits_{x\to 1} h(x) = \lim\limits_{x\to 1} e^{f(x)g(x)} \overset{f(x)g(x)=u}{=} \lim\limits_{u\to +\infty} e^u = +\infty$ άρα δεν μπορεί να παριστάνεται από την C_3.

Υπολογισμός παραμέτρων

43. Είναι $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2 + \lambda x + 4\right) = 2\lambda + 8$, οπότε αν $2\lambda + 8 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq -4$ τότε

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1-x}{x^2+\lambda x+4} = \dfrac{-1}{2\lambda+8} \neq -\infty$. Αν $2\lambda + 8 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -4$ τότε

$$\lim_{x\to 2}\frac{1-x}{x^2-4x+4} = \lim_{x\to 2}\left[(1-x)\frac{1}{(x-2)^2}\right] = -1\cdot(+\infty) = -\infty .$$

44. Είναι $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^3 - \lambda x^2 + 3x - 1\right) = -\lambda + 3$.

Αν $-\lambda + 3 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 3$ τότε $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\lambda x+2}{x^3-\lambda x^2+3x-1} = \dfrac{3-\lambda}{3-\lambda} = 1 \neq -\infty$, άρα $\lambda = 3$.

Τότε $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^3-3x^2+3x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cancel{(x-1)}(x-2)}{(x-1)^{\cancel{3}2}} = \lim\limits_{x\to 1}\left[(x-2)\dfrac{1}{(x-1)^2}\right] = -\infty$.

45. Έστω $f(x) = \left(x^2 - \alpha x - \beta\right)\dfrac{1}{|x+2|}$, $x \neq -2$.

Είναι $\lim\limits_{x\to -2}\left(x^2 - \alpha x - \beta\right) = 2\alpha - \beta + 4$ και $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{1}{|x+2|} = +\infty$, άρα:

Αν $2\alpha-\beta+4>0$, τότε $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$, αν $2\alpha-\beta+4<0$ τότε $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$, άρα για να είναι $\lim\limits_{x\to -2} f(x)\in\mathbb{R}$, πρέπει $2\alpha-\beta+4=0 \Leftrightarrow \beta=2\alpha+4$.

Τότε $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{\cancel{(x+2)}(x-2-\alpha)}{-\cancel{(x+2)}}=4+\alpha$ και

$\lim\limits_{x\to -2^{-+}} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{\cancel{(x+2)}(x-2-\alpha)}{\cancel{(x+2)}}=-4-\alpha$ άρα $4+\alpha=-4-\alpha \Leftrightarrow \alpha=-4$ και $\beta=2(-4)+4=-4$.

46. Είναι $f(x)=\dfrac{\alpha x^3-\beta x^2+2x-8}{x+2}\dfrac{1}{x-2}$, $x\neq\pm 2$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\alpha x^3-\beta x^2+2x-8}{x+2}=\dfrac{8\alpha-4\beta-4}{4}=2\alpha-\beta-1$ και

$\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{x-2}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{x-2}=+\infty$, οπότε αν $2\alpha-\beta-1>0$ ή $2\alpha-\beta-1<0$ δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

Άρα για να είναι $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$ πρέπει: $2\alpha-\beta-1=0 \Leftrightarrow \beta=2\alpha-1$.

Τότε $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\cancel{(x-2)}(\alpha x^2+x+4)}{\cancel{(x-2)}(x+2)}=\dfrac{4\alpha+6}{4}=4 \Leftrightarrow \alpha=\dfrac{5}{2}$ και

$\beta=2\cdot\dfrac{5}{2}-1=4$.

47. Έστω $f(x)=\dfrac{x^2-4\lambda x+4\lambda^2}{x^2-\kappa^2}=\dfrac{x^2-4\lambda x+4\lambda^2}{x+\kappa}\dfrac{1}{x-\kappa}$, $x\neq\pm\kappa$.

Είναι $\lim\limits_{x\to\kappa}\dfrac{x^2-4\lambda x+4\lambda^2}{x+\kappa}=\dfrac{(\kappa-2\lambda)^2}{2\kappa}$, $\lim\limits_{x\to\kappa^-}\dfrac{1}{x-\kappa}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\kappa^+}\dfrac{1}{x-\kappa}=+\infty$, οπότε αν $\dfrac{(\kappa-2\lambda)^2}{2\kappa}>0$ ή $\dfrac{(\kappa-2\lambda)^2}{2\kappa}<0$ τότε δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to\kappa} f(x)$.

Άρα για να είναι $\lim\limits_{x\to\kappa} f(x)=2\kappa+4$, πρέπει $\dfrac{(\kappa-2\lambda)^2}{2\kappa}=0 \Leftrightarrow \kappa=2\lambda \Leftrightarrow \lambda=\dfrac{\kappa}{2}$.

Τότε $\lim\limits_{x\to\kappa} f(x)=\lim\limits_{x\to\kappa}\dfrac{x^2-2\kappa x+\kappa^2}{x^2-\kappa^2}=\lim\limits_{x\to\kappa}\dfrac{(x-\kappa)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x-\kappa)}(x+\kappa)}=0$, άρα

$2\kappa+4=0 \Leftrightarrow \kappa=-2$ και $\lambda=-1$.

48. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\alpha|x+1|+\beta|x-4|-1}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\alpha(x+1)-\beta(x-4)-1}{(x-3)(x+3)}$.

Έστω $f(x)=\dfrac{\alpha(x+1)-\beta(x-4)-1}{x+3}\dfrac{1}{x-3}$, $x\neq\pm 3$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\alpha(x+1)-\beta(x-4)-1}{x+3}=\dfrac{4\alpha+\beta-1}{6}$, $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{1}{x-3}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{1}{x-3}=+\infty$,

οπότε αν $\dfrac{4\alpha+\beta-1}{6}>0$ ή $\dfrac{4\alpha+\beta-1}{6}<0$ δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$, άρα για να

είναι $\lim\limits_{x\to 3}f(x)\in\mathbb{R}$ πρέπει $\dfrac{4\alpha+\beta-1}{6}=0\Leftrightarrow\beta=1-4\alpha$.

Τότε $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(5\alpha-1)\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}(x+3)}=\dfrac{5\alpha-1}{6}$.

Είναι $\dfrac{5\alpha-1}{6}=9\Leftrightarrow\alpha=11$ και $\beta=1-4\cdot 11=-43$.

49. $\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=\ell\in\mathbb{R}$. Για $x<-1$ είναι $f(x)=\dfrac{\alpha x+1}{x^2-1}\Leftrightarrow$

$f(x)(x^2-1)=\alpha x+1$ και $\lim\limits_{x\to -1^-}\left[f(x)(x^2-1)\right]=\lim\limits_{x\to -1^-}(\alpha x+1)\Leftrightarrow$

$0=-\alpha+1\Leftrightarrow\alpha=1$, τότε $\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{\cancel{x+1}}{\cancel{(x+1)}(x-1)}=-\dfrac{1}{2}$ και

$\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\ln(x+\beta)=\ln(-1+\beta)$.

Είναι $\ln(-1+\beta)=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow -1+\beta=e^{-\frac{1}{2}}\Leftrightarrow\beta=\dfrac{1}{\sqrt{e}}+1$.

50. Έστω $f(x)=\dfrac{\alpha\eta\mu x+\beta}{x^2+x}$, $x\neq 0,-1$. Τότε $f(x)(x^2+x)=\alpha\eta\mu x+\beta$ και

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)(x^2+x)=\lim\limits_{x\to 0}(\alpha\eta\mu x+\beta)\Leftrightarrow\beta=0$. Τότε

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha\eta\mu x}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\eta\mu x}{x}\cdot\dfrac{\alpha}{x+1}=\alpha$. Είναι $\alpha=2-\alpha\Leftrightarrow\alpha=1$.

Σύνθετες ασκήσεις

51.α) $f(x)(x^2-2)=g(x)\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{g(x)}{x^2-2}$ κοντά στο 1. Οπότε:

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)}{x^2-2}=\lim_{x\to 1}\left(g(x)\cdot\frac{1}{x^2-2}\right)=+\infty$$

β) Θέτουμε $\frac{1}{f(x)} = u$, τότε $\lim_{x\to 1}\left[f(x)\etaμ\frac{1}{f(x)}\right] \underset{\substack{x\to 1,\\ u\to 0}}{\overset{u=\frac{1}{f(x)}}{=}} \lim_{u\to 0}\left[\frac{1}{u}\etaμu\right] = \lim_{u\to 0}\frac{\etaμu}{u} = 1$.

γ) Επειδή $\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$ και $g(x) > f(x)$, είναι $\lim_{x\to 1} g(x) = +\infty$.

52.α) Για $y = x$ είναι $8f(2x) = f(2x) + f(2x) + 48x^3 \Leftrightarrow f(2x) = 8x^3$.

Αν θέσουμε $2x = u$ προκύπτει $f(u) = u^3$ άρα και $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$.

β) i. $\lim_{x\to 0}\frac{1}{f^2(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^6} = +\infty$ **ii.** $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{f(x^3)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^9} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^6} = +\infty$

γ) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2$, τότε $x_1^3 \neq x_2^3 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, άρα f 1-1.

Θέτουμε $f^{-1}(x+1) = u \Leftrightarrow x+1 = f(u) \Leftrightarrow x = u^3 - 1$. Όταν $x \to 0$, τότε $u \to 1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f^{-1}(x+1) + \sqrt{f^{-1}(x+1)} - 2}{x} = \lim_{u\to 1}\frac{u + \sqrt{u} - 2}{u^3 - 1} =$$

$$\lim_{u\to 1}\left[\frac{\cancel{u-1}}{\cancel{(u-1)}(u^2+u+1)} + \frac{\sqrt{u}-1}{u^3-1}\right] =$$

$$= \lim_{u\to 1}\left[\frac{1}{u^2+u+1} + \frac{\cancel{u-1}}{\cancel{(u-1)}(u^2+u+1)(\sqrt{u}+1)}\right] = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

53.α) $3f^5(x) + αf^3(x) + f(x) = x^2 - 9 \Leftrightarrow f(x)\left(3f^4(x) + αf^2(x) + 1\right) = x^2 - 9 \Leftrightarrow$

$f(x) = \frac{x^2 - 9}{3f^4(x) + αf^2(x) + 1}$. Επειδή $3f^4(x) + αf^2(x) + 1 \geq 1 \Leftrightarrow$

$\frac{1}{3f^4(x) + αf^2(x) + 1} \leq 1$, έχουμε: $|f(x)| = \frac{|x^2 - 9|}{3f^4(x) + αf^2(x) + 1} \leq |x^2 - 9| \Leftrightarrow$

$-|x^2 - 9| \leq f(x) \leq |x^2 - 9|$ και με Κ.Π είναι $\lim_{x\to -3} f(x) = 0$.

β) $\left|f(x)συν\left(\frac{x+6}{x+3}\right)\right| = |f(x)|\left|συν\left(\frac{x+6}{x+3}\right)\right| \leq |f(x)| \Leftrightarrow$

$-|f(x)| \leq f(x)συν\left(\frac{x+6}{x+3}\right) \leq |f(x)|$ και με Κ.Π είναι $\lim_{x\to 0}\left(f(x)συν\left(\frac{x+6}{x+3}\right)\right) = 0$.

Επειδή $\lim_{x\to 0}\frac{6}{f^2(x)} = +\infty$, είναι $\lim_{x\to 0} h(x) = +\infty$.

54.α) Γνωρίζουμε ότι $|\eta\mu x| \le |x|$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$, οπότε για $x > 0$ είναι $|\eta\mu x| < x \Leftrightarrow -x < \eta\mu x < x \Rightarrow x - \eta\mu x > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$ και για $x < 0$ είναι $|\eta\mu x| < -x \Leftrightarrow x < \eta\mu x < -x \Rightarrow x - \eta\mu x < 0 \Leftrightarrow f(x) < 0$.

β) i. Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{f(x)} \overset{f(x)=u}{=} \lim\limits_{u\to 0^+} \dfrac{1}{u} = +\infty$ και

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{f(x)} = \lim_{x\to 0^+}\left(\sigma\upsilon\nu x \frac{1}{f(x)}\right) = 1(+\infty) = +\infty .$$

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{f(x)} \overset{f(x)=u}{=} \lim\limits_{u\to 0^-} \dfrac{1}{u} = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{f(x)} = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(\sigma\upsilon\nu x \dfrac{1}{f(x)}\right) = 1(-\infty) = -\infty$,

άρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}$.

ii. $\lim\limits_{x\to \pi^-} \dfrac{3x}{\pi - f(x)} = \lim\limits_{x\to \pi^-} \dfrac{3x}{\pi - x + \eta\mu x} = \lim\limits_{x\to \pi^-} \dfrac{3x}{\eta\mu(\pi - x) + (\pi - x)} \underset{\substack{x\to\pi^- \Rightarrow \\ u\to 0^+}}{\overset{\pi - x = u}{=}}$

$\lim\limits_{u\to 0^+} \dfrac{3(\pi - u)}{\eta\mu u + u} = \lim\limits_{u\to 0^+}\left[3(\pi - u)\dfrac{1}{\eta\mu u + u}\right] = 3\pi(+\infty) = +\infty$ γιατί

$\lim\limits_{u\to 0^+} \dfrac{1}{\eta\mu u + u} \underset{t\to 0^+}{\overset{\eta\mu u + u = t}{=}} = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{1}{t} = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to \pi^+} \dfrac{3x}{\pi - f(x)} = \lim\limits_{x\to \pi^+} \dfrac{3x}{\eta\mu(\pi - x) + (\pi - x)} \underset{\substack{x\to\pi^+ \Rightarrow \\ u\to 0^-}}{\overset{\pi - x = u}{=}} \lim\limits_{u\to 0^-} \dfrac{3(\pi - u)}{\eta\mu u + u} =$

$\lim\limits_{u\to 0^-}\left[3(\pi - u)\dfrac{1}{\eta\mu u + u}\right] = 3\pi(-\infty) = -\infty$ γιατί $\lim\limits_{u\to 0^-} \dfrac{1}{\eta\mu u + u} \underset{t\to 0^-}{\overset{\eta\mu u + u = t}{=}} = \lim\limits_{t\to 0^-} \dfrac{1}{t} = -\infty$,

οπότε δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{3x}{\pi - f(x)}$.

iii. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{x - f(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{x - x + \eta\mu x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\ln x \dfrac{1}{\eta\mu x}\right) = -\infty(+\infty) = -\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\eta\mu x} \underset{\substack{u\to 0 \\ u>0}}{\overset{\eta\mu x = u}{=}} \lim\limits_{u\to 0^+} \dfrac{1}{u} = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$.

β) Για κάθε $x_1, x_2 \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ με $x_1 < x_2$ (1), είναι $\eta\mu x_1 > \eta\mu x_2 \Leftrightarrow$

$-\eta\mu x_1 < -\eta\mu x_2$ (2) και από $(1)+(2) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow f \nearrow \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

$x > \pi + \eta\mu x \Leftrightarrow x - \eta\mu x > \pi \Leftrightarrow f(x) > f(\pi) \overset{\nearrow}{\Leftrightarrow} x > \pi$, οπότε $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$.

55.α) i. Έστω $\dfrac{f^2(x)-4f(x)+x^2}{x-2} = g(x),\ x \neq 2 \Leftrightarrow$

$f^2(x)-4f(x) = g(x)(x-2)-x^2 \Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to 2}\left[f^2(x)-4f(x)\right] = \lim\limits_{x\to 2}\left[g(x)(x-2)-x^2\right] \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2}\left[f^2(x)-4f(x)\right] = -4 \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to 2}\left[f^2(x)-4f(x)+4\right] = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2}\left(f(x)-2\right)^2 = 0$.

Είναι $-\left|f(x)-2\right| \le f(x)-2 \le \left|f(x)-2\right| \Leftrightarrow$

$2-\sqrt{\left(f(x)-2\right)^2} \le f(x) \le 2+\sqrt{\left(f(x)-2\right)^2}$ και από κριτήριο παρεμβολής:

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 2$.

ii. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f^2(x)-4f(x)+x^2}{x-2} = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f^2(x)-4f(x)+4+x^2-4}{x-2} = 1 \Leftrightarrow$

$$\lim_{x\to 2}\left[\frac{\left(f(x)-2\right)^2}{x-2} + \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}\right] = 1.$$

Έστω $\dfrac{\left(f(x)-2\right)^2}{x-2} + (x+2) = \varphi(x) \overset{x\neq 2}{\Leftrightarrow} \dfrac{\left(f(x)-2\right)^2}{x-2} = \varphi(x)-(x+2)$ και

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(f(x)-2\right)^2}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\left(\varphi(x)-(x+2)\right) = -3$.

iii. Έστω ότι $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-2}{x-2} = \lambda \in \mathbb{R}$ τότε

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(f(x)-2\right)^2}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{f(x)-2}{x-2}\left(f(x)-2\right)\right] = \lambda \cdot 0 = 0 \neq -3$ άρα $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-2}{x-2} \notin \mathbb{R}$

β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(f(x+2)-2\right)^2}{x^3} \underset{\substack{x\to 0 \Rightarrow \\ u\to 2}}{\overset{x+2=u}{=}} \lim\limits_{u\to 2}\dfrac{\left(f(u)-2\right)^2}{(u-2)^3} = \lim\limits_{u\to 2}\left[\dfrac{\left(f(u)-2\right)^2}{u-2}\cdot\dfrac{1}{(u-2)^2}\right] = -\infty$.

Τράπεζα θεμάτων ΙΕΠ

23217.α) i. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \ln(x-1) \underset{\substack{x\to 1^+ \Rightarrow \\ u\to 0^+}}{\overset{x-1=u}{=}} \lim\limits_{u\to 0^+} \ln u = -\infty$.

ii. $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x-1} \underset{\substack{x\to 1^- \Rightarrow \\ u\to 0^-}}{\overset{x-1=u}{=}} \lim\limits_{u\to 0^-} \dfrac{1}{u} = -\infty$,

$\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x-1} \underset{\substack{x\to 1^+ \Rightarrow \\ u\to 0^+}}{\overset{x-1=u}{=}} \lim\limits_{u\to 0^+} \dfrac{1}{u} = +\infty$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} g(x)$ δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$.

β) i. $A_{f\cdot g} = A_f \cap A_g = (1,+\infty) \cap \mathbb{R} - \{1\} = (1,+\infty)$

ii. $\lim\limits_{x\to 1}(f(x)g(x)) = \lim\limits_{x\to 1}\left[\ln(x-1)\dfrac{1}{x-1}\right] = -\infty \cdot (+\infty) = -\infty$.

Ερωτήσεις «Σωστό ή Λάθος»									
1. Λ	**2. Σ**	**3. Λ**	**4. Σ**	**5. Σ**	**6. Λ**	**7. Λ**	**8. Σ**	**9. Λ**	**10. Λ**
11. Λ	**12. Σ**	**13. Λ**	**14. Σ**	**15. Λ**	**16. Λ**	**17. Λ**	**18. Σ**	**19. Λ**	**20. Λ**
21. Σ	**22. Σ**								

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Επειδή $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο 1.

Επίσης $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+\lambda x+1} \Leftrightarrow x^2+\lambda x+1 = \dfrac{x+1}{f(x)}$ και

$\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+\lambda x+1\right) = \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{f(x)}(x+1)\right) \Leftrightarrow 1+\lambda+1 = 0\cdot 2 \Leftrightarrow \lambda = -2$.

Σωστή απάντηση Γ.

2. Είναι $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$ άρα $f(x) > 0$ κοντά στο 1, $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{f(x)} = 0$ και

$\alpha x^2+\beta x+2 = \dfrac{x^2+1}{f(x)}$ οπότε $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\alpha x^2+\beta x+2\right) = \lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{1}{f(x)}\left(x^2+1\right)\right) \Leftrightarrow$

$\alpha+\beta+2 = 0$ (1). Ομοίως, είναι $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ άρα $f(x) < 0$ κοντά στο 2 και

$\alpha x^2+\beta x+2 = \dfrac{x^2+1}{f(x)}$ οπότε $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\alpha x^2+\beta x+2\right) = \lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{1}{f(x)}\left(x^2+1\right)\right) \Leftrightarrow$

$4\alpha+2\beta+2=0$ (2). Από την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων (1),(2) προκύπτει $\alpha=1,\beta=-3$.

Σωστή απάντηση Γ.

3. Έστω $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{f(x)}$ με $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=+\infty$ και $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{g(x)}$ οπότε

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\sqrt{x}-1}{g(x)}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{g(x)}\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{g(x)}\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right)=0\,.$$

Σωστή απάντηση Α.

4. Η εξίσωση ισοδύναμα γίνεται $e^x=\dfrac{1}{x}+1\Leftrightarrow e^x-\dfrac{1}{x}-1=0\Leftrightarrow f(x)-1=0$ οπότε αφού έχει ρίζα $x_0\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ είναι $\lim\limits_{x\to x_0^-}\left(f(x)-1\right)=0$. Επίσης, εύκολα διαπιστώνουμε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)-1=e^x-\dfrac{1}{x}-1$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, οπότε για $x<x_0\Leftrightarrow g(x)<g(x_0)\Leftrightarrow f(x_0)-1<0$.

Άρα $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{1}{f(x)-1}=-\infty$.

Επιπλέον, $|\eta\mu x|\le|x|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και το ¨=¨ ισχύει μόνο για $x=0$.

Για $x_0\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)\Rightarrow x_0>0$ είναι $|\eta\mu x_0|<x_0\Leftrightarrow -x_0<\eta\mu x_0<x_0\Leftrightarrow$ $\eta\mu x_0-x_0<0$.

Συνεπώς, $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{\eta\mu x-x}{f(x)-1}=\lim\limits_{x\to x_0^-}\left[\dfrac{1}{f(x)-1}\left(\eta\mu x-x\right)\right]=+\infty$.

Σωστή απάντηση Β.

10 Όρια συνάρτησης στο άπειρο

Όριο πολυωνυμικής - Όριο ρητής στο άπειρο

25. Αν λ = 0 τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x+1}{\lambda x^3+x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x+1}{x-1}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$.

26.α) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^3-3x^2+7x+100\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}2x^3=-\infty$.

β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^2+7x-8}{5x^3-6x^2+9x-5}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^2}{5x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4}{5x}=0$.

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{18x^3-6x^2+9}{-6x^3+8x-12}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{18x^3}{-6x^3}=-3$.

δ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^5+7x-8}{2x^2-8x+4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^5}{2x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}2x^3=-\infty$.

27.α) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3x^2-x+2}{x^2-1}-\dfrac{x^2+x+2}{x+1}\right)=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x^3+3x^2-2x+4}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x^{\cancel{3}}}{\cancel{x^2}}=+\infty$.

β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^4+5x+7}{x^3+1}+\dfrac{x^2+3}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^5-x^4+3x^3+6x^2+2x-4}{x^4-x^3+x-1}=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^{\cancel{5}}}{\cancel{x^4}}=-\infty$.

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4x-3-\dfrac{x^3+7x-2}{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^3-3x^2-3x-1}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^{\cancel{3}}}{\cancel{x^2}}=+\infty$.

δ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^3+4x+6}{x^3+1}+\dfrac{x^2-2}{x+1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^5+x^4-x^3+5x^2+10x+4}{x^4+x^3+x+1}=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^{\cancel{5}}}{\cancel{x^4}}=\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$.

28.α) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\left|4-x^2\right|-\left|2x^2-5x-3\right|\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x^2-4-\left(2x^2-5x-3\right)\right]=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^2+5x-1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^2\right)=-\infty$.

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3|x-2|-|x|+1}{|x+1|-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-6-x+1}{x+1-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-5}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\cancel{x}}{\cancel{x}}=2$.

γ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|1-x^2|-3|x+1|}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-1+3x+3}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$.

δ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x-x^2|-|3x+5|}{2-|x^2-x-2|}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-x+3x+5}{2-x^2+x+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+2x+5}{-x^2+x+4}=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cancel{x^2}}{-\cancel{x^2}}=-1$.

29. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-4x+1}{x^2+2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}=3$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-3x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-10x+1}{x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-10\cancel{x}}{\cancel{x}}=-10$.

Αυξημένης δυσκολίας

30.α) Αν $\lambda>-1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(\lambda+1)x^2-3x+4\lambda\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(\lambda+1)x^2\right]=+\infty$,
αν $\lambda<-1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(\lambda+1)x^2-3x+4\lambda\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(\lambda+1)x^2\right]=-\infty$ και αν
$\lambda=-1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(\lambda+1)x^2-3x+4\lambda\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}(-3x-4)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-3x)=-\infty$.

β) Αν $\lambda=1$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(\lambda-1)x^2-\lambda x+1}{(\lambda-2)x-5}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x+1}{-x-5}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x}{-x}=1$,

αν $\lambda=2$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(\lambda-1)x^2-\lambda x+1}{(\lambda-2)x-5}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-2x+1}{-5}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{-5}=-\infty$,

αν $\lambda\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(\lambda-1)x^2-\lambda x+1}{(\lambda-2)x-5}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\lambda-1}{\lambda-2}x=-\infty$ και

αν $\lambda\in(1,2)$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(\lambda-1)x^2-\lambda x+1}{(\lambda-2)x-5}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\lambda-1}{\lambda-2}x=+\infty$.

γ) Αν $\lambda=2$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(\lambda^2-4)x^3-3x^2+\lambda x+1}{(\lambda+2)x^2-2x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3x^2+2x+1}{4x^2-2x+1}=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3\cancel{x^2}}{4\cancel{x^2}}=-\dfrac{3}{4}$, αν $\lambda=-2$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(\lambda^2-4)x^3-3x^2+\lambda x+1}{(\lambda+2)x^2-2x+1}=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3x^2-2x+1}{-2x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3x^{\cancel{2}}}{-2\cancel{x}}=-\infty$, αν $\lambda\neq\pm2$, τότε

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\lambda^2-4\right)x^3-3x^2+\lambda x+1}{\left(\lambda+2\right)x^2-2x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\lambda-2\right)\cancel{\left(\lambda+2\right)}x^{\cancel{3}}}{\cancel{\left(\lambda+2\right)}\cancel{x^2}}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\lambda-2\right)x=\begin{cases}+\infty, & \lambda<2,\ \lambda\neq-2\\ -\infty, & \lambda>2\end{cases}.$$

δ) Αν $\lambda=0$, τότε

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\lambda x^4-3x^2+7x-5}{\left(\lambda^2-\lambda\right)x^4-3x^3+14}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x^2+7x-5}{-3x^3+14}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3\cancel{x^2}}{-3x^{\cancel{3}}}=0$, αν $\lambda=1$, τότε

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\lambda x^4-3x^2+7x-5}{\left(\lambda^2-\lambda\right)x^4-3x^3+14}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4-3x^2+7x-5}{-3x^3+14}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\cancel{4}}}{-3\cancel{x^3}}=-\infty,$$

αν $\lambda\neq0,1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\lambda x^4-3x^2+7x-5}{\left(\lambda^2-\lambda\right)x^4-3x^3+14}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{\lambda}\cancel{x^4}}{\cancel{\lambda}\left(\lambda-1\right)\cancel{x^4}}=\dfrac{1}{\lambda-1}$.

31. $f\left(x\right)=\dfrac{2\left(\alpha^2+\alpha\right)x^3-\left(5\alpha^2+5\alpha-4\right)x^2+\left(\alpha^2+\alpha-4\right)x+2\alpha^2+2\alpha-3}{x^2-3x+2}$, $x\neq1,2$.

Αν $\alpha\in\left(-\infty,-1\right)\cup\left(0,+\infty\right)$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\left(\alpha^2+\alpha\right)x^{\cancel{3}}}{\cancel{x^2}}=+\infty$,

αν $\alpha\in\left(-1,0\right)$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\left(\alpha^2+\alpha\right)x^{\cancel{3}}}{\cancel{x^2}}=-\infty$,

αν $\alpha=-1$ ή $\alpha=0$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x^2-7x-5}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}=6$.

2ος τρόπος

$$f\left(x\right)=\left(2x+1\right)\left(\alpha^2+\alpha\right)+\frac{2x+1}{x-2}+\frac{2x+1}{x-1}.$$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x+1\right)\left(\alpha^2+\alpha\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}2\alpha\left(\alpha+1\right)x$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\cancel{x}}{\cancel{x}}=2$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\cancel{x}}{\cancel{x}}=2$.

Αν $\alpha\in\left(-\infty,-1\right)\cup\left(0,+\infty\right)$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=2\alpha\left(\alpha+1\right)\cdot\left(+\infty\right)+4=+\infty$.

Αν $\alpha \in (-1,0)$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2\alpha(\alpha+1)\cdot(+\infty)+4 = -\infty$.

Αν $\alpha=-1$ ή $\alpha=0$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6x^2-7x-5}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = 6$.

32. Αν $\alpha \neq -1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\alpha+1)x^{\cancel{3}}}{\cancel{x^2}} = \pm\infty$.

Για να είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 4$ πρέπει $\alpha=-1$.

Τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\beta x^2+4x-1}{x^2-5x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\beta+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}} = \beta$, άρα $\beta=3$.

33. $f(x) = \dfrac{(1-\alpha)x^2+(1-\alpha+\beta)x+2+\beta}{x+1}$, $x\neq -1$.

Αν $\alpha \neq 1$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(1-\alpha)x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = \pm\infty$. Για να είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 4$

πρέπει $\alpha=1$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\beta x+2+\beta}{x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\beta+\frac{2+\beta}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \beta$, άρα $\beta=4$.

34. $f(x) = \alpha x^2+\beta x+\gamma-\dfrac{x^3+2}{x^2+1} = \dfrac{\alpha x^4+(\beta-1)x^3+(\alpha+\gamma)x^2+\beta x+\gamma-2}{x^2+1}$.

Αν $\alpha \neq 0$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\alpha x^{\cancel{4}2}}{\cancel{x^2}} = \pm\infty$. Για να είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$ πρέπει

$\alpha=0$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(\beta-1)x^3+\gamma x^2+\beta x+\gamma-2}{x^2+1}$.

Αν $\beta \neq 1$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty$, άρα $\beta=1$.

Τότε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\gamma x^2+x+\gamma-2}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\gamma+\frac{1}{x}+\frac{\gamma-2}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \gamma$, άρα $\gamma=2$.

35. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+\beta x-1}{2x^2+3x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2}$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+\alpha x^2-2}{2x^3+x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cancel{x^3}}{2\cancel{x^3}} = \dfrac{1}{2}$, άρα $\lambda = \dfrac{1}{2}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\lambda x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+\alpha x^2-2}{2x^2+1}-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\alpha x^2-x-4}{4x^2+2}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2\alpha-\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}}{4+\frac{2}{x^2}}=\frac{\alpha}{2}\text{, οπότε }\frac{\alpha}{2}=1\Leftrightarrow\alpha=2.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(g(x)-\lambda x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+\beta x-1}{2x+3}-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2\beta-3)x-2}{4x+6}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(2\beta-3)-\frac{2}{x}}{4+\frac{6}{x}}=\frac{2\beta-3}{4}=1\Leftrightarrow\beta=\frac{7}{2}.$$

Όριο άρρητης στο άπειρο

36.α) $$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{9x^2-6x+2}=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2\left(9-\frac{6}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\left(|x|\cdot\sqrt{9-\frac{6}{x}+\frac{2}{x^2}}\right)=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-x\cdot\sqrt{9-\frac{6}{x}+\frac{2}{x^2}}\right)=+\infty\text{ γιατί }\lim_{x\to-\infty}(-x)=+\infty\text{ και }\lim_{x\to+\infty}\sqrt{9-\frac{6}{x}+\frac{2}{x^2}}=3.$$

β) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+5}{\sqrt{x^2+x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(3+\frac{5}{x}\right)}{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=3.$$

γ) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-x+2}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x+2}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1+\frac{2}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}=-2.$$

δ) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{16x^4+3}-\sqrt[5]{x^3+2}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x^2+4}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\sqrt[4]{16+\frac{3}{x^4}}-\cancel{x}\sqrt[5]{\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^5}}}{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\cancel{x}\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{4}{x^3}}}=2.$$

ε) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+4}-x+1}{x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}-1+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1+\frac{3}{x}\right)}=0.$$

στ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+\sqrt{x^2-3x+4}}{x-\sqrt{x^2-3x+4}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cancel{x}\left(1-\sqrt{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x^2}}\right)}{\cancel{x}\left(1+\sqrt{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x^2}}\right)}=0$.

37.α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left(9+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}+3x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(|x|\sqrt{9+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+3x\right)=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{9+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+3\right)\right]=+\infty$.

β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+2x+1}+3x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(\sqrt{9x^2+2x+1}+3x\right)\left(\sqrt{9x^2+2x+1}-3x\right)}{\sqrt{9x^2+2x+1}-3x}=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{9x^2+2x+1-9x^2}{|x|\sqrt{9+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-3x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+1}{-x\sqrt{9+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-3x}=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cancel{x}\left(2+\dfrac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(-\sqrt{9+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-3\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2+\dfrac{1}{x}}{-\sqrt{9+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-3}=\dfrac{2}{-6}=-\dfrac{1}{3}$.

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+5}-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{4x^2}-3x+5-\cancel{4x^2}}{\sqrt{4x^2-3x+5}+2x}=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x}\left(-3+\dfrac{5}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{4-\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}}+2\right)}=-\dfrac{3}{4}$.

δ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-1}\right)\left(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-1}\right)}{\left(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-1}\right)}=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cancel{x^2}+2-\cancel{x^2}+1}{-x\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}-x\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-\dfrac{3}{x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}\right]=0$.

ε) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{1}{x}\,\dfrac{1}{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-1}\right]=0$.

στ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{x^2-2x+2}-x^2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\left(x^2-2x+2\right)-x^4}{x\sqrt{x^2-2x+2}+x^2}=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x^4}-2x^3+2x^2-\cancel{x^4}}{x^2\sqrt{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}}+x^2}==\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\cancel{3}}}{\cancel{x^2}}\,\dfrac{\left(-2+\dfrac{2}{x}\right)}{\sqrt{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}}+1}=-\infty$.

38.α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5}-\sqrt[3]{8x^3+2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{1+\dfrac{5}{x^2}}-x\sqrt[3]{8+\dfrac{2}{x^3}}\right)=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{1+\dfrac{5}{x^2}}-\sqrt[3]{8+\dfrac{2}{x^3}}\right)=-\infty$.

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^2+1}-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^3\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}\right)}-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}}-2x\right)=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}}-2\right)\right]=-\infty$.

γ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1-x}-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right)}-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}}-x\right)=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-x\left(\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}}+1\right)\right]=+\infty$.

39. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{4x^2+3x+1}+\sqrt{x^2+5x+10}\right)=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{4x^2+3x+1}+\sqrt{x^2+5x+10}-2x+x+x\right)=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\left(\sqrt{x^2+x-2}+x\right)+\left(\sqrt{x^2+5x+10}+x\right)-\left(\sqrt{4x^2+3x+1}+2x\right)\right]=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2+x-2-x^2}{\sqrt{x^2+x-2}-x}+\dfrac{x^2+5x+10-x^2}{\sqrt{x^2+5x+10}-x}-\dfrac{4x^2+3x+1-4x^2}{\sqrt{4x^2+3x+1}-2x}\right)=$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-2}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}-x}+\frac{5x+10}{-x\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}}-x}-\frac{3x+1}{-x\sqrt{4+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}-2x}\right)=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\cancel{x}\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\cancel{x}\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}-1\right)}+\frac{\cancel{x}\left(5+\frac{10}{x}\right)}{\cancel{x}\left(-\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}}-1\right)}-\frac{\cancel{x}\left(3+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(-\sqrt{4+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}-2\right)}\right)=$$

$$-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}+\frac{3}{4}=-\frac{9}{4}.$$

40.α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{9x^2+2x}-4x+1\right)=$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x+\sqrt{9x^2+2x}-3x+1\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cancel{x^2}+x+1-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+x+1}+x}+\frac{\cancel{9x^2}+2x-\cancel{9x^2}}{\sqrt{9x^2+2x}+3x}+1\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}+\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{9+\frac{2}{x}}+3\right)}+1\right)=\frac{11}{6}.$$

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+2}+\sqrt{9x^2+1}-\sqrt{25x^2+x+1}\right)=$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+2}-2x+\sqrt{9x^2+1}-3x-\sqrt{25x^2+x+1}+5x\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cancel{4x^2}+2-\cancel{4x^2}}{\sqrt{4x^2+2}+2x}+\frac{\cancel{9x^2}+1-\cancel{9x^2}}{\sqrt{9x^2+1}+3x}-\frac{\cancel{25x^2}+x+1-\cancel{25x^2}}{\sqrt{25x^2+x+1}+5x}\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\cancel{\frac{2}{x}}^{\,0}\frac{1}{\sqrt{4+\frac{2}{x^2}}+2}+\cancel{\frac{1}{x}}^{\,0}\cdot\frac{1}{\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}+3}-\frac{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{25+1+\frac{1}{x^2}}+5\right)}\right)=-\frac{1}{10}.$$

γ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+1}-\sqrt{x^2+3}+x+5\right)=$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+1}+2x-\sqrt{x^2+3}-x+5\right)=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\cancel{4x^2}+x+1-\cancel{4x^2}}{\sqrt{4x^2+x+1}-2x}-\frac{\cancel{x^2}+3-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+3}-x}+5\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(-\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-2\right)}-\cancel{\frac{3}{x}}^{0}\cdot\frac{3}{-\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}-1}+5\right)=-\frac{1}{4}-0+5=\frac{19}{4}.$$

Αυξημένης δυσκολίας

41.α) $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+3}}-x\sqrt{2}\right)=$

$$\lim_{x\to+\infty}x\frac{x^2+\sqrt{x^4+3}-2x^2}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+3}}+x\sqrt{2}}=\lim_{x\to+\infty}x\frac{\sqrt{x^4+3}-x^2}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+3}}+x\sqrt{2}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}x\frac{\cancel{x^4}+3-\cancel{x^4}}{\left(\sqrt{x^2+x^2\sqrt{1+\frac{3}{x^4}}}+x\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x^4+3}+x^2\right)}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\sqrt{1+\frac{3}{x^4}}}+\sqrt{2}\right)x^2\left(\sqrt{1+\frac{3}{x^4}}+1\right)}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\cancel{\frac{3}{x^2}}^{0}\frac{1}{\left(\sqrt{1+\sqrt{1+\frac{3}{x^4}}}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{1+\frac{3}{x^4}}+1\right)}=0.$$

β) $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{x^2+x^2\sqrt{1+\frac{3}{x^4}}}-x\sqrt{2}\right)=$

$$\lim_{x\to-\infty}x\left(-x\sqrt{1+1\sqrt{1+\frac{3}{x^4}}}-x\sqrt{2}\right)=\lim_{x\to-\infty}x^2\left(-\sqrt{1+1\sqrt{1+\frac{3}{x^4}}}-\sqrt{2}\right)=-\infty$$

42. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+x+1}-x+2}{x-3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}-x+2}{x+3}=$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{(-x)^3\left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}-x+2}{x+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt[3]{-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}-x+2}{x+3}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}\left(-\sqrt[3]{-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}-1+\frac{2}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1+\frac{3}{x}\right)}=-1\,.$$

43. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x^2-1}-\sqrt[5]{x^2}}{2x+\sqrt[3]{x+1}+7}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}+x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}-x\sqrt[5]{\frac{1}{x^3}}}{2x+x\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}+7}=$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}-\sqrt[5]{\frac{1}{x^3}}\right)}{\cancel{x}\left(2+\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}+\frac{7}{x}\right)}=\frac{1}{2}\,.$$

44. Έστω $\dfrac{f(x)}{\sqrt{9x^2+6x+3}-3x}=h(x)\Leftrightarrow f(x)=h(x)\left(\sqrt{9x^2+6x+3}-3x\right)$,

$x\in(0,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=2$, $x\in(0,+\infty)$ και $\dfrac{g(x)}{\sqrt{x^2+2x+3}-x}=t(x)\Leftrightarrow$

$g(x)=t(x)\left(\sqrt{x^2+2x+3}-x\right)$, $x\in(0,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}t(x)=1$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)\left(\sqrt{9x^2+6x+3}-3x\right)}{t(x)\left(\sqrt{x^2+2x+3}-x\right)}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{h(x)}{t(x)}\cdot\frac{\cancel{9x^2}+6x+3-\cancel{9x^2}}{\sqrt{9x^2+6x+3}+3x}\cdot\frac{\sqrt{x^2+2x+3}+x}{\cancel{x^2}+2x+3-\cancel{x^2}}\right]=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{h(x)}{t(x)}\cdot\frac{\cancel{x}\left(6+\frac{3}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{9+\frac{6}{x}+\frac{3}{x^2}}+3\right)}\cdot\frac{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1\right)}{\cancel{x}\left(2+\frac{3}{x}\right)}\right]=2\cdot1\cdot1=2\,.$$

45. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4+x^2}+\lambda x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x}\left(\sqrt{\dfrac{4}{x^2}+1}+\lambda\right)}{\cancel{x}}=1+\lambda=1\Leftrightarrow\lambda=0$.

46.α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\lambda x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-\lambda\right)\right]$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-\lambda\right)=1-\lambda$, οπότε αν $\lambda>1$, τότε

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\lambda x\right)=-\infty$, αν $\lambda<1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\lambda x\right)=+\infty$.

Αν $\lambda=1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1}\right)=0$.

β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+2}+\lambda x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\left(-\sqrt{4-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}+\lambda\right)\right]$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{4-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}+\lambda\right)=-2+\lambda$, οπότε: αν $\lambda>2$, τότε

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+2}+\lambda x\right)=-\infty$, ενώ αν $\lambda<2$, τότε

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+2}+\lambda x\right)=+\infty$. Αν $\lambda=2$, τότε: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+2}+2x\right)=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cancel{4x^2}-3x+2-\cancel{4x^2}}{\sqrt{4x^2-3x+2}-2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cancel{x}\left(-3+\dfrac{2}{x}\right)}{\cancel{x}\left(-\sqrt{4-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}-2\right)}=\dfrac{3}{4}$.

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-(\lambda+2)x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}-(\lambda+2)\right)\right]$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}-(\lambda+2)\right)=-\lambda-1$, οπότε: αν $\lambda<-1$, τότε

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-(\lambda+2)x\right)=+\infty$, ενώ αν $\lambda>-1$, τότε

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-(\lambda+2)x\right)=-\infty$.

Αν $\lambda=-1$, τότε

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}+2x-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1\right)}=1.$$

δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x+2}-\lambda x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{4+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}-\lambda\right)\right]$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}-\lambda\right)=2-\lambda$ οπότε: αν $\lambda>2$, τότε

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x+2}-\lambda x\right)=-\infty$, ενώ αν $\lambda<2$, τότε

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x+2}-\lambda x\right)=+\infty$.

Τέλος αν $\lambda=2$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x+2}-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{4x^2}+3x+2-\cancel{4x^2}}{\sqrt{4x^2+3x+2}+2x}=$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(3+\frac{2}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{4+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+2\right)}=\frac{3}{4}.$$

47. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-\lambda x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}-\lambda\right)\right]$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}-\lambda\right)=1-\lambda$, οπότε: αν $\lambda>1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$, ενώ αν $\lambda<1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, άρα για να είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\in\mathbb{R}$ πρέπει $\lambda=1$. Τότε

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}+3-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+3}+x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\overset{0}{\cancel{\frac{3}{x}}}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+1}\right)=0.$$

48. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+5}+\alpha x-\beta\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}+\alpha-\frac{\beta}{x}\right)\right]$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}+\alpha-\frac{\beta}{x}\right)=-1+\alpha$, οπότε αν $\alpha>1$, τότε

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+5}+\alpha x-\beta\right)=-\infty$, ενώ αν $\alpha<1$ τότε

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+5}+\alpha x-\beta\right)=+\infty$, οπότε για να είναι

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+5}+\alpha x-\beta\right)=4$ πρέπει $\alpha=1$.

Τότε: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+5}+x-\beta\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{\cancel{x^2}+x+5-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+x+5}-x}-\beta\right)=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{\cancel{x}\left(1+\frac{5}{x}\right)}{\cancel{x}\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}-1\right)}-\beta\right)=-\frac{1}{2}-\beta$. Είναι $-\frac{1}{2}-\beta=4\Leftrightarrow\beta=-\frac{9}{2}$.

49. Έστω $f(x)=\sqrt{x^2+5x+10}+\alpha x+\beta$, $x\in(0,+\infty)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}}+\alpha+\frac{\beta}{x}\right)\right]$. Είναι

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}}+\alpha+\frac{\beta}{x}\right)=1+\alpha$, οπότε αν $\alpha>-1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, ενώ αν $\alpha<-1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$, άρα για να είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=3$ πρέπει $\alpha=-1$.

Τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+10}-x+\beta\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\cancel{x^2}+5x+10-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+5x+10}+x}+\beta\right)=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\cancel{x}\left(5+\frac{10}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}}+1\right)}+\beta\right)=\frac{5}{2}+\beta=3\Leftrightarrow\beta=\frac{1}{2}$.

50. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+\kappa x-1}-\sqrt{\lambda x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{1+\frac{\kappa}{x}-\frac{1}{x^2}}-\sqrt{\lambda+\frac{1}{x^2}}\right)\right]$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{\kappa}{x}-\frac{1}{x^2}}-\sqrt{\lambda+\frac{1}{x^2}}\right)=1-\sqrt{\lambda}$, οπότε αν $\lambda>1$, τότε

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+\kappa x-1}-\sqrt{\lambda x^2+1}\right)=-\infty$, ενώ αν $\lambda<1$, τότε

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+\kappa x-1}-\sqrt{\lambda x^2+1}\right)=+\infty$.

Για να είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+\kappa x-1}-\sqrt{\lambda x^2+1}\right)=3$ πρέπει $\lambda=1$.

Τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+\kappa x-1}-\sqrt{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x^2}+\kappa x-\cancel{1}-\cancel{x^2}-\cancel{1}}{\sqrt{x^2+\kappa x-1}+\sqrt{x^2+1}}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x}\left(\kappa-\dfrac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\dfrac{\kappa}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)}=\dfrac{\kappa}{2}$. Είναι $\dfrac{\kappa}{2}=3\Leftrightarrow\kappa=6$.

51.α) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-(\eta\mu\alpha)x+\sigma\upsilon\nu2\beta\right)=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-\eta\mu\alpha+\dfrac{\sigma\upsilon\nu2\beta}{x}\right)$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-\eta\mu\alpha+\dfrac{\sigma\upsilon\nu2\beta}{x}\right)=1-\eta\mu\alpha$.

Αν $\eta\mu\alpha<1\Leftrightarrow\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2},2\pi\right)$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

Αν $\eta\mu\alpha=1\Leftrightarrow\alpha=\dfrac{\pi}{2}$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x+\sigma\upsilon\nu2\beta\right)=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+1}+x}+\sigma\upsilon\nu2\beta\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\overset{0}{\cancel{\dfrac{1}{x}}}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1}+\sigma\upsilon\nu2\beta\right)=\sigma\upsilon\nu2\beta$.

β) Πρέπει $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu2\beta=-\dfrac{1}{2}=\sigma\upsilon\nu\dfrac{2\pi}{3}\Leftrightarrow2\beta=2\kappa\pi\pm\dfrac{2\pi}{3}\Leftrightarrow\beta=\kappa\pi\pm\dfrac{\pi}{3}$.

52. Για να ορίζεται στο $\mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x)$ θα πρέπει $4x^2+\alpha x+\beta\geq0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Οπότε $\Delta\leq0\Leftrightarrow\alpha^2-16\beta\leq0\Leftrightarrow\alpha^2\leq16\beta\quad(1)$

Είναι $f(x)=x\sqrt{4+\dfrac{\alpha}{x}+\dfrac{\beta}{x^2}}+\gamma x=x\left(\sqrt{4+\dfrac{\alpha}{x}+\dfrac{\beta}{x^2}}+\gamma\right)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4+\dfrac{\alpha}{x}+\dfrac{\beta}{x^2}}+\gamma\right)=2+\gamma$.

- Αν $2+\gamma>0\Leftrightarrow\gamma>-2$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.
- Αν $2+\gamma<0\Leftrightarrow\gamma<-2$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\in\mathbb{R}$ οπότε $2+\gamma=0\Leftrightarrow\gamma=-2$.

Τότε $f(x)=\sqrt{4x^2+\alpha x+\beta}-2x=\dfrac{4x^2+\alpha x+\beta-4x^2}{\sqrt{4x^2+\alpha x+\beta}+2x}=\dfrac{x\left(\alpha+\dfrac{\beta}{x}\right)}{x\left(\sqrt{4+\dfrac{\alpha}{x}+\dfrac{\beta}{x^2}}+2\right)}$.

Οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha+\dfrac{\beta}{x}}{\sqrt{4+\dfrac{\alpha}{x}+\dfrac{\beta}{x^2}}+2}=\dfrac{\alpha}{4}$. Άρα $\dfrac{\alpha}{4}=6\Leftrightarrow\alpha=24$. Από την (1) είναι $16\beta\ge 24^2\Leftrightarrow 16\beta\ge 576\Leftrightarrow\beta\ge 36$. Τελικά είναι $\alpha=24$, $\gamma=-2$ και $\beta\ge 36$.

Τριγωνομετρικά όρια στο άπειρο

53. Έστω ότι υπάρχει το $\lim\limits_{x\to+\infty}\eta\mu x$, τότε επειδή το $-1\le\eta\mu x\le 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, θα είναι πραγματικός αριθμός. Έστω λοιπόν $\lim\limits_{x\to+\infty}\eta\mu x=L\in\mathbb{R}$.

Αν $L>0$ τότε για κάθε x κοντά στο $+\infty$ θα ήταν $\eta\mu x>0$ πράγμα άτοπο γιατί κοντά στο $+\infty$ θα υπάρχει x_0 τέτοιο ώστε $\eta\mu x_0<0$.

Αν $L<0$ τότε για κάθε x κοντά στο $+\infty$ θα ήταν $\eta\mu x<0$ πράγμα άτοπο γιατί κοντά στο $+\infty$ θα υπάρχει x_0 τέτοιο ώστε $\eta\mu x_0>0$.

Αν $L=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\eta\mu x=0$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}(\eta\mu x-1)=-1<0$ άρα για κάθε x κοντά στο $+\infty$ θα ήταν $\eta\mu x-1<0\Leftrightarrow\eta\mu x<1$ πράγμα άτοπο γιατί κοντά στο $+\infty$ θα υπάρχει x_0 τέτοιο ώστε $\eta\mu x_0=1$.

54.α) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sigma\upsilon\nu x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(1+\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\right)\right]=+\infty$ γιατί

$-1\le\sigma\upsilon\nu x\le 1\overset{x>0}{\Leftrightarrow}-\dfrac{1}{x}\le\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\le\dfrac{1}{x}$, επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, οπότε από το Κριτήριο Παρεμβολής $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}=0$.

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+\eta\mu x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(2+\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)\right]=+\infty$, γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=0$ από κριτήριο παρεμβολής.

γ) $-1\le\eta\mu 2x\le 1\overset{x>0}{\Leftrightarrow}-\dfrac{1}{x}\le\dfrac{\eta\mu 2x}{x}\le\dfrac{1}{x}$. Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu 2x}{x}=0$.

δ) Θέτουμε $\frac{1}{x}=u$. Όταν $x\to-\infty$ τότε $u\to 0$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\eta\mu\frac{1}{x}}{x+2}=\lim_{u\to 0}\left(\frac{1}{2u+1}\frac{\eta\mu u}{u}\right)=1.$$

ε) Θέτουμε $\frac{x-4}{x^2+2}=u$ με $\lim\limits_{x\to+\infty}u=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-4}{x^2+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}=0$, τότε

$$\lim_{x\to+\infty}\eta\mu\frac{x-4}{x^2+2}=\lim_{u\to 0}\eta\mu u=0.$$

στ) Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-\eta\mu x}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\frac{x}{x}-\frac{\eta\mu x}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{\eta\mu x}{x}}{1+\frac{1}{x}}$.

Όταν $x\in(-\infty,0)$ είναι $\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right|=\frac{|\eta\mu x|}{|x|}\le\frac{1}{-x}=-\frac{1}{x}\Leftrightarrow\frac{1}{x}\le\frac{\eta\mu x}{x}\le-\frac{1}{x}$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$, από το κριτήριο παρεμβολής είναι

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0$. Τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-\eta\mu x}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{\eta\mu x}{x}}{1+\frac{1}{x}}=1$.

55.α) $-1\le\sigma\upsilon\nu x\le 1\overset{x>0}{\Leftrightarrow}-\frac{x}{x^2+2}\le\frac{x\sigma\upsilon\nu x}{x^2+2}\le\frac{x}{x^2+2}$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2+2}=0$ είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x\sigma\upsilon\nu x}{x^2+2}=0$ από το κριτήριο παρεμβολής.

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+x\eta\mu x}{x+\sigma\upsilon\nu x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{\cancel{2}}\left(1+\frac{\eta\mu x}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1+\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\frac{1+\frac{\eta\mu x}{x}}{1+\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}}=+\infty$, αφού ...από

κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0$.

γ) Θέτουμε $\frac{1}{x}=u\Leftrightarrow u=\frac{1}{x}$. Όταν $x\to+\infty$, τότε $u\to 0^+$, οπότε

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{x^2}=\lim_{u\to 0^+}u^2\eta\mu u=0.$$

δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x+\eta\mu x\right)\eta\mu\frac{1}{x}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}+\eta\mu x\eta\mu\frac{1}{x}\right)=1$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right)\overset{\frac{1}{x}=u}{\underset{u\to0}{=}}\lim\limits_{u\to0}\frac{\eta\mu u}{u}=1$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\eta\mu x\eta\mu\frac{1}{x}\right)\overset{\frac{1}{x}=u}{\underset{u\to0^+}{=}}\lim\limits_{u\to0^+}\eta\mu u\cdot\eta\mu\frac{1}{u}=0$ γιατί $-1\le\eta\mu\frac{1}{u}\le1\overset{u\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)}{\Leftrightarrow}$

$-\eta\mu u\le\eta\mu u\eta\mu\frac{1}{u}\le\eta\mu u$. Είναι $\lim\limits_{u\to0^+}\eta\mu u=0=\lim\limits_{u\to0^+}\left(-\eta\mu u\right)$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι

$\lim\limits_{u\to0}\eta\mu u\eta\mu\frac{1}{u}=0$.

ε) $-1\le\sigma\upsilon\nu x\le1\Leftrightarrow1\le2+\sigma\upsilon\nu x\le3\Leftrightarrow\frac{1}{3}\le\frac{1}{2+\sigma\upsilon\nu x}\le1\overset{x>0}{\Leftrightarrow}$

$\frac{x+3}{3}\le\frac{x+3}{2+\sigma\upsilon\nu x}\le x+3$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+3}{3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+3\right)=+\infty$ οπότε από το

κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+3}{2+\sigma\upsilon\nu x}=+\infty$.

στ) Είναι $-1\le\sigma\upsilon\nu x\le1$, $-1\le\eta\mu x\le1$, άρα

$-2\le\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x\le2\Leftrightarrow1\le3+\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x\le5\Leftrightarrow$

$\frac{1}{5}\le\frac{1}{3+\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x}\le1\overset{x>10}{\Leftrightarrow}\frac{x^2+2x-1}{5}\le\frac{x^2+2x-1}{3+\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x}\le x^2+2x-1$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x-1}{5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+2x-1\right)=+\infty$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x-1}{3+\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x}=+\infty$.

56.α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+1\right)\eta\mu\frac{1}{x}\overset{\frac{1}{x}=u}{\underset{u\to0^+}{=}}\lim\limits_{u\to0^+}\left[\left(u+1\right)\frac{\eta\mu u}{u}\right]=1$.

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\eta\mu\frac{1}{x}\overset{\frac{1}{x}=u}{\underset{u\to0^+}{=}}\lim\limits_{u\to0^+}\left(\sqrt{u}\,\frac{\eta\mu u}{u}\right)=0$.

γ) $\lim\limits_{x\to-\infty}x^4\eta\mu\frac{1}{x}\overset{\frac{1}{x}=u}{\underset{u\to0^-}{=}}\lim\limits_{u\to0^-}\frac{\eta\mu u}{u^4}=\lim\limits_{u\to0^-}\left(\frac{1}{u^3}\frac{\eta\mu u}{u}\right)=-\infty$.

δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x-x^4\eta\mu\frac{1}{x}}{2x+5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4-x^3\eta\mu\frac{1}{x}}{2+\frac{5}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(4-x^3\eta\mu\frac{1}{x}\right)\dfrac{1}{2+\frac{5}{x}}\right]=-\infty$, γιατί

$\lim\limits_{x\to+\infty}x^3\eta\mu\frac{1}{x}\overset{\frac{1}{x}=u}{\underset{u\to0^+}{=}}\lim\limits_{u\to0^+}\dfrac{\eta\mu u}{u^3}=\lim\limits_{u\to0^+}\left(\dfrac{1}{u^2}\dfrac{\eta\mu u}{u}\right)=+\infty$.

ε) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\eta\mu\frac{1}{x}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\cancel{x}+1-\cancel{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right)\right)=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right)\right)=0$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}x\eta\mu\frac{1}{x}\overset{\frac{1}{x}=u}{\underset{u\to0^+}{=}}\lim\limits_{u\to0^+}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1$.

57.α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\eta\mu\frac{1}{x}}{\sqrt{x^2+2}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\cancel{2}}\eta\mu\frac{1}{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+1\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+1}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right)\right]=\dfrac{1}{2}$,

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}x\eta\mu\frac{1}{x}\overset{\frac{1}{x}=u}{\underset{u\to0^+}{=}}\lim\limits_{u\to0^+}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1$.

β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\eta\mu\frac{1}{x}}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cancel{x}\eta\mu\frac{1}{x}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)}{\cancel{x^2}+\cancel{x}-\cancel{x^2}}=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\eta\mu\frac{1}{x}\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right)\right]=-2$, αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}x\eta\mu\frac{1}{x}\overset{\frac{1}{x}=u}{\underset{u\to0^-}{=}}\lim\limits_{u\to0^-}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1$.

58.α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-2x\eta\mu x+2}{x\sqrt{x^2-9}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x^2}\left(1-2\frac{\eta\mu x}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}=1$, γιατί από το κριτήριο

παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=0$.

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-10x\eta\mu x-5\sigma\upsilon\nu 2x}{x^4+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x^2}\left(1-10\dfrac{\eta\mu x}{x}-5\dfrac{\sigma\upsilon\nu 2x}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(x^2+\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\right)}=0$, γιατί

από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu 2x}{x}=0$.

59.α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x^2+1}\eta\mu x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}\eta\mu x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}}\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)=0$.

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x}{x^5-4x^3+7x+3}\sigma\upsilon\nu x=\lim\limits_{x\to+\infty}\sigma\upsilon\nu x\dfrac{\cancel{x^2}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{x^{\cancel{5}3}\left(1-\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{7}{x^4}+\dfrac{3}{x^5}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{7}{x^4}+\dfrac{3}{x^5}}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\right)=0\cdot1\cdot0=0$ αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}=0$ όπως αποδείξαμε σε προηγούμενες ασκήσεις.

γ) Έστω $f(x)=\dfrac{(x+1)\eta\mu 2x}{x^4+3x^2+2}$, $x\in\mathbb{R}$.

Είναι $|f(x)|=\left|\dfrac{(x+1)\eta\mu 2x}{x^4+3x^2+2}\right|=\dfrac{|x+1|}{x^4+3x^2+2}\cdot|\eta\mu 2x|\le\dfrac{|x+1|}{x^4+3x^2+2}\cdot1$.

Για $x\in(-\infty,-1)$ είναι: $|f(x)|\le-\dfrac{x+1}{x^4+3x^2+2}\Leftrightarrow$

$\dfrac{x+1}{x^4+3x^2+2}\le f(x)\le-\dfrac{x+1}{x^4+3x^2+2}$.

Είναι: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{x^4+3x^2+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x^4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^3}=0$ και

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{x+1}{x^4+3x^2+2}\right)=0$,οπότε από το κριτήριο παρεμβολής. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$.

δ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x}{x^3-3x+4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3\dfrac{\eta\mu x}{x}+\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}}{1-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}}=0$.

Είναι: $-1 \le ημx \le 1 \overset{x<0}{\Leftrightarrow} \frac{1}{x} \le \frac{ημx}{x} \le -\frac{1}{x}$, $-1 \le συνx \le 1 \overset{x<0}{\Leftrightarrow} -\frac{1}{x^2} \le \frac{συνx}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$,

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0 = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0 = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ οπότε από το κριτήριο

παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{ημx}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{συνx}{x^2} = 0$.

ε) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x^2 - 4xσυν\frac{1}{x} + 2\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\left(3 - 4\frac{1}{x}συν\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)\right] = +\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}συν\frac{1}{x} \overset{\frac{1}{x}=u}{\underset{u\to0}{=}} \lim\limits_{u\to0} uσυνu = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x^2} = 0$.

στ) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5x + συν^2x - 2ημx}{4x + ημx} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5 + \frac{συν^2x}{x} - 2\frac{ημx}{x}}{4 + \frac{ημx}{x}} = \frac{5}{4}$ γιατί

$-1 \le ημx \le 1 \overset{x<0}{\Leftrightarrow} \frac{1}{x} \le \frac{ημx}{x} \le -\frac{1}{x}$, $0 \le συν^2x \le 1 \overset{x<0}{\Leftrightarrow} \frac{1}{x} \le \frac{συν^2x}{x} \le 0$ και από το

κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{ημx}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{συν^2x}{x} = 0$.

Αυξημένης δυσκολίας

60.α) Έστω $\frac{1}{x} = ω \Leftrightarrow x = \frac{1}{ω}$. Όταν $x \to -\infty$, είναι $ω < 0$ και

$\lim\limits_{x\to-\infty} ω = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$, οπότε: $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{1 + xημ\frac{1}{x}} = \lim\limits_{ω\to0^-} \frac{\frac{1}{ω}}{1 + \frac{1}{ω}ημω} =$

$\lim\limits_{ω\to0^-} \frac{\frac{1}{ω}}{\frac{ω + ημω}{ω}} = \lim\limits_{ω\to0^-} \frac{1}{ω + ημω} = -\infty$ γιατί όταν $ω < 0$ είναι

$|ημx| < -x \Leftrightarrow x < ημx < -x \Rightarrow x + ημx < 0$ και $\lim\limits_{ω\to0^-}(ω + ημω) = 0$.

β) $\lim\limits_{x\to0} \frac{συνx}{ημx(ημx - 2x) + x^2} = \lim\limits_{x\to0} \frac{συνx}{ημ^2x - 2xημx + x^2} =$

$\lim\limits_{x\to0}\left[συνx \frac{1}{(ημx - x)^2}\right] = +\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to0} συνx = 1$ και

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{(\eta\mu x - x)^2} \underset{\substack{x\to 0\Rightarrow\\ u\to 0}}{\overset{\eta\mu x - x = u}{=}} \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{1}{u^2} = +\infty$.

γ) Για κάθε $x>0$ είναι $x=|x|$, οπότε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{|x|-|\eta\mu x|}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x-|\eta\mu x|}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{|\eta\mu x|}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\frac{1}{x}}{1-\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right|}=+\infty,$$

αφού για κάθε $x>0$ είναι $\left|\dfrac{\eta\mu x}{x}\right|=\dfrac{|\eta\mu x|}{x}\le\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow-\dfrac{1}{x}\le\dfrac{\eta\mu x}{x}\le\dfrac{1}{x}$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right)$, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=0$.

δ) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-3}{4+\sigma\upsilon\nu x-2\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-\frac{3}{x}}{\frac{4}{x}+\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}-2\frac{\eta\mu x}{x}}$. Για κάθε $x>0$ είναι:

$\left|\dfrac{\eta\mu x}{x}\right|=\dfrac{|\eta\mu x|}{|x|}\le\dfrac{1}{|x|}=\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow-\dfrac{1}{x}\le\dfrac{\eta\mu x}{x}\le\dfrac{1}{x}$. Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, από το κριτήριο παρεμβολής θα είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=0$. Όμοια αποδεικνύουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}=0$. Επειδή $-1\le\eta\mu x\le1$, $-1\le\sigma\upsilon\nu x\le1$, είναι $4+\sigma\upsilon\nu x-2\eta\mu x>0$

και αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-\frac{3}{x}}{\frac{4}{x}+\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}-2\frac{\eta\mu x}{x}}=+\infty$.

61. $0\le x^4f^4(x)\le x^2|g(x)|+x^4f^4(x)\le|\eta\mu x|\le1\overset{x>0}{\Leftrightarrow}0\le f^4(x)\le\dfrac{1}{x^4}$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^4}=0$ είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f^4(x)=0$ από το κριτήριο παρεμβολής..

Όμως $0\le x^2|g(x)|\le x^2|g(x)|+x^4f^4(x)\le|\eta\mu x|\le1\overset{x>0}{\Leftrightarrow}0\le|g(x)|\le\dfrac{1}{x^2}$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}|g(x)|=0$.

Επειδή $-|g(x)|\le g(x)\le|g(x)|$, $\lim\limits_{x\to+\infty}|g(x)|=0=\lim\limits_{x\to+\infty}(-|g(x)|)$ από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$.

62.Έστω $\dfrac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x}=g(x)\Leftrightarrow f(x)=g(x)\sigma\upsilon\nu x$, $\sigma\upsilon\nu x\neq 0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\right)=0$, γιατί όπως δείξαμε σε προηγούμενες ασκήσεις είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}=0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\lambda\sigma\upsilon\nu x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sigma\upsilon\nu x\left(g(x)-\lambda\right)\right]=0$, γιατί

$\left|\sigma\upsilon\nu x\left(g(x)-\lambda\right)\right|\leq\left|g(x)-\lambda\right|\Leftrightarrow-\left|g(x)-\lambda\right|\leq\sigma\upsilon\nu x\left(g(x)-\lambda\right)\leq\left|g(x)-\lambda\right|$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left|g(x)-\lambda\right|=0=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\left|g(x)-\lambda\right|\right)$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left|g(x)-\lambda\right|=0$.

63.α) Πρέπει $x+1\geq 0\Leftrightarrow x\geq -1$ και $x\neq 0$, άρα $A_f=[-1,0)\cup(0,+\infty)$.

β) i. $-1\leq\eta\mu\dfrac{1}{x}\leq 1\overset{x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)}{\Leftrightarrow}-x\leq x\eta\mu\dfrac{1}{x}\leq x$ και από ΚΠ είναι $\lim\limits_{x\to0^+}x\eta\mu\dfrac{1}{x}=0$

$-1\leq\eta\mu\dfrac{1}{x}\leq 1\overset{x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)}{\Leftrightarrow}x\leq x\eta\mu\dfrac{1}{x}\leq -x$ και από ΚΠ είναι $\lim\limits_{x\to0^-}x\eta\mu\dfrac{1}{x}=0$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to0^+}x\eta\mu\dfrac{1}{x}=0$.

ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)\underset{u\to0}{\overset{\frac{1}{x}=u}{=}}\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1$.

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}\cdot f(x)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\sqrt{x^2+x}-\lambda\sqrt{x}\right)\eta\mu\dfrac{1}{x}\right]=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}-\lambda\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)x\eta\mu\dfrac{1}{x}\right]=1$.

64.Έστω $\dfrac{f(x)-3x}{x+2}=h(x)$, $x\neq-2$ με $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=4$.

Τότε $f(x)=h(x)(x+2)+3x$.

Έστω $\dfrac{g(x)}{x}=\varphi(x)$, $x\neq 0$ με $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=2$. Τότε $g(x)=x\varphi(x)$. Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3f(x)-3g(x)+\lambda\eta\mu x}{\lambda f(x)+g(x)+\eta\mu^2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\left(h(x)(x+2)+3x\right)-3x\varphi(x)+\lambda\eta\mu x}{\lambda\left(h(x)(x+2)+3x\right)+x\varphi(x)+\eta\mu^2x}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3h(x)(x+2)+9x-3x\varphi(x)+\lambda\eta\mu x}{\lambda h(x)(x+2)+3\lambda x+x\varphi(x)+\eta\mu^2 x}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\dfrac{3h(x)(x+2)}{x}+9-3\varphi(x)+\lambda\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)}{x\left(\dfrac{\lambda h(x)(x+2)}{x}+3\lambda+\varphi(x)+\dfrac{\eta\mu^2 x}{x}\right)}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3h(x)\dfrac{x+2}{x}+9-3\varphi(x)+\lambda\dfrac{\eta\mu x}{x}}{\lambda h(x)\dfrac{x+2}{x}+3\lambda+\varphi(x)+\dfrac{\eta\mu^2 x}{x}}=\frac{3\cdot4\cdot1+9-3\cdot2+\lambda\cdot0}{\lambda\cdot4\cdot1+3\lambda+2+0}=\frac{15}{7\lambda+2}\text{, γιατί:}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}=1\text{, }\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right|=\frac{|\eta\mu x|}{|x|}\le\frac{1}{|x|}\Leftrightarrow-\frac{1}{|x|}\le\frac{\eta\mu x}{x}\le\frac{1}{|x|}\text{,}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{|x|}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{|x|}\right)=0$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=0$.

$\left|\dfrac{\eta\mu^2 x}{x}\right|=\dfrac{|\eta\mu^2 x|}{|x|}\le\dfrac{1}{|x|}\Leftrightarrow-\dfrac{1}{|x|}\le\dfrac{\eta\mu^2 x}{x}\le\dfrac{1}{|x|}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{|x|}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{|x|}\right)=0$, οπότε

από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu^2 x}{x}=0$.

Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3f(x)-3g(x)+\lambda\eta\mu x}{\lambda f(x)+g(x)+\eta\mu^2 x}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{15}{7\lambda+2}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\lambda=4$.

Όριο εκθετικής –λογαριθμικής συνάρτησης στο άπειρο

65.α) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3^{2x}-4\cdot3^x+3}{3^{2x}+2\cdot3^x-3}\underset{u\to1}{\overset{3^x=u}{=}}\lim\limits_{u\to1}\dfrac{u^2-4u+3}{u^2+2u-3}=\lim\limits_{u\to1}\dfrac{\cancel{(u-1)}(u-3)}{\cancel{(u-1)}(u+3)}=-\dfrac{1}{2}$.

β) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2^{2x+1}-2^x-1}{3\cdot4^x-2^{x+2}+1}\underset{u\to1}{\overset{2^x=u}{=}}\lim\limits_{u\to1}\dfrac{2u^2-u-1}{3u^2-4u+1}=\lim\limits_{u\to1}\dfrac{\cancel{(u-1)}(2u+1)}{\cancel{(u-1)}(3u-1)}=\dfrac{3}{2}$.

γ) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4^{2x}-5\cdot4^x+4}{4^{2x+1}-2\cdot4^{x+1}-32}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4^{2x}-5\cdot4^x+4}{4\cdot4^{2x}-2\cdot4\cdot4^x-32}$.

Θέτουμε $4^x = u$, όταν $x \to 1$, τότε $u \to 4$ και είναι:

$$\lim_{u\to4}\frac{u^2-5u+4}{4u^2-8u-32}=\lim_{u\to4}\frac{(u-1)(u-4)}{4(u-4)(u+2)}=\lim_{u\to4}\frac{u-1}{4(u+2)}=\frac{1}{8}.$$

66.α) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x+3^{x+1}}{2^{x+1}+3^{x+3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{3^x}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^x+3\right)}{\cancel{3^x}\left(2\left(\frac{2}{3}\right)^x+27\right)}=\frac{1}{9}.$$

β) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{4e^{x+1}-6\cdot2^x}{e^x-2^{x+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4e\cdot e^x-6\cdot2^x}{e^x-2\cdot2^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{2^x}\left[4e\left(\frac{e}{2}\right)^x-6\right]}{\cancel{2^x}\left[\left(\frac{e}{2}\right)^x-2\right]}=3.$$

γ) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{5^x-2^{x+1}}{3\cdot5^{x+1}+2^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{2^x}\left(\left(\frac{5}{2}\right)^x-2\right)}{\cancel{2^x}\left(15\left(\frac{5}{2}\right)^x+1\right)}=-2.$$

δ) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x+2}-2^{x+1}+3}{e^x+2^{x+2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{e^x}\left(e^2-2\left(\frac{2}{e}\right)^x+\frac{3}{e^x}\right)}{\cancel{e^x}\left(1+4\left(\frac{2}{e}\right)^x\right)}=e^2.$$

ε) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^{2x+1}-2^x-1}{3\cdot4^x-2^{x+2}+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{4^x}\left(2-\frac{1}{2^x}-\frac{1}{4^x}\right)}{\cancel{4^x}\left(3-4\frac{1}{2^x}+\frac{1}{4^x}\right)}=\frac{2}{3}.$$

στ) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{4\cdot2^{x+1}-2\cdot5^x+3}{e^{x+2}+4^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2^x\left(8-2\left(\frac{5}{2}\right)^x+\frac{3}{2^x}\right)}{e^x\left(e^2+\left(\frac{4}{e}\right)^x\right)}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\left(\frac{2}{e}\right)^x\frac{8-2\left(\frac{5}{2}\right)^x+\frac{3}{2^x}}{e^2+\left(\frac{4}{e}\right)^x}\right]=+\infty.$$

Αυξημένης δυσκολίας

67.α) Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln x\dfrac{1}{\eta\mu x}\right)=-\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x)=-\infty$,

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\eta\mu x}=+\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}\eta\mu x=0$ και $\eta\mu x>0$ για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

β) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{x}-\ln\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\ln e^{\frac{2}{x}}-\ln\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\ln\dfrac{e^{\frac{2}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}\right)$.

Έστω $f(x)=\ln\dfrac{e^{\frac{2}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}$. Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{2}{x}}=0$, $\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$,

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{\frac{2}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$ και $\dfrac{e^{\frac{2}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}>0$ για κάθε $x<0$, άρα

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(\ln\frac{e^{\frac{2}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}\right)\underset{\substack{x\to 0^-,\ u\to 0^+\\ u\to 0^+}}{\overset{u=\frac{e^{\frac{2}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}}{=}}\lim_{u\to 0^+}\ln u=-\infty .$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{2}{x}}\underset{\substack{x\to 0^+,\ c\to+\infty\\ c\to+\infty}}{\overset{c=\frac{2}{x}}{=}}\lim\limits_{c\to+\infty}e^{c}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}\underset{\substack{x\to 0^+,\ d\to+\infty\\ d\to+\infty}}{\overset{d=\frac{1}{x}}{=}}\lim\limits_{d\to+\infty}e^{d}=+\infty$,

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{2}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(e^{\frac{1}{x}}\right)^2}{e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}+1\right)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}+1}=\lim_{x\to 0^+}\left(e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}+1}\right)=+\infty ,\text{ οπότε}$$

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln\dfrac{e^{\frac{2}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}\right)=+\infty$. Επομένως δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

γ) Για κάθε $x>0$: $-1\le\eta\mu\dfrac{1}{x}\le 1\Leftrightarrow -1\le-\eta\mu\dfrac{1}{x}\le 1\Leftrightarrow$

$\ln x-1\le\ln x-\eta\mu\dfrac{1}{x}\le\ln x+1$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x+1)=-\infty$ είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln x-\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)=-\infty$.

δ) $-1\le \eta\mu x\le 1 \Leftrightarrow e^x-1\le e^x+\eta\mu x\le e^x+1$. Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-1\right)=+\infty$ είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x+\eta\mu x\right)=+\infty$.

68. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{\sqrt{x+2}}+e^{\sqrt{x-2}}-e^{\sqrt{x}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^{\sqrt{x}}\left(e^{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}+e^{\sqrt{x-2}-\sqrt{x}}-1\right)\right]=+\infty$

γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{\sqrt{x}}\dfrac{2}{\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+1\right)}\right]=0$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{2}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{\sqrt{x}}\dfrac{2}{\left(\sqrt{1-\dfrac{2}{x}}+1\right)}\right]=0$.

69. Αν $0<\lambda<3$, τότε: $f(x)=\dfrac{3^x\left[\lambda^3\left(\dfrac{\lambda}{3}\right)^x-1+3\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^x\right]}{3^x\left[\left(\dfrac{\lambda}{3}\right)^x+1-8\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^x\right]}=$

$\dfrac{\lambda^3\left(\dfrac{\lambda}{3}\right)^x-1+3\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^x}{\left(\dfrac{\lambda}{3}\right)^x+1-8\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^x}$.

Επειδή $\dfrac{\lambda}{3}<1$ είναι: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\lambda}{3}\right)^x=0$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\dfrac{\lambda^3\cdot 0-1+0}{0+1-8\cdot 0}=-1\neq 64$.

Αν $\lambda=3$, τότε: $f(x)=\dfrac{3^3\cdot 3^x-3^x+5}{3^x+3^x-8}=\dfrac{26\cdot 3^x+5}{2\cdot 3^x-8}=\dfrac{3^x\left(26+\dfrac{5}{3^x}\right)}{3^x\left(2-\dfrac{8}{3^x}\right)}=$

$\dfrac{26+5\left(\dfrac{1}{3}\right)^x}{2-8\left(\dfrac{1}{3}\right)^x}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{26+5\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^x}{2-8\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^x}=\dfrac{26+0}{2-0}=13\neq 64$.

Αν $\lambda>3$, τότε: $f(x)=\dfrac{\lambda^x\left[\lambda^3-\left(\dfrac{3}{\lambda}\right)^x+\dfrac{5}{\lambda^x}\right]}{\lambda^x\left[1+\left(\dfrac{3}{\lambda}\right)^x-\dfrac{8}{\lambda^x}\right]}=\dfrac{\lambda^3-\left(\dfrac{3}{\lambda}\right)^x+5\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)^x}{1+\left(\dfrac{3}{\lambda}\right)^x-8\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)^x}$.

Επειδή $\lambda>3$ είναι: $\dfrac{3}{\lambda}<1$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3}{\lambda}\right)^x=0$, άρα:

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\lambda^3-\left(\dfrac{3}{\lambda}\right)^x+5\cdot\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)^x}{1+\left(\dfrac{3}{\lambda}\right)^x-8\cdot\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)^x}=\lambda^3$. Πρέπει $\lambda^3=64\Leftrightarrow\lambda=4$.

70. Αν $\lambda>2$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{\lambda^x}\left(\lambda-\left(\dfrac{2}{\lambda}\right)^x+3\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)^x\right)}{\cancel{\lambda^x}\left(1+4\left(\dfrac{2}{\lambda}\right)^x-\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)^x\right)}=\lambda$.

Αν $0<\lambda<2$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{2^x}\left(\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^x\lambda-1+3\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\right)}{\cancel{2^x}\left(\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^x+4-\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\right)}=-\dfrac{1}{4}$ και αν

$\lambda=2$ τότε

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\cdot2^x-2^x+3}{2^x+4\cdot2^x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x+3}{5\cdot2^x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{2^x}\left(1+3\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\right)}{\cancel{2^x}\left(5-\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\right)}=\dfrac{1}{5}$.

71. Αν $\alpha<\beta$, τότε $f(x)=\dfrac{3\alpha^x\alpha-2\beta^x\dfrac{1}{\beta}}{\alpha^x+5\beta^x\cdot\beta}=\dfrac{\beta^x\left[3\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^x\alpha-2\cdot\dfrac{1}{\beta}\right]}{\beta^x\left[\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^x+5\beta\right]}=\dfrac{3\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^x\alpha-\dfrac{2}{\beta}}{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^x+5\beta}$.

Οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\dfrac{3\cdot0\cdot\alpha-\dfrac{2}{\beta}}{0+5\beta}=-\dfrac{2}{5\beta^2}$.

Αν $\beta<\alpha$, τότε

$$f(x)=\frac{\alpha^x\left[3\alpha-2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x\cdot\frac{1}{\beta}\right]}{\alpha^x\left[1+5\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x\cdot\beta\right]}=\frac{3\alpha-2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x\cdot\frac{1}{\beta}}{1+5\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x\cdot\beta}.$$

Οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\dfrac{3\alpha-2\cdot0\cdot\frac{1}{\beta}}{1+5\cdot0\cdot\beta}=3\alpha$. Αν $\alpha=\beta$, τότε

$f(x)=\dfrac{3\alpha^x\cdot\alpha-2\alpha^x\cdot\frac{1}{\alpha}}{\alpha^x+5\alpha^x\cdot\alpha}=\dfrac{3\alpha-\frac{2}{\alpha}}{1+5\alpha}=\dfrac{3\alpha^2-2}{\alpha+5\alpha^2}$. Οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\dfrac{3\alpha^2-2}{\alpha+5\alpha^2}$.

Όριο σύνθετης συνάρτησης στο άπειρο

72. α) $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{2x^2-3}{1-x}}\ \underset{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2-3}{1-x}=-\infty}{\overset{\frac{2x^2-3}{1-x}=u}{=}}\ \lim\limits_{u\to-\infty}e^u=0$.

β) $\dfrac{x+1}{x^2-5x}=u$ με $\lim\limits_{x\to+\infty}u=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x^2-5x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}=0$, οπότε

$\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{x+1}{x^2-5x}}=\lim\limits_{u\to0}e^u=1$.

γ) $\dfrac{x^2-x+1}{x-2}=u$ με $\lim\limits_{x\to-\infty}u=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}=-\infty$, οπότε $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{\frac{x^2-x+1}{x-2}}=\lim\limits_{u\to-\infty}e^u=0$.

δ) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-\eta\mu x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\left(1-\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)\right]=-\infty$ γιατί $\left|\dfrac{\eta\mu x}{x}\right|=\dfrac{|\eta\mu x|}{|x|}\le\dfrac{1}{|x|}\Leftrightarrow$

$-\dfrac{1}{|x|}\le\dfrac{\eta\mu x}{x}\le\dfrac{1}{|x|}$ και από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=0$.

Έστω $x-\eta\mu x=u$ με $\lim\limits_{x\to-\infty}u=-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x-\eta\mu x}=\lim\limits_{u\to-\infty}e^u=0$.

ε) $\sqrt{x^2+3}+x=u$ με

$$\lim_{x\to-\infty}u=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^2}+3-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+3}-x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{x}\cdot\frac{1}{-\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}-1}\right)=0.$$

οπότε $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{\sqrt{x^2+3}+x}=\lim\limits_{u\to0}e^u=1$.

στ) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1+8^{-\frac{1}{x}}}{3-8^{-\frac{1}{x}}}\overset{-\frac{1}{x}=u}{\underset{u\to+\infty}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{1+8^u}{3-8^u}=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\cancel{8^u}\left(8^{-u}+1\right)}{\cancel{8^u}\left(38^{-u}-1\right)}=-1$.

73.α) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{3\ln x+2}{4\ln^3 x+\ln^2 x+1}\overset{\ln x=u}{\underset{u\to-\infty}{=}}\lim\limits_{u\to-\infty}\dfrac{3u+2}{4u^3+u^2+1}=\lim\limits_{u\to-\infty}\dfrac{3\cancel{u}}{4u^{\cancel{3}2}}=0$.

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x-\ln\sqrt{x^2+2x+3}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2x+3}}\right)=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}}\right)\overset{u=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}}}{\underset{x\to+\infty,\ u\to1}{=}}\lim\limits_{u\to1}\ln u=0$.

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^{x+2}+3\right)-x-2\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^{x+2}+3\right)-\ln e^{x+2}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\dfrac{e^{x+2}+3}{e^{x+2}}\right)=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\dfrac{\cancel{e^{x+2}}\left(1+\dfrac{3}{e^{x+2}}\right)}{\cancel{e^{x+2}}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\dfrac{3}{e^{x+2}}\right)\overset{u=1+\frac{3}{e^{x+2}}}{\underset{x\to+\infty,\ u\to1}{=}}\lim\limits_{u\to1}\ln u=0$.

δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2\ln(x+1)-\ln\left(x^2+x+1\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{(x+1)^2}{x^2+x+1}=\lim\limits_{u\to1}\ln u=0$ αφού

$\lim\limits_{x\to+\infty}u=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+1)^2}{x^2+x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}=1$.

ε) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[3\ln(x+2)-\ln(x^2+3)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\dfrac{(x+2)^3}{x^2+3}\right)=\lim\limits_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$, γιατί

$\lim\limits_{x\to+\infty}u=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+2)^3}{x^2+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+6x^2+12x+8}{x^2+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\cancel{3}}}{\cancel{x^2}}=+\infty$.

στ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[3\ln(2x)-\ln\left(x^3+1\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{8x^3}{x^3+1}=\lim\limits_{u\to8}\ln u=\ln 8$, γιατί

$\lim\limits_{x\to+\infty}u=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{8x^3}{x^3+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{8\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}}=8$.

Αυξημένης δυσκολίας

74.α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^x+1\right)-2x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^x+1\right)-\ln e^{2x}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{e^x+1}{e^{2x}}\underset{\substack{x\to+\infty,\\ u\to0^+}}{\overset{u=\frac{e^x+1}{e^{2x}}}{=}}$

$\lim\limits_{u\to0^+}\ln u=-\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+1}{e^{2x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{e^x}\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}{e^{\cancel{2}x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}\cdot\left(1+\frac{1}{e^x}\right)=0\cdot1=0$.

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=-\infty$ ($f\left(x\right)<\ln\left(e^x+2^x\right)-2x$).

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x^2+1}-x^2}{\sqrt{4x^2+1}-2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)}{\left(4x^2+1-4x^2\right)}=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{\cancel{2}}\left(\sqrt{4+\frac{1}{x}}+2\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=+\infty\cdot2=+\infty$.

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}g\left(x\right)=+\infty$ ($g\left(x\right)>\frac{x\sqrt{x^2+1}-x^2}{\sqrt{4x^2+1}-2x}$).

Όρια και γραφικές παραστάσεις άπειρο

75.α) $\lim\limits_{x\to1}f\left(x\right)=0,\ f\left(1\right)=1$

β) $\lim\limits_{x\to3}f\left(x\right)=0$

γ) $\lim\limits_{x\to0^+}f\left(x\right)=-\infty,\quad \lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=+\infty$

δ) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{f\left(x\right)}=0,\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{f\left(x\right)}=0$

ε) $\lim\limits_{x\to3}\frac{1}{f\left(x\right)}=+\infty,\ \lim\limits_{x\to1}\frac{1}{f\left(x\right)}$ δεν υπάρχει

76.α) $\lim\limits_{x\to-1}f\left(x\right)=0$ και $f\left(-1\right)=-1$

β) $\lim\limits_{x\to2}f\left(x\right)=0$ και $f\left(2\right)=-1$

γ) $\lim\limits_{x\to0}f\left(x\right)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=-1,\ \lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=-\infty$

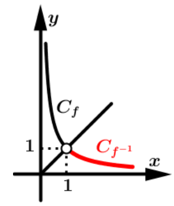
δ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{f\left(x\right)+1}=+\infty,\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{f\left(x\right)}=0$

ε) $\lim\limits_{x\to-1^-}\frac{1}{f\left(x\right)}=-\infty,\ \lim\limits_{x\to-1^+}\frac{1}{f\left(x\right)}=+\infty$ άρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to-1}\frac{1}{f\left(x\right)}$

$\lim\limits_{x\to2}\frac{1}{f\left(x\right)}=+\infty,\ \lim\limits_{x\to4^+}\frac{1}{f\left(x\right)}=-\infty$

Αυξημένης δυσκολίας

77. Λόγω συμμετρίας της C_f με την $C_{f^{-1}}$ ως προς την ευθεία $y=x$ έχουμε το διπλανό σχήμα.
Άρα $\lim\limits_{x\to 1} f^{-1}(x)=1$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} f^{-1}(x)=0$.



78. Έστω ότι $C_2 \equiv C_f$ και $C_1 \equiv C_g$. Για κάθε $x>0$ είναι $f(x)=xg(x)$ άρα $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}(xg(x)) \Leftrightarrow 0=-\infty$ πράγμα άτοπο.
Επομένως η C_1 παριστάνει την f και η C_2 την g.

79. α) Για κάθε $(1,x_0)\cup(x_0,+\infty)$ είναι $g(x)=\dfrac{f(x)}{h(x)} \Leftrightarrow f(x)=g(x)h(x)$.
Αν $C_3 \equiv C_g$ τότε $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=+\infty$ άρα $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$ άτοπο γιατί ούτε για την C_1 ούτε για την C_2 συμβαίνει αυτό.
Αν $C_2 \equiv C_g$ τότε $g(e)=0$ άρα $f(e)=0$ άτοπο γιατί ούτε για την C_1 ούτε για την C_3 συμβαίνει αυτό. Άρα $C_1 \equiv C_g$.
β) Αφού $C_1 \equiv C_g$ τότε $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=-\infty$ άρα $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$ και επομένως $C_2 \equiv C_f$.
γ) $g(x_0)=0 \Leftrightarrow \ell=0$.

Θεωρητικές ασκήσεις - Προβλήματα

80. Θέτω $g(x)=f(x)+\sqrt{x^2+x+2}-x+1 \quad (1)$ με $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=4$.
Όταν το x βρίσκεται κοντά στο $+\infty$ ισχύει: $f(x)=g(x)-\left(\sqrt{x^2+x+2}-x+1\right)=$

$$=g(x)-\frac{x^2+x+2-(x-1)^2}{\sqrt{x^2+x+2}+x-1}=g(x)-\frac{x^2+x+2-x^2+2x-1}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+1-\frac{1}{x}\right)}=$$

$$g(x)-\frac{\cancel{x}\left(3+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+1-\frac{1}{x}\right)}.$$

Οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x) - \dfrac{3+\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}}+1-\dfrac{1}{x}}\right] = 4-\dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{2}$.

Επειδή η f είναι άρτια, ισχύει: $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Οπότε: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \underset{\substack{x\to-\infty,\\ h\to+\infty}}{\overset{x=-h}{=}} \lim\limits_{h\to+\infty} f(h) = \dfrac{5}{2}$.

81.α) $f(x) + \sqrt{x^2+2x+3} + x = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) - \left(\sqrt{x^2+2x+3}+x\right)$**,**

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 4$**,** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[g(x) - \dfrac{\cancel{x^2}+2x+3-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+2x+3}-x}\right] =$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[g(x) - \dfrac{\cancel{x}\left(2+\dfrac{3}{x}\right)}{\cancel{x}\left(-\sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}-1\right)}\right] = 5$**.**

β) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[-f(-x)\right] \underset{u\to-\infty}{\overset{-x=u}{=}} \lim\limits_{u\to-\infty}\left(-f(u)\right) = -5$.

82. $3f(x) + \sqrt{x^2+2x+3} - x = g(x) \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{g(x)+x-\sqrt{x^2+2x+3}}{3}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{3}\left(g(x) + \dfrac{\cancel{x^2}-\cancel{x^2}-2x-3}{x+\sqrt{x^2+2x+3}}\right)\right] =$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{3}\left(g(x) + \dfrac{\cancel{x}\left(-2-\dfrac{3}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1+\sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}\right)}\right)\right] = \dfrac{1}{3}$.

83. $\dfrac{f(x)+2x\eta\mu\dfrac{1}{x}}{\sqrt{x^2+2x+3}-x} = g(x) \overset{x>0}{\Leftrightarrow} f(x) = g(x)\left(\sqrt{x^2+2x+3}-x\right) - 2x\eta\mu\dfrac{1}{x}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\left(\sqrt{x^2+2x+3}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)\dfrac{\cancel{x^2}+2x+3-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+2x+3}+x}\right]=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)\dfrac{\cancel{x}\left(2+\dfrac{3}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}+1\right)}\right]=3$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\eta\mu\dfrac{1}{x}\overset{\frac{1}{x}=u}{\underset{u\to0}{=}}\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1$, άρα

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)\left(\sqrt{x^2+2x+3}-x\right)-2x\eta\mu\dfrac{1}{x}\right]=3-2=1$.

84.α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}-x\right)=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x-1}}\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}^{\cancel{2}}}{\cancel{\sqrt{x}}\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}}\left(\dfrac{\cancel{x}-\cancel{x}+1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{\sqrt{x}}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}}\dfrac{1}{\cancel{\sqrt{x}}\left(1+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}\right)}=\dfrac{1}{2}$.

β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}-\dfrac{x}{2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{-x\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}-\dfrac{x}{2}\right)=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\left(-\dfrac{\cancel{\sqrt{x}}}{\cancel{\sqrt{x}}\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}}-\dfrac{1}{2}\right)\right]=+\infty$.

85. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x^2}\left(\dfrac{f(x)}{x}-3-\dfrac{6}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(2f(x)-6x+\dfrac{4}{x}-\dfrac{5}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{f(x)}{x}-3-\dfrac{6}{x^2}}{2\left(f(x)-3x\right)+\dfrac{4}{x}-\dfrac{5}{x^2}}=0$.

86. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3(x+2)f^2(x)-4f(x)+5x}{xf^2(x)+(x+3)f(x)+2}=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{xf^2(x)}\left[3\left(1+\dfrac{2}{x}\right)-\dfrac{4}{xf(x)}+\dfrac{5}{f^2(x)}\right]}{\cancel{xf^2(x)}\left(1+\left(1+\dfrac{3}{x}\right)\dfrac{1}{f(x)}+\dfrac{2}{xf^2(x)}\right)}=3$.

87. $\left|\left(x^2+1\right)f\left(x\right)-x\right|\le 1 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x^2+1}\le f\left(x\right)\le \dfrac{x+1}{x^2+1}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}=0$ άρα και $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=0$.

88.α) Για $y=0$ είναι $\left|f\left(x\right)\right|\le|x|\Leftrightarrow -|x|\le f\left(x\right)\le|x| \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} -\dfrac{|x|}{|x|^2}\le\dfrac{f\left(x\right)}{x^2}\le\dfrac{|x|}{|x|^2}\Leftrightarrow$

$-\dfrac{1}{|x|}\le\dfrac{f\left(x\right)}{x^2}\le\dfrac{1}{|x|}$ Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{|x|}=0$ από το κριτήριο παρεμβολής είναι

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f\left(x\right)}{x^2}=0$.

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x^2+3f\left(x\right)}{2x^2-\left|f\left(x\right)\right|}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x^2}\left(6+3\dfrac{f\left(x\right)}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(2-\left|\dfrac{f\left(x\right)}{x^2}\right|\right)}=3$.

89. $\left(f\left(x\right)+g\left(x\right)\right)^2-2f\left(x\right)g\left(x\right)-2\left(f\left(x\right)+g\left(x\right)\right)\le\dfrac{1}{x}-2\Leftrightarrow$

$\left[f\left(x\right)-1\right]^2+\left[g\left(x\right)-1\right]^2\le\dfrac{1}{x}$. Επειδή $\left[f\left(x\right)-1\right]^2+\left[g\left(x\right)-1\right]^2\ge 0$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, από το κριτήριο παρεμβολής είναι

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(f\left(x\right)-1\right)^2+\left(g\left(x\right)-1\right)^2\right]=0\Leftrightarrow\left(\alpha-1\right)^2+\left(\beta-1\right)^2=0\Leftrightarrow\alpha=1=\beta$.

90. Είναι $\left(1\right)$: $f^5\left(x\right)+f\left(x\right)=32x^5\Leftrightarrow f\left(x\right)\left[f^4\left(x\right)+1\right]=32x^5$.

Αν $x>0$ και επειδή $f^4\left(x\right)+1>0$, είναι $f\left(x\right)>0$, οπότε από την $\left(1\right)$

προκύπτει $f^5\left(x\right)<32x^5\Leftrightarrow 0<f\left(x\right)<2x$, άρα για $x>0$, $0<\dfrac{f\left(x\right)}{x^5}<\dfrac{2}{x^4}$.

Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x^4}=0$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f\left(x\right)}{x^5}=0$.

91. Έστω $\dfrac{x}{x+1}=u$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}u=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x}=1$ και $x=xu+u\Leftrightarrow$

$xu-x=-u\Leftrightarrow x\left(u-1\right)=-u\Leftrightarrow x=\dfrac{-u}{u-1}$, $u\neq 1$. Τότε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^2-1\right)\frac{f\left(\frac{x}{x+1}\right)-2}{6x+5}\right]=\lim_{u\to1}\left[\left(\left(\frac{-u}{u-1}\right)^2-1\right)\frac{f(u)-2}{6\frac{-u}{u-1}+5}\right]=$$

$$\lim_{u\to1}\left[\left(\frac{u^2-(u-1)^2}{(u-1)^2}\right)\frac{f(u)-2}{\frac{-6u+5u-5}{u-1}}\right]=\lim_{u\to1}\left[\left(\frac{2u-1}{(u-1)^2}\right)\frac{f(u)-2}{\frac{-u-5}{u-1}}\right]=$$

$$\lim_{u\to1}\left[\frac{2u-1}{-u-5}\cdot\frac{f(u)-2}{u-1}\right]=-\frac{1}{6}\cdot6=-1\,.$$

92. Έστω ότι το $P(x)$ είναι ν-οστού βαθμού.

Αν $\nu=1$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{P(x)}{x^2-1}=0$ και αν $\nu>2$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{P(x)}{x^2-1}=\pm\infty$.

Άρα για να είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{P(x)}{x^2-1}=1$, πρέπει $\nu=2$. Έστω $P(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$,

$\alpha\neq0$. Τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{P(x)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\alpha x^2+\beta x+\gamma}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\alpha x^2}{x^2}=\alpha=1$.

Έστω $\frac{x^2+\beta x+\gamma}{x^2-1}=f(x)\overset{x\neq\pm1}{\Leftrightarrow}x^2+\beta x+\gamma=f(x)\left(x^2-1\right)$ και

$\lim\limits_{x\to1}\left(x^2+\beta x+\gamma\right)=\lim\limits_{x\to1}\left[f(x)\left(x^2-1\right)\right]\Leftrightarrow1+\beta+\gamma=0\Leftrightarrow\gamma=-1-\beta$. Τότε:

$$\lim_{x\to1}\frac{P(x)}{x^2-1}=3\Leftrightarrow\lim_{x\to1}\frac{x^2+\beta x-1-\beta}{x^2-1}=3\Leftrightarrow\lim_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)+\beta\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)}=3\Leftrightarrow$$

$\frac{2+\beta}{2}=3\Leftrightarrow\beta=4$ και $\gamma=-5$. Άρα $P(x)=x^2+4x-5$.

93. Έστω ότι $f(x)$ είναι ν-οστού βαθμού. Αν $\nu>1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$

άτοπο, άρα $\nu=1$. Έστω $f(x)=\alpha x+\beta$, $\alpha\neq0$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=4\Leftrightarrow\alpha=4$,

$f(0)=5\Leftrightarrow\beta=5$. Είναι $\lim\limits_{x\to4}f(x)=\lim\limits_{x\to4}\frac{4x+5}{x-\lambda}=7$. Αν $\lambda=4$, τότε το όριο

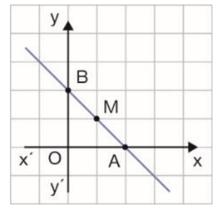
$\lim\limits_{x\to4}\frac{4x+5}{x-4}$ δεν υπάρχει, αφού τα πλευρικά όρια στο 4 δεν είναι ίσα. Άρα $\lambda\neq4$.

Τότε $\lim\limits_{x\to4}\frac{4x+5}{x-\lambda}=\frac{21}{4-\lambda}=7\Leftrightarrow\lambda=1$.

94.α) $K(x)=x+30.000$.

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}P(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+30.000}{x}=1$ και $\lim\limits_{x\to0^+}P(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x+30.000}{x}=+\infty$.

95.α) Έστω $A(\alpha,0)$, $\alpha>x_M=3$, τότε $\lambda_{AB}=\dfrac{2}{3-\alpha}$ και



$AB:\ y-0=\dfrac{2}{3-\alpha}(x-\alpha)\Leftrightarrow y=\dfrac{2}{3-\alpha}x-\dfrac{2\alpha}{3-\alpha}$.

Για $x=0$ είναι $y=\dfrac{2\alpha}{3-\alpha}$ και $B\left(0,\dfrac{2\alpha}{3-\alpha}\right)$,

$(OAB)=\dfrac{\alpha^2}{\alpha-3}$.

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}(OAB)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x-3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}=+\infty$ $\lim\limits_{x\to3}(OAB)=\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{x^2}{x-3}=+\infty$.

96. Από το πυθαγόρειο θεώρημα είναι: $(B\Gamma)=\sqrt{\beta^2+x^2}$, $\dfrac{(B\Gamma)}{(AB)}=\dfrac{\sqrt{\beta^2+x^2}}{x}$,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(B\Gamma)}{(AB)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\beta^2+x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\sqrt{\dfrac{\beta^2}{x^2}+1}}{\cancel{x}}=1.$$

Σύνθετες ασκήσεις

97.α) Για $x\neq\pm1$ είναι: $f(x)(x^2-1)=(\lambda-1)x^2+x-2$ και επειδή $\lim\limits_{x\to1}f(x)=k\in\mathbb{R}$, έχουμε:

$\lim\limits_{x\to1}\left[f(x)(x^2-1)\right]=\lim\limits_{x\to1}\left[(\lambda-1)x^2+x-2\right]\Leftrightarrow0=\lambda-1+1-2\Leftrightarrow\lambda=2$.

Τότε $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}=\dfrac{(x+2)\cancel{(x-1)}}{(x+1)\cancel{(x-1)}}=\dfrac{x+2}{x+1}$ και $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+2}{x+1}=\dfrac{3}{2}$.

β) i. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x}=1$.

ii. $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\left[(x+2)\dfrac{1}{x+1}\right]=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\left[(x+2)\dfrac{1}{x+1}\right]=+\infty$

γιατί $\lim\limits_{x\to-1^-}(x+2)=1$, $\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{1}{x+1}=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{1}{x+1}=+\infty$, οπότε δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to-1}f(x)$.

γ) $g(x)=\cancel{(x+1)}\dfrac{x+2}{\cancel{x+1}}=x+2,\ x\neq\pm1$.

i. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{g(x)}-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{x+2}-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\left(\sqrt{x+2}-1\right)\left(\sqrt{x+2}+1\right)}{(x+1)\left(\sqrt{x+2}+1\right)}=$

$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x+2-1}{(x+1)\left(\sqrt{x+2}+1\right)}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\cancel{x+1}}{\cancel{(x+1)}\left(\sqrt{x+2}+1\right)}=\dfrac{1}{2}$.

ii. Θέτουμε $\sqrt[6]{g(x)}=u\Leftrightarrow\sqrt[3]{g(x)}=u^2$, $\sqrt{g(x)}=u^3$ και

$g(x)=u^6\Leftrightarrow x=u^6-2$. Όταν $x\to-1$ τότε $u\to1$.

$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{g(x)}+\sqrt[3]{g(x)}-2}{x+1}=\lim\limits_{u\to1}\dfrac{u^3+u^2-2}{u^6-2+1}=$

$\lim\limits_{u\to1}\dfrac{\cancel{(u-1)}\left(u^2+2u+2\right)}{\cancel{(u-1)}\left(u^5+u^4+u^3+u^2+u+1\right)}=\dfrac{5}{6}$.

iii. Θέτουμε $g(x)=u$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)=+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^{g(x)}+3^{g(x)}-1}{4^{g(x)}+5}=\lim_{u\to+\infty}\frac{2^u+3^u-1}{4^u+5}=\lim_{u\to+\infty}\frac{3^u\left(\left(\frac{2}{3}\right)^u+1-\frac{1}{3^u}\right)}{4^u\left(1+\frac{5}{4^u}\right)}=$$

$$\lim_{u\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^u\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^u+1-\frac{1}{3^u}}{1+\frac{5}{4^u}}=0.$$

iv. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-\ln\left(e^{g(x)}+1\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln e^x-\ln\left(e^{x+1}+1\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{e^x}{e^{x+1}+1}\right)\underset{\substack{x\to+\infty\Rightarrow\\ u\to\frac{1}{e}}}{\overset{\frac{e^x}{e^{x+1}+1}=u}{=}}$

$\lim\limits_{u\to\frac{1}{e}}\ln u=\ln\dfrac{1}{e}=-1$ γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^{x+1}+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}\left(e+\frac{1}{e^x}\right)}=\dfrac{1}{e}$.

98.α) $\left|\dfrac{ημx}{x}\right|=\dfrac{|ημx|}{|x|}\le\dfrac{1}{|x|}\Leftrightarrow-\dfrac{1}{|x|}\le\dfrac{ημx}{x}\le\dfrac{1}{|x|}$ για $x\in(0,+\infty)$ είναι

$-\dfrac{1}{x}\le\dfrac{ημx}{x}\le\dfrac{1}{x}$ είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$, άρα και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ημx}{x}=0$.

β) $x^2\left[f^2(x)+g^2(x)\right]-2\left[f(x)-g(x)\right]\le x\eta\mu x-\frac{1}{x^2}-1 \Leftrightarrow$ για $x\neq 0$ είναι:

$f^2(x)+g^2(x)-\frac{2f(x)}{x^2}+\frac{2g(x)}{x^2}\le \frac{\eta\mu x}{x}-\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^2}$ είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f^2(x)+g^2(x)-\frac{2f(x)}{x^2}+\frac{2g(x)}{x^2}\right)\le \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\eta\mu x}{x}-\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^2}\right)\Leftrightarrow$$

$\kappa^2+\lambda^2\le 0\Leftrightarrow \kappa=\lambda=0$, γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2f(x)\frac{1}{x^2}\right)=0$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2g(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2g(x)\frac{1}{x^2}\right)=0$.

99.α) i. Έστω ότι η f είναι άρτια, τότε

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(-x)\underset{\substack{x\to-\infty\Rightarrow\\ u\to+\infty}}{\overset{-x=u}{=}}\lim_{u\to+\infty}f(u)=+\infty \text{ άτοπο.}$$

ii. Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ υπάρχει πολύ μικρός αρνητικός αριθμός α τέτοιος ώστε $f(\alpha)<0$. Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ υπάρχει πολύ μεγάλος θετικός αριθμός β τέτοιος ώστε $f(\beta)>0$.

Έστω ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα, τότε επειδή $\alpha<\beta$ θα είναι $f(\alpha)>f(\beta)$ που είναι άτοπο.

iii. Έστω ότι η f έχει ελάχιστο στο $x_0\in\mathbb{R}$, τότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$$f(x)\ge f(x_0)\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}f(x)\ge\lim_{x\to-\infty}f(x_0)\Leftrightarrow -\infty\ge f(x_0) \text{ άτοπο.}$$

Αν η f έχει μέγιστο στο x_0 τότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$$f(x)\le f(x_0)\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}f(x)\le\lim_{x\to+\infty}f(x_0)\Leftrightarrow +\infty\le f(x_0) \text{ άτοπο.}$$

iv. Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ήταν $f(x)=x^2+\beta x+\gamma$, τότε

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x^2+\beta x+\gamma\right)=\lim_{x\to-\infty}x^2=+\infty \text{ που είναι άτοπο.}$$

iv. Αν για κάθε $x\neq 0$ ήταν $f(x)=\frac{\eta\mu x}{x}$, τότε:

$$|f(x)|=\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right|=\frac{|\eta\mu x|}{|x|}\le\frac{1}{|x|}\Leftrightarrow -\frac{1}{|x|}\le f(x)\le\frac{1}{|x|}.$$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{|x|}=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{|x|}\right)=0$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ που είναι άτοπο.

β) Αν η γραφική παράσταση της f ήταν η C_2, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)>0$ που είναι άτοπο αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$. Αν η γραφική παράσταση της f ήταν η C_3, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ που είναι άτοπο. Άρα η C_f μπορεί να είναι η C_1.

100. α) $f(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{y^2\ln^2x+y^2-xy}{\ln^2x\left(xy^2+y^2-1\right)}=\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{y^2\ln^2x+y^2-xy}{xy^2\ln^2x+y^2\ln^2x-\ln^2x}\Leftrightarrow$

$$f(x)=\lim_{y\to+\infty}\frac{\cancel{y^2}\left(\ln^2x+1-\cancelto{0}{\dfrac{x}{y}}\right)}{\cancel{y^2}\left(x\ln^2x+\ln^2x-\cancelto{0}{\dfrac{\ln^2x}{y^2}}\right)}=\frac{\ln^2x+1}{\ln^2x(x+1)}.$$

β) i. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^2x+1}{(x+1)\ln^2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x+1}\cdot\dfrac{\ln^2x+1}{\ln^2x}\right)=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{x+1}\cdot\left(1+\dfrac{1}{\ln^2x}\right)\right]=0$.

ii. $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln^2x+1}{(x+1)\ln^2x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\cancel{\ln^2x}\left(1+\dfrac{1}{\ln^2x}\right)}{(x+1)\cancel{\ln^2x}}=\dfrac{1+0}{0+1}=1$.

iii. $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\left[\dfrac{1}{x+1}\cdot\left(1+\dfrac{1}{\ln^2x}\right)\right]=1(1+\infty)=+\infty$.

γ) Επειδή $f(x)>0$ για κάθε $x>0$ είναι: $f(x)g(x)>1\Leftrightarrow g(x)>\dfrac{1}{f(x)}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)}\underset{\substack{x\to+\infty\Rightarrow\\ u\to0^+}}{\overset{f(x)=u}{=}}\lim\limits_{u\to0^+}\dfrac{1}{u}=+\infty$, οπότε και $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^{g(x)}+3^{g(x)+1}}{2^{g(x)+1}+3^{g(x)}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^{g(x)}+3\cdot3^{g(x)}}{2\cdot2^{g(x)}+3^{g(x)}}\underset{\substack{x\to+\infty\Rightarrow\\ u\to+\infty}}{\overset{g(x)=u}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{2^u+3\cdot3^u}{2\cdot2^u+3^u}=$

$$\lim_{u\to+\infty}\frac{\cancel{3^u}\left(\cancelto{0}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^u}+3\right)}{\cancel{3^u}\left(2\cdot\cancelto{0}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^u}+1\right)}=3.$$

101. α) Είναι $\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{2y^2\eta\mu x+xy^2+2x^2y}{xy^2+1}=\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{y^2\left(2\eta\mu x+x+\dfrac{2x^2}{y}\right)}{y^2\left(x+\dfrac{1}{y^2}\right)}=\dfrac{2\eta\mu x+x}{x}$

άρα $f(x)=\dfrac{2\eta\mu x+x}{x}$ για κάθε $x>0$.

β) Είναι $\left|\dfrac{\eta\mu x}{x}\right|\le\dfrac{1}{|x|}\Leftrightarrow-\dfrac{1}{|x|}\le\dfrac{\eta\mu x}{x}\le\dfrac{1}{|x|}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{|x|}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{|x|}\right)=0$ άρα

από το Κριτήριο Παρεμβολής $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=0$.

Οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\dfrac{\eta\mu x}{x}+1\right)=1$.

γ) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln x}{xf(x)-3\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln x}{x-\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\ln x\dfrac{1}{x-\eta\mu x}\right)=-\infty(+\infty)=-\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x\to0}\ln x=-\infty$, και $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x-\eta\mu x}\overset{x-\eta\mu x=u}{=}\lim\limits_{u\to0^+}\dfrac{1}{u}=+\infty$ γιατί $|\eta\mu x|\le|x|$ και για

$x>0:|\eta\mu x|<x\Leftrightarrow-x<\eta\mu x<x\Rightarrow x-\eta\mu x>0$.

102. α) Έστω ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα. Τότε για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι $f(x_1)>f(x_2)$, οπότε $f(f(x_1))<f(f(x_2))$ και $-f(x_1)<-f(x_2)$, άρα $f(f(x_1))-f(x_1)<f(f(x_2))-f(x_2)\Leftrightarrow-x_1+5<-x_2+5\Leftrightarrow-x_1<-x_2\Leftrightarrow$ $x_1>x_2$ που είναι άτοπο. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα είναι $1-1$ και αντιστρέφεται.

Θέτουμε $f^{-1}(x)=y$ και $x=f^{-1}(y)$, τότε $9f(y)=6y-f^{-1}(y)+5\Leftrightarrow$ $f^{-1}(y)=6y-9f(y)+5$ οπότε $f^{-1}(x)=6x-9f(x)+5$, $x\in\mathbb{R}$.

γ) i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(f(x))}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(f(x))}{f(x)}\dfrac{f(x)}{x}=k^2$, γιατί

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(f(x))}{f(x)}\underset{u\to+\infty}{\overset{f(x)=u}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{f(u)}{u}=k$.

ii. $9(f\circ f)(x)=6f(x)-x+5\overset{x\ne0}{\Leftrightarrow}9\dfrac{f(f(x))}{x}=6\dfrac{f(x)}{x}-1+\dfrac{9}{x}$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[9\dfrac{f(f(x))}{x}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[6\dfrac{f(x)}{x}-1+\dfrac{5}{x}\right]\Leftrightarrow 9k^2=6k-1\Leftrightarrow 9k^2-6k+1=0\Leftrightarrow$

$(3k-1)^2=0\Leftrightarrow k=\dfrac{1}{3}$.

103. α) Πρέπει $1-e^x>0\Leftrightarrow x<0$ και $1+e^x>0$ που ισχύει. Άρα $A=(-\infty,0)$.

β) $1+e^x>1-e^x\Leftrightarrow \ln(1+e^x)>\ln(1-e^x)\Leftrightarrow$

$\ln(1-e^x)-\ln(1+e^x)<0\Leftrightarrow f(x)<0$.

γ) Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι $e^{x_1}<e^{x_2}\Leftrightarrow -e^{x_1}>-e^{x_2}\Leftrightarrow$

$1-e^{x_1}>1-e^{x_2}\Leftrightarrow \ln(1-e^{x_1})>\ln(1-e^{x_2})$ και όμοια

$-\ln(1+e^{x_1})>-\ln(1+e^{x_2})$, άρα και $f(x_1)>f(x_2)$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα οπότε είναι $1-1$ και αντιστρέφεται.

$f(x)=y\Leftrightarrow \ln(1-e^x)-\ln(1+e^x)=y\Leftrightarrow \ln\dfrac{1-e^x}{1+e^x}=y\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow x=\ln\dfrac{1-e^y}{1+e^y}$.

Για $x<0\Leftrightarrow \ln\dfrac{1-e^y}{1+e^y}<0\Leftrightarrow \dfrac{1-e^y}{1+e^y}<1\Leftrightarrow 1-e^y<1+e^y\Leftrightarrow -2e^y<0$ ισχύει.

Επομένως $f^{-1}(x)=\ln\dfrac{1-e^x}{1+e^x},x\in\mathbb{R}$.

δ) i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(-4)x^4-3x^3+7x^2-6x+2}{x^3-5x^2+9}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(-4)\cancel{x^4}}{\cancel{x^3}}=-\infty$.

ii. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{f^{-1}(x)}-e^{f(x)}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{\ln\frac{1-e^x}{1+e^x}}-e^{\ln\frac{1-e^x}{1+e^x}}\right)=0$.

104. α) Για $x>2$ είναι $\dfrac{x^4-5x^2}{x^2-4}\le f(x)\le\dfrac{x^4+5x^2}{x^2-4}$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4-5x^2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\cancel{4}\,2}}{\cancel{x^2}}=+\infty$ είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

β) i. $\left|\dfrac{\eta\mu x}{f(x)}\right|=\dfrac{|\eta\mu x|}{|f(x)|}\le\dfrac{1}{|f(x)|}\Leftrightarrow -\dfrac{1}{|f(x)|}\le\dfrac{\eta\mu x}{f(x)}\le\dfrac{1}{|f(x)|}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{|f(x)|}\overset{|f(x)|=u}{=}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{1}{u}=0$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{f(x)}=0$.

ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{f^2(x)-2f(x)+3}-f(x)\right)=$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{f^2(x)-2f(x)+3}-f(x)\right)\left(\sqrt{f^2(x)-2f(x)+3}+f(x)\right)}{\sqrt{f^2(x)-2f(x)+3}+f(x)}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{f^2(x)}-2f(x)+3-\cancel{f^2(x)}}{\sqrt{f^2(x)-2f(x)+3}+f(x)}\overset{f(x)=u}{=}\lim_{u\to+\infty}\frac{-2u+3}{\sqrt{u^2-2u+3}+u}=$$

$$\lim_{u\to+\infty}\frac{\cancel{u}\left(-2+\frac{3}{u}\right)}{\cancel{u}\left(\sqrt{1-\frac{2}{u}+\frac{3}{u^2}}+1\right)}=\frac{-2}{1+1}=-1.$$

iii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{f^2(x)}-e^{f(x)}\right)\overset{f(x)=u}{=}\lim\limits_{u\to+\infty}\left(e^{u^2}-e^{u}\right)=$

$\lim\limits_{u\to+\infty}\left[e^{u}\left(e^{u^2-u}-1\right)\right]=+\infty(+\infty)=+\infty$ γιατί $\lim\limits_{u\to+\infty}\left(e^{u^2-u}-1\right)\overset{u^2-u=t}{=}\lim\limits_{t\to+\infty}\left(e^{t}-1\right)=+\infty.$

105. α) $x^2<x^2+1\Leftrightarrow\sqrt{x^2}<\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow|x|<\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow$

$-\sqrt{x^2+1}<x<\sqrt{x^2+1}\Rightarrow\sqrt{x^2+1}-x>0$, οπότε $D_f=\mathbb{R}$.

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=$

$$\lim_{x\to+\infty}-\ln\left[x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)\right]\underset{\substack{x\to+\infty,\\ \theta\to+\infty}}{\overset{\theta=x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}{=}}\lim_{\theta\to+\infty}(-\ln\theta)=\infty.$$

γ) i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3f^2(x)-|f(x)|+2}{f^2(x)+3|f(x)|-4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3f^2(x)+f(x)+2}{f^2(x)-3f(x)-4}\overset{f(x)=u}{=}$

$$\lim_{u\to-\infty}\frac{3u^2+u+2}{u^2-3u-4}=\lim_{u\to-\infty}\frac{3\cancel{u^2}}{\cancel{u^2}}=3.$$

ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3-f(x)}+f(x)\right)\overset{f(x)=u}{=}\lim\limits_{u\to-\infty}\left(\sqrt{3-u}+u\right)=\lim\limits_{u\to-\infty}\left(\sqrt{u^2\left(\frac{3}{u^2}-\frac{1}{u}\right)}+u\right)=$

$$\lim_{u\to-\infty}\left(-u\sqrt{\frac{3}{u^2}-\frac{1}{u}}+u\right)=\lim_{u\to-\infty}\left[u\left(-\sqrt{\frac{3}{u^2}-\frac{1}{u}}+1\right)\right]=-\infty(0+1)=-\infty.$$

106. α) Για $x>0$ είναι $\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3+2\frac{f(x)}{x}\le 3\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^3$ και

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3+2\frac{f(x)}{x}\right]\le \lim_{x\to 0^+}3\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^3 \Leftrightarrow k^3+2k\le 3 \quad (1)$$

Για $x<0$ είναι $\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3+2\frac{f(x)}{x}\ge 3\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^3$ και

$$\lim_{x\to 0^-}\left[\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3+2\frac{f(x)}{x}\right]\ge \lim_{x\to 0^-}3\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^3 \Leftrightarrow k^3+2k\ge 3 \quad (2)$$

Από τις $(1),(2)$ είναι $k^3+2k=3\Leftrightarrow k^3+2k-3=0\Leftrightarrow k=1$

και $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3+2\frac{f(x)}{x}\right]\le \lim\limits_{x\to +\infty}3\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^3 \Leftrightarrow \lambda^3+2\lambda\le 0$,

$\lim\limits_{x\to -\infty}\left[\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3+2\frac{f(x)}{x}\right]\ge \lim\limits_{x\to -\infty}3\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^3 \Leftrightarrow \lambda^3+2\lambda\ge 0$, άρα

$\lambda^3+2\lambda=0\Leftrightarrow \lambda\left(\lambda^2+2\right)=0\Leftrightarrow \lambda=0$.

Από προηγούμενες ασκήσεις είναι $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0$.

β) i. Έστω $\frac{f(x)}{x}=g(x)\overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} f(x)=xg(x)$ και $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(xg(x)\right)=0$

$$\lim_{x\to 2}h(x)=\lim_{x\to 2}\left[f(2-x)+2\right]\underset{u\to 0}{\overset{2-x=u}{=}}\lim_{u\to 0}\left(f(u)+2\right)=2.$$

ii. Είναι $\lim\limits_{x\to 2}\left(xh(x)-2\right)=2$, άρα $xh(x)-2>0$ κοντά στο 2 και

$\lim\limits_{x\to 2}\left(6-2x-2h(x)\right)=-2$, άρα $6-2x-2h(x)<0$ κοντά στο 2.

$$\lim_{x\to 2}\frac{|xh(x)-2|-|6-2x-2h(x)|}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{xh(x)-2+6-2x-2h(x)}{x-2}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{h(x)\cancel{(x-2)}-2\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}=0.$$

107. α) $\left|f(x)-x\right|\le 2 \Leftrightarrow -2\le f(x)-x\le 2 \Leftrightarrow x-2\le f(x)\le x+2 \quad (1) \overset{x>0}{\Leftrightarrow}$

$1-\frac{2}{x}\le \frac{f(x)}{x}\le 1+\frac{2}{x}$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)=1$ οπότε από Κ.Π. είναι

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$.

β) Αν $\nu>1$ τότε για $x>0$ είναι $\frac{1}{x^{\nu-1}}-\frac{2}{x^{\nu}}\le \frac{f(x)}{x^{\nu}}\le \frac{1}{x^{\nu-1}}+\frac{2}{x^{\nu}}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^{\nu-1}}-\frac{2}{x^{\nu}}\right)=0=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^{\nu-1}}+\frac{2}{x^{\nu}}\right)$ οπότε από Κριτήριο Παρεμβολής

είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^{\nu}}=0$. Αν $\nu=1$ τότε από το **α)** είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$.

γ) $\lim\limits_{x\to0^+}\left[xf\left(\frac{1}{x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\underset{u\to+\infty}{\overset{\frac{1}{x}=u}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{f(u)}{u}=1$.

δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+5x+6}{x^2}f\left(\frac{x^2}{x+3}\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x+2)\frac{f\left(\frac{x^2}{x+3}\right)}{\frac{x^2}{x+3}}\right]=+\infty$, γιατί

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f\left(\frac{x^2}{x+3}\right)}{\frac{x^2}{x+3}}\underset{u\to+\infty}{\overset{\frac{x^2}{x+3}=u}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{f(u)}{u}=1$.

Τράπεζα θεμάτων ΙΕΠ

23314. α) i) Στο σχήμα βλέπουμε ότι $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=2$, άρα

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=2$.

ii) $\lim\limits_{x\to-2^+}f(x)=0$. **iii)** $\lim\limits_{x\to-2^-}f(x)=0$.

β) Θέτουμε $f(x)=u$.

i. Είναι $\lim\limits_{x\to-2^+}f(x)=0$ και $f(x)<0$ για κάθε $x\in(-2,-1)$, άρα

$\lim\limits_{x\to-2^+}\frac{1}{f(x)}\underset{\substack{x\to-2^+,\,u\to0^-\\ u\to0^-}}{\overset{u=f(x)}{=}}\lim\limits_{u\to0^-}\frac{1}{u}=-\infty$.

ii. Είναι $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=0$ και $f(x)>0$ για κάθε $x<-2$, άρα

$$\lim_{x\to -2^-} \ln\left(f(x)\right) \underset{\substack{x\to -2^-,\ u\to 0^+ \\ u\to 0^+}}{\overset{u=f(x)}{=}} \lim \ln u = -\infty .$$

23641. α) $f\left(x^2\right)<f(x) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} x^2<x \Leftrightarrow x^2-x<0 \Leftrightarrow x(x-1)<0 \Leftrightarrow 0<x<1$.

β) Είναι $\alpha^2<\alpha \Leftrightarrow \alpha^2-\alpha<0 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f\left(\alpha^2-\alpha\right)<f(0) \Leftrightarrow f\left(\alpha^2-\alpha\right)-f(0)<0$, οπότε

$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\left[f\left(\alpha^2-\alpha\right)-f(0)\right]x\right)=-\infty$.

γ) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ είναι και 1-1, οπότε:

$$f\left(e^x-1\right)=f(0) \overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow} e^x-1=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=0$$

Ερωτήσεις «Σωστό ή Λάθος»

1. Λ	**2.**Λ	**3.**Σ	**4.** Σ	**5.** Σ	**6.**Λ	**7.** Σ	**8.** Λ	**9.** Σ	**10.**Σ
11.Λ	**12.** Λ	**13.** Σ	**14.**Σ	**15.**Σ	**16.**Λ	**17.**Λ			
18.Λ	**19.** Λ	**20.**Λ	**21.** Λ						

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Είναι $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[x\left(\dfrac{f(x)}{x}-x\sqrt{4+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\right)\right]=1$, έστω

$g(x)=x\left(\dfrac{f(x)}{x}-\sqrt{4+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\right)$ με $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=1$ τότε

$\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{g(x)}{x}+\sqrt{4+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}$ άρα

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to +\infty}\left[\frac{1}{x}g(x)+\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}\right]=0\cdot 1+\sqrt{4}=2 .$$

Σωστή απάντηση Γ.

2. Είναι $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(30x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{f(30x)}{f(27x)}\cdot\dfrac{f(27x)}{f(9x)}\cdot\dfrac{f(9x)}{f(3x)}\cdot\dfrac{f(3x)}{f(x)}\right)=1\cdot 1\cdot 1\cdot 1=1$

γιατί $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(3\cdot\lambda x)}{f(\lambda x)} \overset{\lambda x=u}{=} \lim\limits_{u\to +\infty}\dfrac{f(3u)}{f(u)}=1,\ \lambda>0$.

Σωστή απάντηση Β.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+f(2x)-f(3x)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{4x^2+1}-\sqrt{9x^2+1}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x+\sqrt{4x^2+1}-2x-\sqrt{9x^2+1}+3x\right)=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}+\dfrac{4x^2+1-4x^2}{\sqrt{4x^2+1}+2x}-\dfrac{9x^2+1-9x^2}{\sqrt{9x^2+1}+3x}\right)=$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}+\frac{1}{x\left(\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}+2\right)}-\frac{1}{x\left(\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}+3\right)}\right]=0+0-0=0.$$

Σωστή απάντηση Α.

4. i. Είναι

$\left|f(x)-x\right|\le 1924\Leftrightarrow -1924\le f(x)-x\le 1924\Leftrightarrow -1924+x\le f(x)\le 1924+x$.

Για $x>0$ έχουμε $-\dfrac{1924}{x}+1\le\dfrac{f(x)}{x}\le\dfrac{1924}{x}+1$ και από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$.

Σωστή απάντηση Γ.

ii. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{2x^2+5x+3}{x^2}f\left(\dfrac{x^2}{x+3}\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{2x^2+5x+3}{x^2}\dfrac{x^2}{x+3}\dfrac{f\left(\frac{x^2}{x+3}\right)}{\frac{x^2}{x+3}}\right]$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{2x^2+5x+3}{x+3}\dfrac{f\left(\frac{x^2}{x+3}\right)}{\frac{x^2}{x+3}}\right]=+\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x+3}=+\infty$ οπότε

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f\left(\frac{x^2}{x+3}\right)}{\frac{x^2}{x+3}}\overset{\frac{x^2}{x+3}=\omega}{=}\lim\limits_{\omega\to+\infty}\dfrac{f(\omega)}{\omega}\overset{(i)}{=}1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+5x+3}{x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{x}=+\infty$.

Σωστή απάντηση Δ.

5. Θέτουμε όπου $\frac{1}{x}=u$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu\frac{1}{x}+\frac{2}{x}}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim\limits_{u\to 0^+}\frac{\eta\mu u+2u}{\sqrt{\frac{1}{u^2}+1}-\frac{1}{u}}=$

$$=\lim_{u\to 0^+}\frac{(\eta\mu u+2u)\left(\sqrt{\frac{1}{u^2}+1}+\frac{1}{u}\right)}{\left(\sqrt{\frac{1}{u^2}+1}-\frac{1}{u}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{u^2}+1}+\frac{1}{u}\right)}=\lim_{u\to 0^+}\frac{(\eta\mu u+2u)\left(\frac{1}{u}\left(\sqrt{1+u^2}+1\right)\right)}{1}=$$

$$\lim_{u\to 0^+}\left(\frac{\eta\mu u+2u}{u}\right)\left(\sqrt{1+u^2}+1\right)=(1+2)\cdot 2=6\,.$$

Σωστή απάντηση Α.

6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^\nu\left(\sqrt{x^4+x^3}-x^2\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^\nu\frac{x^3}{\sqrt{x^4+x^3}+x^2}\right]=$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x^{\nu+3}\frac{1}{x^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x^{\nu+1}\frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}\right]=+\infty\,.$$

Σωστή απάντηση Δ.

11 Επαναληπτικές ασκήσεις στα όρια

Επίπεδο δυσκολίας Β Θέματος

1. α) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ (1) είναι $x_1^3 < x_2^3$ (2) και προσθέτοντας κατά μέλη τις (1),(2) προκύπτει $f(x_1) < f(x_2)$ άρα $f \nearrow \mathbb{R}$.

Είναι $f(0) = 0$ άρα το μηδέν είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ αφού η f είναι 1-1.

β) Η $h = g \circ f$ ορίζεται όταν: $\begin{cases} x \in D_f \\ f(x) \in D_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ f(x) \geq f(0) \end{cases} \overset{f \nearrow}{\Leftrightarrow}$

$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 0$. Είναι $h(x) = (g \circ f)(x) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^3 + x}$, $x \geq 0$.

γ) i) Έστω $L = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{|f(x) - 1| - x\left|x^2 + x - \frac{1}{x} + 1\right| + 1}{|g(x) + 1|}$.

Είναι $\lim\limits_{x \to +\infty}(f(x) - 1) = \lim\limits_{x \to +\infty}(x^3 + x - 1) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ άρα είναι $f(x) - 1 > 0$ κοντά στο $+\infty$. Είναι $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(x^2 + x - \frac{1}{x} + 1\right) = +\infty$ άρα είναι $x^2 + x - \frac{1}{x} - 1 > 0$ κοντά στο $+\infty$. Είναι $\lim\limits_{x \to +\infty}(g(x) + 1) = \lim\limits_{x \to +\infty}(\sqrt{x} + 1) = +\infty$ άρα είναι $g(x) + 1 > 0$ κοντά στο $+\infty$. Άρα:

$$L = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) - 1 - x\left(x^2 + x - \frac{1}{x} + 1\right) + 1}{g(x) + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^3} + \cancel{x} - \cancel{1} - \cancel{x^3} - x^2 + \cancel{1} - \cancel{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - x^2}{\sqrt{x} + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(1 - x)(1 + x)(\sqrt{x} - 1)}{x - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{(1 - x)}(1 + x)(\sqrt{x} - 1)}{-\cancel{(1 - x)}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty}\left[-(1 + x)(\sqrt{x} - 1)\right] = -\infty.$$

ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{h(x) - x + f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^3 + x} - \cancel{x} + x^3 + \cancel{x}}{x} =$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^6\left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^5}\right)} + x^3}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{|x|^3\sqrt{\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^5}} + x^3}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3\sqrt{\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^5}} + x^3}{x} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\cancel{3}\,2}\left(\sqrt{\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^5}}+1\right)}{\cancel{x}}=\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot\left(\sqrt{\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^5}}+1\right)=+\infty\cdot(0+1)=+\infty.$$

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{h(x)-\sqrt{x^3}}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^3+x}-\sqrt{x^3}}{x^3+x}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^3}+x-\cancel{x^3}}{(x^3+x)\left(\sqrt{x^3+x}+\sqrt{x^3}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(x^2+1)\left(\sqrt{x^3+x}+\sqrt{x^3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(x^2+1)\left(\sqrt{x^3+x}+\sqrt{x^3}\right)}=0.$$

2ος τρόπος

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)-\sqrt{x^3}}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^3+x}-\sqrt{x^3}}{x^3+x}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}}\cdot\frac{\sqrt{\frac{1}{x^6}+\frac{1}{x^5}}-\sqrt{\frac{1}{x^3}}}{1+\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{x^6}+\frac{1}{x^5}}-\sqrt{\frac{1}{x^3}}}{1+\frac{1}{x^3}}=\frac{0}{1}=0.$$

iv) Επειδή οι h και g ορίζονται στο $[0,+\infty)$ είναι

$$\lim_{x\to0}\frac{xg(x)+f(x)}{h(x)}=\lim_{x\to0^+}\frac{xg(x)+f(x)}{h(x)}=\lim_{x\to0^+}\frac{x\sqrt{x}+x^3+x}{\sqrt{x^3+x}}=$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x\left(\sqrt{x}+x^2+1\right)}{\sqrt{x^2\left(x+\frac{1}{x}\right)}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\cancel{x}\left(\sqrt{x}+x^2+1\right)}{\cancel{x}\sqrt{x+\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}+x^2+1}{\sqrt{x+\frac{1}{x}}}=0 \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x\to0^+}\left(\sqrt{x}+x^2+1\right)=1 \text{ και } \lim_{x\to0^+}\sqrt{x+\frac{1}{x}}=+\infty.$$

δ) Έστω $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\lambda-1)x^4+\lambda f(x)}{\lambda x^2+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\lambda-1)x^4+\lambda x^3+\lambda x}{\lambda x^2+x}$.

Αν $\lambda=1$: $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3+x}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$.

Αν $\lambda=0$: $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x^4}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^3\right)=-\infty$. Αν $\lambda\in\mathbb{R}-\{0,1\}$ τότε

$$A=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\lambda-1)x^4+\lambda x^3+\lambda x}{\lambda x^2+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\lambda-1)x^4}{\lambda x^2}=\lim_{x\to+\infty}(\lambda-1)x^2.$$

Αν $\lambda \in (-\infty,0)\cup(0,1)$ τότε $A = \lim\limits_{x\to+\infty}(\lambda-1)x^2 = -\infty$ ενώ αν $\lambda \in (1,+\infty)$ τότε $A = \lim\limits_{x\to+\infty}(\lambda-1)x^2 = +\infty$.

2. α) $f(x) = x^3 - 3x(x-1)+1 = x^3 - 3x^2 + 3x + 1 =$

$= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 2 = (x-1)^3 + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow (x_1-1)^3 + 2 = (x_2-1)^3 + 2 \Leftrightarrow$ $(x_1-1)^3 = (x_2-1)^3 \Leftrightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ άρα η f είναι 1-1 οπότε αντιστρέφεται. Είναι $f(x) = y \Leftrightarrow (x-1)^3 + 2 = y \Leftrightarrow (x-1)^3 = y-2 \Leftrightarrow$

$$x-1 = \begin{cases} \sqrt[3]{y-2} \ , \ y \geq 2 \\ -\sqrt[3]{2-y} \ , \ y < 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \begin{cases} \sqrt[3]{y-2}+1 \ , \ y \geq 2 \\ -\sqrt[3]{2-y}+1 \ , \ y < 2 \end{cases}.$$

Άρα $f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-2}+1 \ , \ x \geq 2 \\ -\sqrt[3]{2-x}+1 \ , \ x < 2 \end{cases}$.

γ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f^{-1}(x^3 - x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt[3]{2-x^3+x}+1\right) =$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt[3]{-x^3\left(-\frac{2}{x^3}+1-\frac{1}{x^2}\right)}+1\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt[3]{-x^3}\sqrt[3]{-\frac{2}{x^3}+1-\frac{1}{x^2}}+1\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(x\sqrt[3]{-\frac{2}{x^3}+1-\frac{1}{x^2}}+1\right) = -\infty$$ γιατί $x < 0 \Leftrightarrow x^3 < 0 \Leftrightarrow -x^3 > 0$.

$$\lim_{x\to2^+}\frac{f^{-1}(x)-1}{x-2} = \lim_{x\to2^+}\frac{\sqrt[3]{x-2}+1-1}{x-2} = \lim_{x\to2^+}\frac{\sqrt[3]{x-2}}{x-2} = \lim_{x\to2^+}\frac{\sqrt[3]{x-2}}{\sqrt[3]{(x-2)^3}} =$$

$$= \lim_{x\to2^+}\sqrt[3]{\frac{x-2}{(x-2)^3}} = \lim_{x\to2^+}\sqrt[3]{\frac{1}{(x-2)^2}} = +\infty .$$

δ) i) Για κάθε $x < 0$ είναι $x|g(x)| \geq -1 \Leftrightarrow |g(x)| \leq -\frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{x} \leq g(x) \leq -\frac{1}{x}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0$ άρα από κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$. Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left((x-1)^3+2\right) = -\infty$ άρα είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) < \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

ii) Όχι. Θα ερχόμασταν σε αντίφαση αν ήταν $f(x) \geq g(x)$ για κάθε x κοντά στο $-\infty$.

3. α) Αφού $f\left((-\infty,0)\right)=(0,+\infty)$ τότε $f(x)>0$ για κάθε $x<0$ άρα $f(x)>x$ για κάθε $x<0$.

β) Οι C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την $y=x$, $f(x)>x$ για κάθε $x<0$ οπότε $f^{-1}(x)<x$ για κάθε $x<0$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f^{-1}(x)=-\infty$.

γ) i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f^{-1}(x)}=0$ αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}f^{-1}(x)=-\infty$.

ii) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{f^{-1}(x)}{\sqrt{f^{-1}(x)+1}}\underset{\substack{\lim\limits_{x\to-\infty}f^{-1}(x)=-\infty\\ u\to-\infty}}{\overset{f^{-1}(x)=u}{=}}\lim_{u\to-\infty}\frac{u}{\sqrt{u+1}}=\lim_{u\to-\infty}\frac{u}{\sqrt{u^2\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{u^2}\right)}}=$$

$$=\lim_{u\to-\infty}\frac{u}{|u|\sqrt{\frac{1}{u}+\frac{1}{u^2}}}=\lim_{u\to-\infty}\frac{\cancel{u}}{-\cancel{u}\sqrt{\frac{1}{u}+\frac{1}{u^2}}}=-\infty.$$

δ) $$L=\lim_{x\to-\infty}\frac{\lambda f^{-1}(x)}{(\lambda-1)\left(f^{-1}(x)\right)^2}\underset{\substack{\lim\limits_{x\to-\infty}f^{-1}(x)=-\infty\\ u\to-\infty}}{\overset{f^{-1}(x)=u}{=}}\lim_{u\to-\infty}\frac{\lambda u}{(\lambda-1)u^2}.$$

Αν $\lambda=0$ τότε $L=\lim\limits_{u\to-\infty}\dfrac{0}{-u^2}=\lim\limits_{u\to-\infty}0=0$. Αν $\lambda=1$ δεν είναι καλά ορισμένο το όριο. Αν $\lambda\in\mathbb{R}-\{0,1\}$ τότε $L=\lim\limits_{u\to-\infty}\dfrac{\lambda\cancel{u}}{(\lambda-1)u^{\cancel{2}}}=\lim\limits_{u\to-\infty}\dfrac{\lambda}{(\lambda-1)u}=0$.

Επομένως το όριο είναι πραγματικός αριθμός για κάθε $\lambda\neq1$.

4. α) $$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x-1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}-x\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-1\right)\right]=-\infty \text{ γιατί}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}-1\right)=-1$. Είναι $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\sqrt{x-1}=0$ και $f(x)>0$ για κάθε $x>1$, οπότε $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{f(x)}\underset{\substack{x\to1\Rightarrow\\ u\to0^+}}{\overset{f(x)=u}{=}}\lim\limits_{u\to0^+}\dfrac{1}{u}=+\infty$.

β) $$\lim_{x\to5}\frac{f(x)-2}{x-5}=\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}=\lim_{x\to5}\frac{\left(\sqrt{x-1}-2\right)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}=$$

$$\lim_{x\to5}\frac{\left(\sqrt{x-1}\right)^2-4}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}=\lim_{x\to5}\frac{x-1-4}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}=\lim_{x\to5}\frac{\cancel{x-5}}{\cancel{(x-5)}\left(\sqrt{x-1}+2\right)}=\frac{1}{4}.$$

γ) Είναι $\lim\limits_{x\to1}(x+2)=3>0$, άρα $x+2>0$ όταν το x παίρνει τιμές κοντά στο 1 και $\lim\limits_{x\to1}\left(f(x)-1\right)=-1<0$, οπότε $f(x)-1<0$ όταν το x παίρνει τιμές κοντά στο 1. Είναι: $\lim\limits_{x\to1}\frac{|x+2|-3}{|f(x)-1|-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x+2-3}{-f(x)+1-1}=$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{-\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\sqrt{x-1}}{-\left(\sqrt{x-1}\right)^2}=\lim_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}\sqrt{x-1}}{-\cancel{(x-1)}}=0.$$

δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f\left(x^2+x\right)-\lambda x\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x-1}-\lambda x\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}-\lambda x\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-\lambda x\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-\lambda\right)\right]=\frac{1}{2}$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-\lambda\right)=1-\lambda$, οπότε:

- Αν $1-\lambda>0\Leftrightarrow\lambda<1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-\lambda\right)\right]=+\infty$ απορρίπτεται.
- Αν $1-\lambda<0\Leftrightarrow\lambda>1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-\lambda\right)\right]=-\infty$ απορρίπτεται.

Αν $\lambda=1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f\left(x^2+x\right)-\lambda x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x-1}-x\right)=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x-1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x-1}+x\right)}{\sqrt{x^2+x-1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x-1}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}+x}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}+x-1-\cancel{x^2}}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+x}==\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+1\right)}=\frac{1}{2}.$$ Άρα $\lambda=1$.

5. α) Επειδή οι προβολές των σημείων της C_f καλύπτουν όλο τον άξονα x΄x, η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Επειδή οι προβολές των σημείων της C_f στον άξονα y΄y καλύπτουν τον θετικό ημιάξονα Oy εκτός του O, η f έχει σύνολο τιμών το $(0,+\infty)$.

β) Από το σχήμα προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

• Στο σχήμα βλέπουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$ και για x < 0 είναι $f(x)<1$ ενώ για x > 0 είναι $f(x)>1$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{f(x)-1} \underset{\substack{x\to 0^- \Rightarrow \\ u\to 0^-}}{\overset{f(x)-1=u}{=}} \lim\limits_{u\to 0^-}\dfrac{1}{u}=-\infty$ και

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{f(x)-1} \underset{\substack{x\to 0^+ \Rightarrow \\ u\to 0^+}}{\overset{f(x)-1=u}{=}} \lim\limits_{u\to 0^+}\dfrac{1}{u}=+\infty$, άρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{f(x)-1}$.

• $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{f(x)}=\lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot\dfrac{1}{f(x)}=-\infty\cdot(+\infty)=-\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f(x)} \underset{\substack{x\to-\infty \Rightarrow \\ u\to 0^+}}{\overset{f(x)=u}{=}} \lim\limits_{u\to 0^+}\dfrac{1}{u}=+\infty$.

γ) i) Στο σχήμα βλέπουμε ότι κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη C_f το πολύ μία φορά, οπότε η f είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

Για κάθε $x\le 0$ είναι $f(x)=y>0 \Leftrightarrow e^x=y \Leftrightarrow x=\ln y$.

Είναι $x\le 0 \Leftrightarrow \ln y\le 0 \Leftrightarrow 0<y\le 1$, άρα $f^{-1}(y)=\ln y,\ 0<y\le 1$.

Για κάθε x > 0 είναι $f(x)=y>0 \Leftrightarrow \sqrt{x}+1=y \Leftrightarrow \sqrt{x}=y-1$.

Είναι $\sqrt{x}>0 \Leftrightarrow y-1>0 \Leftrightarrow y>1$. Τότε $x=(y-1)^2>0$, άρα

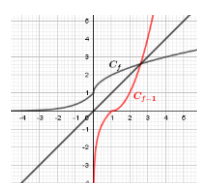
$f^{-1}(y)=(y-1)^2,\ y>1$.

Επομένως $f^{-1}(x)=\begin{cases}\ln x, & 0<x\le 1\\ (x-1)^2, & x>1\end{cases}$.

ii) Το σημείο τομής των $C_f, C_{f^{-1}}$, όπως φαίνεται στο σχήμα, βρίσκεται στο διάστημα $(1,+\infty)$ πάνω στην ευθεία $y=x$.

Για κάθε x > 1 είναι $f^{-1}(x)=x \Leftrightarrow (x-1)^2=x \Leftrightarrow x^2-3x+1=0 \Leftrightarrow$

$\left(x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}<1 \text{ απορρίπτεται}\right)$ ή $x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.



Επειδή η $C_{f^{-1}}$ τέμνει την y = x στο σημείο $\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2},\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$,

είναι $f^{-1}\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow f\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Από το σχήμα προκύπτει ότι μοναδικό κοινό σημείο των $C_f, C_{f^{-1}}$ είναι το $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$.

iii) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-3+|x|}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-2+x}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1+x-1}{x-1} =$

$= \lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}+1\right) = \lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}+1\right) =$

$= \lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2-1^2}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}+1\right) = \lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{x}+1\right)}+1\right) = \frac{1}{2}+1 = \frac{3}{2}$.

Επίπεδο δυσκολίας Γ Θέματος

6. α) Για κάθε $x \neq 1$ είναι $\alpha x^3+\beta x = (x-1)f(x)$ άρα

$\lim\limits_{x\to 1}\left(\alpha x^3+\beta x\right) = \lim\limits_{x\to 1}\left((x-1)f(x)\right) \Leftrightarrow \alpha+\beta = 0\cdot 2 \Leftrightarrow \alpha+\beta=0 \Leftrightarrow \beta=-\alpha$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1}\frac{\alpha x^3-\alpha x}{x-1}=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1}\frac{\alpha x\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}=2 \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to 1}\left(\alpha x(x+1)\right)=2 \Leftrightarrow 2\alpha=2 \Leftrightarrow \alpha=1$. Άρα $\beta=-1$.

$f(x)=\frac{x^3-x}{x-1}=\frac{x\left(x^2-1\right)}{x-1}=\frac{x\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}=x(x+1)=x^2+x,\ x\neq 1$.

β) Η $g\circ f$ ορίζεται όταν $\begin{cases} x\in D_f \\ f(x)\in D_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ x(x+1)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x\neq 1 \\ x\in(-\infty,-1]\cup[0,+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1]\cup[0,1)\cup(1,+\infty)$.

Είναι $(g\circ f)(x)=\sqrt{f(x)}=\sqrt{x^2+x},\ x\in(-\infty,-1]\cup[0,1)\cup(1,+\infty)$.

Η $h=(g\circ f)\circ g$ ορίζεται όταν:

$\begin{cases} x\in D_g \\ g(x)\in D_{f\circ g} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ \sqrt{x}\in(-\infty,-1]\cup[0,1)\cup(1,+\infty) \end{cases} \overset{\sqrt{x}\geq 0}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ \sqrt{x}\in[0,1)\cup(1,+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x\in[0,1)\cup(1,+\infty)$.

$h(x)=\left[(g\circ f)\circ g\right](x)=\sqrt{g^2(x)+g(x)}=\sqrt{x+\sqrt{x}}\ ,\ x\in[0,1)\cup(1,+\infty)$.

γ) i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(h(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+x^{\frac{1}{2}}}-x\right)=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x}+x^{-\frac{3}{2}}\right)}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(|x|\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}}-x\right)=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\left(\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}}-1\right)\right)=+\infty\left(\sqrt{0+0}-1\right)=-\infty$.

ii) Είναι $\lim\limits_{x\to0}\frac{h(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{h(x)}{x}$ αφού η h ορίζεται στο $[0,1)\cup(1,+\infty)$.

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{h(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x^2}}=\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x^2}}=$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x}}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{\frac{1}{x}+x^{-\frac{3}{2}}}=\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}}=+\infty$.

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu h(x)+h^3(x)}{h(x)\sigma\upsilon\nu h(x)+h^2(x)}\ \underset{\substack{\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=+\infty\\ u\to+\infty}}{\overset{h(x)=u}{=}}\ \lim\limits_{u\to+\infty}\frac{\eta\mu u+u^3}{u\sigma\upsilon\nu u+u^2}=$

$=\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{\frac{\eta\mu u}{u^2}+u}{\frac{\sigma\upsilon\nu u}{u}+1}=+\infty$ γιατί είναι $\left|\frac{\eta\mu u}{u^2}\right|=\frac{|\eta\mu u|}{u^2}\le\frac{1}{u^2}\Leftrightarrow-\frac{1}{u^2}\le\frac{\eta\mu u}{u^2}\le\frac{1}{u^2}$ και

$\lim\limits_{u\to+\infty}\left(-\frac{1}{u^2}\right)=\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{1}{u^2}=0$ άρα από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{\eta\mu u}{u^2}=0$.

Είναι $\left|\frac{\sigma\upsilon\nu u}{u}\right|=\frac{|\sigma\upsilon\nu u|}{u}\le\frac{1}{u}\Leftrightarrow-\frac{1}{u}\le\frac{\sigma\upsilon\nu u}{u}\le\frac{1}{u}$ και $\lim\limits_{u\to+\infty}\left(-\frac{1}{u}\right)=\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{1}{u}=0$ άρα

από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu u}{u}=0$.

iv) $\lim\limits_{x\to1}\frac{h(x)-\sqrt{2}}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{2}}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x+\sqrt{x}-2}{(x-1)\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{2}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1+\sqrt{x}-1}{(x-1)\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{2}\right)}=$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{2}\right)}+\frac{\sqrt{x}-1}{(x-1)\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{2}\right)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{2}}+\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{8}.$$

7. α) Αν $\nu\in\mathbb{N}^*$ άρτιος τότε: **i)** $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, **ii)** $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Αν $\nu\in\mathbb{N}^*$ περιττός τότε: **i)** $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, **ii)** $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

iii) $L_1=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{(\nu-1)f(x)}{(\nu-2)x^2+\nu x}=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{(\nu-1)x^\nu-4(\nu-1)x+3(\nu-1)}{(\nu-2)x^2+\nu x}$.

Αν $\nu=1$ τότε $L_1=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{0}{-x^2+x}=\lim_{x\to-\infty}0=0$.

Αν $\nu=2$ τότε $L_1=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-4x+3}{2x}=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{2x}=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x}{2}=-\infty$.

Αν $\nu\in\mathbb{N}^*-\{1,2\}$ τότε $L_1=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{(\nu-1)x^\nu}{(\nu-2)x^2}=\lim_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\nu-1}{\nu-2}x^{\nu-2}\right)$ οπότε αν ο ν είναι άρτιος τότε ο $\nu-2$ είναι άρτιος άρα $L_1=+\infty$, ενώ αν ν περιττός τότε $\nu-2$ είναι περιττός άρα $L_1=-\infty$ αφού $\dfrac{\nu-1}{\nu-2}>0$.

β) Για $\nu=2$ είναι $f(x)=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$, $x\in\mathbb{R}$.

Η συνάρτηση $k(x)=\sqrt{f(x)}$ έχει πεδίο ορισμού το $A_\kappa=(-\infty,1]\cup[3,+\infty)$ ($f(x)\geq 0\Leftrightarrow x\in(-\infty,1]\cup[3,+\infty)$).

Δεν ορίζεται κοντά στο 2 άρα το $\lim_{x\to 2}\sqrt{f(x)}$ δεν είναι καλά ορισμένο.

γ) $L_2=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^\nu-4x+3}{x^2}$.

Αν $\nu=1$ τότε $L_2=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x-4x+3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{-3x+3}{x^2}\lim_{x\to+\infty}\dfrac{-3x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{-3}{x}=0$ το οποίο είναι δεκτό.

Αν $\nu = 2$ τότε $L_2 = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2} = 1$ και είναι δεκτή περίπτωση.

Αν $\nu > 2$ τότε $L_2 = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^\nu-4x+3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^\nu}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}x^{\nu-2} = +\infty$ άτοπο.

Άρα είναι $\nu = 2$ ή $\nu = 1$.

δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{f(x)}+g(1)x-g(2)\right)=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+3}+g(1)x-g(2)\right)=1 \Leftrightarrow$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left(1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}+g(1)x-g(2)\right)=1 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(|x|\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}+g(1)x-g(2)\right)=1 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}+g(1)x-g(2)\right)=1 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\left(\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}+g(1)-\frac{g(2)}{x}\right)\right)=1 \quad (1)$$

Αν $g(1)\neq -1$ τότε η (1) γίνεται $\pm\infty = 1$ άτοπο. Άρα είναι $g(1) = -1$.

Τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{f(x)}+g(1)x-g(2)\right)=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+3}-x-g(2)\right)=1 \Leftrightarrow$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cancel{x^2}-4x+3-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2-4x+3}+x}-g(2)\right)=1 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3-4x}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}+x}-g(2)\right)=1 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3-4x}{|x|\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}+x}-g(2)\right)=1 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3-4x}{x\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}+x}-g(2)\right)=1 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cancel{x}\left(\frac{3}{x}-4\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}+1\right)}-g(2)\right)=1 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{3}{x}-4}{\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}+1}-g(2)\right)=1 \Leftrightarrow$$

$\frac{-4}{2}-g(2)=1 \Leftrightarrow g(2)=-3$. Έστω ότι η g είναι γνησίως αύξουσα τότε

$1<2 \overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow} g(1)<g(2) \Leftrightarrow -1<-3$ άτοπο άρα $g\searrow\mathbb{R}$.

8. α) Έστω $\frac{f(x)}{x}=g(x) \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} f(x)=xg(x)$, τότε $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(xg(x))=0$.

Για x = 0 είναι $f^3(0)+f(0)=0 \Leftrightarrow f(0)\left(f^2(0)+1\right)=0 \Leftrightarrow$

$f(0)=0$ ή $f^2(0)+1=0$ αδύνατο. Άρα $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$.

Για κάθε $x\neq 0$ είναι $\frac{f^3(x)}{x}+\frac{f(x)}{x}=1 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x}\left(f^2(x)+1\right)=1 \Leftrightarrow$

$\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{f^2(x)+1}$, οπότε $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{f^2(x)+1}=1$.

2ος τρόπος

$f^3(x)+f(x)=x$ (1)

Για x = 0 είναι $f^3(0)+f(0)=0 \Leftrightarrow f(0)\left(\underbrace{f^2(0)+1}_{\neq 0}\right)=0 \Leftrightarrow f(0)=0$.

Για κάθε $x\neq 0$ είναι $f(x)\cdot\left(f^2(x)+1\right)=x \Leftrightarrow f(x)=\frac{x}{f^2(x)+1}$ (2)

Είναι $f^2(x)+1\geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{f^2(x)+1}\leq 1 \Leftrightarrow \frac{|x|}{f^2(x)+1}\leq |x| \Leftrightarrow$

$|f(x)|\leq |x| \Leftrightarrow -|x|\leq f(x)\leq |x|$. Όμως $\lim_{x\to 0}|x|=0=\lim_{x\to 0}(-|x|)$ οπότε από το Κριτήριο Παρεμβολής $\lim_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$.

Από τη σχέση (2) έχουμε $\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{f^2(x)+1}$ οπότε $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{f^2(x)+1}=1$.

β) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)\eta\mu x-f^2(x)(x+3)}{x^3+3x^2-\eta\mu^2 x} \underset{1\text{ος τρόπος}}{\overset{\alpha)}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{xg(x)\eta\mu x-x^2g^2(x)(x+3)}{x^3+3x^2-\eta\mu^2 x}=$

$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)\frac{\eta\mu x}{x}-g^2(x)(x+3)}{x+3-\frac{\eta\mu^2 x}{x^2}}=-1$ γιατί $\lim_{x\to 0} g(x)=1$, $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1$ και

$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu^2 x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2=1$.

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(f(x))}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(f(x))f(x)}{xf(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{f(f(x))}{f(x)}\cdot\dfrac{f(x)}{x}\right]=1\cdot 1=1$ γιατί

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(f(x))}{f(x)}\underset{\substack{x\to 0\Rightarrow\\ u\to 0}}{\overset{f(x)=u}{=}}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(u)}{u}=1$.

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x-1)}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{f(x-1)}{x-1}\dfrac{1}{x^2+x+1}\right)=\dfrac{1}{3}$ γιατί

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x-1)}{x-1}\underset{u\to 0}{\overset{u=x-1}{=}}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(u)}{u}=1$.

δ) Έστω ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\kappa\in\mathbb{R}$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f^3(x)+f(x)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\Leftrightarrow$ $\kappa^3+\kappa=+\infty$ που είναι αδύνατο, άρα το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ δεν είναι πραγματικός αριθμός. Είναι $f^3(x)+f(x)=x\Leftrightarrow f(x)\left(f^2(x)+1\right)=x\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{x}{f^2(x)+1}$.

Επειδή για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f^2(x)+1>0$, για το πρόσημο της f ισχύει ότι:

Για κάθε x > 0 είναι $f(x)>0$ και για κάθε x < 0 είναι $f(x)<0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{f(x)}\underset{\substack{x\to 0^+\Rightarrow\\ u\to 0^+}}{\overset{f(x)=u}{=}}\lim\limits_{u\to 0^+}\dfrac{1}{u}=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{f(x)}\underset{\substack{x\to 0^-\Rightarrow\\ u\to 0^-}}{\overset{f(x)=u}{=}}\lim\limits_{u\to 0^-}\dfrac{1}{u}=-\infty$, οπότε

δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{f(x)}$.

Επίπεδο δυσκολίας Δ Θέματος

9. α) Για $x=0$ είναι $f(0)+2f(0)>0\Leftrightarrow 3f(0)>0\Leftrightarrow f(0)>0$.

$L_1=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\nu f(0)x^\nu+x^3}{\nu x^2+x+1}$.

Αν $\nu=1$ ή $\nu=2$ τότε $L_1=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{\nu x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\nu}=-\infty$.

Αν $\nu=3$ τότε $L_1=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3f(0)x^3+x^3}{3x^2+x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(3f(0)+1)x^3}{3x^2+x+1}=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(3f(0)+1)x^3}{3x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(3f(0)+1)x}{3}=-\infty$.

Αν $\nu>3$ τότε $L_1=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\nu f(0)x^\nu}{\nu x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(0)x^{\nu-2}\right]$ και

- ο ν είναι άρτιος τότε ο $\nu-2$ είναι άρτιος άρα $L_1 = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(0)x^{\nu-2}\right]=-\infty$,
- ο ν περιττός τότε ο $\nu-2$ περιττός άρα $L_1 = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(0)x^{\nu-2}\right]=+\infty$.

β) i) Υπάρχει το $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+2f(-x)}{x}$ οπότε

$$L=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)+2f(-x)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)+2f(-x)}{x}.$$

Για κάθε $x>0$ είναι $\dfrac{f(x)+2f(-x)}{x}>1$ άρα $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)+2f(-x)}{x}\ge 1 \Leftrightarrow L\ge 1$ (1)

Για κάθε $x<0$ είναι $\dfrac{f(x)+2f(-x)}{x}<1$ άρα $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)+2f(-x)}{x}\le 1 \Leftrightarrow L\le 1$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) είναι $L=1$.

ii) Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+2f(-x)}{x}=1$ (1). Θέτουμε $u=-x$, όταν $x\to 0$ τότε

$u\to 0$ άρα (1) $\Leftrightarrow \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(-u)+2f(u)}{-u}=1\Leftrightarrow$

$$-\lim_{u\to 0}\frac{2f(-u)+4f(u)}{u}=2\Leftrightarrow -\lim_{x\to 0}\frac{2f(-x)+4f(x)}{x}=2 \quad (2)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1),(2) και επειδή υπάρχουν τα όρια και είναι πραγματικοί αριθμοί έχουμε: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+2f(-x)}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2f(-x)+4f(x)}{x}=3\Leftrightarrow$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)+2f(-x)}{x}-\frac{2f(-x)+4f(x)}{x}\right)=3\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+\cancel{2f(-x)}-\cancel{2f(-x)}-4f(x)}{x}=3\Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{-3f(x)}{x}=3\Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=-1.$$

2ος τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\dfrac{f(x)+2f(-x)}{x}=\dfrac{f(x)}{x}+2\dfrac{f(-x)}{x}$ (1)

με $\lim\limits_{x\to 0}h(x)=1$. Αν θέσουμε όπου x το $-x$ έχουμε

$$h(-x)=\frac{f(-x)+2f(x)}{-x}=-2\frac{f(x)}{x}-\frac{f(-x)}{x}\Leftrightarrow \frac{f(-x)}{x}=-h(-x)-2\frac{f(x)}{x} \quad (2)$$

με $\lim\limits_{x\to 0}h(-x)\underset{\substack{x\to 0,\ u\to 0\\ u\to 0}}{\overset{u=-x}{=}}\lim h(u)=1$. Από τη σχέση (1) μέσω της (2) έχουμε

$$h(x)=\frac{f(x)}{x}+2\left(-h(-x)-2\frac{f(x)}{x}\right)\Leftrightarrow h(x)=\frac{f(x)}{x}-2h(-x)-4\frac{f(x)}{x}\Leftrightarrow$$

$-3\dfrac{f(x)}{x}=h(x)+2h(-x)\Leftrightarrow\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{-h(x)-2h(-x)}{3}$ οπότε

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-h(x)-2h(-x)}{3}=\dfrac{-1-2}{3}=-1$.

γ) Έστω $g(x)=\dfrac{\left|1-x-|f(x)|\right|}{x-1}$, $x\neq1$ με $\lim\limits_{x\to1}g(x)=\ell\in\mathbb{R}$.

Για κάθε $x\neq1:(x-1)g(x)=\left|1-x-|f(x)|\right|$ άρα

$\lim\limits_{x\to1}\left(\left|1-x-|f(x)|\right|\right)=\lim\limits_{x\to1}\left[(x-1)g(x)\right]=0$.

Είναι $-\left|1-x-|f(x)|\right|\leq1-x-|f(x)|\leq\left|1-x-|f(x)|\right|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to1}\left(1-x-|f(x)|\right)=0$.

Έστω $h(x)=1-x-|f(x)|$, $x\neq1$ με $\lim\limits_{x\to1}h(x)=0$.

Για κάθε $x\neq1:|f(x)|=1-x-h(x)$ άρα $\lim\limits_{x\to1}|f(x)|=\lim\limits_{x\to1}\left(1-x-h(x)\right)=0$.

Είναι $-|f(x)|\leq f(x)\leq|f(x)|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα από κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to1}f(x)=0$.

10.α) Όταν $x\to+\infty$ είναι $x-2>0$ άρα για x κοντά στο $+\infty$ είναι

$(x-2)f(x)\leq5-x^2\Leftrightarrow f(x)\leq\dfrac{5-x^2}{x-2}$.

1^{ος} τρόπος: Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5-x^2}{x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}=-\infty$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ άρα

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)}=0$.

2^{ος} τρόπος: Για x κοντά στο $+\infty$ είναι $f(x)\leq\dfrac{5-x^2}{x-2}<0$ γιατί $5-x^2<0$ για κάθε $x\in\left(-\infty,\sqrt{5}\right)\cup\left(\sqrt{5},+\infty\right)$. Επομένως $0>\dfrac{1}{f(x)}\geq\dfrac{x-2}{5-x^2}$ για x κοντά στο $+\infty$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{5-x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{-x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=0$ άρα από κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)}=0$.

β) Αφού η f περιττή τότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(-x)=-f(x)$.

Αν δουλέψουμε με τον 1^{ο} τρόπο του Δ1 τότε γνωρίζουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

Αν δουλέψουμε με τον 2ο τρόπο του Δ1 τότε ξέρουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)}=0$ και

$f(x)\le\dfrac{5-x^2}{x-2}<0$ για x κοντά στο $+\infty$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\overset{u=-x}{\underset{u\to-\infty}{=}}\lim\limits_{u\to-\infty}f(-u)=\lim\limits_{u\to-\infty}\left[-f(u)\right]=-\lim\limits_{u\to-\infty}f(u)$.

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty\Leftrightarrow-\lim\limits_{u\to-\infty}f(u)=-\infty\Leftrightarrow\lim\limits_{u\to-\infty}f(u)=+\infty$.

γ) Έστω ότι η f έχει ελάχιστο στο $x_0\in\mathbb{R}$, τότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$f(x)\ge f(x_0)\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\ge\lim\limits_{x\to+\infty}f(x_0)\Leftrightarrow-\infty\ge f(x_0)$ άτοπο.

Αν η f έχει μέγιστο στο x_0 τότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$f(x)\le f(x_0)\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\le\lim\limits_{x\to-\infty}f(x_0)\Leftrightarrow+\infty\le f(x_0)$ άτοπο.

δ) Έχουμε $\left|\eta\mu^2\dfrac{1}{f(x)}\cdot\sigma\upsilon\nu f(x)\right|=\left|\eta\mu^2\dfrac{1}{f(x)}\right|\left|\sigma\upsilon\nu f(x)\right|\le\left|\eta\mu^2\dfrac{1}{f(x)}\right|\Leftrightarrow$

$-\left|\eta\mu^2\dfrac{1}{f(x)}\right|\le\eta\mu^2\dfrac{1}{f(x)}\cdot\sigma\upsilon\nu f(x)\le\left|\eta\mu^2\dfrac{1}{f(x)}\right|$.

$\lim\limits_{x\to1}\left|\eta\mu^2\dfrac{1}{f(x)}\right|\overset{\frac{1}{f(x)}=u}{\underset{u\to0}{=}}\lim\limits_{u\to0}\left|\eta\mu^2u\right|=0$ και $\lim\limits_{x\to1}\left(-\left|\eta\mu^2f(x)\right|\right)\overset{\frac{1}{f(x)}=u}{\underset{u\to0}{=}}\lim\limits_{u\to0}\left(-\left|\eta\mu^2u\right|\right)=0$

άρα από κριτήριο παρεμβολής ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\eta\mu^2\dfrac{1}{f(x)}\cdot\sigma\upsilon\nu f(x)\right)=0$.

ε) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(3x)}{f(x)}=27$.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(27x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(27x)}{f(9x)}\cdot\dfrac{f(9x)}{f(3x)}\cdot\dfrac{f(3x)}{f(x)}\right)=27\cdot27\cdot27=27^3$ γιατί

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(27x)}{f(9x)}\overset{9x=u}{\underset{u\to+\infty}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{f(3u)}{f(u)}=27$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(9x)}{f(3x)}\overset{3x=u}{\underset{u\to+\infty}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{f(3u)}{f(u)}=27$.

Διαγωνίσματα στα όρια

1ο Διαγώνισμα

Θέμα Α

1. α) Λ **β)** Λ **γ)** Σ **δ)** Λ **ε)** Σ **στ)** Λ **ζ)** Λ **η)** Λ **θ)** Λ **ι)** Σ

2. α) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ **β)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-4$

δ) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=4$ **ε)** $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=2$

Θέμα Β

Β1. α) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\eta\mu x-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\cdot\left(\frac{\eta\mu x}{x}-1\right)\right]=+\infty\cdot(-1)=-\infty$.

Είναι $\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right|\le\left|\frac{1}{x}\right|\overset{x\to+\infty}{\underset{x>0}{\Leftrightarrow}}\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right|\le\frac{1}{x}\Leftrightarrow-\frac{1}{x}\le\frac{\eta\mu x}{x}\le\frac{1}{x}$. Επίσης

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0=\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)$ οπότε από το Κριτήριο Παρεμβολής $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0$.

β) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu x-x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu x}{x}-1\right)=1-1=0$.

γ) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{g^2(x)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\eta\mu x-x}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1}\left((\eta\mu x-x)\cdot\frac{1}{(x-1)^2}\right)=(\eta\mu 1-1)\cdot(+\infty)=-\infty$

αφού $\eta\mu 1<1$.

δ) Είναι $\lim\limits_{x\to 2} g(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x-1)=1>0, \lim\limits_{x\to 2} g(x+1)=\lim\limits_{x\to 2} x=2>0$ οπότε

$g(x)>0, g(x+1)>0$ κοντά στο 2.

Άρα $\lim\limits_{x\to 2}\frac{|g(x)|+|g(x+1)|-3}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{g(x)+g(x+1)-3}{x^2-4}=$

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-1+x-3}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x-4}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{2\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+2)}=\frac{1}{2}$.

Β2. Είναι $\left|\left(g^2(x+1)-1\right)h(x)-x\right|\le 1\Leftrightarrow\left|\left(x^2-1\right)h(x)-x\right|\le 1\Leftrightarrow$

$-1\le\left(x^2-1\right)h(x)-x\le 1\Leftrightarrow x-1\le\left(x^2-1\right)h(x)\le x+1\overset{x\to+\infty}{\underset{x^2-1>0}{\Leftrightarrow}}$

$\frac{x-1}{x^2-1}\le h(x)\le\frac{x+1}{x^2-1}\Leftrightarrow\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(x+1)}\le h(x)\le\frac{\cancel{x+1}}{(x-1)\cancel{(x+1)}}\Leftrightarrow$

$\frac{1}{x+1} \le h(x) \le \frac{1}{x-1}$. Όμως $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1} = 0 = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1}$ οπότε από το Κριτήριο Παρεμβολής $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$.

Θέμα Γ

Γ1. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x+4}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2x+4}+x\right)}{\sqrt{x^2+2x+4}+x} =$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}+2x+4-\cancel{x^2}}{x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(2+\cancel{\frac{4}{x}}^{0}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\cancel{\frac{2}{x}}^{0}+\cancel{\frac{4}{x^2}}^{0}}+1\right)} = 1 .$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2+4x+3}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2+4x+3}+2x\right)}{\sqrt{4x^2+4x+3}+2x} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{4x^2}+4x+3-\cancel{4x^2}}{x\sqrt{4+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}+2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(4+\cancel{\frac{3}{x}}^{0}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{4+\cancel{\frac{4}{x}}^{0}+\cancel{\frac{3}{x^2}}^{0}}+2\right)} = 1 .$$

Γ2. $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+4}-\sqrt{4x^2+4x+3}+x\right) =$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+4}-x-\sqrt{4x^2+4x+3}+2x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-g(x)\right) = 1-1 = 0 .$$

Γ3. Είναι $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}-x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}-x\right) =$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[x\left(-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}-1\right)\right] = +\infty .$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2f^2(x)\,\eta\mu\frac{1}{f(x)}}{g(x)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2f(x)f(x)\,\eta\mu\frac{1}{f(x)}}{g(x)} =$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[2\frac{\sqrt{x^2+2x+4}-x}{\sqrt{4x^2+4x+3}-2x}\left(f(x)\,\eta\mu\frac{1}{f(x)}\right)\right] =$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[2\frac{\cancel{-x}\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}+1\right)}{\cancel{-x}\left(\sqrt{4+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}+2\right)}\left(f(x)\,\eta\mu\frac{1}{f(x)}\right)\right]=2\frac{1+1}{2+2}\cdot 1=1 \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)\,\eta\mu\frac{1}{f(x)}\right]\overset{\frac{1}{f(x)}=u}{\underset{\substack{x\to-\infty\Rightarrow\\ u\to 0}}{=}}\lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=1.$$

Γ4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{\sqrt{x^2+2x+4}}-e^x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^x\left(\dfrac{e^{\sqrt{x^2+2x+4}}}{e^x}-1\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^x\left(e^{\sqrt{x^2+2x+4}-x}-1\right)\right]=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^x\left(e^{f(x)}-1\right)\right]=+\infty(e-1)=+\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{f(x)}\overset{u=f(x)}{\underset{\substack{x\to+\infty,\ u\to 1\\ u\to 1}}{=}}\lim e^u=e$.

Γ 5. Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2)=-1<0$ είναι $f(x)-2<0$ σε περιοχή του $+\infty$,

οπότε: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|f(x)-2|-x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-f(x)-x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-\sqrt{x^2+2x+4}+\cancel{x}-\cancel{x}}{x}=$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(\cancel{\frac{2}{x}}^{0}-\sqrt{1+\cancel{\frac{2}{x}}^{0}+\cancel{\frac{4}{x^2}}^{0}}\right)}{\cancel{x}}=-1.$$

Θέμα Δ

Δ1. $\lim\limits_{x\to 0}\left[f^2(x)+x^2-2xf(x)\right]=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 0}(f(x)-x)^2=0$. Είναι

$$-|f(x)-x|\le f(x)-x\le|f(x)-x|\Leftrightarrow-\sqrt{(f(x)-x)^2}\le f(x)-x\le\sqrt{(f(x)-x)^2}\Leftrightarrow$$

$$x-\sqrt{(f(x)-x)^2}\le f(x)\le x+\sqrt{(f(x)-x)^2}.$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left[x-\sqrt{(f(x)-x)^2}\right]=0,\ \lim\limits_{x\to 0}\left[x+\sqrt{(f(x)-x)^2}\right]=0$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.

Δ2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{f(x)+1}-1}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{f(x)+1}-1\right)\left(\sqrt{f(x)+1}+1\right)}{f(x)\left(\sqrt{f(x)+1}+1\right)}=$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+1-1}{f(x)\left(\sqrt{f(x)+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{f(x)}}{\cancel{f(x)}\left(\sqrt{f(x)+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{f(x)+1}+1}=\frac{1}{2}.$$

Δ3. Για κάθε $x \neq 0$ είναι

$$f^2(x) + 2x^2 \le 2xf(x) + \eta\mu^2 x + x^4 \Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{x^2} + 2 \le \frac{2\cancel{x}f(x)}{x^{\cancel{2}}} + \frac{\eta\mu^2 x}{x^2} + x^2 \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{f^2(x)}{x^2} + 2\right] \le \lim_{x\to 0}\left(2\frac{f(x)}{x} + \frac{\eta\mu^2 x}{x^2} + x^2\right) \Leftrightarrow \lambda^2 + 2 \le 2\lambda + 1 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 \le 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 \le 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 .$$

Δ4. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu 2x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu 2x)}{\eta\mu 2x}\cdot\frac{\eta\mu 2x}{x} = 1\cdot 2 = 2$ γιατί

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu 2x)}{\eta\mu 2x} \underset{u\to 0}{\overset{\eta\mu 2x = u}{=}} \lim_{u\to 0}\frac{f(u)}{u} = \lambda = 1 \text{ και}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 2x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\eta\mu 2x}{2x} \underset{t\to 0}{\overset{2x=t}{=}} \lim_{t\to 0}\frac{2\eta\mu t}{t} = 2 .$$

Δ5. i. $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{f(x)} = \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{-f(-x)} \underset{u\to 0^+}{\overset{-x=u}{=}} \lim_{u\to 0^+}\left(-\frac{1}{f(u)}\right) = -\infty$ γιατί $\displaystyle\lim_{u\to 0^+} f(u) = 0$

και $f(u) > 0$ για κάθε $u > 0$.

ii. Θέτουμε $\displaystyle\frac{1}{f(x)} = u$ με $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} u = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{f(x)} = +\infty$, οπότε $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{3\cdot 8^{\frac{1}{f(x)}} - 2^{1+\frac{1}{f(x)}}}{4^{\frac{1}{f(x)}} - 3^{\frac{1}{f(x)}}} =$

$$\lim_{u\to+\infty}\frac{3\cdot 8^u - 2\cdot 2^u}{4^u - 3^u} = \lim_{u\to+\infty}\frac{8^u\left(3 - 2\cdot\frac{2^u}{8^u}\right)}{4^u\left(1 - \frac{3^u}{4^u}\right)} = \lim_{u\to+\infty}\left[2^u\,\frac{3 - 2\left(\frac{1}{4}\right)^u}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^u}\right] = +\infty .$$

2ο Διαγώνισμα

Θέμα Α

Α1. Θεωρία **Α2. α)** Σ, **β)** Λ, **γ)** Λ, **δ)** Λ, **ε)** Σ

Α3. α) h, **β)** g, **γ)** f

Θέμα Β

Β1. α) $\begin{cases} x \geq 0 \\ x\sqrt{x} - 2x - 4\sqrt{x} + 8 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x\left(\sqrt{x} - 2\right) - 4\left(\sqrt{x} - 2\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x \geq 0 \\ (x-4)\left(\sqrt{x} - 2\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \left(\sqrt{x}^2 - 4\right)\left(\sqrt{x} - 2\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \left(\underbrace{\sqrt{x} + 2}_{\neq 0}\right)\left(\sqrt{x} - 2\right)^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 4 \end{cases}$. Άρα $A_f = [0,4) \cup (4, +\infty)$.

β) Πρέπει $x \neq 0$ οπότε $A_g = \mathbb{R}^*$.

Β2. α) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{9}{x\sqrt{x} - 2x - 4\sqrt{x} + 8}\right) = -\dfrac{9}{8}$.

β) $\lim\limits_{x\to 4}\left(-\dfrac{9}{x+2}\dfrac{1}{\left(\sqrt{x}-2\right)^2}\right) = -\dfrac{9}{6}\cdot(+\infty) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 4} f(x) = \lim\limits_{x\to 4}\left(-\dfrac{9}{\left(\sqrt{x}-2\right)^2 (x+2)}\right) = \lim\limits_{x\to 4}\left(-\dfrac{9}{x+2}\dfrac{1}{\left(\sqrt{x}-2\right)^2}\right) = -\infty$.

γ) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(-\dfrac{9}{\left(\sqrt{x}-2\right)^2 (x+2)}\right) =$

$\lim\limits_{x\to 4}\left(-\cancelto{0}{\dfrac{1}{x^2}}\ \dfrac{9}{\left(1 - \cancelto{0}{\dfrac{2}{\sqrt{x}}}\right)^2\left(1 + \cancelto{0}{\dfrac{2}{x}}\right)}\right) = 0 \cdot \dfrac{9}{1} = 0$.

Β3.α) Έστω $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \beta \in \mathbb{R}$.

$g(x) = \dfrac{x^2 + 2x + \mu}{x} \Leftrightarrow x^2 + 2x + \mu = x \cdot g(x) \Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+2x+\mu\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot g(x)\right)\Rightarrow \mu=0$.

Για $\mu=0$: $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cancel{x}(x+2)}{\cancel{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(x+2)=2\in\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}(x+2)}{\cancel{x}}=\lim_{x\to 0}(x+2)=2 .$$

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-g(x)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\dfrac{9}{\left(\sqrt{x}-2\right)^2(x+2)}-x-2\right]=0-\infty=-\infty$ αφού

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$.

Θέμα Γ

Γ1. Έχουμε:

- $\left|\dfrac{3\eta\mu x}{x}\right|\le\left|\dfrac{3}{x}\right|\underset{x>0}{\overset{x\to+\infty}{\Leftrightarrow}}\left|\dfrac{3\eta\mu x}{x}\right|\le\dfrac{3}{x}\Leftrightarrow-\dfrac{3}{x}\le\dfrac{3\eta\mu x}{x}\le\dfrac{3}{x}$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{3}{x}\right)=0=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x}$ οπότε από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3\eta\mu x}{x}=0$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{1+\cancel{\dfrac{1}{x^2}}^{\,0}}\right)=+\infty\cdot 1=+\infty$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}\underset{\substack{x\to+\infty,\\ u\to 0^+}}{\overset{u=\frac{1}{x}}{=}}\lim\limits_{u\to 0^+}\dfrac{1}{u^2}\eta\mu u=\lim\limits_{u\to 0^+}\dfrac{1}{u}\cdot\dfrac{\eta\mu u}{u}=(+\infty)\cdot 1=+\infty$.

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3\eta\mu x}{x}+\sqrt{x^2+1}+x+x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)=3\cdot 0+\infty+(+\infty)\cdot 1=+\infty$.

Επίσης: $\left|\dfrac{3\eta\mu x}{x}\right|\le\left|\dfrac{3}{x}\right|\underset{x<0}{\overset{x\to-\infty}{\Leftrightarrow}}\left|\dfrac{3\eta\mu x}{x}\right|\le-\dfrac{3}{x}\Leftrightarrow\dfrac{3}{x}\le\dfrac{3\eta\mu x}{x}\le-\dfrac{3}{x}$,

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{3}{x}\right)=0=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x}$ οπότε από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3\eta\mu x}{x}=0$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1\right)}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-\cancel{\frac{1}{x}}^{\,0}\right)\frac{1}{\sqrt{1+\cancel{\dfrac{1}{x^2}}^{\,0}}+1}=0 .$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^2ημ\frac{1}{x} \underset{\substack{x\to-\infty,\, u\to0^-\\ u\to0^-}}{\overset{u=\frac{1}{x}}{=}} \lim_{u\to0^-}\frac{1}{u^2}ημu = \lim_{u\to0^-}\frac{1}{u}\cdot\frac{ημu}{u} = (-\infty)\cdot 1 = -\infty .$$

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3ημx}{x} + \sqrt{x^2+1} + x + x^2ημ\frac{1}{x}\right) = 3\cdot0 + 0 + (-\infty) = -\infty$.

Γ2. Για το $\lim\limits_{x\to0} h(x)$ έχουμε: $\lim\limits_{x\to0}\frac{3ημx}{x} = \lim\limits_{x\to0} 3\frac{ημx}{x} = 3\cdot1 = 3$, $\lim\limits_{x\to0} x^2ημ\frac{1}{x} = 0$

($\left|x^2ημ\frac{1}{x}\right| \le \left|x^2\right| = x^2 \Leftrightarrow -x^2 \le x^2ημ\frac{1}{x} \le x^2$, $\lim\limits_{x\to0}\left(-x^2\right) = 0 = \lim\limits_{x\to0} x^2 = 0$ οπότε

από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to0} x^2ημ\frac{1}{x} = 0$.)

Άρα $\lim\limits_{x\to0} h(x) = \lim\limits_{x\to0}\left(\frac{3ημx}{x} + \sqrt{x^2+1} + x + x^2ημ\frac{1}{x}\right) = 3 + 1 + 0 = 4$.

Γ3. Έστω $\lim\limits_{x\to0}\frac{g(x)}{x} = α > 0$ Για $x \ne 0$ έχουμε:

$$g^3(x) - 3x^2g(x) = -2x^3 \overset{:x^3}{\Leftrightarrow} \left(\frac{g(x)}{x}\right)^3 - 3\frac{g(x)}{x} = -2 \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to0}\left[\left(\frac{g(x)}{x}\right)^3 - 3\frac{g(x)}{x}\right] = -2 \Leftrightarrow α^3 - 3α = -2 \Leftrightarrow α^3 - 3α + 2 = 0 .$$

Με τη βοήθεια του σχήματος Horner βρίσκουμε ότι: $α = -2$ απορρίπτεται, $α = 1$ δεκτή.

Γ4. Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$ και $f(x) < h(x)$ έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Θέμα Δ

Δ1. Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$$α(x) = \frac{f(x)}{2x^2 - 3x - 9} = \frac{f(x)}{(x-3)(2x+3)}, x \ne -\frac{3}{2}, 3 \Leftrightarrow$$

$f(x) = α(x)\cdot(x-3)(2x+3)$ με $\lim\limits_{x\to3} α(x) = 2$ και

$g(x)\cdot\left(x^3 - 27\right) = β(x) \overset{x\ne3}{\Leftrightarrow} g(x) = \frac{β(x)}{x^3 - 27}$, $\lim\limits_{x\to3} β(x) = \frac{1}{2}$. Έχουμε

$$\lim_{x\to3} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to3}\left[α(x)\cdot \cancel{(x-3)}(2x+3)\frac{β(x)}{\cancel{(x-3)}\left(x^2+3x+9\right)}\right] = \frac{1}{3} .$$

Δ2. Έστω $\lim\limits_{x\to 3} h(x) = m \in \mathbb{R}$. Ισχύει: $\left(x^2-9\right)h(x) < f(x)$.

Για $x > 3$ έχουμε: $h(x) < \dfrac{f(x)}{x^2-9} \Leftrightarrow h(x) < \dfrac{f(x)}{x-3}\cdot\dfrac{1}{x+3} \Rightarrow$

$$\lim_{x\to 3^+} h(x) \le \lim_{x\to 3^+}\left[\frac{f(x)}{x-3}\cdot\frac{1}{x+3}\right] \Leftrightarrow m \le \lim_{x\to 3^+}\left[a(x)(2x+3)\cdot\frac{1}{x+3}\right] \Leftrightarrow$$

$$m \le 2\cdot 9\cdot\frac{1}{6} \Leftrightarrow m \le 3 \quad (1)$$

Για $-3 < x < 3$ έχουμε:

$$h(x) > \frac{f(x)}{x^2-9} \Leftrightarrow h(x) > \frac{f(x)}{x-3}\cdot\frac{1}{x+3} \Rightarrow \lim_{x\to 3^+} h(x) \ge \lim_{x\to 3^+}\left[\frac{f(x)}{x-3}\cdot\frac{1}{x+3}\right] \Leftrightarrow$$

$$m \ge \lim_{x\to 3^+}\left[a(x)(2x+3)\cdot\frac{1}{x+3}\right] \Leftrightarrow m \ge 2\cdot 9\cdot\frac{1}{6} \Leftrightarrow m \ge 3 \quad (2)$$

Από (1),(2) έχουμε $\lim\limits_{x\to 3} h(x) = 3$.

Δ3. Ισχύει $h(x) + h(x-3) = 3x + 27 \Leftrightarrow h(x) = 3x + 27 - h(x-3)$

$$3 = \lim_{x\to 3} h(x) = \lim_{x\to 3}\left[3x + 27 - h(x-3)\right] \underset{\substack{x\to 3,\\ u\to 0}}{\overset{u=x-3}{=}} \lim_{u\to 0}\left[3u + 36 - h(u)\right].$$

Θέτουμε $3x + 36 - h(x) = \gamma(x) \Leftrightarrow h(x) = 3x + 36 - \gamma(x)$ με $\lim\limits_{x\to 0}\gamma(x) = 3$.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left[3x + 36 - \gamma(x)\right] = 36 - 3 = 33$.

Δ4. $$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\frac{e^{h(x)} - 2^{h(x)}}{3e^{h(x)} + 2^{h(x)}} \underset{\substack{x\to +\infty,\ \theta\to +\infty\\ \theta\to +\infty}}{\overset{\theta=h(x)}{=}} \lim_{\theta\to +\infty}\frac{e^{\theta} - 2^{\theta}}{3e^{\theta} + 2^{\theta}} =$$

$$\lim_{\theta\to +\infty}\frac{\cancel{e^{\theta}}}{\cancel{e^{\theta}}}\cdot\frac{1 - \cancel{\left(\frac{2}{e}\right)^{\theta}}^{\,0}}{3 + \cancel{\left(\frac{2}{e}\right)^{\theta}}^{\,0}} = \frac{1}{3}.$$

12 Συνέχεια συνάρτησης

Συνέχεια σε σημείο

14.α) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} e^x = e^0 = 1$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1$ και $f(0)=e^0=1$.

Οπότε $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=1$, άρα η f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

β) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3-4}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2}=\dfrac{1}{2}$,

όμως $f(1)=2\neq\dfrac{1}{2}=\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, οπότε η f δεν είναι συνεχής στο $x_0=1$.

γ) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}=2$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(3x-1)=2$ και $f(1)=2$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)=2$, άρα η f είναι συνεχής στο $x_0=1$.

δ) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{1+\eta\mu x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1+\eta\mu x-1}{x\sqrt{1+\eta\mu x}+1}=$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\dfrac{1}{\sqrt{1+\eta\mu x}+1}\right)=\dfrac{1}{2}$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\eta\mu x}{2x}=\dfrac{1}{2}$, $f(0)=\dfrac{1}{2}$, άρα f συνεχής στο $x_0=0$.

15. Αν $x<3$, $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\left(\dfrac{1}{3}x^2-\alpha^2\right)=3-\alpha^2$.

Αν $x>3$, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}(\alpha x+5)=3\alpha+5$, $f(3)=3-\alpha^2$. Για να είναι η f συνεχής στο $x_0=3$, πρέπει: $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=f(3)\Leftrightarrow$

$3-\alpha^2=3\alpha+5\Leftrightarrow \alpha^2+3\alpha+2=0 \Leftrightarrow \alpha=-1$ ή $\alpha=-2$.

16.α) Ο μαθητής κάνει λάθος.

β) Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x)=c$, $x\in\mathbb{R}$ με $c\in\mathbb{R}$ είναι συνεχής και τότε είναι: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{c-c}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{0}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}0=0$ και δεν έχουμε απροσδιοριστία $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

17.1^{ος} τρόπος: Οι συναρτήσεις $f-g$, g είναι συνεχείς στο x_0 οπότε το άθροισμά τους $f-g+g=f$ είναι συνεχής στο x_0.

2^{ος} τρόπος: Η g είναι συνεχής στο x_0 οπότε $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=g(x_0)$. Η $f-g$ είναι συνεχής στο x_0 άρα $\lim\limits_{x\to x_0}(f-g)(x_0)=(f-g)(x_0)=f(x_0)-g(x_0)$. Έχουμε:

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-g(x)+g(x)\right)=f(x_0)-\cancel{g(x_0)}+\cancel{g(x_0)}=f(x_0)$, άρα η f είναι συνεχής στο x_0.

Αυξημένης δυσκολίας

18. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3ημ\frac{1}{x}}{ημx}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{ημx}\cdot x^2ημ\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\frac{ημx}{x}}\cdot x^2ημ\dfrac{1}{x}\right)$

$\left|x^2ημ\dfrac{1}{x}\right|=\left|x^2\right|\cdot\left|ημ\dfrac{1}{x}\right|\le\left|x^2\right|=x^2\Leftrightarrow -x^2\le x^2ημ\dfrac{1}{x}\le x^2$. Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left(-x^2\right)=0$,

$\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2ημ\dfrac{1}{x}\right)=0$. Άρα $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\dfrac{1}{1}\cdot 0=0$.

Για να είναι η f συνεχής στο $x_0=0$, πρέπει: $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)\Leftrightarrow λ=0$.

19. Η f είναι συνεχής στο x = 1, οπότε

$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)=β$.

Για x < 1 είναι $f(x)=\dfrac{x^3+αx+2-β}{x-1}\Leftrightarrow f(x)(x-1)=x^3+αx+2-β\Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\left[f(x)(x-1)\right]=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^3+αx+2-β\right)\Leftrightarrow 1+α+2-β=0\Leftrightarrow β=α+3$.

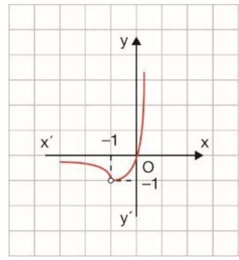
Για x > 1 είναι $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{αx^2+(α+1)x-2α-1}{x-1}=$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\cancel{(x-1)}(αx+2α+1)}{\cancel{x-1}}=3α+1$, άρα $β=3α+1=α+3\Rightarrow α=1$ και $β=4$.

Τότε $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^3+x-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\cancel{(x-1)}\left(x^2+x+2\right)}{\cancel{x-1}}=4=β$.

Συνέχεια στο πεδίο ορισμού και συνέχεια σε διάστημα

20. **α)** Η f είναι συνεχής στο $(-\infty,-1)$, γιατί είναι ρητή συνάρτηση και στο $(-1,+\infty)$ ως πολυωνυμική. Για τη συνέχεια της f στο $x_0=-1$ ισχύει:



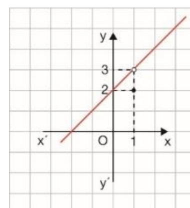
$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{1}{x}=-1$,

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\left(x^2+2x\right)=-1$ και $f(-1)=\dfrac{1}{-1}=-1$,

δηλαδή $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=f(-1)$, οπότε η f είναι συνεχής στο $x_0=-1$.

Άρα η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

β) Για $x\neq 1$ είναι



$$f(x)=\frac{x^2+2x-3}{x-1}=\frac{(x+3)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=x+3,$$ δηλαδή

$$f(x)=\begin{cases}x+3 & ,\ x\neq 1\\ 2 & ,\ x=1\end{cases}.$$ Σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,1)$ και $(1,+\infty)$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική συνάρτηση. Για τη συνέχεια της f στο $x_0=1$ ισχύει:

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x+3)=4\neq f(1)$, $f(1)=2$, οπότε η f δεν είναι συνεχής στο $x_0=1$.

21. Θέτουμε $\dfrac{1}{x}=u$, όταν $x\to 0^-$ τότε $u\to-\infty$, ενώ όταν $x\to 0^+$ τότε $u\to+\infty$. Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{u\to-\infty}\dfrac{\frac{1}{u}}{1+e^u}=\lim\limits_{u\to-\infty}\left(\dfrac{1}{u}\cdot\dfrac{1}{1+e^u}\right)=0$,

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{u\to+\infty}\left(\dfrac{1}{u}\cdot\dfrac{1}{1+e^u}\right)=0\cdot 0=0$ και $f(0)=0$, άρα η f είναι συνεχής στο $x_0=0$. Για $x\neq 0$ η f είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων, οπότε η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

22. $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=0=f(-1)$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=3=f(2)$ και f συνεχής στο $(-1,2)$ ως πολυωνυμική, άρα f συνεχής στο $[-1,2]$.

23. Για $x>0$ η f είναι συνεχής ως σύνθεση και γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.
Θέτουμε $-\frac{1}{x^2}=u \Leftrightarrow x^2=-\frac{1}{u} \Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{-u}}$. Όταν $x\to 0^+$ τότε $u\to -\infty$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{u\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{-u}}e^u=0\cdot 0=0$. Για $x<0$ η f είναι συνεχής ως πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

Επίσης $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{\ln(x^2+1)}{e^{-x}}+\alpha e^x-\text{συν}x\right)=0+\alpha-1=\alpha-1=f(0)$.

Είναι $\alpha-1=0 \Leftrightarrow \alpha=1$.

24.α) Συνεχής ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $g(x)=x^2,\ h(x)=\text{συν}x$

β) Συνεχής ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων
$g(x)=2x^2+1,\ h(x)=\ln x,\ t(x)=3x$.

γ) Συνεχής ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων
$g(x)=x^3-x^2+3,\ h(x)=x^2-3x$.

δ) Συνεχής ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων
$g(x)=x^2-x+2,\ h(x)=\text{συν}x,\ t(x)=3x$.

25. Για κάθε $x\in(1,2)$ είναι

$f(x)=\frac{-2|x-1|+x^2-3x+2}{x-1}=\frac{-2x+2+x^2-3x+2}{x-1}=\frac{x^2-5x+4}{x-1}$ οπότε

η f είναι συνεχής ως ρητή. Πρέπει η f να είναι συνεχής στα $x_1=1$ και $x_2=2$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^2-5x+4}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\cancel{(x-1)}(x-4)}{\cancel{x-1}}=\lim\limits_{x\to 1^+}(x-4)=-3$ και

$f(1)=\alpha+\beta+3$.

Πρέπει $\alpha+\beta+3=-3 \Leftrightarrow \alpha+\beta=-6 \quad (1)$

Στο $x_2=2$ είναι:

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x^2-5x+4}{x-1}=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{\cancel{(x-1)}(x-4)}{\cancel{x-1}}=\lim\limits_{x\to 2^-}(x-4)=-2$ και

$f(2)=-6\alpha+2\beta$.

Πρέπει $-6\alpha+2\beta=-2 \quad (2)$. Από $(1),(2)$ είναι $\begin{cases}\alpha+\beta=-6\\ -6\alpha+2\beta=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix}\alpha=-\frac{5}{4}\\ \beta=-\frac{19}{4}\end{matrix}$.

26. Για $x \neq 0$ η g είναι συνεχής. Για να είναι η g συνεχής στο πεδίο ορισμού της, πρέπει να είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$. Δηλαδή: $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = g(0) \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(3\beta x^2 - \alpha^2 x + 4\right) = \alpha+\beta+1 \Leftrightarrow 4 = \alpha+\beta+1 \Leftrightarrow \alpha+\beta = 3 \quad (1)$

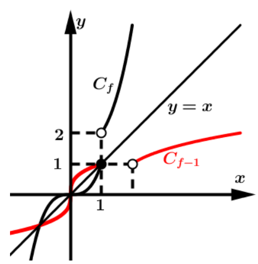
Για $x \neq 1$ η f είναι συνεχής. Για να είναι η f συνεχής στο πεδίο ορισμού της πρέπει να είναι συνεχής και στο 1 δηλαδή $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\alpha x^2 - 2\beta x + 5\right) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(2\alpha x - \beta + 2\right) \Leftrightarrow \alpha - 2\beta + 5 = 2\alpha - \beta + 2 \Leftrightarrow \alpha+\beta = 3$.

Αν η g είναι συνεχής στο 0 τότε ισχύει η (1) άρα η f είναι συνεχής στο 1 και το αντίστροφο.

Αυξημένης δυσκολίας

27. Στο σχήμα παρατηρούμε ότι κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει την C_f το πολύ σε ένα σημείο άρα η f είναι 1-1 οπότε αντιστρέφεται. Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το $(-\infty,1]\cup(2,+\infty)$.



Άρα η αντίστροφη έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty,1]\cup(2,+\infty)$ και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.
Σχεδιάζουμε την αντίστροφη συμμετρική ως προς την ευθεία y=x.
Η f^{-1} είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,1), (2,+\infty)$ και $\lim\limits_{x\to 1^-} f^{-1}(x) = f^{-1}(1) = 1$ άρα η f είναι συνεχής στο $(-\infty,1]\cup(2,+\infty)$.

28.α) Έστω g η γραφική παράσταση που παριστάνεται στην C_1.
Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = g(0)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} g(x) = g(x_0)$ και g συνεχής στο $(0,x_0)$ άρα η g συνεχής στο $[0,x_0]$.

β) Έστω ότι $C_1 \equiv C_f$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+}\left[f(x) - f(x_0)\right] > 0$.

Επίσης είναι $\lim\limits_{x\to x_0}\left(x^2 - x_0^2\right) = 0$,

- για κάθε $x > x_0$ είναι $x^2 - x_0^2 > 0$ οπότε

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{1}{x^2-x_0^2} = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x^2-x_0^2} = \lim_{x\to x_0^+}\left(f(x)-f(x_0)\right)\frac{1}{x^2-x_0^2} = +\infty$$

και

- για κάθε $-x_0 < x < x_0$ είναι $x^2 - x_0^2 < 0$ οπότε

- $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{1}{x^2-x_0^{\,2}}=-\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x^2-x_0^{\,2}}=\lim\limits_{x\to x_0^-}\left(f(x)-f(x_0)\right)\dfrac{1}{x^2-x_0^{\,2}}=-\infty$

άρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x^2-x_0^{\,2}}$. Άρα η C_f παριστάνεται από την C_2, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ όπως φαίνεται από τη γραφική της παράσταση.

Υπολογισμός f(x0) μέσω συνέχειας

29. Για $x\neq 2$ είναι: $(x-2)f(x)=x^2-7x+10 \Leftrightarrow$

$$f(x)=\frac{x^2-7x+10}{x-2}=\frac{\cancel{(x-2)}(x-5)}{\cancel{x-2}}x-5.$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x-5)=-3$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0=2$, ισχύει: $f(2)=\lim\limits_{x\to 2}f(x)=-3$.

30. Για $x\neq 1$ έχουμε: $(x-1)f(x)=\sqrt{x^2+3}-2 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}$.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x_0=1$, οπότε:

$$f(1)=\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3-4}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2}=\frac{1}{2}.$$

Άρα, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} & ,\ x\neq 1\\[2mm] \dfrac{1}{2} & ,\ x=1\end{cases}$.

31. Έστω $\dfrac{\left(x^3-2x^2\right)f(x)-x\eta\mu 4x}{\sqrt{x^2+9}-3}=g(x),\ x\neq 0 \Leftrightarrow$

$$\left(x^3-2x^2\right)f(x)-x\eta\mu 4x=g(x)\left(\sqrt{x^2+9}-3\right)\Leftrightarrow$$

$$f(x)=\frac{g(x)\left(\sqrt{x^2+9}-3\right)}{x^3-2x^2}+\frac{x\eta\mu 4x}{x^3-2x^2},\ x\neq 0 \text{ και } x\neq 2$$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x_0=0$ οπότε:

$$f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{g(x)\left(\sqrt{x^2+9}-3\right)}{x^3-2x^2}+\frac{x\eta\mu 4x}{x^3-2x^2}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{g(x)\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(x-2)\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}+\frac{4\cancel{x}}{\cancel{x}(x-2)}\frac{\eta\mu 4x}{4x}\right]=\frac{36}{-2\cdot 6}-2\cdot 1=-5,$$

αφού $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu 4x}{4x}\underset{\substack{x\to 0,\ u\to 0\\ u\to 0}}{\overset{u=4x}{=}}\lim\frac{\eta\mu u}{u}=1$.

32. Έστω $\frac{\eta\mu x-xf(x)}{\eta\mu x+x}=g(x)\Leftrightarrow \eta\mu x-xf(x)=g(x)(\eta\mu x+x)\Leftrightarrow$

$f(x)=\frac{\eta\mu x}{x}-g(x)\left(\frac{\eta\mu x}{x}+1\right),\ x\neq 0$.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\eta\mu x}{x}-g(x)\left(\frac{\eta\mu x}{x}+1\right)\right]=1-2(1+1)=-3=f(0)$ αφού η C_f διέρχεται από το σημείο Α. Άρα f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

33. Έστω $\frac{f(x)-\sqrt{x+2}}{x-2}=g(x)\Leftrightarrow f(x)=g(x)(x-2)+\sqrt{x+2}$,

$x\in[-2,2)\cup(2,+\infty)$. Η f είναι συνεχής στο $x_0=2$ άρα

$f(2)=\lim\limits_{x\to 2}\left[g(x)(x-2)+\sqrt{x+2}\right]=2$ και

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{g(x)(x-2)+\sqrt{x+2}-2}{x-2}=$$

$$\lim_{x\to 2}\left(g(x)+\frac{x+2-4}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}\right)=\lim_{x\to 2}\left(g(x)+\frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{x+2}+2\right)}\right)=\frac{5}{4}.$$

Αυξημένης δυσκολίας

34. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x+1)}{x-1}=3\ \underset{u\to 2}{\overset{x+1=u}{\Leftrightarrow}}\ \lim\limits_{u\to 2}\frac{f(u)}{u-2}=3$, άρα $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=3$.

Έστω $\frac{f(x)}{x-2}=g(x)\Leftrightarrow f(x)=g(x)(x-2),\ x\neq 2$.

Η f είναι συνεχής στο $x_0=2$ άρα $f(2)=\lim\limits_{x\to 2} g(x)(x-2)=0$ και

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{g(x)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}=3.$$

35.α) Θέτω $3+h=x \Leftrightarrow h=x-3$. Όταν $h\to 0$, τότε $x\to 3$, οπότε

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)}{h}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)}{x-3}=2$.

β) Έστω $g(x)=\dfrac{f(x)}{x-3}\Leftrightarrow f(x)=g(x)(x-3), x\neq 3$, $\lim\limits_{x\to 3}g(x)=2$.

Η f είναι συνεχής στο $x_0=3$, άρα $f(3)=\lim\limits_{x\to 3}f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\left[g(x)(x-3)\right]=0$.

36.Για $x=0$ είναι $f(0)+f(2)=3\Leftrightarrow 2+f(2)=3\Leftrightarrow f(2)=1$.

Η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ οπότε $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=2$.

Επίσης $f(x)+f(x+2)=x^2+3\Leftrightarrow f(x+2)=x^2+3-f(x)$ οπότε

$\lim\limits_{x\to 0}f(x+2)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+3-f(x)\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+3\right)-\lim\limits_{x\to 0}f(x)=3-2=1$.

Άρα $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=1=f(2)$, οπότε η f είναι συνεχής στο $x_1=2$.

37.Για $x=0$ είναι $f(0)+f(1)=8\Leftrightarrow f(1)=5$.

Η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ οπότε $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=3$. Επίσης

$f(x)+f(x+1)=4x^2+4x+8\Leftrightarrow f(x+1)=4x^2+4x+8-f(x)$ οπότε

$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{h\to 0}f(1+h)=\lim\limits_{h\to 0}\left(4h^2+4h+8-f(h)\right)=8-3=5=f(1)$.

Συνέχεια από ανισοτική σχέση – Κριτήριο παρεμβολής

38.Για $x>0$ είναι $x^2+2x+\dfrac{\eta\mu x}{x}\le f(x)\le 5x^3+x+1$.

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2+2x+\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)=1$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(5x^3+x+1\right)=1$, άρα από το Κ.Π. $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$.

Η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ άρα $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$.

39. $\left|xf(x)-x\eta\mu x\right|\le x^2\Leftrightarrow -x^2\le xf(x)-x\eta\mu x\le x^2\Leftrightarrow$

$-x^2+x\eta\mu x\le xf(x)\le x^2+x\eta\mu x$

Αν $x>0$, τότε: από (1) προκύπτει: $-x+\eta\mu x\le f(x)\le x+\eta\mu x$

Είναι: $\lim\limits_{x\to 0^+}(-x+\eta\mu x)=0$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}(x+\eta\mu x)=0$.

Από κριτήριο παρεμβολής ισχύει: $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$. Η f είναι συνεχής στο $x_0=0$

άρα $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$.

40. $\left|x^2f(x)+\sigma\upsilon\nu x-1\right|\le \eta\mu^4x \Leftrightarrow -\eta\mu^4x\le x^2f(x)+\sigma\upsilon\nu x-1\le \eta\mu^4x \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow}$

$-\dfrac{\eta\mu^4x}{x^2}+\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x^2}\le f\left(x\right)\le \dfrac{\eta\mu^4x}{x^2}+\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x^2}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu^4x}{x^2}+\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^2\eta\mu^2x+\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu^2x}{x^2\left(1+\sigma\upsilon\nu x\right)}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^2\eta\mu^2x+\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^2\dfrac{1}{1+\sigma\upsilon\nu x}\right)=\dfrac{1}{2}$.

Όμοια $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{\eta\mu^4x}{x^2}+\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x^2}\right)=\dfrac{1}{2}$ άρα $\lim\limits_{x\to 0}f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}$.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο 0 οπότε $f\left(0\right)=\lim\limits_{x\to 0}f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}$.

41. Η f είναι συνεχής στο 0 οπότε $f\left(0\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}f\left(x\right)$.

Για $x>0$ είναι $f\left(x\right)\ge \dfrac{\eta\mu x}{x}+2x+5$ και

$\lim\limits_{x\to 0^+}f\left(x\right)\ge \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}+2x+5\right)\Leftrightarrow f\left(0\right)\ge 6 \quad (1)$

Για $x<0$ είναι $f\left(x\right)\le \dfrac{\eta\mu x}{x}+2x+5$ και

$\lim\limits_{x\to 0^-}f\left(x\right)\le \lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}+2x+5\right)\Leftrightarrow f\left(0\right)\le 6 \quad (2)$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε $f\left(0\right)=6$.

Αυξημένης δυσκολίας

42. Η f είναι συνεχής στο 0 οπότε $f\left(0\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}f\left(x\right)$.

Για $x>0$ είναι $f\left(x\right)>x\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}f\left(x\right)\ge \lim\limits_{x\to 0^+}x\Leftrightarrow f\left(0\right)\ge 0 \ \left(1\right)$

Για $x<0$ είναι $f\left(x\right)<x\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}f\left(x\right)\le \lim\limits_{x\to 0^+}x\Leftrightarrow f\left(0\right)\le 0 \ \left(2\right)$

Από $\left(1\right),\left(2\right)\Rightarrow f\left(0\right)=0$.

43. $f^2\left(x\right)-2f\left(x\right)+1\le x^2\Leftrightarrow \left(f\left(x\right)-1\right)^2\le x^2\Leftrightarrow \left|f\left(x\right)-1\right|\le \left|x\right|\Leftrightarrow$

$1-\left|x\right|\le f\left(x\right)\le 1+\left|x\right|$. Για $x=0$ είναι:

$\left(f\left(0\right)-1\right)^2\le 0\Leftrightarrow f\left(0\right)-1=0\Leftrightarrow f\left(0\right)=1$.

Επίσης $\lim_{x\to 0}(1-|x|)=0, \lim_{x\to 0}(1+|x|)=0$ οπότε από κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim_{x\to 0} f(x)=1=f(0)$, άρα f συνεχής στο $x_0=0$.

44. Για $x=0$ είναι $f^2(0)+g^2(0)\le ημ^{2ν}0=0$. Όμως $f^2(0)+g^2(0)\ge 0$, άρα $f^2(0)+g^2(0)=0 \Leftrightarrow f(0)=g(0)=0$. Είναι $0\le f^2(x)+g^2(x)\le ημ^{2ν}x$ και $\lim_{x\to 0} ημ^{2ν}x=0$, άρα λόγω του κριτηρίου παρεμβολής είναι $\lim_{x\to 0}\left(f^2(x)+g^2(x)\right)=0$. Είναι $0\le f^2(x)\le f^2(x)+g^2(x)$ και $\lim_{x\to 0}\left(f^2(x)+g^2(x)\right)=0$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής, προκύπτει ότι: $\lim_{x\to 0} f^2(x)=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$ και f συνεχής στο $x_0=0$.
Όμοια $\lim_{x\to 0} g(x)=0$ και g συνεχής στο $x_0=0$.

45. Για $x=0$ είναι $f^2(0)+g^2(0)\le 2f(0)\cdot g(0) \Leftrightarrow$
$f^2(0)-2f(0)\cdot g(0)+g^2(0)\le 0 \Leftrightarrow \left(f(0)-g(0)\right)^2\le 0$.
Όμως $\left(f(0)-g(0)\right)^2\ge 0$, άρα $\left(f(0)-g(0)\right)^2=0 \Leftrightarrow f(0)=g(0)$.
Είναι: $f^2(x)+g^2(x)\le 2f(x)\cdot g(x)+x^2 \Leftrightarrow$
$f^2(x)-2f(x)\cdot g(x)+g^2(x)\le x^2 \Leftrightarrow \left(f(x)-g(x)\right)^2\le x^2$.
Είναι $\lim_{x\to 0} x^2=0$, οπότε $\lim_{x\to 0}\left(f(x)-g(x)\right)^2\le 0$.
Όμως $\left(f(x)-g(x)\right)^2\ge 0$ οπότε $\lim_{x\to 0}\left(f(x)-g(x)\right)^2\ge 0$.
Άρα $\lim_{x\to 0}\left(f(x)-g(x)\right)^2=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\left(f(x)-g(x)\right)=0$.
Έστω $h(x)=f(x)-g(x) \Leftrightarrow f(x)=h(x)+g(x)$ με $\lim_{x\to 0} h(x)=0$.
Τότε: $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(h(x)+g(x)\right)=\lim_{x\to 0} h(x)+\lim_{x\to 0} g(x)=g(0)=f(0)$, άρα η f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

2ος τρόπος

Είναι: $f^2(x)+g^2(x)\le 2f(x)\cdot g(x)+x^2 \Leftrightarrow$
$f^2(x)-2f(x)\cdot g(x)+g^2(x)\le x^2 \Leftrightarrow \left(f(x)-g(x)\right)^2\le x^2 \Leftrightarrow$
$|f(x)-g(x)|\le |x| \Leftrightarrow -|x|\le f(x)-g(x)\le |x| \Leftrightarrow g(x)-|x|\le f(x)\le g(x)+|x|$.
Για $x=0$ είναι $g(0)\le f(0)\le g(0) \Leftrightarrow f(0)=g(0)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left(g(x)-|x|\right)=g(0)=\lim\limits_{x\to 0}\left(g(x)+|x|\right)$ οπότε από το Κριτήριο Παρεμβολής $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=g(0)=f(0)$, άρα η f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

46. $f^2(x)+4g^2(x)\le 4f(x)g(x)+\eta\mu^2 x \Leftrightarrow 0\le\left(f(x)-2g(x)\right)^2\le\eta\mu^2 x$.

Για $x=0$ είναι $0\le\left(f(0)-2g(0)\right)^2\le 0\Leftrightarrow\left(f(0)-2g(0)\right)^2=0\Leftrightarrow f(0)=2g(0)$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}\eta\mu^2 x=0$ είναι και $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)-2g(x)\right)^2=0$

$-\sqrt{\left(f(x)-2g(x)\right)^2}\le f(x)-2g(x)\le\sqrt{\left(f(x)-2g(x)\right)^2}$.

Από το Κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)-2g(x)\right)=0$.

Έστω $f(x)-2g(x)=h(x)\Leftrightarrow f(x)=2g(x)+h(x)$, οπότε

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(2g(x)+h(x)\right)=2g(0)=f(0)$.

2ος τρόπος

Είναι: $f^2(x)+4g^2(x)\le 4f(x)g(x)+\eta\mu^2 x\Leftrightarrow\left(f(x)-2g(x)\right)^2\le\eta\mu^2 x\Leftrightarrow$

$|f(x)-2g(x)|\le|\eta\mu x|\Leftrightarrow -|\eta\mu x|\le f(x)-2g(x)\le|\eta\mu x|\Leftrightarrow$

$2g(x)-|\eta\mu x|\le f(x)\le 2g(x)+|\eta\mu x|$.

Για $x=0$ είναι $2g(0)\le f(0)\le 2g(0)\Leftrightarrow f(0)=2g(0)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left(2g(x)-|\eta\mu x|\right)=g(0)=\lim\limits_{x\to 0}\left(2g(x)+|\eta\mu x|\right)$ οπότε από το Κριτήριο Παρεμβολής $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=2g(0)=f(0)$ άρα η f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

47. Για $x=1$ είναι $f(1)=g(1)=0$ και για $x=2$ είναι $f(2)=g(2)=0$.

$0\le f^2(x)\le f^2(x)+g^2(x)$. Από το κριτήριο παρεμβολής είναι:

$\lim\limits_{x\to 1}f^2(x)=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0=f(1)$ και $\lim\limits_{x\to 2}f^2(x)=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 2}f(x)=0=f(2)$.

Όμοια για την g.

48.α) Για $x=0$ είναι $f^2(0)-4f(0)+4=0\Leftrightarrow\left(f(0)-2\right)^2=0\Leftrightarrow f(0)=2$

$f^2(x)-4f(x)+4=4-4\sigma\upsilon\nu^2 x\Leftrightarrow\left(f(x)-2\right)^2=4\eta\mu^2 x$ και

$\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)-2\right)^2=\lim\limits_{x\to 0}4\eta\mu^2 x=0$

$-\sqrt{\left(f(x)-2\right)^2}\le f(x)-2\le\sqrt{\left(f(x)-2\right)^2}\Leftrightarrow$

$-\sqrt{\left(f(x)-2\right)^2}+2\le f(x)\le\sqrt{\left(f(x)-2\right)^2}+2$.

Από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=2=f(0)$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)\right] \overset{\frac{1}{x}=u}{\underset{u\to+\infty}{=}} \lim\limits_{u\to+\infty}\frac{f(u)}{u^2}$. Όμως

$2-|f(x)-2|\le f(x)\le 2+|f(x)-2| \Leftrightarrow 2-2|\eta\mu x|\le f(x)\le 2+2|\eta\mu x| \overset{x>0}{\Leftrightarrow}$

$\frac{2}{x^2}-2\frac{|\eta\mu x|}{x^2}\le\frac{f(x)}{x^2}\le\frac{2}{x^2}+2\frac{|\eta\mu x|}{x^2}$.

Έχουμε $\frac{|\eta\mu x|}{x^2}=\left|\frac{\eta\mu x}{x^2}\right|\le\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow -\frac{1}{x^2}\le\frac{\eta\mu x}{x^2}\le\frac{1}{x^2}$.

Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ οπότε από το Κριτήριο Παρεμβολής είναι

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x^2}=0$ οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\frac{\eta\mu x}{x^2}\right|=0=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{|\eta\mu x|}{x^2}$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x^2}-2\frac{|\eta\mu x|}{x^2}\right)=0=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x^2}+2\frac{|\eta\mu x|}{x^2}\right)$ οπότε από το Κριτήριο

Παρεμβολής. είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}=0$.

49.α) Είναι $f^3(x)+2f(x)=x^2 \Leftrightarrow f(x)\left(f^2(x)+2\right)=x^2$ και επειδή

$f^2(x)+2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ισχύει ότι: $f(x)=\frac{x^2}{f^2(x)+2}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) $|f(x)|=\left|\frac{x^2}{f^2(x)+2}\right|=\frac{x^2}{f^2(x)+2}\le\frac{x^2}{2}$, αφού $f^2(x)+2\ge 2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ) Είναι $|f(x)|\le\frac{x^2}{2}\Leftrightarrow -\frac{x^2}{2}\le f(x)\le\frac{x^2}{2}$. Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{x^2}{2}\right)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{2}=0$

από το Κριτήριο Παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.

Η αρχική σχέση για $x=0$, γίνεται:

$f^3(0)+2f(0)=0\Leftrightarrow f(0)\left(f^2(0)+2\right)=0\Leftrightarrow \left(f(0)=0\right)$ ή $\left(f^2(0)+2=0\right.$ που

είναι αδύνατο). Άρα $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$, οπότε η f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

δ) Βλέπε άσκηση 13 σελίδα 396.

50. Από τη σχέση $f^3(x)+f(x)=3x$ (1) για $x=x_0$ έχουμε

$f^3(x_0)+f(x_0)=3x_0$ (2)

Με αφαίρεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) έχουμε

$f^3(x)-f^3(x_0)+f(x)-f(x_0)=x-x_0\Leftrightarrow$

$\left(f(x)-f(x_0)\right)\left(f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)\right)+\left(f(x)-f(x_0)\right)=x-x_0 \Leftrightarrow$

$\left(f(x)-f(x_0)\right)\left(f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+1\right)=x-x_0 \Leftrightarrow$

$f(x)-f(x_0)=\dfrac{x-x_0}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+1}$

$\left|f(x)-f(x_0)\right|=\dfrac{|x-x_0|}{\left|f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+1\right|}\le|x-x_0|$, γιατί

$f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)>0$, αφού έχει $\Delta<0$, άρα

$-|x-x_0|<f(x)-f(x_0)<|x-x_0|$ και από Κριτήριο Παρεμβολής είναι

$\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ άρα η f είναι συνεχής σε οποιοδήποτε $x_0\in\mathbb{R}$ οπότε είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Σύνθετες ασκήσεις

51.α) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\etaμ\frac{1}{x}}{\lambda x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\etaμ\frac{1}{x}}{x\left(\lambda-\frac{2}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\etaμ\frac{1}{x}}{\lambda-\frac{2}{x}}\overset{\frac{1}{x}=u}{\underset{u\to0}{=}}\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\frac{\etaμu}{u}}{\lambda-2u}$.

Αν $\lambda>0$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\dfrac{1}{\lambda}$.

Αν $\lambda=0$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\frac{\etaμu}{u}}{-2u}=\lim\limits_{u\to0}\left(-\dfrac{\etaμu}{u}\cdot\dfrac{1}{2u}\right)=-\infty$ γιατί

$\lim\limits_{u\to0}\left(-\dfrac{\etaμu}{u}\right)=-1$ και $\lim\limits_{u\to0}\dfrac{1}{2u}=+\infty$ αφού $u>0$ $(x\to+\infty)$.

β) Είναι $g(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda} & ,\lambda>0\\ 0 & ,\lambda=0\end{cases}$, $\lim\limits_{\lambda\to0^+}g(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to0^+}\dfrac{1}{\lambda}=+\infty$, οπότε η g δεν είναι συνεχής στο $x=0$ και είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$. Άρα είναι συνεχής σαν ρητή στο $(0,+\infty)$.

52.α) Για $x=y=1$ είναι: $f(1)=2f(1)\Leftrightarrow f(1)=0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0=1$, ισχύει: $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)=0$. Για να είναι η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ αρκεί να είναι συνεχής σε οποιοδήποτε $x_0\in(0,+\infty)$, δηλαδή

$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Θέτουμε $\frac{x}{x_0} = \frac{h}{1} \Leftrightarrow x = x_0 \cdot h$. Όταν $x \to x_0$ είναι $h \to 1$.

Τότε: $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{h\to 1} f(x_0 \cdot h) = \lim_{h\to 1}\left[f(x_0) + f(h) + \left(x_0^2 - x_0\right)\left(h^2 - h\right)\right] =$

$= f(x_0) + \lim_{h\to 1} f(h) + 0 = f(x_0)$ άρα η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$.

β) $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h\to 1} \frac{f(x_0 h) - f(x_0)}{x_0 h - x_0} = \lim_{h\to 1} \frac{f(h) + \left(x_0^2 - x_0\right)\left(h^2 - h\right)}{x_0(h-1)} =$

$= \frac{1}{x_0} \cdot \lim_{h\to 1} \frac{f(h)}{h-1} + \lim_{h\to 1}\left(\frac{x_0(x_0 - 1)(h-1)\cdot h}{x_0(h-1)}\right) = \frac{1}{x_0} \cdot 4 + x_0 - 1 = \frac{4}{x_0} + x_0 - 1$.

53.α) Για $x \neq 2$ είναι $\frac{f(x) - 3}{x - 2} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)(x-2) + 3$.

Η f είναι συνεχής στο 2 οπότε $f(2) = \lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\left(g(x)(x-2) + 3\right) = 3$.

β) Η f είναι περιττή οπότε $f(-2) = -f(2) = -3$ και

$\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2}\left[-f(-x)\right] \underset{u\to 2}{\overset{-x=u}{=}} \lim_{u\to 2}\left[-f(u)\right] = -3 = f(-2)$ άρα είναι συνεχής στο -2.

γ) $\lim_{x\to -2} \frac{f(x) + 3}{x + 2} = \lim_{x\to -2} \frac{-f(-x) + 3}{x + 2} \underset{u\to 2}{\overset{-x=u}{=}} \lim_{u\to 2} \frac{-f(u) + 3}{-u + 2} = \lim_{u\to 2} \frac{f(u) - 3}{u - 2} = 6$.

54.α) Για $x = \frac{\pi}{2}$ είναι $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$.

Επίσης $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(1 + 2\sqrt{\eta\mu x}\right) = 3 = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(2 + \eta\mu x)$ οπότε από το Κριτήριο Παρεμβολής είναι $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} g(x) = 3$.

β) $1 + 2\sqrt{\eta\mu x} \leq g(x) \leq 2 + \eta\mu x \Rightarrow g(x) - 3 \leq \eta\mu x - 1 < 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, άρα $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\left|3 - g(x)\right| - xg(x) - 3\right] \frac{1}{g(x) - 3} = +\infty$,

γιατί $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\left|3 - g(x)\right| - xg(x) - 3\right] = -\frac{3\pi}{2} - 3$ και $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{g(x) - 3} = -\infty$.

55.α) Είναι $\lim_{x\to 2}(x-2)f(x) = \lim_{x\to 2}\left(\alpha x^2 + \beta x - 6\right) \Leftrightarrow$

$0 = 4\alpha + 2\beta - 6 \Leftrightarrow \beta = 3 - 2\alpha$.

Για $x \neq 2$ είναι $f(x) = \dfrac{\alpha x^2 + (3-2\alpha)x - 6}{x-2} = \dfrac{\alpha x\cancel{(x-2)} + 3\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}$.

Το σημείο $A(2,5)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f οπότε

$f(2) = 5 \underset{\text{στο } 2}{\overset{\text{f συνεχής}}{\Leftrightarrow}} \lim\limits_{x\to 2} f(x) = 5 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2}(\alpha x + 3) = 5 \Leftrightarrow 2\alpha + 3 = 5 \Leftrightarrow \alpha = 1$ και

$\beta = 3 - 2 = 1$.

β) Είναι $(x-2)f(x) = x^2 + x - 6 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{\cancel{(x-2)}(x+3)}{\cancel{x-2}} = x+3$**,** $x \neq 2$.

Επειδή $f(2) = 5$ είναι $f(x) = x+3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) Θέτουμε $\dfrac{1}{f(x)} = u$ με $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{f(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x+3} = 0$, άρα

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f^2(x)\,\eta\mu\frac{1}{f(x)}\right] = \lim_{u\to 0^+} \frac{\eta\mu u}{u}\frac{1}{u} = +\infty .$$

56.α) Είναι $f(x^2) = |x| = \sqrt{x^2}$. Θέτουμε $x^2 = \omega$ με $\omega \geq 0$, οπότε

$f(\omega) = \sqrt{\omega},\ \omega \geq 0$ άρα και $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$.

β) Η f είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση (είναι βασική), οπότε είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται.

Θέτουμε $f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{x} = y,\ y \geq 0 \Leftrightarrow x = y^2$ άρα $f^{-1}(y) = y^2,\ y \geq 0$ οπότε

$f^{-1}(x) = x^2,\ x \geq 0$.

γ) i. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x) - \sqrt[3]{f^2(x)}}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{(\sqrt{x})^2}}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{x-1}$.

Θέτουμε $\sqrt[6]{x} = \omega$, τότε $\sqrt{x} = \omega^3$, $\sqrt[3]{x} = \omega^2$ και $x = \omega^6$, οπότε: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{x-1} =$

$$\lim_{\omega\to 1} \frac{\omega^3 - \omega^2}{\omega^6 - 1} = \lim_{\omega\to 1} \frac{\omega^2(\omega-1)}{(\omega^3-1)(\omega^3+1)} = \lim_{\omega\to 1} \frac{\omega^2\cancel{(\omega-1)}}{\cancel{(\omega-1)}(\omega^2+\omega+1)(\omega^3+1)} = \frac{1}{6}.$$

ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{f(x^2+x)} - e^{f(x^2)}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{\sqrt{x^2+x}} - e^x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^x\left(\dfrac{e^{\sqrt{x^2+x}}}{e^x} - 1\right)\right] =$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^x\left(e^{\sqrt{x^2+x}-x} - 1\right)\right] = +\infty \cdot \left(\underbrace{\sqrt{e} - 1}_{>0}\right)$ γιατί

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}+x-\cancel{x^2}}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}=\frac{1}{2}\text{ οπότε}$$

$$\lim_{x\to+\infty}e^{\sqrt{x^2+x}-x}\underset{\substack{x\to+\infty,\\ u\to\frac{1}{2}}}{\overset{u=\sqrt{x^2+x}-x}{=}}\lim_{u\to\frac{1}{2}}e^u=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}\text{ και }\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty\,.$$

iii. $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{f\left(x^2-4x+4\right)}{f\left(x+2\right)-f\left(3x-2\right)}=\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x^2-4x+4}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}=$

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{\left(x-2\right)^2}\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}\right)}{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}\right)}=\lim_{x\to2}\frac{\left|x-2\right|\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}\right)}{\left(\sqrt{x+2}\right)^2-\left(\sqrt{3x-2}\right)^2}=$$

$$\lim_{x\to2}\frac{\left|x-2\right|\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}\right)}{x+2-3x+2}=\lim_{x\to2}\frac{\left|x-2\right|\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}\right)}{-2x+4}=$$

$$\lim_{x\to2}\frac{\left|x-2\right|\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}\right)}{-2\left(x-2\right)}\,.$$

Είναι $\displaystyle\lim_{x\to2^+}\frac{\left|x-2\right|\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}\right)}{-2\left(x-2\right)}=\lim_{x\to2^+}\frac{\cancel{\left(x-2\right)}\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}\right)}{-2\cancel{\left(x-2\right)}}=-2$,

$\displaystyle\lim_{x\to2^-}\frac{\left|x-2\right|\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}\right)}{-2\left(x-2\right)}=\lim_{x\to2}\frac{-\cancel{\left(x-2\right)}\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}\right)}{-2\cancel{\left(x-2\right)}}=2$, οπότε δεν υπάρχει το ζητούμενο όριο.

δ) Είναι $g\left(x\right)=e^{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{e^{\sqrt{x}}}$. Η g έχει ελάχιστο το 2 όταν $g\left(x\right)\geq2$ και υπάρχει τιμή του x για την οποία ισχύει η ισότητα.

Επομένως $g\left(x\right)\geq2\Leftrightarrow e^{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{e^{\sqrt{x}}}\geq2\Leftrightarrow$

$\left(e^{\sqrt{x}}\right)^2+1\geq2e^{\sqrt{x}}\Leftrightarrow\left(e^{\sqrt{x}}\right)^2-2e^{\sqrt{x}}+1\geq0\Leftrightarrow\left(e^{\sqrt{x}}-1\right)^2\geq0$ ισχύει.

Είναι $g\left(x\right)=2\Leftrightarrow e^{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{e^{\sqrt{x}}}=2\Leftrightarrow\left(e^{\sqrt{x}}\right)^2+1=2e^{\sqrt{x}}\Leftrightarrow\left(e^{\sqrt{x}}\right)^2-2e^{\sqrt{x}}+1=0\Leftrightarrow$

$\left(e^{\sqrt{x}}-1\right)^2=0 \Leftrightarrow e^{\sqrt{x}}=1 \Leftrightarrow \sqrt{x}=0 \Leftrightarrow x=0$. Η θέση ελαχίστου είναι η $x=0$.

ε) $h^2(x)-4h(x) \le f(x^4)-4 \Leftrightarrow h^2(x)-4h(x)+4 \le x^2 \Leftrightarrow (h(x)-2)^2 \le x^2$ (1)

Η (1) για $x=0$ γίνεται $(h(0)-2)^2 \le 0 \Leftrightarrow h(0)=2$. Για $x \ne 0$ η (1) γίνεται

$|h(x)-2| \le |x| \Leftrightarrow -|x| \le h(x)-2 \le |x| \Leftrightarrow 2-|x| \le h(x) \le 2+|x|$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}(2-|x|)=2,\ \lim\limits_{x\to 0}(2+|x|)=2$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to 0} h(x)=2$. Επειδή $\lim\limits_{x\to 0} h(x)=h(0)$, η h είναι συνεχής στο $x_0=0$.

Τράπεζα θεμάτων ΙΕΠ

24767. α) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι

$e^{x_1} < e^{x_2} \Leftrightarrow e^{x_1}+1 < e^{x_2}+1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{e^{x_1}+1} > \dfrac{1}{e^{x_2}+1} \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow f \searrow \mathbb{R}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{e^x+1}=1$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{e^x+1}=0$. Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R})=(0,1)$.

β) Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, είναι 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $\dfrac{1}{e^x+1}=y \Leftrightarrow e^x+1=\dfrac{1}{y} \Leftrightarrow e^x=\dfrac{1}{y}-1 \Leftrightarrow x=\ln\dfrac{1-y}{y}$.

Άρα $f^{-1}(y)=\ln\dfrac{1-y}{y},\ y\in(0,1)$, οπότε $f^{-1}(x)=\ln\dfrac{1-x}{x},\ x\in(0,1)$.

25749. α) Επειδή $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1=f(1)\ne 2=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, η f δεν είναι συνεχής στο x = 1.

β) Η f είναι συνεχής στο (0,1), $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1=f(1)$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0=f(0)$, οπότε η f είναι συνεχής στο [0,1].

γ) i. Είναι $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=0$.

ii. Επειδή $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=0$ και $f(x)<0$ για τιμές του x κοντά στο 4, είναι

$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$.

27318. α) Επειδή οι τετμημένες των σημείων της C_f δημιουργούν το διάστημα [0, 14], η f έχει πεδίο ορισμού το A = [0, 14]. Επειδή οι τεταγμένες των σημείων της C_f δημιουργούν το διάστημα $[-1,6]$, η f έχει σύνολο τιμών το $f(A)=[-1,6]$.

β) i. $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = -1$.

ii. Είναι $\lim_{x\to 4^-} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 4^+} f(x) = 2$. Επειδή $\lim_{x\to 4^-} f(x) \neq \lim_{x\to 4^+} f(x)$, δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 4} f(x)$.

iii. Είναι $\lim_{x\to 9^-} f(x) = \lim_{x\to 9^+} f(x) = 4$, άρα $\lim_{x\to 9} f(x) = 4$.

iv. $\lim_{x\to 14} f(x) = \lim_{x\to 14^-} f(x) = 4$.

v. Στο σχήμα βλέπουμε ότι $\lim_{x\to 6} f(x) = 0$ και για κάθε $x \in (4,6) \cup (6,14)$ είναι $f(x) > 0$, οπότε αν θέσουμε $f(x) = u$, έχουμε: $\lim_{x\to 6} \frac{1}{f(x)} = \lim_{u\to 0^+} \frac{1}{u} = +\infty$.

γ) Επειδή δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 4} f(x)$ η f δεν είναι συνεχής στο 4.

Επειδή $\lim_{x\to 9} f(x) = 4 \neq f(9) = 2$, η f δεν είναι συνεχής στο 9.

31548. α) Για x = 1 είναι

$$|f(1)-2| \leq (1-1)^2 \Leftrightarrow |f(1)-2| \leq 0 \Leftrightarrow f(1)-2 = 0 \Leftrightarrow f(1) = 2.$$

β) $|f(x)-2x| \leq (x-1)^2 \Leftrightarrow -(x-1)^2 \leq f(x)-2x \leq (x-1)^2 \Leftrightarrow$

$2x-(x-1)^2 \leq f(x) \leq (x-1)^2 + 2x$. Είναι $\lim_{x\to 1}\left(2x-(x-1)^2\right) = 2$,

$\lim_{x\to 1}\left(2x+(x-1)^2\right) = 2$, οπότε από το Κ.Π. είναι και $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$.

γ) Επειδή $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$, η f είναι συνεχής στο 1.

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό ή Λάθος»

1. Λ	**2.** Σ	**3.** Σ	**4.** Λ	**5.** Σ	**6.** Σ	**7.** Λ	**8.** Σ	**9.** Σ	**10.** Σ
11. Λ	**12.** Λ	**13.** Λ	**14.** Σ	**15.** Σ	**16.** Λ	**17.** Λ	**18.** Λ		

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$, οπότε $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) \Leftrightarrow$

$$\lim_{x\to 2^-}\left(2\lambda(\lambda-1)x + 2\kappa\right) = \lim_{x\to 2^+}\left(2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi x}{2} - \kappa^2\right) = 4\lambda(\lambda-1) + 2\kappa \Leftrightarrow$$

$$4\lambda(\lambda-1) + 2\kappa = -2-\kappa^2 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 + \kappa^2 + 2\kappa + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2\lambda-1)^2 + (\kappa+1)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(2\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}\right) \text{ και } (\kappa+1 = 0 \Leftrightarrow \kappa = -1).$$

Σωστή απάντηση η Β.

2. Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, είναι συνεχής και στο $x_0 = 1$, άρα $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = -1$.

Για $x \neq 1$ είναι $f(x) = \dfrac{\alpha x^3 + \beta x^2 - \gamma x + 1}{x^2 - 2x + 1} \Leftrightarrow$

$f(x)(x-1) = \alpha x^3 + \beta x^2 - \gamma x + 1 \Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to 1}\left[f(x)(x-1)\right] = \lim\limits_{x\to 1}\left(\alpha x^3 + \beta x^2 - \gamma x + 1\right) \Leftrightarrow 0 = \alpha + \beta - \gamma + 1 \Leftrightarrow$

$\gamma - \alpha - \beta = 1$ (1). Τότε $f(x) = \dfrac{\alpha x^3 + \beta x^2 - \gamma x + \gamma - \alpha - \beta}{(x-1)^2} \Leftrightarrow$

$f(x) = \dfrac{\alpha(x-1)(x^2+x+1) + \beta(x-1)(x+1) - \gamma(x-1)}{(x-1)^2} \Leftrightarrow$

$f(x) = \dfrac{\cancel{(x-1)}\left[\alpha(x^2+x+1) + \beta(x+1) - \gamma\right]}{(x-1)^{\cancel{2}}} \Leftrightarrow$

$f(x)(x-1) = \alpha(x^2+x+1) + \beta(x+1) - \gamma \Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to 1}\left[f(x)(x-1)\right] = \lim\limits_{x\to 1}\left[\alpha(x^2+x+1) + \beta(x+1) - \gamma\right] \Leftrightarrow 3\alpha + 2\beta - \gamma = 0 \Leftrightarrow$

$\gamma = 3\alpha + 2\beta$ (2)

Τότε $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\alpha(x^2+x+1) + \beta(x+1) - 3\alpha - 2\beta}{x-1} \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\alpha(x^2+x+1-3) + \beta(x+1-2)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\alpha(x^2+x-2) + \beta(x-1)}{x-1} \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\alpha\cancel{(x-1)}(x+2) + \beta\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = 3\alpha + \beta$.

Άρα $3\alpha + \beta = -1 \Leftrightarrow \beta = -1 - 3\alpha$ (3)

Από το σύστημα των (1), (2), (3) προκύπτει: $\alpha = -2,\ \beta = 5,\ \gamma = 4$.

Σωστή απάντηση η Δ.

3. Για x = 2 είναι $8 \leq f(2) \leq 8 \Leftrightarrow f(2) = 8$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 2}(4x) = 8,\ \lim\limits_{x\to 2}(x^2+4) = 8$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 8 = f(2)$, άρα η f είναι συνεχής στο 2.

Σωστή απάντηση η Γ.

4. Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$, άρα $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$.

Για x > 0 είναι $f(x) > \frac{ημ2x}{x} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \geq \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{2ημ2x}{2x} \Leftrightarrow f(0) \geq 2$ (1)

Για x < 0 είναι $f(x) < \frac{ημ2x}{x} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \leq \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{2ημ2x}{2x} \Leftrightarrow f(0) \leq 2$ (2)

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $f(0) = 2$.

Σωστή απάντηση η Α.

5. Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$, άρα $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 1$.

Για x=0 είναι $κ \cdot συν0 + λ = 0 \Leftrightarrow λ = -κ$, οπότε $x^ν f(x) = κσυνx - κ \Leftrightarrow$

$f(x) = κ\frac{συνx - 1}{x^ν}$, $x \neq 0$. $x^ν f(x) = κσυνx - κ \Leftrightarrow$

$$f(x) = κ\frac{συνx - 1}{x^ν} \text{ και} \lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\left(κ\frac{(συνx - 1)(συνx + 1)}{x^ν(συνx + 1)}\right) =$$

$$\lim_{x\to 2}\left(κ\frac{συν^2x - 1}{x^ν(συνx + 1)}\right) = \lim_{x\to 2}\left(-κ\frac{ημ^2x}{x^ν} \cdot \frac{1}{συνx + 1}\right).$$

Αν ν > 2 τότε $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}\left(-κ\frac{ημ^2x}{x^2} \cdot \frac{1}{x^{ν-2}} \cdot \frac{1}{συνx + 1}\right) = -κ \cdot 1 \cdot (+\infty) \cdot \frac{1}{2} = \pm\infty$

αδύνατο.

Επειδή ο ν είναι άρτιος, είναι ν=2, τότε

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}\left(-κ\frac{ημ^2x}{x^2} \cdot \frac{1}{συνx + 1}\right) = -κ \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{κ}{2}$. Είναι $-\frac{κ}{2} = 1 \Leftrightarrow κ = -2$.

Τότε $λ = -κ = 2$.

Σωστή απάντηση η Β.

13 Θεωρήματα συνεχών συναρτήσεων

Ύπαρξη ρίζας εξίσωσης σε διάστημα (α, β)

38. Είναι $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-}\left(x^2+x-6\right) = 6 = f(3)$, ενώ

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+}\left(x^2-6x+8\right) = -1$, οπότε η f δεν είναι συνεχής στο $[0,6]$.

Όμως η εξίσωση $x^2+x-6=0$ στο διάστημα $(0,3)$ έχει λύση $x=2$ και η εξίσωση $x^2-6x+8=0$ στο διάστημα $(3,6)$ έχει λύση $x=4$.

39.α) Έστω $f(x)=x^4+8x^3-x^2+x-3$. Είναι $f(0)=-3$, $f(1)=6$, οπότε $f(0)f(1)<0$. Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε η $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$.

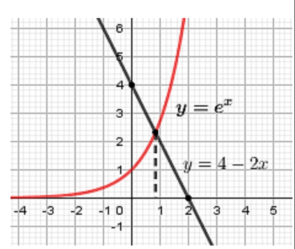
β) Έστω $f(x)=x\eta\mu x-e^{2x}\sigma\upsilon\nu x$. $f(0)=-1,\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$, οπότε

$f(0)f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$, η f συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano επομένως η $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

40.α) Έστω $f(x)=e^x+2x-4,\ x\in[0,2]$.

Είναι $f(0)=-3<0,\ f(2)=e^2-2>0$ οπότε $f(0)f(2)<0$, επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,2]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano επομένως, η εξίσωση $f(x)=0 \Leftrightarrow e^x=4-2x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,2)$.

β) Για να αποδείξουμε ότι η εξίσωση έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,2)$, αρκεί να δείξουμε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y=e^x$ και $y=4-2x$ τέμνονται στο διάστημα $(0,2)$. Για το λόγο αυτό κατασκευάζουμε τη γραφική παράσταση της $y=e^x$ και της ευθεία $y=4-2x$. Παρατηρούμε ότι τέμνονται σε σημείο του οποίου η τετμημένη βρίσκεται στο διάστημα $(0,2)$.



41.α) $f(1)=-14<0,\ f(2)=18>0$. Επειδή $f(1)f(2)<0$ και η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική $[1,2]$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano επομένως, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,2)$, άρα $\alpha=1$.

β) $f(-2)=3>0,\ f(-3)=-35<0$. Επειδή $f(-2)f(-3)<0$ και η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική στο $[-3,-2]$ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano επομένως, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(-3,-2)$, άρα $\alpha=-3$.

42.Έστω $f(x)=x^4+3x^3+2x+5$, $x\in[-2,0]$.
Είναι $f(-2)=16-24-4+5=-7<0$, $f(0)=5>0$ οπότε $f(-2)f(0)<0$.
Η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική στο $[-2,0]$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano επομένως η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(-2,0)$.

43.Έστω $h(x)=f(x)-g(x)=x^3-3x^2-3x+6$, $x\in[1,2]$.
Είναι $h(1)=1$, $h(2)=-4$ οπότε $h(1)\cdot h(2)<0$, η h είναι συνεχής ως πολυωνυμική στο $[1,2]$, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano επομένως υπάρχει $x_0\in(1,2):h(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=g(x_0)$.

44.Έστω $h(x)=f(x)-g(x)=\ln(x+1)-3x+2$, $x\in[0,1]$.
Είναι $h(0)=2$, $h(1)=\ln2-1<0$, η h είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων στο άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano επομένως υπάρχει $x_0\in(0,1):h(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=g(x_0)$.

45.α) $f(x)=x^4-x^3+3x^2-4x+1=(x-1)\left(x^3+3x-1\right)$.
Έστω $g(x)=x^3+3x-1,\ x\in[0,1]$. Είναι $g(0)=-1, g(1)=3$ οπότε $g(0)g(1)<0$, η g συνεχής, στο $[0,1]$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano επομένως. υπάρχει $x_0\in(0,1):\ g(x_0)=0\Leftrightarrow\ f(x_0)=0$.

β) $f(x)=x^4-x^3+4x^2-2x-2=(x-1)\left(x^3+4x+2\right)$.
Έστω $g(x)=x^3+4x+2,\ x\in[-1,1]$. Είναι $g(-1)=-3, g(1)=7$ οπότε $g(-1)g(1)<0$ η g συνεχής, στο $[-1,1]$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano επομένως υπάρχει $x_0\in(-1,1):\ g(x_0)=0\Leftrightarrow\ f(x_0)=0$.

γ) $f(x)=x^5-3x^4+3x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x-2)(x^3+x-3)$.

Έστω $g(x)=x^3+x-3,\ x\in[1,2]$. Είναι $g(1)=-1, g(2)=7$ οπότε $g(1)g(2)<0$ η g συνεχής, στο $[1,2]$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano επομένως υπάρχει $x_0\in(1,2): g(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)=0$.

δ) Έχουμε $\eta\mu x\cdot(e^x-e)+e\cdot x-x\cdot e^x=0 \Leftrightarrow \eta\mu x\cdot(e^x-e)-x(e^x-e)=0 \Leftrightarrow$

$(\eta\mu x-x)\cdot(e^x-e)=0 \Leftrightarrow (\eta\mu x-x=0 \Leftrightarrow \eta\mu x=x \Leftrightarrow x=0)$ ή

$e^x-e=0 \Leftrightarrow e^x=e \Leftrightarrow x=1$ οπότε $\eta\mu x\cdot(e^x-e)+e\cdot x-x\cdot e^x\neq 0$ στο $(0,1)$.

Άρα η ζητούμενη ρίζα θα είναι ρίζα της εξίσωσης $2x^3+x-2=0$.
Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=2x^3+x-2$.
Είναι $f(0)=-2<0, f(1)=1>0$ οπότε $f(0)f(1)<0$, η g είναι συνεχής ως πολυωνυμική στο $[0,1]$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Bolzano άρα, υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0 \Leftrightarrow 2x_0^3+x_0-2=0$.

46. Έστω $g(x)=f(x)-(e^2+1)\ln x+x,\ x\in[1,e]$. Είναι $g(1)=f(1)+1$ και $g(e)=f(e)-e^2-1+e$. Όμως $2\ln x-x<f(x)<\ln^2 x+x$, οπότε

$2\ln 1-1<f(1)<\ln^2 1+1 \Leftrightarrow 0<f(1)+1<2 \Leftrightarrow 0<g(1)<2$ και

$2\ln e-e<f(e)<\ln^2 e+e \Leftrightarrow 1-e^2<f(e)-e^2-1+e<2e-e^2$, άρα $g(e)<0$.

Επομένως $g(1)\cdot g(e)<0$, η g συνεχής, στο $[1,e]$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_0\in(1,2): g(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)=0$.

47. Έστω $g(x)=f(x)-e^3x,\ x\in[0,1]$. Είναι $2\le f(0)<e^2 \Rightarrow g(0)>0$, $3\le f(1)<e^3 \Leftrightarrow 3-e^3\le f(1)-e^3<0 \Rightarrow g(1)<0$, οπότε $g(0)g(1)<0$, η g είναι συνεχής, στο $[0,1]$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε η $g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=e^3x$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο $(0,1)$.

48. Έστω $h(x)=f(x)-g(x)-1,\ x\in[\alpha,\beta]$. Η h είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Είναι:

$h(\alpha)=f(\alpha)-g(\alpha)-1=f(\alpha)-f(\beta)-1>1-1=0$ και

$h(\beta)=f(\beta)-g(\beta)-1=f(\beta)-f(\alpha)-1$

$f(\alpha)-f(\beta)>1 \Leftrightarrow f(\beta)-f(\alpha)<-1 \Leftrightarrow f(\beta)-f(\alpha)-1<-2 \Leftrightarrow h(\beta)<-2<0$.

Επομένως $h(\alpha)h(\beta)<0$, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε: $h(\xi)=0\Leftrightarrow f(\xi)-g(\xi)-1=0\Leftrightarrow$ $f(\xi)=g(\xi)+1$.

49.Είναι $f(\xi)\cdot g(\xi)=\xi^2-\xi\Leftrightarrow f(\xi)\cdot g(\xi)-\xi(\xi-1)=0$.

Έστω $h(x)=f(x)\cdot g(x)-x\cdot(x-1)$, $x\in[\alpha,\alpha+1]$.

Η h είναι συνεχής στο $[\alpha,\alpha+1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Είναι:

$h(\alpha)=f(\alpha)\cdot g(\alpha)-\alpha(\alpha-1)=(\alpha-1)\cdot g(\alpha)-\alpha(\alpha-1)=(\alpha-1)(g(\alpha)-\alpha)>0$

($\alpha>1\Leftrightarrow\alpha-1>0$ και $g(\alpha)>\alpha\Leftrightarrow g(\alpha)-\alpha>0$ αφού $\alpha<g(x)<\alpha+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$).

$h(\alpha+1)=f(\alpha+1)\cdot g(\alpha+1)-(\alpha+1)\cdot\alpha=\alpha g(\alpha+1)-(\alpha+1)\cdot\alpha\Leftrightarrow$

$h(\alpha+1)=\alpha\left[g(\alpha+1)-(\alpha+1)\right]<0$. (Είναι: $\alpha>0$ και $\alpha<g(\alpha+1)<\alpha+1\Rightarrow$ $g(\alpha+1)-(\alpha+1)<0$, οπότε $h(\alpha+1)<0$). Επομένως $h(\alpha)\cdot h(\alpha+1)<0$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\alpha+1)$ τέτοιο ώστε: $h(\xi)=0\Leftrightarrow f(\xi)\cdot g(\xi)-\xi(\xi-1)=0\Leftrightarrow f(\xi)\cdot g(\xi)=\xi^2-\xi$.

50.Έστω $g(x)=f^2(x)-f(x)+x$, $x\in[0,2]$.

$g(0)=f^2(0)-f(0)=f(0)(f(0)-1)<0$, $g(2)=f^2(2)-f(2)+2>0$

(αν θέσουμε $f(2)=\omega$ προκύπτει τριώνυμο με $\Delta<0$) οπότε $g(0)g(2)<0$.

Η g είναι συνεχής στο $[0,2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $\xi\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε $g(\xi)=0\Leftrightarrow f^2(\xi)=f(\xi)-\xi$.

51.Έστω $g(x)=f(x)-2x^2$, $x\in[\alpha,\beta]$. Είναι

$g(\alpha)=f(\alpha)-2\alpha^2=2(\beta^2-\alpha^2)>0$, $g(\beta)=f(\beta)-2\beta^2=-2(\beta^2-\alpha^2)<0$,

οπότε $g(\alpha)g(\beta)<0$. Η g είναι συνεχής, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε:

$g(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=2{x_0}^2$.

52.*α)* Έστω $f(x)=(x+2)(x^{10}+1)+(x-2)(x^{20}+1)$, $x\in[-2,2]$.

Είναι $f(-2)=-4(2^{20}+1)<0$, $f(2)=4(2^{10}+1)>0$ οπότε $f(-2)f(2)<0$.

Η f είναι συνεχής στο $\left[-2,2\right]$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε η εξίσωση $f\left(x\right)=0 \Leftrightarrow \frac{x^{10}+1}{x-2}+\frac{x^{20}+1}{x+2}=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\left(-2,2\right)$.

β) Έστω $f\left(x\right)=x\eta\mu x-e^x\sigma\upsilon\nu x$. Είναι $f\left(0\right)=-1<0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}>0$ οπότε $f\left(0\right)f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$. Η f συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει η $f\left(x\right)=0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sigma\upsilon\nu x}-\frac{e^x}{\eta\mu x}=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

53.Έστω $g\left(x\right)=f\left(x\right)\left(x^2-5x+6\right)+2x-5$, $x\in\left[2,3\right]$.
Είναι $g\left(2\right)=-1$, $g\left(3\right)=1$ οπότε $g\left(2\right)g\left(3\right)<0$.
Η g είναι συνεχής στο $\left[1,2\right]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_0\in\left(2,3\right)$ τέτοιο ώστε $g\left(x_0\right)=0 \Leftrightarrow f\left(x_0\right)=\frac{5-2x_0}{{x_0}^2-5x_0+6}$.

54.1^ος^ τρόπος: $\frac{\left(x+1\right)^3}{x-2}+\frac{x}{x-1}=0 \Leftrightarrow \frac{\left(x-1\right)\left(x+1\right)^3+x\left(x-2\right)}{\left(x-1\right)\left(x-2\right)}=0 \quad (1)$

Έστω η συνάρτηση $g\left(x\right)=\left(x-1\right)\left(x+1\right)^3+x\left(x-2\right)$, $x>0$.

- Η g είναι συνεχής στο $\left[0,2\right]$ ως πολυωνυμική.
- $g\left(0\right)=-1<0$, $g\left(2\right)=27>0$ οπότε $g\left(0\right)g\left(2\right)<0$.

Άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε η εξίσωση $g\left(x\right)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\left(0,2\right)$. Παρατηρούμε ότι $g\left(1\right)=-1\neq 0$ άρα το 1 δεν είναι ρίζα επομένως η εξίσωση $g\left(x\right)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\left(0,2\right)$ διαφορετική του 1, άρα και η εξίσωση (1) έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\left(0,2\right)$.

2^ος^ τρόπος:

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g\left(x\right)=\frac{\left(x+1\right)^3}{x-2}+\frac{x}{x-1}$.

Είναι: $\lim\limits_{x\to 1^+}\left[\dfrac{(x+1)^3}{x-2}+\dfrac{x}{x-1}\right]=\lim\limits_{x\to 1^+}\left[\dfrac{(x+1)^3}{x-2}+x\cdot\dfrac{1}{x-1}\right]=-27+\infty=+\infty$ οπότε υπάρχει γ>1 τέτοιος ώστε $g(\gamma)<0$.

$\lim\limits_{x\to 2^-}\left[\dfrac{(x+1)^3}{x-2}+\dfrac{x}{x-1}\right]=\lim\limits_{x\to 2^-}\left[(x+1)^3\cdot\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{x}{x-1}\right]=27\cdot(-\infty)+2=-\infty$

οπότε υπάρχει γ<δ<2 τέτοιος ώστε $g(\delta)>0$. Επομένως $g(\gamma)\cdot g(\delta)<0$.

Η g είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως πολυωνυμική άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θ. Bolzano οπότε η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1,2)\subseteq(0,2)$.

Επομένως η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,2)$.

Αυξημένης δυσκολίας

55.Έστω η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0$, $x\in\mathbb{R}$ περιττού βαθμού $\nu\in\mathbb{N}^*$ με $\alpha_\nu\neq 0$, η οποία είναι συνεχής.

Αν $\alpha_\nu>0$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\alpha_\nu x^\nu\right)=-\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\alpha_\nu x^\nu\right)=+\infty$.

Αν $\alpha_\nu<0$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\alpha_\nu x^\nu\right)=+\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\alpha_\nu x^\nu\right)=-\infty$. Σε κάθε περίπτωση είναι $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.

56.Είναι $f^2(x)+g^2(x)=2x\left[f(x)-g(x)\right]+x^6-2x^2-1\Leftrightarrow$

$f^2(x)+g^2(x)=2xf(x)-2xg(x)+x^6-2x^2-1\Leftrightarrow$

$f^2(x)-2xf(x)+x^2+g^2(x)+2xg(x)+x^2=x^6-1\Leftrightarrow$

$\left(f(x)-x\right)^2+\left(g(x)+x\right)^2=x^6-1\ (1)$

Για $x=1$ η (1) γίνεται $\left(f(1)-1\right)^2+\left(g(1)+1\right)^2=0\Leftrightarrow f(1)=1$ και $g(1)=-1$.

Για $x=-1$ η (1) γίνεται $\left(f(-1)+1\right)^2+\left(g(-1)-1\right)^2=0\Leftrightarrow f(-1)=-1$ και $g(-1)=1$.

Έστω η συνάρτηση $h(x)=4f(x)+5g(x)$ η οποία είναι συνεχής στο $[-1,1]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.
Είναι $h(-1)=4f(-1)+5g(-1)=4\cdot(-1)+5\cdot 1=1>0$ και
$h(1)=4f(1)+5g(1)=4\cdot 1+5\cdot(-1)=-1<0$, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θ. Bolzano οπότε υπάρχει $\xi\in(-1,1)$ τέτοιο ώστε $h(\xi)=0\Leftrightarrow 4f(\xi)+5g(\xi)=0$.

57. Έστω $h(x)=\rho\cdot f(x)+(1-\rho)\cdot g(x)-x$, $x\in[\alpha,\beta]$.
Η h είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.
Είναι: $h(\alpha)=\rho\cdot f(\alpha)+(1-\rho)\cdot g(\alpha)-\alpha=\rho\cdot f(\alpha)+g(\alpha)-\rho\cdot g(\alpha)-f(\alpha)=$
$(\rho-1)\cdot f(\alpha)-g(\alpha)\cdot(\rho-1)=(\rho-1)\cdot(f(\alpha)-g(\alpha))<0$.
(Είναι $f(x)>g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, οπότε: $f(\alpha)>g(\alpha)$ και
$0<\rho<1\Leftrightarrow\rho-1<0$.) $f(1)=\omega$.
Επίσης $h(\beta)=\rho f(\beta)+(1-\rho)g(\beta)-\beta=\rho f(\beta)+(1-\rho)\beta-\beta\Leftrightarrow$
$\rho f(\beta)-\rho\beta=\rho(f(\beta)-\beta)=\rho(f(\beta)-g(\beta))>0$ αφού $f(\beta)>g(\beta)$ και $\rho>0$.
Επομένως $h(\alpha)\cdot h(\beta)<0$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε:
$h(x_0)=0\Leftrightarrow\rho\cdot f(x_0)+(1-\rho)\cdot g(x_0)=x_0$.

58. Έχουμε $f^3(x)-3f^2(x)+5f(x)=x^3-2x^2+4x-5$.

- Για $x=1$ είναι $f^3(1)-3f^2(1)+5f(1)=-2\Leftrightarrow f(1)\left(f^2(1)-3f(1)+5\right)=-2$.

Επειδή $f^2(1)-3f(1)+5>0$ (αν θέσουμε προκύπτει τριώνυμο με $\Delta<0$), είναι $f(1)<0$.

- Για $x=2$ είναι $f^3(2)-3f^2(2)+5f(2)=3\Leftrightarrow f(2)\left(f^2(2)-3f(2)+5\right)=3$.

Επειδή $f^2(2)-3f(2)+5>0$ (όμοια), είναι $f(2)>0$. Επειδή $f(1)f(2)<0$ και f συνεχής στο $[1,2]$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,2)$.

59. Είναι $\frac{1}{x}-e^x+4=0\Leftrightarrow 1-xe^x+4x=0$.
Έστω $f(x)=1-xe^x+4x$, $x\in[0,2]$. Είναι $f(0)=1$, $f(2)=9-2e^2<0$ οπότε $f(0)f(2)<0$.

Η f είναι συνεχής, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε η εξίσωση $f(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x}-e^x+4=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,2)$.

60. Έστω $f(x)=\ln x+x-e^{-2x}$. Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$, άρα υπάρχει $0<\alpha<1$ τέτοιο ώστε $f(\alpha)<0$. Επίσης $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$ οπότε υπάρχει $\beta>1$ τέτοιο, ώστε $f(\beta)>0$. Άρα $f(\alpha)f(\beta)<0$, η f είναι συνεχής, επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε η $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(\alpha,\beta)\subseteq(0,+\infty)$.

61. Έστω $g(x)=f(x)-\dfrac{1}{x}$. Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=-\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$, άρα υπάρχει $0<\alpha<1$ τέτοιο ώστε $f(\alpha)<0$. Είναι $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=+\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x}=0$, άρα υπάρχει $\beta>1$ τέτοιο ώστε $f(\beta)>0$. Επομένως $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$, η f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$,άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θ. Bolzano οπότε η $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(\alpha,\beta)\subseteq(0,+\infty)$.

62. Η συνάρτηση $g(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική. Είναι: $\begin{cases} g(0)=\gamma \\ g(1)=\alpha+\beta+\gamma \end{cases}$ οπότε $g(0)\cdot g(1)=\gamma(\alpha+\beta+\gamma)=\gamma^2+\beta\gamma+\alpha\gamma<0$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho\in(0,1): g(\rho)=0$. Επομένως το τριώνυμο έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα, άρα $\Delta\ge 0$. Αν $\Delta=0$ τότε $\rho=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$ και $g(x)=\alpha\left(x+\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2$.

Όμως $0<\rho<1 \Leftrightarrow 0<-\dfrac{\beta}{2\alpha}<1 \Leftrightarrow \begin{cases} \beta\neq 0 \\ 1+\dfrac{\beta}{2\alpha}>0 \end{cases}$,

$$g(0)\cdot g(1)=\alpha\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2\cdot\alpha\left(1+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\cancel{\alpha^2}\,\frac{\beta^2}{4\cancel{\alpha^2}}\left(1+\frac{\beta}{2\alpha}\right)\Leftrightarrow$$

$$g(0)\cdot g(1)=\frac{\beta^2}{4}\left(1+\frac{\beta}{2\alpha}\right)>0 \text{ άτοπο.}$$

Άρα $\Delta>0 \Leftrightarrow \beta^2-4\alpha\gamma>0 \Leftrightarrow \beta^2>4\alpha\gamma$.

63.α) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \sigma\upsilon\nu x = 1$ και $f(0)=1$.
Άρα η f είναι συνεχής στο 0, είναι συνεχής σαν πράξεις συνεχών συναρτήσεων στα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ επομένως, η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

β) Έστω $g(x)=f(x)-f(x-f(x))$, $x\in[0,\pi]$.

Είναι $g(0)=f(0)-f(f(0))=1-f(1)=1-\sigma\upsilon\nu 1>0$.

$g(\pi)=f(\pi)-f(\pi-f(\pi))=-1-f(\pi+1)=-1-\sigma\upsilon\nu(\pi+1)<0$ οπότε

$g(0)g(\pi)<0$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho\in(0,\pi)$ τέτοιο, ώστε $g(\rho)=0 \Leftrightarrow f(\rho)=f(\rho-f(\rho))$.

64. Έστω $g(2)g(3)<0$. Η f είναι συνεχής στο $[2,3]$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_0\in(2,3)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0$.
Για $x=x_0$ έχουμε: $f(x_0)=\left(x_0^2-5x_0+6\right)g(x_0)=0$, άτοπο αφού $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(2,3)$.

65. Το ρ είναι η μοναδική ρίζα της $f(x)=0$ στο (α,β) άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στα διαστήματα $[\alpha,\rho),(\rho,\beta]$. Επειδή $f(\alpha)f(\beta)>0$, οι αριθμοί $f(\alpha), f(\beta)$ είναι ομόσημοι. Έστω ότι $f(\alpha)>0$, $f(\beta)>0$ τότε $f(x)>0$ στα διαστήματα $[\alpha,\rho),(\rho,\beta]$. Επομένως $f(x)\geq 0$ στο $[\alpha,\beta]$ οπότε $f(x)f(\alpha)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Όμοια αν $f(\alpha)<0$ και $f(\beta)<0$.

66. Επειδή $g(\kappa)+g(\lambda)+g(\mu)=0$ και $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ένα από τα $g(\kappa),g(\lambda),g(\mu)$ θα έχει διαφορετικό πρόσημο από τα άλλα δύο. Έστω $g(\kappa)$ ετερόσημο από τα $g(\lambda),g(\mu)$, τότε $g(\lambda)g(\kappa)<0$. Αν η g ήταν συνεχής, τότε θα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε θα υπήρχε $\xi\in(\kappa,\lambda)$ ή στο (λ,κ) τέτοιο ώστε $g(\xi)=0$ που είναι αδύνατο.

2ος τρόπος: Έστω ότι η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
Μας δίνεται ότι $g(x)\neq 0$ άρα η g διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ οπότε

$(g(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα $g(\kappa)+g(\lambda)+g(\mu)>0$ άτοπο) ή

$(g(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα $g(\kappa)+g(\lambda)+g(\mu)<0$ άτοπο).

Άρα η g δεν είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

67.α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xe^{-2x}+e^{-2x}+1-x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-2x}+\dfrac{1}{xe^{2x}}+\dfrac{1}{x}-1\right)=-1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot\dfrac{f(x)}{x}\right)=-\infty$.

2ος τρόπος:

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xe^{-2x}+e^{-2x}+1-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xe^{-2x}+e^{-2x}+1-x\right)=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\cdot\left(e^{-2x}+\dfrac{1}{xe^{2x}}+\dfrac{1}{x}-1\right)\right]=+\infty\cdot(-1)=-\infty$.

β) Επειδή $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=2$, υπάρχει $\alpha\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\alpha)>0$. Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$, υπάρχει $\beta>1$ τέτοιο ώστε $f(\beta)<0$ οπότε $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$.

Η f συνεχής σαν πράξεις συνεχών συναρτήσεων στο $[\alpha,\beta]$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα στο (α,β).

68.α) Η h είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

β) Η h είναι συνεχής στο

$A=A_f\cap A_g-\{x\in A_g\,/\,g(x)=0\}=\mathbb{R}-\{x\in A_g\,/\,g(x)=0\}$.

Αν το σύνολο A δεν περιλαμβάνει κάθε σημείο του $[0,1]$ τότε δεν είναι συνεχής στο διάστημα αυτό άρα δεν ισχύει το θεώρημα Bolzano αν και $h(0)h(1)<0$. Άρα η υπόθεση της άσκησης δεν έρχεται σε αντίφαση με το θεώρημα Bolzano.

γ) Από τη γραφική παράσταση της f παρατηρούμε ότι υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$. Όμως $h(x)\neq0$ για κάθε $x\in A$ οπότε $x_0\notin A$ και είναι ρίζα της εξίσωσης $g(x)=0$, άρα $g(x_0)=0$.

δ) Όχι δεν μπορούμε να το συμπεράνουμε. Δεν ισχύει το αντίστροφο του θεωρήματος Bolzano.

ε) Από το σχήμα έχουμε $f(0)f(1)<0$ οπότε

$h(0)h(1)<0\Leftrightarrow\dfrac{f(0)}{g(0)}\dfrac{f(1)}{g(1)}<0\Leftrightarrow\dfrac{f(0)f(1)}{g(0)g(1)}<0\Leftrightarrow g(0)g(1)>0$.

69.Είναι $f(0)f(1)<f(0)\Leftrightarrow f(0)\big(f(1)-1\big)<0\Leftrightarrow\big(f(0)-0\big)\big(f(1)-1\big)<0\Leftrightarrow$ $g(0)g(1)<0$ με $g(x)=f(x)-x$, $x\in[0,1]$. Η g είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων στο $[0,1]$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θ. Bolzano οπότε

υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)-x_0=0 \Leftrightarrow$
$f(x_0)=x_0 \Leftrightarrow f^{-1}(x_0)=x_0$. Επομένως η $C_{f^{-1}}$ τέμνει την $y=x$.
Άρα $C_{f^{-1}} \equiv C_1$.

Υπάρχει $x_0 \in [\alpha,\beta] : f(x_0)=g(x_0)$

Αυξημένης δυσκολίας

70.Είναι $e^{-\alpha}f(\alpha)+e^{-\beta}f(\beta)=0 \Leftrightarrow e^{-\alpha}f(\alpha)=-e^{-\beta}f(\beta) \Leftrightarrow$
$f(\alpha)=-e^{\alpha-\beta}f(\beta)$ οπότε $f(\alpha)f(\beta)=-e^{\alpha-\beta}f^2(\beta)\le 0$.
Αν $f(\alpha)f(\beta)=0 \Leftrightarrow f(\alpha)=0$ ή $f(\beta)=0$ η ρίζα είναι το α ή το β.
Αν $f(\alpha)f(\beta)<0$, τότε επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε η $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (α,β).

71.Είναι $f^2(\alpha)+f(\alpha)f(\alpha+1)=0 \Leftrightarrow f(\alpha)f(\alpha+1)=-f^2(\alpha)\le 0$.
Αν $f(\alpha)f(\alpha+1)=0 \Leftrightarrow f(\alpha)=0$ ή $f(\alpha+1)=0$ η ρίζα είναι το α ή το $\alpha+1$.
Αν $f(\alpha)f(\alpha+1)<0$, τότε επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ισχύουν οι υποθέσεις του θ. Bolzano οπότε η $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(\alpha,\alpha+1)$.

72.Έστω $g(x)=f(\eta\mu x)-\eta\mu x$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.
Είναι $g(0)=f(0)\ge 0$, $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=f(1)-1\le 0$ οπότε $g(0)g\left(\frac{\pi}{2}\right)\le 0$.
Αν $g(0)g\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \Leftrightarrow g(0)=0$ ή $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ η ρίζα είναι το 0 ή το $\frac{\pi}{2}$.
Αν $g(0)g\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$, τότε επειδή η g είναι συνεχής, στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε
$g(x_0)=0 \Leftrightarrow f(\eta\mu x_0)=\eta\mu x_0$.
Άρα υπάρχει $x_0\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ τέτοιο ώστε $f(\eta\mu x_0)=\eta\mu x_0$.

73.Έστω $h(x)=f(x)-g(x)$, $x\in[0,1]$.
Είναι $h(0)=f(0)-g(0)$, $h(1)=f(1)-g(1)$.

Όμως $f(0)+f(1)=g(0)+g(1)\Leftrightarrow f(0)-g(0)=-f(1)+g(1)\Leftrightarrow h(0)=-h(1)$, οπότε $h(0)h(1)=-h^2(1)\le 0$. Αν $h(0)h(1)=0\Leftrightarrow x_0=0$ ή $x_0=1$.

Αν $h(0)h(1)<0$, τότε επειδή η h είναι συνεχής στο $[0,1]$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=g(x_0)$.

Άρα γενικά υπάρχει $x_0\in[0,1]$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=g(x_0)$.

74. Έστω $h(x)=f^2(x)-2f(x)+x^2-3$, $x\in[0,2]$.

Είναι $h(0)=f^2(0)-2f(0)-3=(f(0)-3)(f(0)+1)<0$, γιατί $0\le f(0)\le 1$.

$h(2)=f^2(2)-2f(2)+1=(f(2)-1)^2\ge 0$. Δηλαδή $h(0)\cdot h(2)\le 0$.

- Αν $h(0)\cdot h(2)=0\Leftrightarrow h(2)=0$, $(h(0)<0)$ το 2 είναι ρίζα της h.
- Αν $h(0)\cdot h(2)<0$, τότε επειδή η h είναι συνεχής στο $[0,2]$ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $\xi\in(0,2):h(\xi)=0$. Άρα γενικά υπάρχει $\xi\in(0,2]:h(\xi)=0$.

75. Έστω $g(x)=f^2(x)-xf(x)-1+x$, $x\in[1,2]$. Είναι

$g(1)=f^2(1)-f(1)=f(1)(f(1)-1)\le 0$ αφού $0\le g(x)\le 1\Rightarrow 0\le g(1)\le 1$,

$g(2)=f^2(2)-2f(2)+1=(f(2)-1)^2\ge 0$, οπότε $g(1)g(2)\le 0$.

Αν $g(1)g(2)=0\Leftrightarrow g(1)=0$ ή $g(2)=0$ η g έχει ρίζες το 1 ή το 2.

Αν $g(1)g(2)<0$ τότε επειδή η g είναι συνεχής στο $[1,2]$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε, υπάρχει $x_0\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=0$. Άρα γενικά υπάρχει $x_0\in[1,2]$ τέτοιο, ώστε:

$g(x_0)=0\Leftrightarrow f^2(x_0)-x_0f(x_0)=1-x_0$.

76. Έστω $h(x)=f(g(x))+g(f(x))-2x$, $x\in[0,4]$.

Είναι $h(0)=f(g(0))+g(f(0))\ge 0$ αφού $0\le f(x)\le 4, 0\le g(x)\le 4$ (1) οπότε $f(g(0))+g(f(0))\ge 0$,

$h(2)=f(g(2))+g(f(2))-8=\left[f(g(2))-4\right]+\left[g(f(2))-4\right]\le 0$ αφού

$f(g(2))\ge -4\left[f(g(2))-4\right]+\left[g(f(2))-4\right]\le 0$.

Επομένως $h(0)h(2)\le 0$.

Αν $h(0)\cdot h(2)=0 \Leftrightarrow h(0)=0$ ή $h(2)=0$ η h έχει ρίζες το 1 ή το 2.

Αν $h(0)h(2)<0$ τότε επειδή η h είναι συνεχής στο $[1,2]$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε, υπάρχει $x_0 \in (0,2)$ τέτοιο, ώστε $h(x_0)=0$.

Άρα γενικά υπάρχει $\xi \in [1,2]$ τέτοιο, ώστε:

$h(\xi)=0 \Leftrightarrow (f\circ g)(\xi)+(g\circ f)(\xi)=2\xi$.

77.Έστω $f(x)=x-\beta^2\eta\mu x-\beta^2$, $x\in\left[0,2\beta^2\right]$. Η f είναι συνεχής στο $\left[0,2\beta^2\right]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Είναι $f(0)=-\beta^2<0$,

$f\left(2\beta^2\right)=2\beta^2-\beta^2\cdot\eta\mu\left(2\beta^2\right)-\beta^2=\beta^2\left(1-\eta\mu\left(2\beta^2\right)\right)\geq 0$.

Επομένως $f(0)\cdot f\left(2\beta^2\right)\leq 0$. Αν $f(0)\cdot f\left(2\beta^2\right)=0 \overset{f(0)\neq 0}{\Leftrightarrow} f\left(2\beta^2\right)=0$, τότε ο αριθμός $2\beta^2$ είναι ρίζα της f. Αν $f(0)\cdot f\left(2\beta^2\right)<0$, τότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει

$\xi\in\left(0,2\beta^2\right): f(\xi)=0 \Leftrightarrow \xi-\beta^2\eta\mu\xi=\beta^2$.

Άρα, γενικά υπάρχει $\xi\in\left(0,2\beta^2\right]$ τέτοιο ώστε $\xi-\beta^2\eta\mu\xi=\beta^2$.

78.Έστω $g(x)=f(x)-f(x+2)$, $x\in[1,3]$. $g(1)=f(1)-f(3)$,

$g(3)=f(3)-f(5)=f(3)-f(1)=-\left(f(1)-f(3)\right)$. Επομένως $g(1)g(3)\leq 0$.

Αν $g(1)g(3)=0 \Leftrightarrow g(1)=0$ ή $g(3)=0$ η g έχει ρίζες το 1 ή το 3.

Αν $g(1)g(3)<0$ τότε επειδή η g είναι συνεχής στο $[1,3]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε, υπάρχει $\xi\in(1,3)$ τέτοιο, ώστε $g(\xi)=0$. Άρα γενικά υπάρχει $\xi\in[1,3]$ τέτοιο, ώστε:

$g(\xi)=0 \Leftrightarrow f(\xi)=f(\xi+2)$.

79.α) Είναι $f(0)f(2)+\alpha^2=0 \Leftrightarrow f(0)f(2)=-\alpha^2\leq 0$.

Αν $f(0)f(2)<0$ τότε επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,2]$ σαν πράξεις συνεχών συναρτήσεων, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,2)$.

Αν $f(0)f(2)=0 \Leftrightarrow f(0)=0$ ή $f(2)=0$ τότε η f έχει ρίζα το 0 ή το 2.

β) Έστω $g(x)=(x-1)f(x)-xf(x+1)$, $x\in[0,1]$.

Είναι $g(0)=-f(0)$, $g(1)=-f(2)$, οπότε $g(0)g(1)=f(0)f(2)\leq 0$.

Αν $g(0)g(2)=0 \Leftrightarrow g(0)=0$ ή $g(2)=0$ η g έχει ρίζες το 0 ή το 2.

Αν $g(0)g(2)<0$ τότε επειδή η g είναι συνεχής στο $[0,2]$ σαν πράξεις συνεχών συναρτήσεων, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε, υπάρχει $\xi \in (0,2)$ τέτοιο, ώστε $g(\xi)=0$. Άρα γενικά υπάρχει $\xi \in [0,2]$ τέτοιο, ώστε: $g(\xi)=0 \Leftrightarrow (\xi-1)f(\xi)=\xi f(\xi+1)$.

Προβλήματα στο Θ. Bolzano

Αυξημένης δυσκολίας

80. Έστω $f(t), g(t)$ οι συναρτήσεις που εκφράζουν την απόσταση της αμαξοστοιχίας από την Αθήνα, την πρώτη και τη δεύτερη ημέρα αντίστοιχα. Επειδή το δρομολόγιο ξεκινά στις 7 το πρωί και τελειώνει στις 5 το απόγευμα, ισχύει $7 \le t \le 17$. Έστω x km η απόσταση Αθήνα – Αλεξανδρούπολη. Τότε στις 7π.μ. ισχύει $f(7)=0$ γιατί το τραίνο εκείνη τη στιγμή ξεκινά από την Αθήνα και $g(7)=x$ γιατί την άλλη ημέρα στις 7π.μ. το τραίνο απέχει από την Αθήνα x km. Όμοια για τις 17μ.μ., ισχύει: $f(17)=x$ και $g(17)=0$. Πρέπει να αποδείξουμε ότι υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 \in (7,17)$ τέτοια ώστε $f(t_0)=g(t_0)$.

Έστω $h(t)=f(t)-g(t)$, $t \in [7,17]$. Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[7,17]$ και η h είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων είναι: $h(7)=f(7)-g(7)=-x<0$ και $h(17)=f(17)-g(17)=x>0$.

Επομένως $h(7)\cdot h(17)<0$, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $t_0 \in (7,17)$ τέτοιο ώστε:

$h(t_0)=0 \Leftrightarrow f(t_0)-g(t_0)=0 \Leftrightarrow f(t_0)=g(t_0)$.

81. Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει $x_0 \in [0,\pi]$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=f(x_0+\pi)$. Έστω η συνάρτηση $g(x)=f(x)-f(x+\pi)$, $x \in [0,\pi]$.

Είναι $g(0)=f(0)-f(\pi)=-f(\pi)$ και $g(\pi)=f(\pi)-f(2\pi)=f(\pi)$ αφού στην αρχική θέση δεν έχει ξεκινήσει ακόμα και η ταχύτητά του είναι μηδέν.

Επίσης όταν ολοκληρώσει μία περιστροφή ακινητοποιείται άρα $f(2\pi)=0$.

Άρα είναι $g(0)g(\pi)=-f^2(\pi)\le 0$.

Αν $f(\pi)=0$ τότε είναι $f(0)=f(\pi)=f(2\pi)$ και ισχύει το ζητούμενο.

Αν $f(\pi)\ne 0 \Leftrightarrow -f^2(\pi)<0 \Leftrightarrow g(0)g(\pi)<0$ τότε επειδή η g είναι συνεχής στο $[0,2]$ σαν πράξεις συνεχών συναρτήσεων άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρή-

ματος Bolzano υπάρχει $x_0 \in (0,\pi)$ τέτοιο ώστε
$g(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)=f(x_0+\pi)$.

82. Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει χρονική στιγμή t_0 της διαδρομής τέτοια ώστε $f(t_0)+10=f(t_0+1)$ με $t_0 \in [1,2]$ γιατί $t_0 \in [1,3]$ και
$1 \le t_0+1 \le 3 \Leftrightarrow 0 \le t_0 \le 2$.
Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(t)=f(t)-f(t+1)+10$, $t \in [1,2]$ η οποία είναι συνεχής. Είναι $g(1)=f(1)-f(2)+10$ και
$g(2)=f(2)-f(3)+10=f(2)-(20+f(1))+10=-f(1)+f(2)-10=-g(1)$.
Επομένως $g(1)g(2)=-g^2(1) \le 0$.
Αν είναι $g(1)g(2)=0 \Leftrightarrow -g^2(1)=0 \Leftrightarrow g(1)=0=g(2)$ επομένως θα υπάρχουν δύο χρονικές στιγμές $t_0 \in [1,2]$ τέτοιες ώστε $f(t_0)+10=f(t_0+1)$. Αν είναι $g(1)g(2)<0$ τότε επειδή η g είναι συνεχής στο $[1,2]$ σαν πράξεις συνεχών συναρτήσεων τότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 \in [1,2]$ τέτοια ώστε $f(t_0)+10=f(t_0+1)$.

83.α) Έστω (ε), (ζ) οι διαγώνιες ΟΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Τότε για τους συντελεστές διεύθυνσης κάθε ευθείας ισχύει: $\lambda_\varepsilon=\frac{1-0}{1-0}=1$ και $\lambda_\zeta=\frac{1-0}{0-1}=-1$.
Άρα $(\varepsilon): y=x$ και $(\zeta): y=-x+\beta$ με $\beta \in \mathbb{R}$. Το (1,0) ανήκει στην (ζ) άρα
$0=-1+\beta \Leftrightarrow \beta=1$ επομένως $(\zeta): y=-x+1$.
β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και δεν βγαίνει έξω από το τετράγωνο ΟΑΒΓ άρα το σύνολο τιμών της είναι υποσύνολο του $[0,1]$.
Δηλαδή ισχύει $0 \le f(x) \le 1$ για κάθε $x \in [0,1]$.
Έστω οι συναρτήσεις $k(x)=f(x)-x$, $x \in [0,1]$ και
$v(x)=f(x)+x-1$, $x \in [0,1]$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι οι εξισώσεις
$k(x)=0$ και $v(x)=0$ έχουν τουλάχιστον μία ρίζα στο $[0,1]$.
Οι συναρτήσεις k και v είναι συνεχείς ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Ισχύει $k(0)=f(0) \ge 0$ και $k(1)=f(1)-1 \le 0$ άρα $k(0)k(1) \le 0$.
Αν $k(0)k(1)=0$ τότε $k(0)=0$ ή $k(1)=0$. Αν $k(0)k(1)<0$, τότε επειδή η k είναι συνεχής στο $[0,1]$ σαν πράξεις συνεχών συναρτήσεων τότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_1 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε

$k(x_1)=0$. Άρα η εξίσωση $k(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $[0,1]$.

Ισχύει $v(0)=f(0)-1\le 0$ και $v(1)=f(1)\ge 0$ άρα $v(0)v(1)\le 0$.

Αν $v(0)v(1)=0$ τότε $v(0)=0$ ή $v(1)=0$.

Αν $v(0)v(1)<0$, τότε επειδή η v είναι συνεχής στο $[0,2]$ σαν πράξεις συνεχών συναρτήσεων τότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_2\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $v(x_2)=0$.

Άρα η εξίσωση $v(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $[0,1]$.

γ) Είναι $(MB)^2-(MN)^2=(MO)^3+(AM)^3 \Leftrightarrow$

$$\sqrt{(1-x_0)^2+1}^{\,2}-\sqrt{(1-x_0)^2+f^2\left(\frac{1}{2}\right)}^{\,2}=\sqrt{x_0^{\,2}}^{\,3}+\sqrt{(x_0-1)^2}^{\,3}\Leftrightarrow$$

$$\cancel{(1-x_0)^2}+1-\cancel{(1-x_0)^2}-f^2\left(\frac{1}{2}\right)=x_0^{\,3}+(x_0-1)^3\Leftrightarrow$$

$$1-f^2\left(\frac{1}{2}\right)-x_0^{\,3}-(x_0-1)^3=0.$$

Έστω η συνάρτηση $r(x)=1-f^2\left(\frac{1}{2}\right)-x^3-(x-1)^3$, $x\in[0,1]$.

Η r είναι συνεχής ως σύνθεση και πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Είναι

$r(0)=1-f^2\left(\frac{1}{2}\right)+1=2-f^2\left(\frac{1}{2}\right)>0$, $r(1)=-f^2\left(\frac{1}{2}\right)\le 0$ γιατί $0\le f(x)\le 1$.

Άρα $r(0)r(1)\le 0$. Αν $r(0)r(1)=0 \overset{r(0)\neq 0}{\Leftrightarrow} r(1)=0$.

Αν $r(0)r(1)<0$, τότε επειδή η r είναι συνεχής στο $[0,1]$ σαν πράξεις συνεχών συναρτήσεων τότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $r(x_0)=0$.

Περισσότερες από μία ρίζες

84. Έστω $f(x)=x^3+\alpha x^2+2$, $x\in[-1,1]$. Είναι $f(-1)=\alpha+1<-2<0$, $f(0)=0>0$, $f(1)=\alpha+3<0$, οπότε $f(-1)f(0)<0$ και $f(0)f(\pi)<0$.

Η f είναι συνεχής, σαν πράξεις συνεχών συναρτήσεων στα διαστήματα $[-1,0]$ και $[0,1]$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα $(-1,0)$ και $(0,1)$.

85. Έστω $f(x)=x^2e^{-\eta\mu x}+x-e^{-\eta\mu x}\sigma\upsilon\nu x$, $x\in[-\pi,\pi]$.

$f(-\pi)=\pi^2-\pi+1>0,\ f(0)=-1<0,\ f(\pi)=\pi^2+\pi+1>0$, οπότε $f(-\pi)f(0)<0$ και $f(0)f(\pi)<0$.
Η f είναι συνεχής, σαν πράξεις συνεχών συναρτήσεων στα διαστήματα $[-\pi,0]$ και $[0,\pi]$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θ. Bolzano οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\pi,0)$ και $(0,\pi)$.

86.α) Έστω $f(x)=x^3+3x^2-1$, $x\in[-2,1]$. Είναι $f(-2)=3$, $f(0)=-1$, $f(1)=3>0$. Επειδή $f(-2)f(0)<0$, $f(0)f(1)<0$ και η f είναι συνεχής σαν πολυωνυμική στα διαστήματα $[-2,0],[0,1]$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα $(-2,0)$ και $(0,1)$.

β) Έστω $f(x)=2x^4+x^2-1$, $x\in[-2,1]$. Είναι $f(-2)=35$, $f(0)=-1$, $f(1)=2$. Επομένως $f(-2)f(0)<0$, $f(0)f(1)<0$, η f είναι συνεχής σαν πολυωνυμική στα διαστήματα $[-2,0],[0,1]$, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα $(-2,0)$ και $(0,1)$.

γ) Έστω $f(x)=x^6-2x^3+5x^2+x-1$, $x\in[-2,1]$.Είναι $f(-2)=97$, $f(0)=-1$, $f(1)=4$. Επομένως $f(-2)f(0)<0$, $f(0)f(1)<0$, f είναι συνεχής σαν πολυωνυμική στα διαστήματα $[-2,0],[0,1]$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα $(-2,0)$ και $(0,1)$.

87.Έστω $f(x)=x^3-4x^2+x+3$, $x\in[-1,4]$. Είναι $f(-1)=-3$, $f(0)=3$, $f(2)=-3$, $f(4)=7$ οπότε $f(-1)f(0)<0, f(0)f(2)<0, f(2)f(4)<0$.
Η f είναι συνεχής, σαν πολυωνυμική στα διαστήματα $[-1,0],[0,2],[2,4]$, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε η $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα $(-1,0)$, $(0,2)$ και $(2,4)$.

Αυξημένης δυσκολίας

88.α) Η εξίσωση είναι αδύνατη οπότε
$\Delta<0 \Leftrightarrow 16+8(\alpha+\beta)=8(2+\alpha+\beta)<0 \Leftrightarrow \alpha+\beta<-2$.

β) Έστω $f(x)=2x^3+\alpha x^2+\beta$.

Είναι $f(-1)=-2+\alpha+\beta<-4<0$, $f(0)=\beta>0$, $f(1)=2+\alpha+\beta<0$ οπότε $f(-1)f(0)<0$ και $f(0)f(1)<0$.

Η f είναι συνεχής, σαν πολυωνυμική στα διαστήματα $[-1,0],[0,1]$, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε η $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα $(-1,0)$, $(0,1)$.

89. Είναι $f(0)=\lambda>0$, $f(1)=1+\kappa+\lambda<0$, αφού $\kappa+\lambda<-1$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+\kappa x+\lambda\right)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$, υπάρχει $\alpha<0$ τέτοιος, ώστε $f(\alpha)<0$. Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3+\kappa x+\lambda\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$, υπάρχει $\beta>1$ τέτοιο, ώστε $f(\beta)>0$. Η f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha,0]$, $[0,1]$, $[1,\beta]$ και $f(\alpha)f(0)<0$, $f(0)f(1)<0$, $f(1)f(\beta)<0$, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα $(\alpha,0),(0,1),(1,\beta)$. Δηλαδή η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον τρείς ρίζες. Όμως η f είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού και έχει το πολύ τρείς ρίζες, άρα η f έχει ακριβώς τρείς πραγματικές ρίζες.

90. Έστω $g(x)=f^2(x)-9=\left(f(x)-3\right)\left(f(x)+3\right)$.

Είναι $g(-1)=-5<0$, $g(0)=7>0$ οπότε $g(-1)\cdot g(0)<0$.

Η g συνεχής στο $[-1,0]$, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε η $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(-1,0)$.

Έστω $h(x)=f(x)-3$. Είναι $h(0)=1>0$, $h(1)=-7<0$ οπότε $h(0)\cdot h(1)<0$.

Η h συνεχής στο $[0,1]$, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)-3=0$, τότε $g(x_0)=\left(f(x_0)-3\right)\left(f(x_0)+3\right)=0$, άρα η g έχει τουλάχιστον μία ρίζα και στο $(0,1)$.

Σύνολο τιμών

91.α) Εύκολα αποδεικνύεται ότι $f\nearrow[1,3]$.

Επομένως $f\left([1,3]\right)=\left[f(1),f(3)\right]=[8,44]$.

β) Έστω $x_1,x_2\in(4,9)$ με $x_1<x_2$.

Τότε $\sqrt{x_1}<\sqrt{x_2}\Leftrightarrow\sqrt{x_1}-3<\sqrt{x_2}-3\Leftrightarrow$

$\frac{1}{\sqrt{x_1}-3} > \frac{1}{\sqrt{x_2}-3} \Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{x_1}-3} > \frac{5}{\sqrt{x_2}-3} \Leftrightarrow g(x_1) > g(x_2)$, άρα $g \searrow (4,9)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 4^+} g(x) = -5$, $\lim\limits_{x\to 9^-} g(x) = -\infty$ οπότε $g((4,9)) \overset{g\searrow}{=} (-\infty,-5)$.

γ) Εύκολα αποδεικνύεται ότι $f \nearrow \left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.

Επομένως $f\left(\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\right) = \left[f(0), f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = \left[0,\frac{\pi^2}{4}\right]$.

δ) Έστω $x_1, x_2 \in \left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ με $x_1 < x_2$. Τότε

$συνx_1 > συνx_2 \Leftrightarrow 2συνx_1 > 2συνx_2$, $ημx_1 < ημx_2 \Leftrightarrow -3ημx_1 > -3ημx_2$,

άρα $2συνx_1 - 3ημx_1 > 2συνx_2 - 3ημx_2 \Leftrightarrow h(x_1) > h(x_2) \Rightarrow h \searrow \left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ οπότε

$h\left(\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[h\left(\frac{\pi}{2}\right), h\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = \left[-3, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right]$.

92. Είναι $f^2(1) + f^2(4) = 2f(4) - 6f(1) - 10 \Leftrightarrow$

$f^2(1) + 6f(1) + f^2(4) - 2f(4) + 10 = 0 \Leftrightarrow$

$f^2(1) + 6f(1) + 9 + f^2(4) - 2f(4) + 1 = 0 \Leftrightarrow (f(1)+3)^2 + (f(4)-1)^2 = 0$.

Άρα $f(1) = -3$ και $f(4) = 1$. Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[1,4]$ άρα έχει σύνολο τιμών $f(A) = [f(1), f(4)] = [-3,1]$.

93.α) Εύκολα αποδεικνύεται ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \left(e^x + \ln(x+1) - 1\right) = -\infty$,

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(e^x + \ln(x+1) - 1\right) = +\infty$, άρα $f(A) = \mathbb{R}$.

β) Είναι $e^x + \ln(x+1) = 5 \Leftrightarrow f(x) = 0$.

Επειδή $0 \in f(A)$ υπάρχει μοναδικό $x_0 \in A$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.

94.α) Έστω $x_1, x_2 \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ με $x_1 < x_2$, τότε $συνx_1 > συνx_2$,

$ημx_1 < ημx_2 \Leftrightarrow -ημx_1 > -ημx_2$, άρα $f(x_1) > f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Επειδή $f(0)=1$ και $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}$, είναι

$$f\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)\overset{f\searrow}{=}\left[f\left(\frac{\pi}{2}\right),f(0)\right]=\left[-\frac{\pi}{2},1\right].$$

β) $f(0)=1$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}<0$, άρα $f(0)f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα, η ρίζα είναι μοναδική.

95.α) Έστω $x_1,x_2\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ με $x_1<x_2$, τότε $\varepsilon\varphi x_1<\varepsilon\varphi x_2$, $\eta\mu x_1<\eta\mu x_2$ και με πρόσθεση κατά μέλη: $\varepsilon\varphi x_1+\eta\mu x_1<\varepsilon\varphi x_2+\eta\mu x_2 \Leftrightarrow$

$$\varepsilon\varphi x_1+\eta\mu x_1-2<\varepsilon\varphi x_2+\eta\mu x_2-2 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)\Leftrightarrow f\nearrow\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right).$$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}(\varepsilon\varphi x+\eta\mu x-2)\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}\left(\eta\mu x\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}+\eta\mu x-2\right)=-\infty$

και $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\varepsilon\varphi x+\eta\mu x-2)\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\eta\mu x\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}+\eta\mu x-2\right)=+\infty$.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, είναι

$$f(A)=\left(\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}f(x),\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}f(x)\right)=\mathbb{R}.$$

β) Επειδή το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της f και $f\nearrow\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Αυξημένης δυσκολίας

96. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$, για το σύνολο τιμών της ισχύει: $f([0,1])=[f(0),f(1)]$. Άρα $f(0)=0$ και $f(1)=1$.

Επειδή η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$, για το σύνολο τιμών της ισχύει: $g([0,1])=[g(1),g(0)]$. Άρα $g(0)=1$ και $g(1)=0$.

Είναι $(f\circ g)(\xi)=(g\circ f)(\xi)+2\xi^2-1 \Leftrightarrow f(g(\xi))-g(f(\xi))-2\xi^2+1=0$.

Έστω η συνάρτηση $h(x)=f(g(x))-g(f(x))-2x^2+1,\ x\in[0,1]$.

Η h είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ ως σύνθεση και άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $h(0)=f(g(0))-g(f(0))+1=f(1)-g(0)+1=1-1+1=1>0$ και

$h(1)=f(g(1))-g(f(1))-2+1=f(0)-g(1)-1=0-0-1=-1<0$.

Επομένως $h(0)h(1)<0$, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε:

$$h(\xi)=0 \Leftrightarrow (f\circ g)(\xi)=(g\circ f)(\xi)+2\xi^2-1$$

97. Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)$. Όμως το σύνολο τιμών της f είναι το $(0,+\infty)$, άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-x}}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x}\dfrac{1}{f(x)}\right)=0\cdot 0=0$ γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)}\underset{\substack{x\to+\infty\Rightarrow\\ u\to+\infty}}{\overset{f(x)=u}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{1}{u}=0$.

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\eta\mu x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)\left(1-\dfrac{\eta\mu x}{f(x)}\right)\right]=+\infty(1-0)=+\infty$ γιατί για πολύ μεγάλες τιμές του x είναι:

$$\left|\frac{\eta\mu x}{f(x)}\right|=\frac{|\eta\mu x|}{f(x)}\le\frac{1}{f(x)} \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)}\le\frac{\eta\mu x}{f(x)}\le\frac{1}{f(x)}.$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{f(x)}\right)=0$, από το κριτήριο παρεμβολής είναι και

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\eta\mu x}{f(x)}=0.$$

γ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{\ln|x|}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)\dfrac{1}{\ln|x|}\right)=0\cdot 0=0$ γιατί

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\ln|x|}\underset{\substack{x\to-\infty\Rightarrow\\ u\to+\infty}}{\overset{\ln|x|=u}{=}}\lim_{u\to+\infty}\frac{1}{u}=0.$$

98. Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, έχει σύνολο τιμών το $f((0,+\infty))=\left(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right)$. Όμως το σύνολο τιμών της f είναι το $(-\infty,+\infty)$, άρα $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$.

α) i. $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)\ln x\right)=-\infty(-\infty)=+\infty$.

ii. Για κάθε $x>0$ είναι $\left|\frac{ημf(x)}{x}\right|=\frac{|ημf(x)|}{x}\le\frac{1}{x}\Leftrightarrow -\frac{1}{x}\le\frac{ημf(x)}{x}\le\frac{1}{x}$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0$, από το Κριτήριο Παρεμβολής. είναι

$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{ημf(x)}{x}=0$.

β) Έστω $g(x)=f(x)-e^{-x}$, $x>0$.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\left(f(x)-e^{-x}\right)=-\infty-\infty=-\infty$,άρα υπάρχει $\alpha<0$ τέτοιο, ώστε $g(\alpha)<0$. Είναι $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(f(x)-e^{-x}\right)=+\infty-0=+\infty$, άρα υπάρχει $\beta>0$ τέτοιο, ώστε $g(\beta)>0$ οπότε $g(\alpha)g(\beta)<0$. Η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ σαν άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε, η εξίσωση $g(x)=0\Leftrightarrow f(x)=e^{-x}$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (α,β). Επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα, η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

Ακριβώς μία λύση

99.α) Έστω $f(x)=x^3+2x-4$, $x\in[1,2]$. Είναι $f(1)=-1$, $f(2)=8$ οπότε $f(1)f(2)<0$. Η f είναι συνεχής στο $[1,2]$ σαν πολυωνυμική άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1,2)$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η f είναι $\nearrow[1,2]$, οπότε η προηγούμενη ρίζα είναι μοναδική.

β) Έστω $f(x)=x^4+2x^3+3x-8$ $x\in[1,3]$. Είναι $f(1)=-2$, $f(3)=136$ οπότε $f(1)f(3)<0$. Η f είναι συνεχής στο $[1,3]$ σαν πολυωνυμική άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1,3)$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η f είναι $\nearrow[1,3]$, οπότε η προηγούμενη ρίζα είναι μοναδική.

γ) Έστω $f(x)=x^3+\eta\mu x-1$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Είναι $f(0)=-1<0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^3}{8}>0$ οπότε $f(0)f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$. Η f είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ σαν άθροισμα συνεχών συναρτήσεων άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η f είναι $\nearrow\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, οπότε η προηγούμενη ρίζα είναι μοναδική.

δ) Έστω $f(x)=\varepsilon\varphi x+5x-2$, $x\in[0,1]$. Είναι $f(0)=-2$, $f(1)=\varepsilon\varphi 1+3>0$ οπότε $f(0)f(1)<0$. Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ σαν άθροισμα συνεχών συναρτήσεων άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η f είναι $\nearrow[0,1]$, οπότε η προηγούμενη ρίζα είναι μοναδική.

100.Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=2\ln x-3\sigma\upsilon\nu x+4$, η οποία είναι συνεχής στο $(0,1]$. Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(2\ln x-3\sigma\upsilon\nu x+4)=-\infty$, οπότε υπάρχει $\gamma\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\gamma)<0$. Επίσης,

$f(1)=2\ln1-3\sigma\upsilon\nu1+4=4-3\sigma\upsilon\nu1>0$ γιατί $\sigma\upsilon\nu1<1<\frac{4}{3}\Rightarrow3\sigma\upsilon\nu1<4$,

οπότε $4-3\sigma\upsilon\nu1>0$. Άρα $f(\gamma)f(1)<0$. Η f είναι συνεχής στο $[\gamma,1]\subseteq(0,1]$ σαν άθροισμα συνεχών συναρτήσεων άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_0\in(\gamma,1)\subseteq(0,1)$ τέτοιο ώστε:

$f(x_0)=0\Leftrightarrow2\ln x_0-3\sigma\upsilon\nu x_0+4=0$.

Έστω $x_1,x_2\in(0,1)$ με $x_1<x_2$. Είναι $\ln x_1<\ln x_2\Leftrightarrow2\ln x_1<2\ln x_2$ και $\sigma\upsilon\nu x_1>\sigma\upsilon\nu x_2\Leftrightarrow-3\sigma\upsilon\nu x_1<-3\sigma\upsilon\nu x_2\Leftrightarrow-3\sigma\upsilon\nu x_1+4<-3\sigma\upsilon\nu x_2+4$.

Άρα και $2\ln x_1-3\sigma\upsilon\nu x_1+4<2\ln x_2-3\sigma\upsilon\nu x_2+4\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$, άρα η f είναι $\nearrow$ στο $(0,1)$ και η προηγούμενη ρίζα είναι μοναδική.

101.Έστω $f(x)=e^x+x-1821$, $x\in\mathbb{R}$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x+x-1821\right)=-\infty$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x+x-1821\right)=+\infty$, άρα $f(A)=\mathbb{R}$.

Το $0\in f(A)$, άρα η εξίσωση $f(x)=0\Leftrightarrow e^x+x-1821=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα, η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα.

Αυξημένης δυσκολίας

102.Έστω η συνάρτηση $g(x)=\ln\left(e-e^x\right)-x$ με $x\in(-\infty,1)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e-e^x\right)=e-0=e$ οπότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(e-e^x\right)\underset{\substack{x\to-\infty,\ u\to e\\ u\to e}}{\overset{u=e-e^x}{=}}\lim\ln u=1$ και

$\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\ln\left(e-e^x\right)-x\right]=1+\infty=+\infty$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to1^-}\left(e-e^x\right)=0$ και $\lim\limits_{x\to1^-}\left[\ln\left(e-e^x\right)\right]\underset{\substack{x\to1^-,\ h\to0^+\\ h\to0^+}}{\overset{h=e-e^x}{=}}\lim\ln h=-\infty$, άρα

$\lim\limits_{x\to1^-}g(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\left[\ln\left(e-e^x\right)-x\right]=-\infty$.

Για κάθε $x_1,x_2\in(-\infty,1)$ με $x_1<x_2$, είναι

$e^{x_1}<e^{x_2}\Leftrightarrow-e^{x_1}>-e^{x_2}\Leftrightarrow e-e^{x_1}>e-e^{x_2}\overset{\ln\nearrow}{\Leftrightarrow}\ln\left(e-e^{x_1}\right)>\ln\left(e-e^{x_2}\right)$.

Επίσης $-x_1>-x_2$ άρα $\ln\left(e-e^{x_1}\right)-x_1>\ln\left(e-e^{x_2}\right)-x_2\Leftrightarrow g(x_1)>g(x_2)$,

οπότε η g είναι $\searrow$ στο $(-\infty,1)$. Επομένως η συνάρτηση g έχει σύνολο τιμών

$g(A)=\left(\lim\limits_{x\to1^-}g(x),\ \lim\limits_{x\to-\infty}g(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$. Το $0\in\mathbb{R}$ άρα η εξίσωση

$g(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα. Επειδή η g είναι $\searrow$ η ρίζα θα είναι μοναδική.

103.Έστω $g(x)=f(x)+\ln x$, $x\in(0,+\infty)$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$, οπότε

υπάρχει κάποιος πολύ μεγάλος θετικός αριθμός β, τέτοιος ώστε $g(\beta)>0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=-\infty$, οπότε υπάρχει κάποιος θετικός αριθμός $\alpha\in(0,1)$,

τέτοιος ώστε $g(\alpha)<0$ οπότε $g(\alpha)g(\beta)<0$. Η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ σαν άθροισμα συνεχών συναρτήσεων άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε η $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (α,β) που είναι θετικός αριθμός.

104.Έστω $g(x)=f(x)+x,\ x\in\mathbb{R}$. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ ισχύει ότι

$f(x_1)<f(x_2)$ αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε

$f(x_1)+x_1<f(x_2)+x_2\Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2)$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο

$\mathbb{R}$. Αν υποθέσουμε ότι $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ τότε η g θα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Έστω ότι $g(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Τότε $f(x)+x>0 \Leftrightarrow f(x)>-x$ (1)

Όμως $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$ οπότε θα είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ άτοπο.

Η f είναι γνησίως αύξουσα οπότε έχει σύνολο τιμών το

$f((-\infty,+\infty))=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=\left(+\infty, \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$ άτοπο.

Όμοια καταλήγουμε σε άτοπο αν $g(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα και επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

105. Για $x=1$ είναι $f^3(1)-5f^2(1)+7f(1)=-2 \Leftrightarrow f(1)\left(f^2(1)-5f(1)+7\right)=-2.$

Επειδή $f^2(1)-5f(1)+7>0$ (αν θέσουμε $f(1)=\omega$ προκύπτει τριώνυμο με Δ<0), είναι $f(1)<0$.

Για $x=2$ είναι $f^3(2)-5f^2(2)+7f(2)=6 \Leftrightarrow f(2)\left(f^2(2)-5f(2)+7\right)=6$.

Επειδή $f^2(2)-5f(2)+7>0$ (αν θέσουμε $f(2)=\omega$ προκύπτει τριώνυμο με Δ<0), είναι $f(2)>0$ οπότε $f(1)f(2)<0$.

Η f συνεχής στο $[1,2]$, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα x_0 στο $(1,2)$.

Για $x=x_0$ έχουμε

$f^3(x_0)-5f^2(x_0)+7f(x_0)=x_0^3+x_0-4 \Leftrightarrow x_0^3+x_0-4=0$ (1)

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση $h(x)=x^3+x-4$ είναι γνησίως αύξουσα οπότε και 1-1.

$(1)\Leftrightarrow h(x_0)=0$ οπότε x_0 μοναδική ρίζα της h.

Αν η εξίσωση $f(x)=0$ είχε και δεύτερη ρίζα x_2 τότε όμοια θα είχαμε $h(x_2)=0$ δηλαδή η h θα είχε δύο ρίζες το οποίο είναι άτοπο αφού είναι 1-1.

Πρόσημο συνάρτησης

106.α) Έχουμε ότι: $f(x)=0 \Leftrightarrow x^3-2x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=3$ ή $x=-2$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική, με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα προκύπτουν τα αποτελέσματα:

Διάστημα	$(-\infty,-2)$	$(-2,1)$	$(1,3)$	$(3,+\infty)$
Επιλεγμένος αριθμός x_0	-4	0	2	5
$f(x_0)$	-70	6	-4	56
Πρόσημο της f	$-$	$+$	$-$	$+$

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, είναι $f(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{x^2+x+2}=x+1$.
Πρέπει $x+1\geq0\Leftrightarrow x\geq-1$.
Τότε $\left(\sqrt{x^2+x+2}\right)^2=(x+1)^2\Leftrightarrow x^2+x+2=x^2+2x+1\Leftrightarrow x=1$.
Είναι $f(0)=\sqrt{2}-1>0$, η f είναι συνεχής και $f(x)\neq0$ για κάθε $x\in[-1,1)$, άρα $f(x)>0$ για κάθε $x\in[-1,1)$. Είναι $f(2)=2\sqrt{2}-3<0$, η f είναι συνεχής και $f(x)\neq0$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$, άρα $f(x)>0$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$.

107.Έστω ότι η f δεν διατηρεί το πρόσημό στο $\mathbb{R}$, τότε θα υπάρχουν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$, τέτοια ώστε $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα είναι συνεχής και στο $[\alpha,\beta]$, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε θα υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε: $f(x_0)=0$. Η σχέση (1) για $x=x_0$ γίνεται: $2f^2(x_0)-3f(x_0)=x_0{}^2-x_0+4\Leftrightarrow x_0{}^2-x_0+4=0$. Η τελευταία εξίσωση έχει $\Delta=-15<0$ οπότε είναι αδύνατη άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

108.Έστω ότι η f δεν διατηρεί πρόσημο στο $[-1,2]$. Τότε υπάρχουν $\alpha,\beta\in[-1,2]$ με $\alpha<\beta$ τέτοια ώστε $f(\alpha)f(\beta)<0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[-1,2]$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θ. Bolzano οπότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=0$. Τότε $f^3(\xi)-5f^2(\xi)+f(\xi)=\xi^2-7\xi+12\Leftrightarrow$
$\xi^2-7\xi+12=0\Leftrightarrow\xi=3$ ή $\xi=4$ που απορρίπτονται αφού $\xi\in(\alpha,\beta)\subseteq(-1,2)$.

109.Έστω ότι η f δεν διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Τότε υπάρχουν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$ τέτοια ώστε $f(\alpha)f(\beta)<0$. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε συνεχής και στο $[\alpha.\beta]$άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano επομένως υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=0$. Τότε $f^2(\xi)+3f(\xi)\geq\xi^4+e^{\xi}+2\Leftrightarrow$
$\xi^4+e^{\xi}+2\leq0$ που είναι άτοπο, αφού $\xi^4+e^{\xi}+2>0$.

110.α) Το τριώνυμο x^2+2x+4 έχει $\Delta=-16<0$, άρα $x^2+2x+4>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε $A_f=\mathbb{R}$.

β) $f(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{x^2+2x+4}-x=0\Leftrightarrow\sqrt{x^2+2x+4}=x\ \ (1)$. Αν $x<0$ η (1) είναι αδύνατη. Αν $x\geq 0$, έχουμε: $\left(\sqrt{x^2+2x+4}\right)^2=x^2\Leftrightarrow$

$x^2+2x+4=x^2\Leftrightarrow x=-2$ που απορρίπτεται.
Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ είναι αδύνατη.

γ) Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$, $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Επειδή $f(0)=2>0$, είναι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Αυξημένης δυσκολίας

111. Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$, $f(x)\neq 0$ στο $\mathbb{R}$ οπότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Όμως $f(3)=5>0$ άρα $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(f(4)+3\right)x^2-3x+1}{x+5}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(f(4)+3\right)x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\left(f(4)+3\right)x\right)=-\infty.$$

112. Επειδή $-1,4$ διαδοχικές ρίζες της $f(x)=0$, η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-1,4)$. Όμως $f(3)=-5<0$ οπότε $f(x)<0$ για κάθε $x\in(-1,4)$.

Άρα $f(0)<0$ και $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(0)\cdot x^3+2x+5}{x^2+4}=\lim_{x\to+\infty}\left(f(0)\cdot x\right)=-\infty$.

113. Επειδή η f είναι συνεχής συνάρτηση με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(1,10)$ η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(1,10)$. Όμως $f(5)=-4<0$ άρα $f(x)<0$ για κάθε $x\in(1,10)$. Επομένως $f(2)<0, f(6)<0$ και

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(2)x^4-f(8)x^3+7x^2+5}{f(6)x^3-x^2+5x-9}=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(2)x^{\cancel{4}}}{f(6)\cancel{x^3}}=-\infty.$$

Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών (Θ.Ε.Τ.)

114. Η f είναι συνεχής στο $[0,5]$ ως σύνθεση και πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Είναι $f(0)=-2$ και $f(5)=40-2\sigma\upsilon\nu 5\pi=42$. Άρα $f(0)<1<f(5)$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών επομένως υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(0,5)$, τέτοιο ώστε: $f(x_0)=1$.

115. Είναι $f(1)=-1$, $f(2)=256$ οπότε $f(1)<100<256$.
Η f συνεχής στο $[1,2]$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών επομένως υπάρχει $x_0\in(1,2): f(x_0)=100$.

Αυξημένης δυσκολίας

116. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+2)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$ οπότε $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

117. Αφού η f είναι συνεχής στο $[1,8]$ θα ισχύει $f(1)=\lim\limits_{x\to1}f(x)$. Όμως

$$\lim_{x\to1}\frac{6x^2-6x}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{6x\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)}=3,\ \lim_{x\to1}\frac{6(\sqrt{x}-1)}{(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{6\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}+1)}=3.$$

Από το Κριτήριο Παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to1}f(x)=3=f(1)\quad(2)$

Οπότε $f(1)\cdot f(8)=27\overset{(2)}{\Leftrightarrow}f(8)=9$.
Η f συνεχής στο $[1,8]$, $f(1)\neq f(8)$ και $f(1)<7<f(8)$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(1,8)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=7$.

118. Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $[2,3]$. Επειδή $f(2)\neq f(3)$ και $f(2)<\frac{5}{2}<f(3)$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών οπότε υπάρχει $x_0\in(2,3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=\frac{5}{2}$. Για $x=x_0$, η (1) γίνεται:

$$f^2(x_0)-3f(x_0)=x_0^2-2x_0\Leftrightarrow\frac{25}{4}-\frac{15}{2}=x_0^2-2x_0\Leftrightarrow4x_0^2-8x_0+5=0$$

η οποία είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$ (Δ<0) άρα η f δεν είναι συνεχής.

119. Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $[0,4]$.
Είναι $f(0)\neq f(4)$ και $f(0)=0<2<f(4)=4$ οπότε θα ίσχυαν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών άρα θα υπήρχε $x_0\in(0,4)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=2$.
Τότε $f^2(x_0)-4f(x_0)-x_0^2=2x_0\Leftrightarrow\ 4-8-x_0^2=2x_0\Leftrightarrow x_0^2+2x_0+4=0$ που είναι αδύνατο (Δ<0).

120. Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $[1,2]$.
Είναι $f(1) \neq f(2)$ και $f(1)=3<4<f(2)=5$ οπότε θα ίσχυαν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών άρα θα υπήρχε $x_0 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=4$ άτοπο αφού η εξίσωση $f(x)=4$ είναι αδύνατη.

121.α) Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη σε καθένα από τα διαστήματα $[-2,3]$, $[3,5]$, $[5,8]$ και $f(-2)<f(3)$, $f(3)>f(5)$ και $f(5)<f(8)$, είναι $f \nearrow [-2,3]$, $\searrow [3,5]$ και $\nearrow [5,8]$.

β) Είναι $f([-2,3]) \overset{f\nearrow}{=} [-2,4]$, $f([3,5]) \overset{f\searrow}{=} [1,4]$, $f([5,8]) \overset{f\nearrow}{=} [1,2]$,
άρα $f([-2,8]) = [-2,4] \cup [1,4] \cup [1,2] = [-2,4]$.

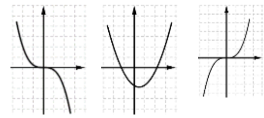
γ) Επειδή $0 \in f([-2,3])$, υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (0,2) : f(x_1)=0$.
Επειδή $0 \notin f([3,5]) = [1,4]$ η $f(x)=0$ είναι αδύνατη στο $[3,5]$.
Επειδή $0 \notin f([5,8]) = [1,2]$, η $f(x)=0$ είναι αδύνατη στο $[5,8]$.
Επομένως η $f(x)=0$ έχει ακριβώς μία ρίζα.

122. Αν η f δεν είναι σταθερή τότε το σύνολο τιμών της θα είναι της μορφής $[m,M] \subseteq \mathbb{Q}$ που είναι άτοπο αφού σε ένα κλειστό διάστημα υπάρχουν και άρρητοι. Άρα η f είναι σταθερή και επειδή $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$, είναι $f(x)=\frac{1}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

123.α) Αν η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ τότε για κάθε $\alpha,\beta,\gamma \in \Delta$ με $\alpha<\beta<\gamma$ είναι $f(\alpha)<f(\beta)<f(\gamma)$ ή $f(\alpha)>f(\beta)>f(\gamma)$. Άρα αν δεν είναι γνησίως μονότονη το $f(\beta)$ δεν θα είναι μεταξύ των τιμών $f(\alpha)$ και $f(\gamma)$.
β) Έστω ότι η f δεν είναι γνησίως μονότονη στο Δ, τότε θα υπάρχουν $\alpha,\beta,\gamma \in \Delta$ με $\alpha<\beta<\gamma$ τέτοια ώστε το $f(\beta)$ να μην είναι μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\gamma)$, τότε:
Αν $f(\alpha)<f(\gamma)$:
- Αν $f(\beta)<f(\alpha)<f(\gamma)$ τότε από το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών υπάρχει $x_1 \in (\beta,\gamma)$ τέτοιο ώστε $f(x_1)=f(\alpha) \overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow} x_1=\alpha$ άτοπο γιατί $\alpha<\beta<x_1<\gamma$.
- Αν $f(\alpha)<f(\gamma)<f(\beta)$ τότε από το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών υπάρχει $x_2 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_2)=f(\gamma) \overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow} x_2=\gamma$ άτοπο γιατί $\alpha<x_2<\beta<\gamma$.

Ομοίως αν $f(\alpha)>f(\gamma)$ καταλήγουμε με δύο περιπτώσεις σε άτοπο.

γ) Από τη στιγμή που η συνάρτηση είναι 1-1 τότε κάθε οριζόντια ευθεία την τέμνει το πολύ σε ένα σημείο. Επειδή είναι και συνεχής σημαίνει ότι η γραφική παράσταση σχεδιάζεται μονοκονδυλιά, δηλαδή δεν κάνει άλματα ούτε έχει τρύπες. Οπότε θα πρέπει η γραφική παράσταση να «ανεβαίνει» ή να «κατεβαίνει».



124. Είναι $f(x) \geq f(0) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα υπάρχουν αριθμοί $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^*$ με $x_1 < 0 < x_2$ τέτοιοι ώστε $f(x_1) > 1$ και $f(x_2) > 1$. Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις: Αν $f(x_1) = f(x_2)$ τότε προφανώς η f δεν είναι 1-1. Αν $f(x_1) > f(x_2) > f(0) = 1$ τότε επειδή η f είναι συνεχής στο $[x_1, 0]$ θα ισχύει το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών οπότε θα υπάρχει $x_3 \in (x_1, 0)$ τέτοιο ώστε $f(x_3) = f(x_2)$ άρα η f δεν είναι 1-1. Αν $f(x_2) > f(x_1) > f(0) = 1$ τότε επειδή η f είναι συνεχής στο $[x_1, 0]$ θα ισχύει το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών οπότε θα υπάρχει $x_4 \in (0, x_2)$ τέτοιο ώστε $f(x_4) = f(x_1)$ οπότε η f δεν είναι 1-1. Όμοια αν $x_2 < 0 < x_1$.

Εύρεση τύπου συνάρτησης

Αυξημένης δυσκολίας

125. α) Αν $x \geq 0$ τότε $f(x) = \sqrt[3]{x}$ και αν $x < 0$ τότε $f(x) = -\sqrt[3]{-x}$.

β) Αν $x \geq 0$ τότε $f(x) = -\sqrt[3]{x}$ και αν $x < 0$ τότε $f(x) = \sqrt[3]{-x}$.

γ) Είναι $f^3(x) = -1 - x^2 < 0 \Rightarrow f(x) < 0,\ x \in \mathbb{R}$ άρα $f(x) = -\sqrt[3]{1 + x^2}$.

δ) $f^3(x) = -e^{3x} < 0 \Rightarrow f(x) < 0$, $x \in \mathbb{R}$ άρα $f(x) = -\sqrt[3]{e^{3x}} = -e^x$.

ε) Αν $x \geq 0$ τότε $f(x) = x$ και αν $x < 0$ τότε $f(x) = -x$.

στ) Αν $x \geq 0$ τότε $f^9(x) = (-x)^9 \Leftrightarrow f(x) = -\sqrt[9]{x^9} = -x$ και αν $x < 0$ τότε $f^9(x) = (-x)^9 \Leftrightarrow f(x) = \sqrt[9]{(-x)^9} = -x$.

126. α) Για κάθε $x \in [-3, 3]$ ισχύει $f^2(x) = 9 - x^2 \quad (1)$

Είναι: $f(x) = 0 \Leftrightarrow f^2(x) = 0$ και από την $(1): 9 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ή $x = -3$.

Επομένως οι ρίζες της $f(x) = 0$ στο $[-3, 3]$ είναι μόνο οι αριθμοί -3 και 3.

β) Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-3, 3)$.

Τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in (-3, 3)$ με $x_1 < x_2$ ώστε τα $f(x_1), f(x_2)$ να είναι

ετερόσημοι αριθμοί. Η f είναι συνεχής στο $\left[x_1,x_2\right]\subseteq\left[-3,3\right]$, $f\left(x_1\right)\cdot f\left(x_2\right)<0$ άρα ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θ. Bolzano στο $\left[x_1,x_2\right]\subseteq\left[-3,3\right]$.
Επομένως υπάρχει $\theta\in\left(x_1,x_2\right)$ ώστε $f\left(\theta\right)=0$. Στην (1) για $x=\theta$ είναι:
$f^2\left(\theta\right)=9-\theta^2\Leftrightarrow 9-\theta^2=0\Leftrightarrow\theta^2=9\Leftrightarrow\theta=3$ ή $\theta=-3$ άτοπο διότι $\theta\in\left(x_1,x_2\right)\subseteq\left(-3,3\right)$. Άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\left(-3,3\right)$.
γ) Η f είναι συνεχής και διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\left(-3,3\right)$, $f\left(0\right)=-3$ άρα $f\left(x\right)<0$ για κάθε $x\in\left(-3,3\right)$.
Από την (1) είναι $f^2\left(x\right)=9-x^2\Leftrightarrow\left|f\left(x\right)\right|=\sqrt{9-x^2}\Leftrightarrow$
$-f\left(x\right)=\sqrt{9-x^2}\Leftrightarrow f\left(x\right)=-\sqrt{9-x^2}$ για κάθε $x\in\left(0,3\right)$.
Όμως $f\left(-3\right)=f\left(3\right)=0$ οπότε $f\left(x\right)=-\sqrt{9-x^2}$ για κάθε $x\in\left[-3,3\right]$.

127. α) Στη δοσμένη σχέση για $x=1$ έχουμε: $f^2\left(1\right)=1+2-4f\left(1\right)-3\Leftrightarrow$
$f^2\left(1\right)=-4f\left(1\right)\Leftrightarrow f\left(1\right)\left(f\left(1\right)+4\right)=0\Leftrightarrow f\left(1\right)=0$ (απορρίπτεται, γιατί $f\left(x\right)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$) ή $f\left(1\right)=-4$.
β) Είναι $f^2\left(x\right)=x^4+2x^2-4f\left(x\right)-3\Leftrightarrow f^2\left(x\right)+4f\left(x\right)=x^4+2x^2-3\Leftrightarrow$
$f^2\left(x\right)+4f\left(x\right)+4=x^4+2x^2+1\Leftrightarrow\left(f\left(x\right)+2\right)^2=\left(x^2+1\right)^2$.
Έστω $g\left(x\right)=f\left(x\right)+2$, η g είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών και $g\left(x\right)\neq 0$ γιατί $g^2\left(x\right)=\left(x^2+1\right)^2\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα η g διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$, $g\left(1\right)=f\left(1\right)+2=-4+2<0$ οπότε $g\left(x\right)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Επομένως $g^2\left(x\right)=\left(x^2+1\right)^2\Leftrightarrow g\left(x\right)=-x^2-1\Leftrightarrow$
$f\left(x\right)+2=-x^2-1\Leftrightarrow f\left(x\right)=-x^2-3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

128. α) $f^2\left(x\right)=e^{2x}>0\Rightarrow f\left(x\right)\neq 0$, η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Είναι $f\left(0\right)=1>0\Rightarrow f\left(x\right)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα $f\left(x\right)=\sqrt{e^{2x}}=e^x$.
β) $f^2\left(x\right)=x^2+3>0\Rightarrow f\left(x\right)\neq 0$, η f είναι συνεχής, στο $\mathbb{R}$ οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Είναι $f\left(1\right)=-2<0\Rightarrow f\left(x\right)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα $f\left(x\right)=-\sqrt{x^2+3}$.

γ) $f^2(x)=\eta\mu^2 x+1>0 \Rightarrow f(x)\neq 0$, η f είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο. Είναι $f(0)=1>0 \Rightarrow f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα $f(x)=\sqrt{\eta\mu^2 x+1}$.

δ) $f^2(x)=x^4+x^2+2>0 \Leftrightarrow f(x)\neq 0$ η f είναι συνεχής, στο $\mathbb{R}$ οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Είναι $f(0)=-2<0 \Rightarrow f(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα $f(x)=-\sqrt{x^4+x^2+2}$.

129. $f^2(x)-x^4=-2f(x) \Leftrightarrow (f(x)+1)^2=x^4+1\neq 0$, άρα $f(x)+1\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Η συνάρτηση $g(x)=f(x)+1$ είναι συνεχής σαν πράξεις συνεχών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$ οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.
Επειδή $g(0)=f(0)+1=-1<0$ είναι $g(x)<0$ άρα
$f(x)+1=-\sqrt{x^4+1} \Leftrightarrow f(x)=-\sqrt{x^4+1}-1,\ x\in\mathbb{R}$.

130. $f^2(x)-4f(x)\eta\mu x=x^4+4\sigma\upsilon\nu^2 x=x^4+4-4\eta\mu^2 x \Leftrightarrow$
$f^2(x)-4f(x)\eta\mu x+4\eta\mu^2 x=x^4+4 \Leftrightarrow (f(x)-2\eta\mu x)^2=x^4+4\neq 0$, άρα η συνάρτηση $f(x)-2\eta\mu x$, επειδή είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο.
Είναι $f(0)-2\eta\mu 0=2>0$, άρα $f(x)-2\eta\mu x>0$, οπότε
$f(x)-2\eta\mu x=\sqrt{x^4+4} \Leftrightarrow f(x)=2\eta\mu x+\sqrt{x^4+4},\ x\in\mathbb{R}$.

131. α) $f^2(x)+xf(x)=4 \Leftrightarrow \left(f(x)+\frac{x}{2}\right)^2=\frac{x^2}{4}+4=\frac{x^2+16}{4}>0$, άρα
$g(x)=f(x)+\frac{x}{2}\neq 0$. Η g είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα αυτό.

β) Είναι $g(3)=f(3)+\frac{3}{2}=-\frac{5}{2}<0$, άρα $g(x)<0$ για κάθε $x\geq 0$, οπότε
$\left(f(x)+\frac{x}{2}\right)^2=\frac{x^2+16}{4} \Leftrightarrow f(x)+\frac{x}{2}=-\sqrt{\frac{x^2+16}{4}} \Leftrightarrow f(x)=-\frac{x+\sqrt{x^2+16}}{2}$,
$x\geq 0$.

γ) Εύκολα αποδεικνύεται ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$.
$f(0)=-2$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, άρα $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), f(0)\right]=(-\infty,-2]$.
Αν $k\leq -2$, τότε η εξίσωση $f(x)=k$ έχει μία ρίζα και αν $k>-2$ είναι αδύνατη.

132. α) $f^2(x)=(x-1)^2>0$ για κάθε $x\neq 1$, άρα $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\neq 1$.
Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,1)$ και $(1,+\infty)$. Είναι $f(x)=\pm(x-1)$ για κάθε $x<1$ και $f(x)=\pm(x-1)$ για κάθε $x>1$. Για $x=1$ είναι $f(1)=0$ οπότε οι ζητούμενες συναρτήσεις είναι: $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<1 \\ 0, & x=1 \\ x-1, & x>1 \end{cases}=x-1,\ x\in\mathbb{R}$ ή

$f(x)=\begin{cases} x-1, & x<1 \\ 0, & x=1 \\ -x+1, & x>1 \end{cases}=-|x-1|$ ή $f(x)=\begin{cases} -x+1, & x<1 \\ 0, & x=1 \\ x-1, & x>1 \end{cases}=|x-1|$ ή

$f(x)=\begin{cases} -x+1, & x<1 \\ 0, & x=1 \\ -x+1, & x>1 \end{cases}=-x+1,\ x\in\mathbb{R}$.

β) $f^2(x)=x^6>0$ για κάθε $x\neq 0$, άρα $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\neq 0$.
Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$. Είναι $f(x)=\pm x^3$ για κάθε $x<0$ και $f(x)=\pm x^3$ για κάθε $x>0$. Για $x=0$ είναι $f(0)=0$ οπότε οι ζητούμενες συναρτήσεις είναι: $f(x)=\begin{cases} x^3, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x^3, & x>0 \end{cases}=x^3,\ x\in\mathbb{R}$ ή $f(x)=\begin{cases} x^3, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ -x^3, & x>0 \end{cases}$ ή

$f(x)=\begin{cases} -x^3, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x^3, & x>0 \end{cases}$ ή $f(x)=\begin{cases} -x^3, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ -x^3, & x>0 \end{cases}=-x^3,\ x\in\mathbb{R}$.

γ) Είναι $f^2(x)=(x-2)^2 \Leftrightarrow |f(x)|=|x-2|>0$ για κάθε $x\neq 2$, άρα $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\neq 2$. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,2)$ και $(2,+\infty)$.

Είναι $f(0)=2>0$ οπότε $f(x)=-x+2,\ x<2$.

Για κάθε $x>2$ είναι $f(x)=\pm(x-2)$, για $x=2$ είναι $f(2)=0$ οπότε οι ζητούμενες συναρτήσεις είναι:

$$f(x)=\begin{cases} -x+2, & x<2 \\ 0, & x=2 \\ x-2, & x>2 \end{cases}=|x-2| \text{ ή } f(x)=\begin{cases} -x+2, & x<2 \\ 0, & x=2 \\ -x+2, & x>2 \end{cases}=-x+2,\ x\in\mathbb{R}$$

δ) $f^2(x)=(x-3)^2 \Leftrightarrow |f(x)|=|x-3|>0$ (1) για κάθε $x\neq 3$, άρα $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\neq 3$. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,3)$ και $(3,+\infty)$. Είναι $f(0)=3>0, f(6)=3>0$ οπότε $f(x)>0$ σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,3)$ και $(3,+\infty)$.
Άρα $f(x)=x-3$, $x\neq 3$. Αν θέσουμε $x=3$ στην (1) έχουμε
$|f(3)|=0 \Leftrightarrow f(3)=0$ οπότε $f(x)=x-3,\ x\in\mathbb{R}$.

133. $f^2(x)=x^2+2f(x) \Leftrightarrow f^2(x)-2f(x)=x^2 \Leftrightarrow f^2(x)-2f(x)+1=x^2+1 \Leftrightarrow$ $(f(x)-1)^2=x^2+1 \Leftrightarrow |f(x)-1|=\sqrt{x^2+1}>0$ (2). Είναι $x^2+1\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε $f(x)-1\neq 0$. Η συνάρτηση $f(x)-1$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο, άρα από τη σχέση (2), προκύπτει ότι:
$\left(f(x)-1=\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x)=1+\sqrt{x^2+1}, x\in\mathbb{R}\right)$ ή
$\left(f(x)-1=-\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x)=1-\sqrt{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}\right)$.

134. $f^2(x)-2f(x)=x^2-2x \Leftrightarrow f^2(x)-2f(x)+1=x^2-2x+1 \Leftrightarrow$ $(f(x)-1)^2=(x-1)^2 \Leftrightarrow |f(x)-1|=|x-1|$ (1). Είναι $|x-1|>0$ για κάθε $x\neq 1$, άρα $f(x)-1\neq 0$. Ησυνάρτηση $g(x)=f(x)-1$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,1)$ και $(1,+\infty)$.
Όμως $g(3)=f(3)-1=-3<0$ οπότε $g(x)<0 \Leftrightarrow f(x)-1<0$ για κάθε $x>1$.
Τότε από τη σχέση (1) έχουμε $-f(x)+1=x-1 \Leftrightarrow f(x)=2-x$, $x>1$.
Για $x<1$ έχουμε:
- Αν $g(x)>0 \Leftrightarrow f(x)-1>0$ τότε $(1) \Rightarrow f(x)-1=-x+1$ οπότε $f(x)=-x+2$.
- Αν $g(x)<0 \Leftrightarrow f(x)-1<0$ τότε $(1) \Rightarrow -f(x)+1=-x+1$ οπότε $f(x)=x$. Όμως $|f(1)-1|=0 \Leftrightarrow f(1)-1=0 \Leftrightarrow f(1)=1$ οπότε

$$f(x)=\begin{cases} 2-x, & x<1 \\ 1, & x=1 \\ 2-x, & x>1 \end{cases} = 2-x,\ x\in\mathbb{R} \ \text{ή}\ f(x)=\begin{cases} x, & x<1 \\ 1, & x=1 \\ 2-x, & x>1 \end{cases}.$$

135. $f^2(x)-2xf(x)+9=0 \Leftrightarrow f^2(x)-2xf(x)+x^2=x^2-9 \Leftrightarrow$ $(f(x)-x)^2=x^2-9 \Leftrightarrow |f(x)-x|=\sqrt{x^2-9}$ (1)

Έστω $g(x)=f(x)-x,\ x\in A$, τότε $(1)\Leftrightarrow |g(x)|=\sqrt{x^2-9}\ \ (2)$

Είναι $g(x)=0\Leftrightarrow \sqrt{x^2-9}=0\Leftrightarrow x^2=9\Leftrightarrow x=\pm 3$.

Για κάθε $x\in(-\infty,-3),(3,+\infty)$ είναι $g(x)\neq 0$, η g είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,-3)$, $(3,+\infty)$, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα αυτά. Είναι $g(-5)=f(-5)+5=4>0\Rightarrow g(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,-3)$, οπότε η (2) γίνεται

$g(x)=\sqrt{x^2-9}\Leftrightarrow f(x)-x=\sqrt{x^2-9}\Leftrightarrow f(x)=x+=\sqrt{x^2-9},\ x<-3$.

Είναι $g(5)=f(5)-5=4>0\Rightarrow g(x)>0$ για κάθε $x\in(3,+\infty)$, οπότε η (2) γίνεται $g(x)=\sqrt{x^2-9}\Leftrightarrow f(x)-x=\sqrt{x^2-9}\Leftrightarrow f(x)=x+\sqrt{x^2-9},\ x>3$.

Όμως $g(3)=0\Leftrightarrow f(3)-3=0\Leftrightarrow f(3)=3, g(-3)=0\Leftrightarrow f(-3)+3=0\Leftrightarrow$ $f(-3)=-3$ οπότε:

$$f(x)=\begin{cases} x+\sqrt{x^2-9}, & x<-3 \text{ ή } x>3 \\ 3 & ,\quad x=3 \\ -3 & ,\quad x=-3 \end{cases} = x+\sqrt{x^2-9},\ x\in(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)$$

136. α) Επειδή η f είναι περιττή ισχύει: $f(-x)=-f(x)\ \ (1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Για $x=0$ είναι $f(0)=-f(0)\Leftrightarrow 2f(0)=0\Leftrightarrow f(0)=0$.

Η $x=0$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ οπότε $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Η f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από αυτά τα διαστήματα Δίνεται $f(2)<0$ οπότε $f(x)<0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$. Η σχέση για $x=2$ γίνεται: $f(-2)=-f(2)>0$, άρα $f(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)$.

β) Είναι $g(x)=0\Leftrightarrow f(x)(x^2-4)=0\Leftrightarrow f(x)=0\Leftrightarrow x=0$ ή

$x^2-4=0\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x=\pm 2$.

Για κάθε $x\in(-\infty,-2)\cup(0,2)$ είναι $g(x)>0$, ενώ για κάθε $x\in(-2,0)\cup(2,+\infty)$ είναι $g(x)<0$.

x	$-\infty$ -2	0	2	$+\infty$
$f(x)$	+	+	–	–
x^2-4	+	–	–	+
$g(x)$	+	–	+	–

γ) Είναι $f^2(x)=x^8 \Leftrightarrow |f(x)|=x^4$. Όμως $f(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)$, ενώ $f(x)<0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, άρα: $f(x)=x^4$ για κάθε $x<0$ και $f(x)=-x^4$ για κάθε $x>0$. Επειδή $f(0)=0$, ο τύπος της f είναι $f(x)=\begin{cases} x^4 & , x<0 \\ 0 & , x=0 \\ -x^4 & , x>0 \end{cases}$.

137. α) $e^{f(x)}-x^2e^{-f(x)}=2 \Leftrightarrow e^{f(x)}-x^2\dfrac{1}{e^{f(x)}}=2 \Leftrightarrow \left(e^{f(x)}\right)^2-x^2=2e^{f(x)} \Leftrightarrow$

$\left(e^{f(x)}\right)^2-2e^{f(x)}+1=x^2+1 \Leftrightarrow \left(e^{f(x)}-1\right)^2=x^2+1 \Leftrightarrow \left|e^{f(x)}-1\right|=\sqrt{x^2+1}$ (1)

Είναι $x^2+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε $g(x)=e^{f(x)}-1\neq 0$.

Η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Είναι $g(0)=e^{f(0)}-1=2-1=1>0$, άρα $g(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε η (1) γίνεται: $e^{f(x)}-1=\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow e^{f(x)}=\sqrt{x^2+1}+1 \Leftrightarrow f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)$.

β) Για κάθε $0\le x_1<x_2$ είναι $x_1^2<x_2^2 \Leftrightarrow x_1^2+1<x_2^2+1 \Leftrightarrow$

$\sqrt{x_1^2+1}<\sqrt{x_2^2+1} \Leftrightarrow \sqrt{x_1^2+1}+1<\sqrt{x_2^2+1}+1 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2) \Leftrightarrow f\nearrow[0,+\infty)$.

Για κάθε $x_1<x_2<0$ είναι $x_1^2>x_2^2 \Leftrightarrow x_1^2+1>x_2^2+1 \Leftrightarrow$

$\sqrt{x_1^2+1}>\sqrt{x_2^2+1} \Leftrightarrow \sqrt{x_1^2+1}+1>\sqrt{x_2^2+1}+1 \Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2) \Leftrightarrow f\searrow(-\infty,0)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+\dfrac{1}{x}\right)\right)=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+\dfrac{1}{x}\right)\right)=+\infty$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_1=(-\infty,0)$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(A_1)=\left(\lim\limits_{x\to0^-}f(x),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)=(\ln2,+\infty)$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_2=[0,+\infty)$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(A_2)=\left[\lim\limits_{x\to0^+}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=[\ln2,+\infty)$.

Είναι $f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)=[\ln2,+\infty)$.

138. Είναι $f^2(x)-6f(x)+8=0$ (1) $\Leftrightarrow (f(x)-4)(f(x)-2)=0 \Leftrightarrow$

$(f(x)=4)$ ή $(f(x)=2)$ ή (άπειροι τύποι της f με εναλλαγή διαστημάτων στα οποία η f θα είναι 2 ή 4). Θα απορρίψουμε την τελευταία περίπτωση.

Έστω ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = 4$ και $f(x_2) = 2$.
Είναι $f(x_1) \neq f(x_2)$, $f(x_2) < 3 < f(x_1)$, η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών άρα υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2) \subseteq \mathbb{R} : f(x_0) = 3$.
Για $x = x_0$ από τη σχέση (1) έχουμε $f^2(x_0) - 3f(x_0) + 2 = 0 \Leftrightarrow 9 - 18 + 8 = 0$ που είναι άτοπο. Άρα ($f(x) = 4$, $x \in \mathbb{R}$) ή ($f(x) = 2$, $x \in \mathbb{R}$).

2ος τρόπος

Είναι $f^2(x) - 6f(x) + 8 = 0 \Leftrightarrow f^2(x) - 6f(x) = -8 \Leftrightarrow$

$f^2(x) - 6f(x) + 9 = 1 \Leftrightarrow (f(x) - 3)^2 = 1 \Leftrightarrow |f(x) - 3| = 1 > 0 (1)$.

Είναι $|f(x) - 3| > 0 \Leftrightarrow f(x) - 3 \neq 0$.

Η συνάρτηση $g(x) = f(x) - 3$ είναι συνεχής σαν πράξεις συνεχών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$, $g(x) \neq 0$ για κάθε πραγματικό x οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Αν $g(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) - 1 > 0$ τότε από τη σχέση (1) έχουμε $f(x) - 3 = 1 \Leftrightarrow f(x) = 4$ και αν $g(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) - 1 < 0$ τότε από τη σχέση (1) έχουμε $f(x) - 3 = -1 \Leftrightarrow f(x) = 2$.

139. Είναι $f^2(x) - 5f(x) + 4 = 0$ (1) $\Leftrightarrow [f(x) - 1][f(x) - 4] = 0 \Leftrightarrow$
$(f(x) = 1)$ ή $(f(x) = 4)$ ή (άπειροι τύποι της f με εναλλαγή διαστημάτων στα οποία η f θα είναι 2 ή 4). Θα απορρίψουμε την τελευταία περίπτωση.
Έστω ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = 1$ και $f(x_2) = 4$.
Είναι $f(x_1) \neq f(x_2)$, $f(x_1) < 3 < f(x_2)$, η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών άρα υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2) \subseteq \mathbb{R} : f(x_0) = 3$. Για $x = x_0$ από τη σχέση (1) έχουμε
$f^2(x_0) - 5f(x_0) + 4 = 0 \Leftrightarrow 9 - 15 + 4 = 0 \Leftrightarrow -2 = 0$ που είναι άτοπο.
Άρα ($f(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$) ή ($f(x) = 4$, $x \in \mathbb{R}$).

2ος τρόπος

Είναι $f^2(x) - 5f(x) + 4 = 0 \Leftrightarrow f^2(x) - 5f(x) = -4 \Leftrightarrow$

$$f^2(x) - 2 \cdot \frac{5}{2} f(x) + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4 \Leftrightarrow$$

$$\left(f(x) - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} - 4 \Leftrightarrow \left(f(x) - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \left|f(x) - \frac{5}{2}\right| = \frac{3}{2} > 0 \ (1)$$

Είναι $\left|f(x)-\frac{5}{2}\right|>0 \Leftrightarrow f(x)-\frac{5}{2}\neq 0$.

Η συνάρτηση $g(x)=f(x)-\frac{5}{2}$ είναι συνεχής σαν πράξεις συνεχών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$, $g(x)\neq 0$ για κάθε πραγματικό x οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Αν $g(x)>0 \Leftrightarrow f(x)-\frac{5}{2}>0$ τότε από τη σχέση (1) έχουμε $f(x)-\frac{5}{2}=\frac{3}{2} \Leftrightarrow f(x)=4$ και αν $g(x)<0 \Leftrightarrow f(x)-\frac{5}{2}<0$ τότε από τη σχέση (1) έχουμε $f(x)-\frac{5}{2}=-\frac{3}{2} \Leftrightarrow f(x)=1$.

Θ.Μ.Ε.Τ.

140. α) Είναι $d=\sqrt{(x-x_0)^2+(f(x)-y_0)^2}$.

β) Η d είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως σύνθεση και πράξεις συνεχών συναρτήσεων άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ελάχιστης –μέγιστης τιμής οπότε υπάρχουν $m,M\in\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $m\leq f(x)\leq M$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ όπου $m=f(x_1)$, $M=f(x_2)$, $x_1,x_2\in[\alpha,\beta]$. Άρα η απόσταση d έχει ελάχιστη και μέγιστη τιμή, δηλαδή υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο της C_f που βρίσκεται πιο κοντά στο Κ από τα υπόλοιπα και ένα τουλάχιστον σημείο της C_f που απέχει από το Κ περισσότερο από τα υπόλοιπα σημεία της καμπύλης.

Αυξημένης δυσκολίας

141. Αν η f είναι συνεχής στο $[1,3]$, τότε θα έπρεπε το σύνολο τιμών της να είναι κλειστό διάστημα άτοπο αφού το σύνολο τιμών της είναι το $f(A)=(3,5]$. Άρα η f δεν είναι συνεχής στο $[1,3]$.

2ος τρόπος

Αν η f ήταν συνεχής στο $[1,3]$ θα είχε μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο διάστημα αυτό, δηλαδή το σύνολο τιμών της θα ήταν κλειστό διάστημα, το οποίο όμως δεν ισχύει.

142. Αν η f ήταν συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ θα είχε μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο διάστημα αυτό, δηλαδή το σύνολο τιμών της θα ήταν κλειστό διάστημα, το οποίο όμως δεν ισχύει.

143. Η f ορίζεται στο $\mathbb{R}$ επομένως πρέπει $x^2+\kappa\neq 0 \Leftrightarrow x^2\neq -\kappa$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα πρέπει $-\kappa<0\Leftrightarrow \kappa>0$. Η f είναι συνεχής ως ρητή επομένως από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών θα παίρνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές μεταξύ του μέγιστου και του ελάχιστου, άρα η f έχει σύνολο τιμών το $[0,2]$. Επομένως είναι $0\le \dfrac{x^2-\kappa x+\lambda}{x^2+\kappa}\le 2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x_1)=0$, $f(x_2)=2$.

Είναι $\dfrac{x^2-\kappa x+\lambda}{x^2+\kappa}\ge 0 \overset{x^2+\kappa>0}{\Leftrightarrow} x^2-\kappa x+\lambda\ge 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Το τριώνυμο $x^2-\kappa x+\lambda$ έχει μοναδική ρίζα το $x=x_1$.

Αν είχε και δεύτερη ρίζα τότε θα υπήρχε διάστημα στο οποίο το τριώνυμο θα ήταν αρνητικό άτοπο. Επομένως έχει διακρίνουσα $\Delta_1=0\Leftrightarrow \kappa^2-4\lambda=0 \quad (1)$

Είναι $\dfrac{x^2-\kappa x+\lambda}{x^2+\kappa}\le 2 \overset{x^2+\kappa>0}{\Leftrightarrow} x^2-\kappa x+\lambda\le 2x^2+2\kappa \Leftrightarrow x^2+\kappa x+2\kappa-\lambda\ge 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Το τριώνυμο $x^2+\kappa x+2\kappa-\lambda$ έχει μοναδική ρίζα το $x=x_2$.

Αν είχε και δεύτερη ρίζα τότε θα υπήρχε διάστημα στο οποίο το τριώνυμο θα ήταν αρνητικό άτοπο.

Επομένως έχει διακρίνουσα $\Delta_2=0\Leftrightarrow \kappa^2-8\kappa+4\lambda=0 \quad (2)$

Από (1),(2) προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{cases}\kappa^2=4\lambda\\ \kappa^2-8\kappa+4\lambda=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\kappa^2=4\lambda\\ 8\lambda=8\kappa\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\kappa^2-4\kappa=0\\ \lambda=\kappa\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\kappa(\kappa-4)=0\\ \lambda=\kappa\end{cases}\overset{\kappa>0}{\Leftrightarrow}\begin{cases}\kappa=4\\ \lambda=4\end{cases}.$$

Συνδυασμός Θ.Μ.Ε.Τ. – Θ.Ε.Τ.

Αυξημένης δυσκολίας

144. Η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ελάχιστης –μέγιστης τιμής οπότε η f έχει ελάχιστη τιμή m και μέγιστη τιμή M, δηλαδή $m\le f(x)\le M$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Είναι $m\le f(\alpha)\le M$, $m\le f(\beta)\le M$, $m\le f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\le M$ και με πρόσθεση κατά μέλη: $m\le \dfrac{f(\alpha)+f(\beta)+f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)}{3}\le M$.

Επειδή ο αριθμός $\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)+f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)}{3}$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f και η f είναι συνεχής στο $\left[\alpha,\beta\right]$, υπάρχει $\xi\in\left[\alpha,\beta\right]$ τέτοιο ώστε:

$$f\left(\xi\right)=\frac{f\left(\alpha\right)+f\left(\beta\right)+f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{3}.$$

145. Η f είναι συνεχής στο $\left[1,4\right]$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ελάχιστης –μέγιστης τιμής οπότε, η f έχει ελάχιστη τιμή m και μέγιστη τιμή M, δηλαδή $m\le f\left(x\right)\le M$ για κάθε $x\in\left[1,4\right]$.

Άρα $m\le f\left(1\right)\le M$ (1), $m\le f\left(2\right)\le M\Leftrightarrow 3m\le 3f\left(2\right)\le 3M$ (2),
$m\le f\left(3\right)\le M\Leftrightarrow 5m\le 5f\left(3\right)\le 5M$ (3), $m\le f\left(4\right)\le M$ (4)
Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (1),(2),(3),(4) έχουμε
$10m\le f\left(1\right)+3f\left(2\right)+5f\left(2\right)+f\left(4\right)\le 10M\Leftrightarrow$

$m\le\dfrac{f\left(1\right)+3f\left(2\right)+5f\left(2\right)+f\left(4\right)}{10}\le M$ οπότε ο αριθμός

$\dfrac{f\left(1\right)+3f\left(2\right)+5f\left(2\right)+f\left(4\right)}{10}$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f.

Η f είναι συνεχής στο $\left[1,4\right]$ οπότε υπάρχει $\xi\in\left[1,4\right]$ τέτοιο ώστε:

$$f\left(\xi\right)=\frac{f\left(1\right)+3f\left(2\right)+5f\left(2\right)+f\left(4\right)}{10}.$$

146. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left[0,1\right]$, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ελάχιστης –μέγιστης τιμής οπότε η f έχει ελάχιστη τιμή m και μέγιστη τιμή M επομένως $m\le f\left(x\right)\le M$ για κάθε $x\in\left[0,1\right]$.

Άρα $m\le f\left(\frac{1}{5}\right)\le M$ (1), $m\le f\left(\frac{2}{5}\right)\le M$ (2), $m\le f\left(\frac{3}{5}\right)\le M$ (3),

$m\le f\left(\frac{4}{5}\right)\le M$ (4). Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (1),(2),(3),(4)

έχουμε $4m\le f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{5}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+f\left(\frac{4}{5}\right)\le 4M\Leftrightarrow$

$m\le\dfrac{f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{5}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}\le M$ οπότε ο αριθμός

$\dfrac{f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{5}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f.

Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ οπότε υπάρχει $\xi \in [0,1]$ τέτοιο ώστε:

$$f(\xi) = \frac{f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{5}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}.$$

147. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[0,2]$ οπότε $f(0) \le f(x) \le f(2)$ για κάθε $x \in [0,2]$.

Επομένως: $f(0) = f(0) < f(2)$ (1),

$f(0) < f(1) < f(2) \Leftrightarrow 2f(0) < 2f(1) < 2f(2)$ (2),

$f(0) < f(2) = f(2) \Leftrightarrow 2f(0) < 2f(2) = 2f(2)$ (3)

Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (1),(2),(3) έχουμε

$$5f(0) < f(0)+2f(1)+2f(2) < 5f(2) \Leftrightarrow f(0) < \frac{f(0)+2f(1)+2f(2)}{5} < f(2).$$

Η f είναι συνεχής στο $[0,2]$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών οπότε υπάρχει $\xi \in (0,2)$, τέτοιο ώστε:

$$f(\xi) = \frac{f(0)+2f(1)+2f(2)}{5} \Leftrightarrow 5f(\xi) = f(0)+2f(1)+2f(2).$$

Η f είναι γνησίως αύξουσα οπότε είναι 1-1 άρα το ξ είναι μοναδικό.

148. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,\beta]$ οπότε, $f(\beta) \le f(x) \le f(\alpha)$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.

Επομένως $f(\beta) < f(\alpha) = f(\alpha)$ (1),

$f(\beta) = f(\beta) < f(\alpha) \Leftrightarrow 3f(\beta) = 3f(\beta) < 3f(\alpha)$ (2),

$$f(\beta) < f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < f(\alpha) \Leftrightarrow 2f(\beta) < 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < 2f(\alpha) \quad (3)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (1),(2),(3) έχουμε

$$6f(\beta) < f(\alpha)+3f(\beta)+2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < 6f(\alpha) \Leftrightarrow$$

$$f(\beta) < \frac{1}{6}\left[f(\alpha)+3f(\beta)+2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right] < f(\alpha)$$ οπότε ο αριθμός

$\frac{1}{6}\left[f(\alpha)+3f(\beta)+2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right]$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f.

Η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ οπότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε:

$f(\xi)=\frac{1}{6}\left[f(\alpha)+3f(\beta)+2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right]$.

Η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα είναι 1-1, οπότε το ξ είναι μοναδικό.

149. α) Η f είναι συνεχής στο $[6,8]$ άρα ισχύει το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής, οπότε η f θα έχει ελάχιστο $m=f(x_1)$ και μέγιστο $M=f(x_2)$, όπου $x_1,x_2\in[6,8]$.

β) Επομένως, θα ισχύει $m\le f(x)\le M$ για κάθε $x\in[6,8]$.

Άρα $m\le f(6)\le M$ (1), $m\le f(7)\le M$ (2), $m\le f(8)\le M$ (3)

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των σχέσεων (1),(2),(3) έχουμε:

$m^3\le f(6)f(7)f(8)\le M^3 \quad (1)$

γ) Από την (1) προκύπτει: $0<m\le\sqrt[3]{f(6)f(7)f(8)}\le M$ οπότε ο αριθμός $\sqrt[3]{f(6)f(7)f(8)}\Leftrightarrow$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f.

Η f είναι συνεχής στο $[6,8]$ οπότε υπάρχει $\xi\in[6,8]$ τέτοιο ώστε:

$f(\xi)=\sqrt[3]{f(6)f(7)f(8)}\Leftrightarrow f^3(\xi)-f(6)f(7)f(8)=0$.

Επομένως η εξίσωση: $f^3(x)-f(6)f(7)f(8)=0$ έχει λύση στο $[6,8]$.

150. α) Είναι $f(x)=\ln x+\frac{x-1}{x}\Leftrightarrow f(x)=\ln x+1-\frac{1}{x}$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, άρα

$f(A)\overset{f\nearrow}{=}\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-\infty,+\infty)$.

γ) $x\ln x=1-x\Leftrightarrow\ln x=\frac{1-x}{x}\Leftrightarrow\ln x+\frac{x-1}{x}=0\Leftrightarrow f(x)=f(1)\overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow}x=1$.

δ) $1<\alpha<\frac{\alpha+\beta}{2}<\beta\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}0=f(1)<f(\alpha)<f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<f(\beta)$.

Έστω $g(x)=f^3(x)-f(\alpha)f(\beta)f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, $x\in[\alpha,\beta]$. Έχουμε:

- $g(\alpha)=f^3(\alpha)-f(\alpha)f(\beta)f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\underbrace{f(\alpha)}_{>0}\left(f^2(\alpha)-f(\beta)f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)<0$, (είναι $f(\alpha)<f(\beta)$, $f(\alpha)<f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ οπότε με πολλαπλασιασμό κατά μέλη έχουμε: $f^2(\alpha)-f(\beta)f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<0$).

- $g(\beta)=f^3(\beta)-f(\alpha)f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)f(\beta)=\underbrace{f(\beta)}_{>0}\left(f^2(\beta)-f(\alpha)f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)>0$,

οπότε $g(\alpha)g(\beta)<0$.
Η g συνεχής, στο $[\alpha,\beta]$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα υπάρχει $\theta\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $g(\theta)=0\Leftrightarrow f^2(\theta)=f(\alpha)f(\beta)$.
Η f είναι γνησίως αύξουσα οπότε είναι 1-1 άρα το ξ είναι μοναδικό.

151. α) Η f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ άρα έχει ελάχιστη και μέγιστη τιμή. Έστω m η ελάχιστη και M η μέγιστη τιμή της g στο $[\alpha,\beta]$ τότε το σύνολο τιμών της g είναι το διάστημα $[m,M]$, $m,M\geq 0$ αφού $g(x)\geq 0$.
Επομένως για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ είναι $m\leq g(x)\leq M$.
Έστω $x_1,x_2\in[\alpha,\beta]$ τότε $m\leq g(x_1)\leq M$ και $m\leq g(x_2)\leq M$. Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των 2 σχέσεων έχουμε:
$m^2\leq g(x_1)\cdot g(x_2)\leq M^2\Leftrightarrow m\leq\sqrt{g(x_1)\cdot g(x_2)}\leq M$ οπότε ο αριθμός $\sqrt{g(x_1)\cdot g(x_2)}$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f.
Η f είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ οπότε υπάρχει $\xi_1\in[x_1,x_2]$ τέτοιο ώστε:.
$g(\xi_1)=\sqrt{g(x_1)\cdot g(x_2)}$.

β) Ο αριθμός $\frac{g(x_1)+g(x_2)}{2}$ βρίσκεται μεταξύ των $g(x_1),g(x_2)$ οπότε $m\leq\frac{g(x_1)+g(x_2)}{2}\leq M$ άρα ο αριθμός $\frac{g(x_1)+g(x_2)}{2}$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f. Η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ οπότε υπάρχει
$\xi_2\in[\alpha,\beta]:g(\xi_2)=\frac{g(x_1)+g(x_2)}{2}$. Αρκεί να δείξουμε ότι: Πράγματι:
$g(x_1)+g(x_2)\geq 2\sqrt{g(x_1)\cdot g(x_2)}\Leftrightarrow\left[g(x_1)+g(x_2)\right]^2\geq 4g(x_1)\cdot g(x_2)\Leftrightarrow$
$g^2(x_1)+2g(x_1)\cdot g(x_2)+g^2(x_2)\geq 4g(x_1)\cdot g(x_2)\Leftrightarrow$
$g^2(x_1)-2g(x_1)\cdot g(x_2)+g^2(x_2)\geq 0\Leftrightarrow(g(x_1)-g(x_2))^2\geq 0$ που ισχύει.

2ος τρόπος: Από το α) είναι $M \geq \sqrt{g(x_1)\cdot g(x_2)}$ οπότε αν θέσουμε $g(\xi_2)=M$ αποδείχτηκε.

152. Η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, $f(\alpha)<f(\beta) \Rightarrow f(\alpha)<\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}<f(\beta)$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματός Ενδιαμέσων Τιμών οπότε υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} \Leftrightarrow f(\xi)=f(\gamma) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} \xi=\gamma$ άτοπο γιατί $\alpha<\xi<\beta<\gamma$.

Ομοίως αν $f(\alpha)>f(\beta) \Rightarrow f(\alpha)>\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}>f(\beta)$.

Αν $f(\alpha)=f(\beta) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} \alpha=\beta$ άτοπο.

2ος τρόπος: Η f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ οπότε ισχύει το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής, άρα η f έχει μία μέγιστη τιμή M και μία ελάχιστη τιμή m στο $[\alpha,\beta]$. Από το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών είναι $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$. Άρα $m \leq f(\alpha) \leq M$ (1) και $m \leq f(\beta) \leq M$ (2).

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) προκύπτει

$2m \leq f(\alpha)+f(\beta) \leq 2M \Leftrightarrow m \leq \dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} \leq M$ οπότε ο αριθμός

$\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f.

Η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ οπότε υπάρχει $\xi \in [\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε

$f(\xi)=\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} \Leftrightarrow f(\xi)=f(\gamma) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} \xi=\gamma$ άτοπο γιατί $\alpha \leq \xi \leq \beta < \gamma$.

153. α) Η f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ οπότε ισχύει το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής, άρα η f έχει μία μέγιστη τιμή M και μία ελάχιστη τιμή m στο [α, β]. Επειδή $f(x)>0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ είναι $M>0$ και $m>0$ άρα $M \cdot m>0$.

β) Η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ οπότε θα παίρνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές μεταξύ M και m άρα θα είναι $f([\alpha,\beta])=[m,M]$. Επομένως:

$m \leq f(\alpha) \leq M \Leftrightarrow \dfrac{1}{M} \leq \dfrac{1}{f(\alpha)} \leq \dfrac{1}{m} \Leftrightarrow m \leq \dfrac{m\cdot M}{f(\alpha)} \leq M \Leftrightarrow \dfrac{m}{2} \leq \dfrac{m \cdot M}{2f(\alpha)} \leq \dfrac{M}{2}$ (1),

$m \leq f(\beta) \leq M \Leftrightarrow \dfrac{1}{M} \leq \dfrac{1}{f(\beta)} \leq \dfrac{1}{m} \Leftrightarrow m \leq \dfrac{m\cdot M}{f(\beta)} \leq M \Leftrightarrow \dfrac{m}{2} \leq \dfrac{m \cdot M}{2f(\beta)} \leq \dfrac{M}{2}$ (2)

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1), (2):

$$m \le \frac{m\cdot M}{2f(\alpha)} + \frac{m\cdot M}{2f(\beta)} \le M \Leftrightarrow m \le \frac{m\cdot M}{2}\left(\frac{1}{f(\alpha)} + \frac{1}{f(\beta)}\right) \le M .$$

Άρα υπάρχει $\xi \in [\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \frac{m\cdot M}{2}\left(\frac{1}{f(\alpha)} + \frac{1}{f(\beta)}\right)$.

Σύνθετες ασκήσεις

154. α) Θέτουμε $1-\ln x = u \Leftrightarrow \ln x = 1-u \Leftrightarrow x = e^{1-u}$, τότε $f(u) = 2u - 2e^{1-u}$, άρα $f(x) = 2x - 2e^{1-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Εύκολα αποδεικνύεται ότι f γνησίως αύξουσα.

γ) Η f γνησίως αύξουσα οπότε για κάθε $x > 1$ είναι $f(x) > f(1) = 0$ και για κάθε $x < 1$ είναι $f(x) < f(1) = 0$.

δ) Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ οπότε

$$f(A) \overset{f\nearrow}{=} \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = \mathbb{R} .$$

155. α) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 \Leftrightarrow 4x_1 < 4x_2 \Leftrightarrow 4x_1 - 3 < 4x_2 - 3 \Leftrightarrow$ $f(x_1) + e^{f(x_1)} < f(x_2) + e^{f(x_2)}$ (1). Έστω $h(x) = x + e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε η (1) γίνεται $h(f(x_1)) < h(f(x_2)) \overset{h\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow f$ γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε είναι $1-1$ άρα αντιστρέφεται. $f(x) = y \Leftrightarrow y + e^y = 4x - 3 \Leftrightarrow x = \frac{y + e^y + 3}{4}$,

άρα $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}\left(x + e^x + 3\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

β) $(f \circ f)(x) - f\left(5 - 10x^3\right) = 0 \Leftrightarrow f\left(f(x)\right) = f\left(5 - 10x^3\right) \overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow}$ $f(x) = 5 - 10x^3 \Leftrightarrow f(x) + 10x^3 - 5 = 0$ (1). Αρκεί η (1) να έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$. Έστω $g(x) = f(x) + 10x^3 - 5$.

Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Είναι: $g(0) = f(0) - 5$. Όμως $f(0) + e^{f(0)} = 5 \Leftrightarrow f(0) = 5 - e^{f(0)}$, οπότε $g(0) = 5 - e^{f(0)} - 5 = -e^{f(0)} < 0$.

Επίσης $f(1) + e^{f(1)} = 4 - 3 = 1 \Leftrightarrow h\left(f(1)\right) = h(0) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} f(1) = 0$ άρα $g(1) = f(1) + 10 - 5 = 5 > 0$ οπότε $g(0)\cdot g(1) < 0$.

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε η εξίσωση $g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=5-10x^3$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$.

γ) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$.

Όμως $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ άρα $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

156. α) Έστω $x_1, x_2 \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ με $x_1 < x_2$, τότε $x_1^2-1 < x_2^2-1$ (1) και $\eta\mu x_1 < \eta\mu x_2 \Leftrightarrow 2\eta\mu x_1 < 2\eta\mu x_2$ (2).

Με πολλαπλασιασμό των σχέσεων (1) και (2) έχουμε $x_1^2+\eta\mu x_1-1 < x_2^2+\eta\mu x_2-1 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα άρα έχει σύνολο τιμών: $f\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)=\left[f(0), f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]=\left[-1,\frac{\pi^2}{4}+1\right]$

β) Η f συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ σαν πράξεις συνεχών συναρτήσεων, $f(0)=-1<0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{4}+1>0$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα η εξίσωση $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2+2\eta\mu x-1=0 \Leftrightarrow x^2+2\eta\mu x=1$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Η f συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $f(0)<2<f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών οπότε υπάρχει $\xi \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)=2$.

157. α) Εύκολα αποδεικνύεται ότι η g είναι γνησίως αύξουσα.

$\lim\limits_{x\to0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\ln x+e^x+x-1\right)=-\infty$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x+e^x+x-1\right)=+\infty$, άρα

$g(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} g(x), \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\right)=\mathbb{R}$.

β) Επειδή $\alpha \in g(A)=\mathbb{R}$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in A=(0,+\infty)$ τέτοιος ώστε $g(x_0)=\alpha$, ο οποίος είναι μοναδικός αφού η η g είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Είναι $g(x)=e \Leftrightarrow g(x)=g(1) \overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow} x=1$.

δ) $e^{\kappa^2+4}-e^{4\kappa}=\ln(4\kappa)-\ln(\kappa^2+4)+4\kappa-\kappa^2-4\Leftrightarrow$

$\ln(\kappa^2+4)+e^{\kappa^2+4}+\kappa^2+3=\ln(4\kappa)+e^{4k}+4k-1\Leftrightarrow$

$g(\kappa^2+4)=g(4\kappa)\overset{g\ 1-1}{\Leftrightarrow}\kappa^2+4=4\kappa\Leftrightarrow\kappa^2-4\kappa+4=0\Leftrightarrow(k-2)^2=0\Leftrightarrow$

$k-2=0\Leftrightarrow k=2$.

158. α) Είναι $x^2\le 2g(x)\le x^2+1$ (1)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=g(x)-x$, $x\in[0,1]$.

$h(0)=g(0)\ge 0$, $h(1)=g(1)-1\le 0$ οπότε $h(0)\cdot h(1)\le 0$.

(Από τη σχέση (1) για $x=0,1$ αντίστοιχα έχουμε: $0\le 2g(x)\le 1\Rightarrow g(x)\ge 0$ και $1\le 2g(1)\le 2\Rightarrow g(1)\le 1$).

Αν $h(0)\cdot h(1)=0$ τότε η εξίσωση έχει ρίζες το ξ=0 ή το ξ=1.

Η h είναι συνεχής στο $[0,1]$ σαν διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Αν $h(0)\cdot h(1)<0$, τότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $h(\xi)=0\Leftrightarrow g(\xi)=\xi$.

Επομένως υπάρχει $\xi\in[0,1]$ τέτοιο, ώστε $g(\xi)=\xi$.

β) Θέτουμε στην (1) όπου x το $\frac{1}{x}$ οπότε:

$\frac{1}{x^2}\le 2\left(\frac{1}{x}\right)\le\frac{1}{x^2}+1\Leftrightarrow\frac{1}{2}\le x^2\cdot g\left(\frac{1}{x}\right)\le\frac{1+x^2}{2x^2}$. Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$ οπότε

από το Κριτήριο Παρεμβολής $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\cdot g\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\frac{1}{2}$.

γ) $$\lim_{x\to 0}\frac{x^3\cdot g\left(\frac{1}{x}\right)+\eta\mu 3x}{x^2+\eta\mu x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}\left(x^2\cdot g\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{\eta\mu 3x}{x}\right)}{\cancel{x}\left(x+\frac{\eta\mu x}{x}\right)}=\frac{\frac{1}{2}+3}{1}=\frac{7}{2}$$ αφού

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu 3x}{x}\underset{x\to 0,\ u\to 0}{\overset{u=3x}{=}}\lim\frac{\eta\mu u}{\frac{u}{3}}=\lim\limits_{u\to 0}\left(3\cdot\frac{\eta\mu u}{u}\right)=3$).

159. α) Για $x\ne 0$ είναι $f(x)=\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}-x\eta\mu\frac{1}{x}$.

Είναι $\left|x\eta\mu\frac{1}{x}\right|=|x|\left|\eta\mu\frac{1}{x}\right|\le|x|\Leftrightarrow -|x|\le x\eta\mu\frac{1}{x}\le|x|$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}|x| = \lim\limits_{x\to 0}(-|x|) = 0$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right) = 0$. Άρα $\lim\limits_{x\to 0}f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left[-\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} + x\eta\mu\frac{1}{x}\right)\right] = 0 = f(0)$

αφού η f είναι συνεχής στο 0. Επομένως $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x} - x\eta\mu\frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$.

β) Για $x \neq 0$ είναι $\left|\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\right| \le \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|x|} \le \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} \le \frac{1}{|x|}$. Είναι

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{|x|} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{|x|}\right) = 0$ οπότε από το Κριτήριο Παρεμβολής $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} = 0.$

Επομένως $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x} - \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} - \frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right) = 0 - 0 - 1 = -1$ αφού

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \underset{\substack{x\to+\infty,\ u\to 0 \\ u\to 0}}{\overset{u=\frac{1}{x}}{=}} \lim \frac{\eta\mu u}{u} = 1$.

γ) Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x) = -1 < 0$, υπάρχει $\gamma \in (1,+\infty)$ τέτοιο ώστε $f(\gamma) < 0$.

Είναι $f\left(\frac{1}{\pi}\right) = \pi\left(1 - \sigma\upsilon\nu\frac{1}{\pi}\right) > 0$ οπότε $f(\gamma)\cdot f\left(\frac{1}{\pi}\right) < 0$.

Η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{\pi},\gamma\right]$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{\pi},\gamma\right)$.

160. α) Για $x > 0$ είναι $\frac{\sqrt[3]{2x+8} - \sqrt{x^2+4}}{x} \le f(x) \le \frac{\eta\mu\frac{x}{6}}{x} + x^5$.

Όμως $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{2x+8} - \sqrt{x^2+4}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{\sqrt[3]{2x+8} - 2}{x} - \frac{\sqrt{x^2+4} - 2}{x}\right) =$

$$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{2x + \cancel{8} - \cancel{8}}{x\left(\left(\sqrt[3]{2x+8}\right)^2 + 2\sqrt[3]{2x+8} + 4\right)} - \frac{x^2 + \cancel{4} - \cancel{4}}{x\left(\sqrt{x^2+4} + 2\right)}\right) =$$

$\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{2\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\left(\sqrt[3]{2x+8}\right)^2+2\sqrt[3]{2x+8}+4\right)}-\dfrac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}\right)=\dfrac{2}{12}-0=\dfrac{1}{6}$,

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\eta\mu\frac{x}{6}}{x}\underset{u\to0^+}{\overset{\frac{x}{6}=u}{=}}\lim\limits_{u\to0^+}\dfrac{\eta\mu u}{6u}=\dfrac{1}{6}$, οπότε από το Κριτήριο Παρεμβολής είναι

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\dfrac{1}{6}=f(0)$ αφού η f είναι συνεχής στο 0.

β) Έστω $g(x)=f(x)-\eta\mu\dfrac{x}{6}-x^6$, $x\in[0,1]$. Είναι $g(0)=f(0)=\dfrac{1}{6}>0$,

$g(1)=f(1)-\eta\mu\dfrac{1}{6}-1\le0$ γιατί $f(x)\le\dfrac{\eta\mu\frac{x}{6}}{x}+x^5$ για κάθε $x>0$. Άρα

$g(0)g(1)\le0$. Αν $\underbrace{g(0)}_{>0}g(1)=0\Leftrightarrow g(1)=0\Leftrightarrow\lambda=1$.

Αν $g(0)g(1)<0$, τότε επειδή η g είναι συνεχής, στο $[0,1]$ σαν πράξεις συνεχών συναρτήσεων οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα υπάρχει $\lambda\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $g(\lambda)=0\Leftrightarrow f(\lambda)=\eta\mu\dfrac{\lambda}{6}+\lambda^6$.

Άρα γενικά υπάρχει τουλάχιστον ένα $\lambda\in(0,1]$ ώστε: $f(\lambda)=\eta\mu\dfrac{\lambda}{6}+\lambda^6$.

161. α) Είναι $\dfrac{f^2(x)-4}{e^x+1}=e^x\Leftrightarrow f^2(x)=e^{2x}+e^x+4\Leftrightarrow$

$|f(x)|=\sqrt{e^{2x}+e^x+4}>0$ άρα $f(x)\ne0$.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

β) i. Επειδή $f(0)=-\sqrt{6}$ είναι $f(x)<0$, άρα $f(x)=-\sqrt{e^{2x}+e^x+4}$, $x\in\mathbb{R}$.

ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)+4^{x+2}}{3^x+4^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\sqrt{e^{2x}+e^x+4}+4^{x+2}}{3^x+4^x}=$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-\cancel{\left(\frac{e}{4}\right)^x}^{\,0}\sqrt{1+\frac{1}{e^x}+\frac{4}{e^{2x}}}+16}{\cancel{\left(\frac{3}{4}\right)^x}^{\,0}+1}=16.$$

162. α) $f^2(x)+x^4=2x^2f(x)+e^{2x}\Leftrightarrow\left[f(x)-x^2\right]^2=e^{2x}\Leftrightarrow g^2(x)=e^{2x}\neq 0$,

άρα $g(x)\neq 0$. Η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο.

β) $g(0)=f(0)=1>0$, άρα $g(x)>0$, οπότε

$g(x)=\sqrt{e^{2x}}=e^x\Leftrightarrow f(x)=e^x+x^2,\ x\in\mathbb{R}$.

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x+e^{2x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}\left(1+e^x\right)}=0$.

163. α) Επειδή f συνεχής στο $[3,6]$ και $f(x)\neq 0$ η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[3,6]$. Είναι $f(3)>0$ οπότε $f(x)>0$ για κάθε $x\in[3,6]$.

β) Έστω $g(x)=f^2(x)-f(3)\cdot f(4),\ x\in[3,4]$.

Είναι $g(3)=f(3)\left(f(3)-f(4)\right),g(4)=f(4)\left(f(4)-f(3)\right)$ οπότε

$g(3)g(4)=-f(3)f(4)\left(f(3)-f(4)\right)^2\leq 0$.

Αν $g(3)g(4)=0\Leftrightarrow g(3)=0$ ή $g(4)=0$, τότε $x_1=3$ ή $x_1=4$ ρίζες της g.

Αν $g(3)g(4)<0$, τότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano αφού η f είναι συνεχής στο $[3,4]$ άρα υπάρχει $x_1\in(3,4)$ τέτοιο ώστε

$g(x_1)=0\Leftrightarrow\left(f(x_1)\right)^2=f(3)f(4)$. Επομένως υπάρχει $x_1\in[3,4]$ τέτοιο ώστε $\left(f(x_1)\right)^2=f(3)f(4)$. Όμοια για την $h(x)=f^2(x)-f(5)f(6)$.

γ) Επειδή $f(3)\cdot f(4)=f(5)\cdot f(6)$ είναι $f^2(x_1)=f^2(x_2)$, άρα $f(x_1)=f(x_2)$ αφού $f(x)>0$, οπότε η f δεν είναι $1-1$.

164. α) Η C_f διέρχεται από τα σημεία Α,Β οπότε $f(-2)=0$ και $f(4)=0$. Η C_f δεν τέμνει τον άξονα x΄x σε κανένα άλλο σημείο εκτός των Α και Β άρα $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\neq -2$ και $x\neq 4$. Επειδή η f είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,-2),(-2,4)$ και $(4,+\infty)$. Η C_f διέρχεται από το σημείο Γ άρα $f(0)=3>0$ οπότε $f(x)>0$ για κάθε $x\in(-2,4)$, επομένως $f(2)>0$.

β) Έστω $g(x)=x^5f(5)f(6)+3x-2,\ x\in[0,1]$. Είναι $g(0)=-2<0$ και $g(1)=f(5)f(6)+1$. Η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $(4,+\infty)$ οπότε οι αριθμοί $f(5)$ και $f(6)$ είναι ομόσημοι, άρα $f(5)f(6)>0$, επομένως

$g(1)>0$. Επειδή η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ και $g(0)g(1)<0$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$.

γ) Για κάθε $x>4 \overset{f\searrow}{\Rightarrow} f(x)<f(4)=0$, άρα $f(10)<0$.

i. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(10)x^3-4x^2+f(1)}{f(3)x^2-5x-2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(10)x^{\cancel{3}}}{f(3)\cancel{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(10)}{f(3)}x\right) \overset{f(3)>0}{=} -\infty$

ii. 1ος τρόπος

Είναι $6<7<8 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(6)>f(7)>f(8)$ (1)

Επίσης $f(6)=f(6)>f(8)$ (2) και $f(6)>f(8)=f(8)$ (3)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2), (3) έχουμε:

$$3f(6)>f(6)+f(7)+f(8)>3f(8) \Leftrightarrow f(8)<\frac{f(6)+f(7)+f(8)}{3}<f(6).$$

Η f είναι συνεχής στο $[6,8]$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών οπότε υπάρχει $x_0\in(6,8)$ τέτοιο ώστε:

$$f(x_0)=\frac{f(6)+f(7)+f(8)}{3} \Leftrightarrow 3f(x_0)=f(6)+f(7)+f(8).$$

Το x_0 είναι μοναδικό αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[6,8]$.

2ος τρόπος

Έστω $h(x)=3f(x)-f(6)-f(7)-f(8),\ x\in[6,8]$. Είναι

$h(6)=3f(6)-f(6)-f(7)-f(8)=[f(6)-f(7)]+[f(6)-f(8)]>0$ γιατί

$6<7<8 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(6)>f(7)>f(8)$, οπότε $f(6)-f(7)>0$ και $f(6)-f(8)>0$.

Επίσης $h(8)=3f(8)-f(6)-f(7)-f(8)=2f(8)-f(6)-f(7) \Leftrightarrow$

$h(8)=[f(8)-f(6)]+[f(8)-f(7)]<0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $[6,8]$, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_0\in(6,8)$ τέτοιος ώστε: $h(x_0)=0 \Leftrightarrow 3f(x_0)=f(6)+f(7)+f(8)$.

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα, ισχύει ότι: για κάθε $x_1,x_2\in[6,8]$ με $x_1<x_2$ είναι $f(x_1)>f(x_2)$. Τότε: $3f(x_1)>3f(x_2) \Leftrightarrow$

$3f(x_1)-f(6)-f(7)-f(8)>3f(x_2)-f(6)-f(7)-f(8) \Leftrightarrow h(x_1)>h(x_2)$.

Άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[6,8]$, οπότε το x_0 είναι μοναδικό.

Τράπεζα θεμάτων ΙΕΠ

26640. α) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι:

$2x_1 < 2x_2 \ (1) \Leftrightarrow e^{2x_1} < e^{2x_2} \ (2)$ και $x_1^3 < x_2^3$ (3)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1), (2), (3) προκύπτει ότι $f(x_1) < f(x_2)$, επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{2x} + x^3 + 2x\right) = 0 - \infty - \infty = -\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{2x} + x^3 + 2x\right) = +\infty + \infty + \infty = +\infty$.

Επειδή η f είναι συνεχής, έχει σύνολο τιμών το $f(A) = \mathbb{R}$.

γ) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι

$f\left(f^{-1}(x_1)\right) < f\left(f^{-1}(x_2)\right) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f^{-1}(x_1) < f^{-1}(x_2) \Leftrightarrow f^{-1} \nearrow \mathbb{R}$.

δ) $f^{-1}(x) = 0 \Leftrightarrow x = f(0) = 1$.

29834. α) Η f ορίζεται όταν $\begin{cases} 9x^2 + 16 \ge 0 \\ 8x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R} \\ x > -\dfrac{1}{8} \end{cases}$, άρα

$D_f = \left(-\dfrac{1}{8}, +\infty\right)$. Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της ως σύνθεση και πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

β) $f(0) = \sqrt{16} - \dfrac{5}{2}\ln 1 = 4 > 0$,

$f(1) = \sqrt{9+16} - \dfrac{5}{2}\ln(8+1) = 5 - \dfrac{5}{2}\ln 9 = \dfrac{5(1-\ln 9)}{2} < 0$ γιατί

$1 - \ln 9 < 0 \Leftrightarrow 1 < \ln 9 \Leftrightarrow \ln e < \ln 9 \Leftrightarrow e < 9$ ισχύει.

γ) Είναι $f(0)f(1) < 0$ και f συνεχής στο [0, 1], οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

23106. α) i. $(g o f)(x) = |\sigma\upsilon\nu x| \Leftrightarrow \sqrt{1 - f^2(x)} = |\sigma\upsilon\nu x| \Leftrightarrow 1 - f^2(x) = \sigma\upsilon\nu^2 x \Leftrightarrow$

$f^2(x) = 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x \Leftrightarrow f^2(x) = \eta\mu^2 x \Leftrightarrow |f(x)| = |\eta\mu x|$ (1)

ii. $f(x) = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = 0 \Leftrightarrow |\eta\mu x| = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = \pi$ αφού $x \in [0, \pi]$.

β) Για κάθε $x \in (0,\pi)$ είναι $f(x) \neq 0$, η f είναι συνεχής οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα αυτό. Επειδή $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 > 0$ είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,\pi)$. Είναι $ημx > 0$ στο $(0,\pi)$ οπότε η σχέση (1) γίνεται

$f(x) = ημx,\ x \in (0,\pi)$. Επομένως $f(x) = \begin{cases} ημx,\ 0 < x < \pi \\ 0\ ,\ x = 0 \text{ ή } \pi \end{cases} = ημx,\ x \in [0,\pi]$.

γ) Γνωρίζουμε ότι $|ημx| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με το ίσον να ισχύει μόνο για x = 0. Για κάθε $x \in [0,\pi]$ είναι $ημx \leq x \Leftrightarrow ημx - x \leq 0$.

$$\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{ημx - x} \underset{\substack{x\to 0^+ \Rightarrow \\ u \to 0^- \Rightarrow}}{\overset{ημx - x = u}{=}} \lim_{u\to 0^-} \frac{1}{u} = -\infty .$$

29838. α) i. Για κάθε x > 0 είναι $\left|\frac{συνx}{x}\right| = \frac{|συνx|}{x} \leq \frac{1}{x} \Leftrightarrow -\frac{1}{x} \leq \frac{συνx}{x} \leq \frac{1}{x}$.

Είναι $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι και

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{συνx}{x} = 0 .$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1-συνx}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x} - \frac{συνx}{x}\right) = 0 - 0 = 0 .$$

ii. Για κάθε x > 0 είναι $xf(x) + συνx = 1 - x^2ημ\frac{1}{x} \Leftrightarrow$

$xf(x) = 1 - συνx - x^2ημ\frac{1}{x} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1-συνx}{x} - xημ\frac{1}{x}$ και

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1-συνx}{x} - xημ\frac{1}{x}\right) = 0 - 1 = -1$ γιατί

$$\lim_{x\to+\infty} xημ\frac{1}{x} \underset{\substack{x\to+\infty \Rightarrow \\ u\to 0^+}}{\overset{\frac{1}{x} = u \Leftrightarrow x = \frac{1}{u}}{=}} \lim_{u\to 0^+} \frac{ημu}{u} = 1 .$$

β) Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ είναι και στο $x_0 = 0$, οπότε

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-συνx}{x} - xημ\frac{1}{x}\right) = 0 - 0 = 0 .$$

γ) Είναι $f\left(\frac{1}{\pi}\right) = \dfrac{1 - συν\frac{1}{\pi}}{\frac{1}{\pi}} - \frac{1}{\pi}ημ\pi = \pi\left(1 - συν\frac{1}{\pi}\right) > 0$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$ υπάρχει πολύ μεγάλος αριθμός α, τέτοιος ώστε $f(\alpha) < 0$. Είναι $f\left(\frac{1}{\pi}\right) f(\alpha) < 0$ και η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{\pi}, \alpha\right]$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{\pi}, \alpha\right) \subseteq \left(\frac{1}{\pi}, +\infty\right)$.

36839. α) Οι τετμημένες των σημείων της C_f δημιουργούν το σύνολο [2, 7], οπότε $D_f = [2,7]$. Όμοια $D_h = [5,7]$.

β) i. Η f είναι συνεχής στο [2,7], όμως $f(2)f(7) > 0$, αφού $f(2),\ f(7) > 0$, οπότε δεν ισχύουν για την f οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο πεδίο ορισμού της.
Η h είναι συνεχής στο [5,7], όμως $f(5) < 0,\ f(7) > 0$, άρα $f(5)f(7) < 0$, οπότε ισχύουν για την h οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο πεδίο ορισμού της.

ii. Επειδή $f(6) = h(6) = 0$ και οι δύο συναρτήσεις παίρνουν την τιμή 0 σε ένα εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού τους.

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό ή Λάθος»

1. Λ	**2.** Λ	**3.** Λ	**4.** Σ	**5.** Λ	**6.** Λ	**7.** Λ	**8.** Σ	**9.** Σ	
10. Σ	**11.** Σ	**12.** Σ	**13.** Σ	**14.** Σ	**15.** Λ	**16.** Λ	**17.** Λ	**18.** Σ	**19.** Λ
20. Λ	**21.** Λ	**22.** Σ	**23.** Σ	**24.** Σ	**25.** Λ	**26.** Σ	**27.** Λ	**28.** Λ	**29.** Λ
30. Λ	**31.** Λ	**32.** Σ	**33.** Λ						

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Έστω $h(x) = f(x) - 2x,\ x \in \mathbb{R}$. Είναι $h(x) \neq 0$ και h συνεχής, άρα η h διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επειδή $h(0) = f(0) = 2 > 0$, είναι $h(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$, άρα και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Σωστή απάντηση η Γ.

2. Για κάθε $x_1, x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ με $x_1 < x_2$ είναι $\sigma\upsilon\nu x_1 > \sigma\upsilon\nu x_2 \Leftrightarrow e^{\sigma\upsilon\nu x_1} > e^{\sigma\upsilon\nu x_1}$ και $\eta\mu x_1 < \eta\mu x_2 \Leftrightarrow -\eta\mu x_1 > -\eta\mu x_2$. Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει:
$e^{\sigma\upsilon\nu x_1} - \eta\mu x_1 > e^{\sigma\upsilon\nu x_1} - \eta\mu x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow f \searrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)=\left[f\left(\frac{\pi}{2}\right),f(0)\right]=[0,e]$.

Σωστή απάντηση η Δ.

3. Είναι $f^2(x)=2xf(x)+1 \Leftrightarrow f^2(x)-2xf(x)+x^2=x^2+1 \Leftrightarrow$
$(f(x)-x)^2=x^2+1 \Leftrightarrow |f(x)-x|=\sqrt{x^2+1}$.

Έστω $g(x)=f(x)-x$, τότε $|g(x)|=\sqrt{x^2+1}$ (1)

Είναι $g(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}=0 \Leftrightarrow x^2+1=0 \Leftrightarrow x^2=-1$ αδύνατη.

Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $g(x)\neq 0$ και επειδή η g είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Είναι $g(1)=f(1)-1>0$, άρα $g(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η (1) γίνεται
$g(x)=\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x)-x=\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$.

Σωστή απάντηση η Β.

4. Η σχέση $f(x)f(f(x))=1$ (1) για x=1000 γίνεται

$f(1000)f(f(1000))=1 \Leftrightarrow 999f(999)=1 \Leftrightarrow f(999)=\frac{1}{999}$.

Είναι $\frac{1}{999}<500<999 \Leftrightarrow f(999)<500<f(1000)$ και f στο [999, 1000], οπότε σύμφωνα με το Θ. Ε. Τ. υπάρχει $\xi\in(999,1000)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)=500$.

Η (1) για x = ξ γίνεται $f(\xi)f(f(\xi))=1 \Leftrightarrow 500f(500)=1 \Leftrightarrow f(500)=\frac{1}{500}$.

Σωστή απάντηση η Α.

5. Για την f εφαρμόζεται το Θ. Ε. Τ. στο [0, 2], οπότε υπάρχει $x_4\in(0,2): f(x_4)=1$.

Σωστή απάντηση η Δ.

14 Συνδυαστικές επαναληπτικές ασκήσεις

Επίπεδο δυσκολίας Β Θέματος

1. α) Έστω $A(x_0,2)$ το κοινό σημείο επαφής των C_f και C_g.

Τότε: $\begin{cases} f(x_0)=2 \\ g(x_0)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha e^{x_0}+1=2 \\ x_0+\beta=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha e^{x_0}=1 \\ \beta=2-x_0 \end{cases}$

$\begin{cases} e^{x_0}=\dfrac{1}{a} \\ \beta=2-x_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=\ln\dfrac{1}{a}=-\ln a \\ \beta=2-x_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=-\ln a \\ \beta=2+\ln a \end{cases}$.

β) Είναι $f(g(x))=e^{x+2}+1 \Leftrightarrow \alpha e^{x+\beta}\cancel{+1}=e^{x+2}\cancel{+1} \overset{\alpha)\text{ερώτημα}}{\Leftrightarrow}$

$\alpha e^{x+2+\ln\alpha}=e^{x+2} \Leftrightarrow \alpha\cancel{e^{x+2}}\cdot e^{\ln\alpha}=\cancel{e^{x+2}} \Leftrightarrow \alpha^2=1 \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} \alpha=1$ και $\beta=2+\ln 1=2$.

Για $\alpha=1,\ \beta=2$ έχουμε $f(x)=e^x+1$ και $g(x)=x+2$. Το σημείο τομής τους έχει τετμημένη $x_0=-\ln 1=0$ άρα βρίσκεται πάνω στον άξονα y΄y.

Η συνάρτηση φ έχει τύπο $\varphi(x)=f(g(x))=f(x+2)=e^{x+2}+1, x\in\mathbb{R}$.

γ) Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ ισχύει $x_1+2<x_2+2 \Leftrightarrow e^{x_1+2}<e^{x_2+2} \Leftrightarrow$ $e^{x_1+2}+1<e^{x_2+2}+1 \Leftrightarrow \varphi(x_1)<\varphi(x_2)$ οπότε η φ είναι γνησίως αύξουσα άρα και 1-1, οπότε αντιστρέφεται. Η φ έχει σύνολο τιμών το:

$\varphi(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x),\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)\right)=(0+1,+\infty+1)=(1,+\infty)=A_{\varphi^{-1}}$.

Θέτω $\varphi(x)=y \Leftrightarrow e^{x+2}+1=y \Leftrightarrow e^{x+2}=y-1 \Leftrightarrow x+2=\ln(y-1) \Leftrightarrow$

$x=\ln(y-1)-2 \Leftrightarrow \varphi^{-1}(y)=\ln(y-1)-2$ οπότε $\varphi^{-1}(x)=\ln(x-1)-2, x>1$.

δ) Από τη σχέση: $g(x)\le k(x)\le f(x)$ για $x=0$ έχουμε: $2\le k(0)\le 2$ οπότε $k(0)=2$. Επίσης $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=2=\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ οπότε από το Κριτήριο Παρεμβολής $\lim\limits_{x\to 0}k(x)=2=k(0)$, άρα η k είναι συνεχής στο 0.

2. α) Έχουμε $A_f=(2,+\infty)$ και $A_g=\mathbb{R}$.

$A_{f\circ g}: \begin{cases} x\in A_g \\ g(x)\in A_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ x^2-2>2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ x^2>4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ x>2 \text{ ή } x<-2 \end{cases} \Rightarrow$

$x>2$ ή $x<-2$ οπότε $A_{f\circ g}=(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$.

Επίσης $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\ln(x^2-2-2)=\ln(x^2-4)$.

β) Έχουμε: $\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \in A_{f\circ g} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x > 4 \end{cases} \Rightarrow x > 4$ οπότε:

$\varphi(x) = \ln(x-4), x > 4$.

γ) Για κάθε $x_1, x_2 \in (4,+\infty)$ με $x_1 < x_2$ είναι $x_1 - 4 < x_2 - 4 \Leftrightarrow$
$\ln(x_1 - 4) < \ln(x_2 - 4) \Leftrightarrow \varphi(x_1) < \varphi(x_2)$ οπότε η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(4,+\infty)$ άρα είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

Η φ έχει σύνολο τιμών το $\varphi((4,+\infty)) = \left(\lim\limits_{x\to 4^+} \varphi(x), \lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)\right) = (-\infty,+\infty) = A_{\varphi^{-1}}$

αφού $\lim\limits_{x\to 4^+} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} \ln(x-4) \underset{\substack{x\to 4^+,\ u\to 0^+ \\ u\to 0^+}}{\overset{u=x-4}{=}} \lim \ln u = -\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x-4) \underset{\substack{x\to+\infty,\ u\to+\infty \\ u\to+\infty}}{\overset{u=x-4}{=}} \lim \ln u = +\infty$.

Θέτουμε $\varphi(x) = y \Leftrightarrow \ln(x-4) = y \Leftrightarrow x - 4 = e^y \Leftrightarrow x = e^y + 4 \Leftrightarrow$
$\varphi^{-1}(y) = e^y + 4$ οπότε $\varphi^{-1}(x) = e^x + 4,\ x \in \mathbb{R}$.

δ) i. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\varphi^{-1}(x) + 2^x}{\varphi^{-1}(x) - 4 - 2^{x+3}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x + 4 + 2^x}{e^x + \cancel{4} - \cancel{4} - 2^{x+3}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x + 4 + 2^x}{e^x + \cancel{4} - \cancel{4} - 8\cdot 2^x} =$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}} \cdot \dfrac{1 + 4\cdot\left(\dfrac{1}{e}\right)^x + \left(\dfrac{2}{e}\right)^x}{1 - 8\cdot\left(\dfrac{2}{e}\right)^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1 + 4\cdot\cancel{\left(\dfrac{1}{e}\right)^x}^{0} + \cancel{\left(\dfrac{2}{e}\right)^x}^{0}}{1 - 8\cdot\cancel{\left(\dfrac{2}{e}\right)^x}^{0}} = 1$.

ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^{\varphi(x)}}{\sqrt{g(x)} - x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^{\ln(x-4)}}{\sqrt{x^2-2} - x}\right) =$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{(x-4)\left(\sqrt{x^2-2}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2-2}-x\right)\left(\sqrt{x^2-2}+x\right)}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2\cdot\left(1-\dfrac{4}{x}\right)\left(\sqrt{1-\dfrac{2}{x}}+1\right)}{\sqrt{x^2-2}^2 - x^2} =$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2\cdot\left(1-\cancel{\dfrac{4}{x}}^{0}\right)\left(\sqrt{1-\cancel{\dfrac{2}{x}}^{0}}+1\right)}{-2} = +\infty(-1) = -\infty$.

ε) Είναι $h(x)=\begin{cases}10\ln(x-4),\ x>5\\ x^2-25,\ x\le 5\end{cases}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 5^+} h(x)=\lim\limits_{x\to 5^+} 10\ln(x-4)\overset{u=x-4}{\underset{\substack{x\to 5^+,\ u\to 1^+\\ u\to 1^+}}{=}}\lim\limits_{u\to 1^+} 10\ln u=0$,

$\lim\limits_{x\to 5^-} h(x)=\lim\limits_{x\to 5^-}\left(x^2-25\right)=0$, $h(5)=0$ άρα η h είναι συνεχής στο 5.

3. α) i. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{\alpha x+\beta}+\gamma\right)\overset{u=\alpha x+\beta}{\underset{\substack{x\to+\infty,\ u\to-\infty\\ u\to-\infty}}{=}}\lim\limits_{u\to-\infty}\left(e^u+\gamma\right)=0+\gamma=\gamma$ οπότε $\gamma=1$. ($\lim\limits_{x\to+\infty}(\alpha x+\beta)=\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha x=\alpha\cdot(+\infty)=-\infty$ αφού $\alpha<0$.)

ii. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{e^{\alpha x}+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{\alpha x+\beta}+1}{e^{\alpha x}+2}\overset{u=e^{\alpha x}}{\underset{\substack{x\to-\infty,\ u\to+\infty\\ u\to+\infty}}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{e^\beta\cdot u+1}{u+2}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\cancel{u}}{\cancel{u}}\dfrac{e^\beta+\cancel{\frac{1}{u}}^{0}}{1+\cancel{\frac{2}{u}}^{0}}=e^\beta$ οπότε $e^\beta=1\Leftrightarrow\beta=0$. ($\lim\limits_{x\to-\infty}(\alpha x)=\alpha\cdot(-\infty)=+\infty$ αφού $\alpha<0$.)

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^2f(x)+f(-1)-1}{f(x)+f(1)-1}=e^2\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^2\cdot e^{\alpha x+1}+e^{-\alpha+1}}{e^{\alpha x+1}+e^{\alpha+1}}=e^2\overset{k=e^{\alpha x+1}}{\underset{\substack{x\to+\infty,\\ k\to e}}{\Leftrightarrow}}$

$\lim\limits_{k\to e}\dfrac{e^2k+e^{-\alpha+1}}{k+e^{\alpha+1}}=e^2\Leftrightarrow\dfrac{e^3+e^{-\alpha+1}}{e+e^{\alpha+1}}=e^2\Leftrightarrow e^3+e^{-\alpha+1}=e^3+e^{\alpha+3}\Leftrightarrow$

$e^{-\alpha+1}=e^{\alpha+3}\Leftrightarrow-\alpha+1=\alpha+3\Leftrightarrow 2\alpha=-2\Leftrightarrow\alpha=-1$ οπότε $f(x)=e^{-x}+1,\ x\in\mathbb{R}$.

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)=e^{-x}+1-\ln x+1=e^{-x}-\ln x+2$.

Για κάθε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ έχουμε

$$\begin{cases}-x_1>-x_2\Leftrightarrow e^{-x_1}>e^{-x_2}\\ \ln x_1<\ln x_2\Leftrightarrow-\ln x_1>-\ln x_2\Leftrightarrow-\ln x_1+2>-\ln x_2+2\end{cases}\overset{+}{\Rightarrow}h(x_1)>h(x_2)$$

άρα είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$ οπότε έχει σύνολο τιμών το

$h((0,+\infty))=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}h(x),\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)\right)=(-\infty,+\infty)$ αφού

$\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x}-\ln x+2\right)=0-\infty+2=-\infty$ και

$\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^{-x}-\ln x+2\right)=1+\infty+2=+\infty$.

Το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της h, άρα υπάρχει $x_0>0$ τέτοιος ώστε $h(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=g(x_0)$, μοναδικό αφού η h είναι γνησίως φθίνουσα άρα και 1-1.Επομένως οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται σε ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη μεγαλύτερη του μηδενός.

δ) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(-x)-f(-x\ln 2)}{f(-x)+f(-x\ln 3)-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+1-e^{x\ln 2}-1}{e^x+1+e^{x\ln 3}+1-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-e^{\ln 2^x}}{e^x+e^{\ln 3^x}}=$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-2^x}{e^x+3^x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^x}{3^x}\cdot\frac{1-\left(\frac{2}{e}\right)^x}{\left(\frac{e}{3}\right)^x+1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{e}{3}\right)^x\cdot\frac{1-\left(\frac{2}{e}\right)^x}{\left(\frac{e}{3}\right)^x+1}\right]=0\cdot\frac{1-0}{0+1}=0\,.$$

4. α) Είναι $f(1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+1}{2x^5+20}\cdot\text{συν}x=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x}}{x^{\cancel{5}4}}\cdot\dfrac{3+\frac{1}{x}}{2+\frac{20}{x^5}}\cdot\text{συν}x=$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3+\cancel{\frac{1}{x}}^{0}}{2+\cancel{\frac{20}{x^5}}^{0}}\cdot\frac{\text{συν}x}{x^4}=\frac{3}{2}\cdot 0=0\ \text{ άρα }\ f(1)=f(4)-1\Leftrightarrow 0=f(4)-1\Leftrightarrow f(4)=1.$$

($\left|\dfrac{\text{συν}x}{x^4}\right|\le\left|\dfrac{1}{x^4}\right|\underset{x>0}{\overset{x\to+\infty}{=}}\dfrac{1}{x^4}\Leftrightarrow-\dfrac{1}{x^4}\le\dfrac{\text{συν}x}{x^4}\le\dfrac{1}{x^4}$.Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^4}=0=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x^4}\right)$

οπότε από το Κριτήριο Παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\text{συν}x}{x^4}=0$.)

β) Έχουμε $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=f\left(\dfrac{5}{2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+3x+5}+3x\right)=$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{9x^2+3x+5}^{\,2}-9x^2}{\sqrt{9x^2+3x+5}-3x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{9x^2}+3x+5-\cancel{9x^2}}{\sqrt{9x^2+3x+5}-3x}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}}{-\cancel{x}}\cdot\frac{3+\cancel{\frac{5}{x}}^{0}}{\sqrt{9+\cancel{\frac{3}{x}}^{0}+\cancel{\frac{5}{x^2}}^{0}}+3}=-\frac{3}{6}=-\frac{1}{2}\,.$$

γ) $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\text{ημ}8x+3\text{συν}2x-3}{x^3+3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\text{ημ}8x+3\text{συν}2x-3}{x^2(x+3)}\Leftrightarrow$

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{\cancel{x}\text{ημ}8x}{x^{\cancel{2}}(x+3)}+\frac{3\text{συν}2x-3}{x^2(x+3)}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{\frac{\text{ημ}8x}{x}}{x+3}+\frac{\frac{3(\text{συν}2x-1)}{x^2}}{x+3}\right)=\frac{8}{3}-\frac{6}{3}\Leftrightarrow$$

$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{2}{3}$. ($\lim\limits_{x\to0}\frac{ημ8x}{x}\underset{\substack{x\to0,\ u\to0\\ u\to0}}{\overset{u=8x}{=}}\lim\limits_{u\to0}\frac{ημu}{\frac{u}{8}}=\lim\limits_{u\to0}8\cdot\frac{ημu}{u}=8$ και

$$\lim_{x\to0}\frac{3(συν2x-1)}{x^2}=\lim_{x\to0}3\frac{(συν2x-1)(συν2x+1)}{x^2(συν2x+1)}=\lim_{x\to0}3\frac{συν^2 2x-1}{x^2(συν2x+1)}=$$

$$\lim_{x\to0}\left[-3\frac{ημ^2 2x}{x^2(συν2x+1)}\right]=\lim_{x\to0}\left[-3\cdot\left(\frac{ημ2x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{συν2x+1}\right]=-3\cdot4\cdot\frac{1}{2}=-6 \text{ αφού}$$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{ημ2x}{x}\underset{\substack{x\to0,\ u\to0\\ k\to0}}{\overset{k=2x}{=}}\lim\frac{ημk}{\frac{k}{2}}=\lim\limits_{u\to0}2\cdot\frac{ημk}{k}=2$.)

δ) Οι αριθμοί 1,2,3 είναι διαδοχικές ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$, η f συνεχής στο $[0,4]$ άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στα διαστήματα $[0,1),(1,2),(2,3),(3,4]$.

Όμως $f\left(\frac{1}{2}\right)<0,\ f\left(\frac{3}{2}\right)>0,\ f\left(\frac{5}{2}\right)<0,\ f(4)>0$ οπότε $f(x)<0$ στο $[0,1)$, $f(x)>0$ στο $(1,2)$, $f(x)<0$ στο $(2,3)$ και $f(x)>0$ στο $(3,4]$.

5. α) Έχουμε: $A_f=(-\infty,2]$, $A_g=\mathbb{R}$. Επίσης για το πεδίο ορισμού της $g\circ f$:

$$\begin{cases}x\in A_f\\ f(x)\in A_g\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le2\\ \sqrt{2-x}\in\mathbb{R}\end{cases}\Leftrightarrow x\le2 \text{ οπότε } A_{g\circ f}=(-\infty,2].$$

Η $g\circ f$ έχει τύπο: $(g\circ f)(x)=g(f(x))=\sqrt{2-x}^2+4=2-x+4=6-x$.

β) Για κάθε $x_1,x_2\in(-\infty,2]$ με $x_1<x_2$ είναι

$-x_1>-x_2\Leftrightarrow2-x_1>2-x_2\Leftrightarrow\sqrt{2-x_1}>\sqrt{2-x_2}\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,2]$ άρα είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

Η f έχει σύνολο τιμών το $f((-\infty,2])=\left[f(2),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)=[0,+\infty)$ αφού

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{2-x}=+\infty$ ($\lim\limits_{x\to-\infty}(2-x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$.

Άρα η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το $[0,+\infty)$. Θέτουμε $f(x)=y\Leftrightarrow\sqrt{2-x}=y\Leftrightarrow$ $2-x=y^2\Leftrightarrow x=2-y^2\Leftrightarrow f^{-1}(y)=2-y^2$ οπότε $f^{-1}(x)=2-x^2,\ x\ge0$.

γ) Το 2023 ανήκει στο σύνολο τιμών της f οπότε υπάρχει $x_0\ge2$ για το οποίο ισχύει $f(x_0)=2023$. Το x_0 μοναδικό αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Άρα η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $y=2023$ σε ένα ακριβώς σημείο.

δ) i. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{2-x}}{x^2+4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}\cdot\dfrac{-\sqrt{\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x}}}{1+\dfrac{4}{x^2}}\right)=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x}^{0}\cdot\dfrac{-\sqrt{\dfrac{2}{x^2}^{0}-\dfrac{1}{x}^{0}}}{1+\dfrac{4}{x^2}^{0}}\right)=0.$

ii. $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{\sqrt{g(x)-6}-\sqrt{2}}{f(x)}=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{\sqrt{x^2-2}-\sqrt{2}}{\sqrt{2-x}}=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{(x^2-2-2)\sqrt{2-x}}{(2-x)\left(\sqrt{x^2-2}+\sqrt{2}\right)}=$

$\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{(x^2-4)\sqrt{2-x}}{(2-x)\left(\sqrt{x^2-2}+\sqrt{2}\right)}=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{\cancel{(x-2)}(x+2)\sqrt{2-x}}{-\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{x^2-2}+\sqrt{2}\right)}=$

$\lim\limits_{x\to2^-}\left[-\dfrac{(x+2)\sqrt{2-x}}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{2}}\right]=-\dfrac{4\cdot0}{2\sqrt{2}}=0.$

iii. Για $x<2$ είναι $\left|f(x)\eta\mu\dfrac{1}{g(x)}\right|\le|f(x)|\Leftrightarrow$

$-|f(x)|\le f(x)\eta\mu\dfrac{1}{g(x)}\le|f(x)|$. Όμως $\lim\limits_{x\to2^-}|f(x)|=0=\lim\limits_{x\to2^-}\left(-|f(x)|\right)$ οπότε από το Κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)\cdot\eta\mu\dfrac{1}{g(x)}=0$.

6. α) Για κάθε $x_1,x_2\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ με $x_1<x_2$ είναι

$$\begin{cases}\varepsilon\varphi x_1<\varepsilon\varphi x_2\\ \sigma\varphi x_1>\sigma\varphi x_2\Leftrightarrow-\sigma\varphi x_1<-\sigma\varphi x_2\end{cases}\overset{+}{\Rightarrow}\varepsilon\varphi x_1-\sigma\varphi x_1<\varepsilon\varphi x_2-\sigma\varphi x_2\Leftrightarrow$$

$f(x_1)<f(x_2)$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

β) Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A=\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, οπότε

$$f(A)=\left(\lim_{x\to0^+}f(x),\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}f(x)\right)=(0-\infty,+\infty-0)=(-\infty,+\infty).$$

Το 2023 ανήκει στα $f(A)$ οπότε υπάρχει $x_1 \in A$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = 2023$.
Το x_1 είναι μοναδικό, λόγω της μονοτονίας της f, άρα η εξίσωση $f(x) = 2023$ έχει ακριβώς μία ρίζα.

γ) Είναι $f(x) = 0 \Leftrightarrow εφx = σφx \Leftrightarrow εφx = \dfrac{1}{εφx} \Leftrightarrow εφ^2x = 1 \overset{x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)}{\Leftrightarrow} εφx = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4}$

- Για $x < \dfrac{\pi}{4} \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) < f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow f(x) < 0$ στο $\left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$.
- Για $\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{2} \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(x) > f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow f(x) > 0$ $\left(\dfrac{\pi}{4}.\dfrac{\pi}{2}\right)$.

δ) Είναι $-\dfrac{\pi}{6} < x < \dfrac{\pi}{3}$ οπότε $0 < x + \dfrac{\pi}{6} < \dfrac{\pi}{6}$ και $-\dfrac{\pi}{3} < -x < \dfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow 0 < \dfrac{\pi}{3} - x < \dfrac{\pi}{3}$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0, \dfrac{\pi}{3}\right)$ οπότε

$$εφ\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - εφ\left(\frac{\pi}{3} - x\right) > σφ\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - σφ\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \Leftrightarrow$$

$$εφ\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - σφ\left(x + \frac{\pi}{6}\right) > εφ\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - σφ\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \Leftrightarrow$$

$$f\left(x + \frac{\pi}{6}\right) > f\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} x + \frac{\pi}{6} > \frac{\pi}{3} - x \Leftrightarrow 2x > \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 2x > \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x > \frac{\pi}{12}.$$

Όμως $x \in \left(-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}\right)$ οπότε $x \in \left(\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{\pi}{3}\right)$.

7. α) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι $x_1 - 5 < x_2 - 5 \Leftrightarrow$
$(x_1 - 5)^2 > (x_2 - 5)^2 \Leftrightarrow -1 + (x_1 - 5)^2 > -1 + (x_2 - 5)^2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 5]$ άρα είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

β) Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε έχει σύνολο τιμών το
$f((-\infty, 5]) = \left[f(5), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right) = [-1, +\infty) = A_{f^{-1}}$ αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[-1 + (x-5)^2\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[x^2\left(-\cancel{\frac{1}{x^2}}^{0} + \left(1 - \cancel{\frac{5}{x}}^{0}\right)^2\right)\right] = +\infty \cdot (0+1) = +\infty.$$

Θέτουμε $f(x) = y \Leftrightarrow -1 + (x-5)^2 = y \Leftrightarrow (x-5)^2 = y + 1 \Leftrightarrow$
$x - 5 = -\sqrt{y+1} \Leftrightarrow x = 5 - \sqrt{y+1}$, άρα
$f^{-1}(y) = 5 - \sqrt{y+1},\ y \geq -1$, οπότε $f^{-1}(x) = 5 - \sqrt{x+1},\ x \geq -1$.

γ) Για τα κοινά σημεία των C_f και $y=x$ έχουμε:

$f(x)=x \Leftrightarrow -1+(x-5)^2=x \Leftrightarrow -1+x^2-10x+25-x=0 \Leftrightarrow$

$x^2-11x+24=0 \Leftrightarrow (x=3)$ ή $(x=8 \text{ απορρίπτεται})$. Το κοινό σημείο των C_f και $y=x$ είναι το $A(3,3)$. Για τα κοινά σημεία των $C_{f^{-1}}$ και $y=x$ έχουμε:

$f^{-1}(x)=x \Leftrightarrow 5-\sqrt{x+1}=x \Leftrightarrow \sqrt{x+1}=5-x \Leftrightarrow x+1=x^2-10x+25 \Leftrightarrow$

$x^2-11x+24=0 \Leftrightarrow (x=3)$ ή $(x=8 \text{ απορρίπτεται})$.

Άρα το A είναι κοινό σημείο των $C_{f^{-1}}$ και $y=x$.

δ) i. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f^{-1}(x)+\sqrt{x}-5}{\sqrt[5]{x^4+2}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{5}-\sqrt{x+1}+\sqrt{x}-\cancel{5}}{\sqrt[5]{x^4+2}+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x}}{x}\cdot\frac{-\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1}{\sqrt[5]{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^5}}+1}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2}}\cdot\frac{-\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1}{\sqrt[5]{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^5}}+1}=\lim_{x\to+\infty}\cancel{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{0}\cdot\frac{-\sqrt{1+\cancel{\frac{1}{x}}^{0}}+1}{\cancel{\sqrt[5]{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^5}}}^{0}+1}=0\cdot\frac{0}{1}=0.$$

ii. $$\lim_{x\to2^+}\frac{\sqrt{f(x)+1}+|2f(x)+2|}{\sqrt[3]{f(x)+1}-(f(x)+1)^2}\overset{\substack{f(x)\ge-1,\\2f(x)\ge-2\\2f(x)+2\ge0}}{=}\lim_{x\to5^-}\frac{\sqrt{f(x)+1}+2(f(x)+1)}{\sqrt[3]{f(x)+1}-(f(x)+1)^2}\underset{\substack{x\to5^-,\\u\to0^+}}{\overset{u=\sqrt[6]{f(x)+1}}{=}}$$

$$\lim_{u\to0^+}\frac{u^3+2u^6}{u^2-u^{12}}=\lim_{u\to0^+}\frac{u^{\cancel{3}}(1+2u^3)}{\cancel{u^2}(1-u^{10})}=\lim_{u\to0^+}\frac{u(1+2u^3)}{1-u^{10}}=0\cdot\frac{1}{1}=0.$$

8. α) Είναι $D_{f\circ g}=\{x\in D_g\,/\,g(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,e^x>e^{-2}\}=(-2,+\infty)$ και

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\frac{\ln e^x-2}{\ln e^x+2}=\frac{x-2}{x+2},\ x>-2.$$

β) Για κάθε $x_1,x_2\in(-2,+\infty)$ με $(f\circ g)(x_1)=(f\circ g)(x_2)\Leftrightarrow\dfrac{x_1-2}{x_1+2}=\dfrac{x_2-2}{x_2+2}\Leftrightarrow$

$\cancel{x_1x_2}+2x_1-2x_2\cancel{-4}=\cancel{x_1x_2}+2x_2-2x_1\cancel{-4}\Leftrightarrow 4x_1=4x_2\Leftrightarrow x_1=x_2$ άρα $f\circ g$ 1−1, οπότε αντιστρέφεται.

Για κάθε $x\in(-2,+\infty)$ είναι $(f\circ g)(x)=y\Leftrightarrow\dfrac{x-2}{x+2}=y\Leftrightarrow$

$$x-2=yx+2y\Leftrightarrow yx-x=-2y-2\Leftrightarrow(y-1)x=-2y-2\overset{y\ne1}{\Leftrightarrow}x=\frac{-2y-2}{y-1}.$$

Πρέπει $x>-2 \Leftrightarrow \frac{-2y-2}{y-1}>-2 \Leftrightarrow \frac{-2y-2}{y-1}+2>0 \Leftrightarrow$

$\frac{\cancel{-2y}-2+\cancel{2y}-2}{y-1}>0 \Leftrightarrow -\frac{4}{y-1}>0 \Leftrightarrow y-1<0 \Leftrightarrow y<1$.

Για $y<1$ είναι $\varphi^{-1}(y)=\frac{-2y-2}{y-1}$ οπότε: $\varphi^{-1}(x)=\frac{-2x-2}{x-1}$, $x<1$.

γ) Είναι $k(x)=\frac{-(x-1)+3}{x-1}=-1+\frac{3}{x-1}$. Για κάθε $x_1,x_2\in(-\infty,1)$ με $x_1<x_2$ είναι $x_1-1<x_2-1 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1-1}>\frac{1}{x_2-1} \Leftrightarrow \frac{3}{x_1-1}>\frac{3}{x_2-1} \Leftrightarrow$

$-1+\frac{3}{x_1-1}>-1+\frac{3}{x_2-1} \Leftrightarrow k(x_1)>k(x_2)$ οπότε η k είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1)$.

δ) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{e^2}} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{e^2}^+} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{e^2}^+}\frac{\ln x-2}{\ln x+2} \underset{\substack{x\to\frac{1}{e^2}^+,\ u\to-2^+ \\ u\to-2^+}}{\overset{u=\ln x}{=}} \lim\limits_{u\to-2^+}\left((u-2)\frac{1}{u+2}\right)=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x-2}{\ln x+2} \underset{\substack{x\to+\infty,\ u\to+\infty \\ u\to+\infty}}{\overset{u=\ln x}{=}} \lim\limits_{u\to+\infty}\frac{u-2}{u+2}=\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{u}{u}=1$.

9. α) i. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2+1}=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^2+\beta}{x^2+1}=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^2}{x^2}=1 \Leftrightarrow \alpha=1$.

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)}{\sqrt{x}-1}, x\in[0,1)\cup(1,+\infty) \Leftrightarrow$

$f(x)=g(x)\cdot(\sqrt{x}-1)$ οπότε

$\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\left[g(x)\cdot(\sqrt{x}-1)\right] \Leftrightarrow 1+\beta=0 \Leftrightarrow \beta=-1$.

β) Είναι

$\gamma=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)(\sqrt{x}+1)}{\cancel{x-1}}=4$ και

$\lim\limits_{x\to1}\frac{(\sqrt{x}+1)f(x)}{\eta\mu(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(\sqrt{x}+1)(x^2-1)}{\eta\mu(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(\sqrt{x}+1)\cdot(\sqrt{x}-1)(x^2-1)}{(\sqrt{x}-1)\cdot\eta\mu(x-1)}=$

$\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2-1)}{(\sqrt{x}-1)\cdot\eta\mu(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\eta\mu(x-1)}{x-1}\cdot\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}=1\cdot4=4$.

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $l(x)=f(x)-g(x)=x^2-1-\eta\mu\pi x$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} l(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-1-\eta\mu\pi x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\left(1-\frac{1}{x^2}-\frac{\eta\mu\pi x}{x^2}\right)\right]=+\infty$ άρα

υπάρχει $\delta>0$ τέτοιος ώστε $k(\delta)>0$.

(Για $x\neq 0$ είναι $\left|\frac{\eta\mu\pi x}{x^2}\right|\le\left|\frac{1}{x^2}\right|=\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow-\frac{1}{x^2}\le\frac{\eta\mu\pi x}{x^2}\le\frac{1}{x^2}$. Όμως

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ οπότε από το Κριτήριο Παρεμβολής $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu\pi x}{x^2}=0$.)

Η l είναι συνεχής στο $[2,\delta]$ σαν διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

$l(\delta)\cdot l(0)=l(\delta)\cdot(-1)=-l(\delta)<0$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα υπάρχει $x_0\in(0,\delta)$ τέτοιος ώστε $l(x_0)=0$.

10.α) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$g(x)=\frac{f(x)-\sigma\upsilon\nu 2x+1}{x}, x\neq 0\Leftrightarrow f(x)=xg(x)+\sigma\upsilon\nu 2x-1$ οπότε

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(xg(x)+\sigma\upsilon\nu 2x-1\right)=0\cdot 2023+1-1=0$.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο 0 οπότε $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.

β) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{xg(x)+\sigma\upsilon\nu 2x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(g(x)+\frac{\sigma\upsilon\nu 2x-1}{x}\right)=2023+0=2023$

αφού $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu 2x-1}{x}\overset{u=2x}{\underset{\substack{x\to 0,\ u\to 0\\ u\to 0}}{=}}\lim\frac{\sigma\upsilon\nu u-1}{\frac{u}{2}}=\lim\limits_{u\to 0}\left(2\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu u-1}{u}\right)=2\cdot 0=0$.

γ) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)+1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xf\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}\right)\overset{u=\frac{1}{x}}{\underset{\substack{x\to+\infty,\ u\to 0^+\\ u\to 0^+}}{=}}\lim\left(\frac{f(u)}{u}+u\right)=2023$.

δ) Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+2\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu 2x+1}{f(x)-\sigma\upsilon\nu 2x+1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x}+2\frac{\eta\mu x}{x}-\frac{\sigma\upsilon\nu 2x-1}{x}}{\frac{f(x)}{x}-\frac{\sigma\upsilon\nu 2x-1}{x}}=$

$\frac{2023+2-0}{2023-0}=\frac{2025}{2023}$.

11.α) Η $f \circ f$ ορίζεται όταν: $\begin{cases} x \in D_f \\ f(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \alpha \\ \dfrac{\alpha x + 3}{x - \alpha} \neq \alpha \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x \neq \alpha \\ \alpha x + 3 \neq \alpha x - \alpha^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \alpha \\ \alpha^2 \neq -3 \text{ ισχύει} \end{cases}$. Άρα $D_{f \circ f} = \mathbb{R} - \{\alpha\}$.

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{\alpha \dfrac{\alpha x + 3}{x - \alpha} + 3}{\dfrac{\alpha x + 3}{x - \alpha} - \alpha} = \frac{\dfrac{\alpha^2 x + \cancel{3\alpha} + 3x - \cancel{3\alpha}}{\cancel{x - \alpha}}}{\dfrac{\cancel{\alpha x} + 3 - \cancel{\alpha x} + \alpha^2}{\cancel{x - \alpha}}} = \frac{x\cancel{\left(\alpha^2 + 3\right)}}{\cancel{\alpha^2 + 3}} = x.$$

β) Είναι $\lim\limits_{x \to \alpha^+} f(x) = \lim\limits_{x \to \alpha^+}\left[(\alpha x + 3)\dfrac{1}{x - \alpha}\right] = \left(\alpha^2 + 3\right)(+\infty) = +\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x \to \alpha^+} f(x) = \lim\limits_{x \to \alpha^+} \dfrac{1}{x - \alpha} \underset{u \to 0^+}{\overset{x - \alpha = u}{=}} \lim\limits_{u \to 0^+} \dfrac{1}{u} = +\infty$,

$\lim\limits_{x \to \alpha^-} f(x) = \lim\limits_{x \to \alpha^-}\left[(\alpha x + 3)\dfrac{1}{x - \alpha}\right] = \left(\alpha^2 + 3\right)(-\infty) = -\infty$ αφού

$\lim\limits_{x \to \alpha^+} f(x) = \lim\limits_{x \to \alpha^+} \dfrac{1}{x - \alpha} \underset{u \to 0^+}{\overset{x - \alpha = u}{=}} \lim\limits_{u \to 0^+} \dfrac{1}{u} = +\infty$, άρα δεν υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)$.

γ) i. Είναι $\lim\limits_{x \to \alpha^+}\left(\sqrt{f^2(x) + 1} - f(x)\right) \underset{u \to +\infty}{\overset{f(x) = u}{=}} \lim\limits_{u \to +\infty}\left(\sqrt{u^2 + 1} - u\right) = \lim\limits_{u \to +\infty} \dfrac{\cancel{u^2} + 1 - \cancel{u^2}}{\sqrt{u^2 + 1} + u} =$

$\lim\limits_{u \to +\infty} \dfrac{1}{u\left(\sqrt{1 + \dfrac{1}{u^2}} + 1\right)} = 0$.

ii. Είναι $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{\eta\mu \dfrac{1}{x - \alpha}}{f(x)} = \lim\limits_{x \to \alpha}\left(\dfrac{x - \alpha}{\alpha x + 3}\eta\mu\dfrac{1}{x - \alpha}\right) = 0$ γιατί

$\left|\dfrac{x - \alpha}{\alpha x + 3}\eta\mu\dfrac{1}{x}\right| = \left|\dfrac{x - \alpha}{\alpha x + 3}\right|\left|\eta\mu\dfrac{1}{x}\right| \leq \left|\dfrac{x - \alpha}{\alpha x + 3}\right| \overset{x \neq \alpha}{\Leftrightarrow} -\left|\dfrac{x - \alpha}{\alpha x + 3}\right| \leq \dfrac{x - \alpha}{\alpha x + 3}\eta\mu\dfrac{1}{x} \leq \left|\dfrac{x - \alpha}{\alpha x + 3}\right|$

Είναι $\lim\limits_{x \to \alpha}\left(-\left|\dfrac{x - \alpha}{\alpha x + 3}\right|\right) = 0 = \lim\limits_{x \to \alpha}\left|\dfrac{x - \alpha}{\alpha x + 3}\right|$ οπότε από το Κριτήριο Παρεμβολής

$\lim\limits_{x \to \alpha}\left(\dfrac{x - \alpha}{\alpha x + 3}\eta\mu\dfrac{1}{x - \alpha}\right) = 0$.

δ) Για $\alpha = 1$ είναι $f(x) = \dfrac{x + 3}{x - 1}$, $x \neq 1$.

Για κάθε $x_1, x_2 \neq 1$ με $f(x_1) = f(x_2)$ είναι

$\frac{x_1+3}{x_1-1}=\frac{x_2+3}{x_2-1} \Leftrightarrow \cancel{x_1x_2}-x_1+3x_2-\cancel{3}=\cancel{x_1x_2}+3x_1-x_2-\cancel{3} \Leftrightarrow$

$4x_2=4x_1 \Leftrightarrow x_2=x_1 \Rightarrow f\ 1-1$ και αντιστρέφεται.

1ος τρόπος

$f(f(x))=x \Leftrightarrow f(x)=f^{-1}(x)$ για κάθε $x\neq 1$ οπότε $f^{-1}(x)=\frac{x+3}{x-1},\ x\neq 1$.

2ος τρόπος

$f(x)=y \Leftrightarrow \frac{x+3}{x-1}=y \Leftrightarrow x+3=xy-y \Leftrightarrow y+3=xy-x \Leftrightarrow x(y-1)=y+3\ \ (1)$

Αν $y=1$ τότε η (1) είναι αδύνατη οπότε για $y\neq 1$ είναι $x=\frac{y+3}{y-1}$.

Είναι $x\neq 1 \Leftrightarrow \frac{y+3}{y-1}\neq 1 \Leftrightarrow y+3\neq y-1$ που ισχύει, άρα $f^{-1}(y)=\frac{y+3}{y-1},\ y\neq 1$

οπότε $f^{-1}(x)=\frac{x+3}{x-1},\ x\neq 1$.

12.α) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\eta\mu(\alpha x)}{\beta x}\underset{\substack{x\to 0^-,\ u\to 0^- \\ u\to 0^-}}{\overset{u=\alpha x}{=}}\lim \frac{\eta\mu u}{\frac{\beta u}{\alpha}}=\lim\limits_{u\to 0^-}\frac{\alpha}{\beta}\frac{\eta\mu u}{u}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot 1=\frac{\alpha}{\beta}$ και

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(\beta\sigma\upsilon\nu x+\beta)=2\beta$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, είναι συνεχής και στο $x=0$, άρα

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0) \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta}=2\beta=2 \Leftrightarrow \beta=1$ και $\alpha=2$.

Άρα $f(x)=\begin{cases}\frac{\eta\mu 2x}{x}, & x<0\\ \sigma\upsilon\nu x+1, & x\geq 0\end{cases}$.

β) Η h έχει πεδίο ορισμού $A_h=A_f\cap A_g=\mathbb{R}$.

Για $x<0$ έχουμε $h(x)=f(x)+g(x)=\frac{\eta\mu 2x}{x}+x^5-\frac{\eta\mu 2x}{x}=x^5$. Για $x\geq 0$ έχουμε $h(x)=f(x)+g(x)=\sigma\upsilon\nu x+1+x^5-1-\sigma\upsilon\nu x=x^5$.Άρα $h(x)=x^5, x\in\mathbb{R}$.

γ) Έστω $x_1,x_2\in D_h$ με $h(x_1)=h(x_2)$, τότε: $x_1^5=x_2^5 \Leftrightarrow x_1=x_2$ άρα η h είναι 1-1. Για $x<0$ έχουμε $h(x)=y \Leftrightarrow x^5=y \Leftrightarrow x=-\sqrt[5]{-y} \Leftrightarrow h^{-1}(y)=-\sqrt[5]{-y}$.

Για $x\geq 0$ έχουμε $h(x)=y \Leftrightarrow x^5=y \Leftrightarrow x=\sqrt[5]{y} \Leftrightarrow h^{-1}(y)=\sqrt[5]{y}$.

Άρα $h^{-1}(x)=\begin{cases}-\sqrt[5]{-x}, & x<0\\ \sqrt[5]{x}, & x\geq 0\end{cases}$.

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $a(x)=f(x)+h(x)-2, x\in[0,\pi]$.

Η α είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

$\alpha(0)=f(0)+h(0)-3=2+0-3=-1<0$.

$\alpha(\pi)=f(\pi)+h(\pi)-3=0+\pi^5-3=\pi^5-3>0$. Άρα $\alpha(0)\cdot\alpha(\pi)<0$ οπότε ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Bolzano άρα υπάρχει $\gamma\in(0,\pi)$ τέτοιο ώστε $\alpha(\gamma)=0\Leftrightarrow f(\gamma)+h(\gamma)-2=0\Leftrightarrow f(\gamma)=2-h(\gamma)$.

13.α) Πρέπει $\mu x^2-3x+3\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, το οποίο ισχύει όταν

$$\Delta<0\Leftrightarrow(-3)^2-4\cdot\mu\cdot 3<0\Leftrightarrow 9-12\mu<0\Leftrightarrow 12\mu>9\Leftrightarrow\mu>\frac{9}{12}\Leftrightarrow\mu>\frac{3}{4}.$$

β) Αν $\mu=0$: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3+x^2+3}{-3x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{-3}\cdot\dfrac{x^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{x}}=-\dfrac{2}{3}\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=-\infty$.

Αν $\mu=2$: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+3}{2x^2-3x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}=\dfrac{1}{2}$ δεκτή.

Αν $\mu\neq 0, \mu\neq 2$: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2-\mu)x^3+x^2+3}{\mu x^2-3x+3}=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-\mu}{\mu}\cdot\dfrac{x^{\cancel{3}}}{\cancel{x^2}}=\dfrac{2-\mu}{\mu}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}x=\dfrac{2-\mu}{\mu}\cdot(+\infty)=\pm\infty$ απορρίπτεται.

(Αν $\dfrac{2-\mu}{\mu}>0\Leftrightarrow\mu(2-\mu)>0\Leftrightarrow 0<\mu<2$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

Αν $\dfrac{2-\mu}{\mu}<0\Leftrightarrow\mu(2-\mu)<0\Leftrightarrow\mu<0$ ή $\mu>2$ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.)

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\dfrac{1}{2}$ για $\mu=2$ και $f(x)=\dfrac{x^2+3}{2x^2-3x+3}$.

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-3x$.

Η g είναι συνεχής στο $[-3,1]$ σαν διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

$g(-3)=f(-3)+9=\dfrac{2}{5}+9=\dfrac{47}{5}>0$, $g(1)=f(1)-3=2-3=-1<0$ οπότε $g(-3)\cdot g(1)<0$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano επομένως υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $g(x)=0\Leftrightarrow f(x)=3x$ στο διάστημα $(-3,1)$.

2ος τρόπος: $f(x)=3x \Leftrightarrow \dfrac{x^2+3}{2x^2-3x+3}=3x \Leftrightarrow x^2+3=6x^3-9x^2+9x \Leftrightarrow$

$6x^3-10x^2+9x-3=0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=6x^3-10x^2+9x-3$.

Η g είναι συνεχής στο $[-3,1]$ σαν πολυωνυμική.

Είναι $g(-3)=-282<0$, $g(1)=2>0$ οπότε $g(-3)\cdot g(1)<0$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano επομένως υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $g(x)=0$ στο διάστημα $(-3,1)$.

δ) Έχουμε $f(x)=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{x^2+3}{2x^2-3x+3}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2+6=2x^2-3x+3 \Leftrightarrow$

$3x=-3 \Leftrightarrow x=-1$ οπότε $f(x)\neq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2f(x)-1\neq 0$ κοντά στο $+\infty$.

Ισχύει $συνx \geq -1 \Leftrightarrow συνx+3\geq 2 \Leftrightarrow \dfrac{συνx+3}{|2f(x)-1|}\geq \dfrac{2}{|2f(x)-1|}$.

Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{|2f(x)-1|}=2\cdot(+\infty)=+\infty$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{συνx+3}{2f(x)-1}=+\infty$ και

$$\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{συνx+3}{|2f(x)-1|}} \underset{\substack{x\to+\infty \Rightarrow \\ u\to+\infty}}{\overset{u=\frac{συνx+3}{|2f(x)-1|}}{=}} \lim_{u\to+\infty} e^u=+\infty .$$

ε) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{2f(x)-1}{ημ\left(f(x)-\frac{1}{2}\right)} \underset{\substack{x\to+\infty,\\ u\to0}}{\overset{u=f(x)-\frac{1}{2}}{=}} \lim_{u\to0}\frac{2u}{ημu}=\lim_{u\to0}\frac{2}{\frac{ημu}{u}}=\frac{2}{1}=2 .$$

14.α) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(1,0)$ οπότε $f(1)=0 \Leftrightarrow α=0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to0}g(x)=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0}\sqrt{2e^x-β}=1 \Leftrightarrow \sqrt{2-β}=1 \Leftrightarrow 2-β=1 \Leftrightarrow β=1$.

β) i. Για $α=0, β=1$ είναι $f(x)=x^2\ln x$ και $g(x)=\sqrt{2e^x-1}$.

- Για το πεδίο ορισμού της f πρέπει $x>0$ οπότε $A_f=(0,+\infty)$ και
- για το πεδίο ορισμού της g πρέπει: $2e^x-1\geq 0 \Leftrightarrow 2e^x\geq 1 \Leftrightarrow$

$e^x \geq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x\geq \ln\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x\geq -\ln 2$ οπότε $A_g=[-\ln 2,+\infty)$.

Άρα $A_h=A_f\cap A_g=(0,+\infty)$.

Η συνάρτηση h έχει τύπο $h(x)=f(x)+g(x)=x^2\ln x+\sqrt{2e^x-1}$.

ii. Για κάθε $x_1, x_2 > 1$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$e^{x_1} < e^{x_2} \Leftrightarrow 2e^{x_1} < 2e^{x_2} \Leftrightarrow 2e^{x_1} - 1 < 2e^{x_2} - 1 \Leftrightarrow \sqrt{2e^{x_1} - 1} < \sqrt{2e^{x_2} - 1} \ (1),$$

$$x_1 < x_2 \overset{x_1, x_2 > 0}{\Leftrightarrow} x_1^2 < x_2^2 \ (2) \text{ και } \ln x_1 < \ln x_2 \ (3)$$

Οι όροι των σχέσεων (2) και (3) είναι θετικοί αφού $x_1, x_2 > 1$.

Με πολλαπλασιασμό των σχέσεων (1) και (2) έχουμε $x_1^2 \ln x_1 < x_1^2 \ln x_1$ (4)

Με πρόσθεση των σχέσεων (1) και (4) έχουμε

$x_1^2 \ln x_1 + \sqrt{2e^{x_1} - 1} < x_2^2 \ln x_2 + \sqrt{2e^{x_2} - 1} \Leftrightarrow h(x_1) < h(x_2)$ οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$.

γ) Από το βi. έχουμε $1 < x_1 < x_2 \Rightarrow \sqrt{2e^{x_1} - 1} < \sqrt{2e^{x_2} - 1} \Rightarrow g(x_1) < g(x_2)$ οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα άρα 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

Θέτουμε $g(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{2e^x - 1} = y \overset{y \geq 0}{\Leftrightarrow} 2e^x - 1 = y^2 \Leftrightarrow$

$$2e^x = y^2 + 1 \Leftrightarrow e^x = \frac{y^2 + 1}{2} \Leftrightarrow x = \ln \frac{y^2 + 1}{2} \Leftrightarrow$$

$$g^{-1}(y) = \ln \frac{y^2 + 1}{2} \Leftrightarrow g^{-1}(x) = \ln \frac{x^2 + 1}{2} \text{ με } A_{g^{-1}} = [0, +\infty).$$

($x \geq -\ln 2 \Leftrightarrow \ln \frac{y^2 + 1}{2} \geq \ln \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{y^2 + 1}{2} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow y^2 + 1 \geq 1 \Leftrightarrow y^2 \geq 0$ ισχύει.)

δ) Για το πεδίο ορισμού της $f \circ f$ έχουμε:

$$\begin{cases} x \in A_f \\ f(x) \in A_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 \ln x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1 \text{ οπότε } A_{f \circ f} = (1, +\infty).$$

Η $f \circ f$ έχει τύπο

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = (x^2 \ln x)^2 \ln(x^2 \ln x) = x^4 \ln^2 x \cdot (2 \ln x + \ln(\ln x)) \Leftrightarrow$$

$$(f \circ f)(x) = 2x^4 \ln^3 x + x^4 \ln^2 x \cdot \ln(\ln x).$$

ε) Είναι: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(e^x)}{xg(4x)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x} e^{2x}}{\cancel{x} \sqrt{2e^{4x} - 1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\cancel{e^{2x}}}{\cancel{e^{2x}} \cdot \sqrt{2 - \frac{1}{e^{4x}}}} =$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{2 - \cancelto{0}{\frac{1}{e^{4x}}}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

15.α) Για x = 1 είναι $\cancel{f(1)} = f(0) + \cancel{f(1)} - 1 \Leftrightarrow f(0) = 1$, οπότε

$f(x) = x + f(1) - 1$.

Για x = 0 είναι $f(0) = 0 + f(1) - 1 \Leftrightarrow 1 = f(1) - 1 \Leftrightarrow f(1) = 2$, άρα $f(x) = x + 1$.

β) 1ος τρόπος: Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $g(f(x)) = \alpha(x+1)^2 + \beta(x+1) + \gamma \Leftrightarrow$

$(g \circ f)(x) = \alpha x^2 + 2\alpha x + \alpha + \beta x + \beta + \gamma = \alpha x^2 + (2\alpha + \beta)x + \alpha + \beta + \gamma$.

Για να είναι $(g \circ f)(x) = x^2 + 2x + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ πρέπει

$\begin{cases} \alpha = 1 \\ 2\alpha + \beta = 2 \\ \alpha + \beta + \gamma = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ 2 + \beta = 2 \\ 1 + \beta + \gamma = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 1 \end{cases}$. Άρα τελικά έχουμε ότι $g(x) = x^2 + 1$.

2ος τρόπος

Για $x = -1: g(f(-1)) = g(0) = (-1)^2 - 2 + 2 = 1$ οπότε $\gamma = 1$.

Για $x = 0: g(f(0)) = g(1) = 2$ οπότε $\alpha + \beta + 1 = 2 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 1$ (1) και

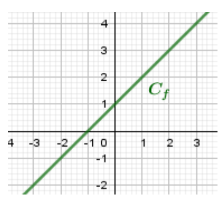
για $x = 1: g(f(1)) = g(2) = 1^2 + 2 + 2 = 5$ οπότε

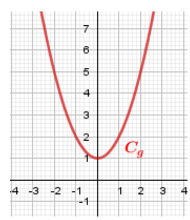
$4\alpha + 2\beta + 1 = 5 \Leftrightarrow 4\alpha + 2\beta = 4 \Leftrightarrow 2\alpha + \beta = 2$ (2)

Με αφαίρεση της σχέσης (1) από τη σχέση (2) έχουμε $\alpha = 1$ άρα $\beta = 0$.

Επομένως $g(x) = x^2 + 1$.

γ) Η f είναι ευθεία που τέμνει τους άξονες στα σημεία $(0,1)$ και $(1,0)$.

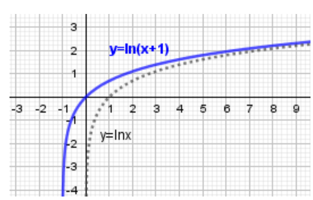




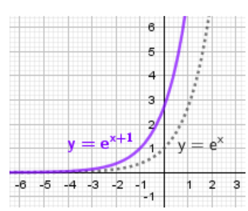
Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της $y = x^2$ κατά 1 μονάδα προς τα πάνω.

Είναι $y = \ln f(x) = \ln(x+1)$.

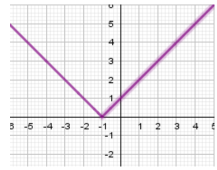
Η γραφική της παράσταση προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της $y = \ln x$ κατά 1 μονάδα αριστερά.



Είναι $y = e^{f(x)} = e^{x+1}$. Η γραφική της παράσταση προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της $y = e^x$ κατά 1 μονάδα αριστερά.



Η γραφική παράσταση της $y=|f(x)|=|x+1|$ προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της $y=|x|$ κατά 1 μονάδα αριστερά.



δ) i. Είναι $\lim_{x\to-1}\frac{g^3(x)-8}{f(x)}=\lim_{x\to-1}\frac{(x^2+1)^3-8}{x+1}=$

$$\lim_{x\to-1}\frac{(x^2+1-2)\left[(x^2+1)^2+2(x^2+1)+4\right]}{x+1}=$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{(x^2-1)\left[(x^2+1)^2+2(x^2+1)+4\right]}{x+1}=$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{(x-1)\cancel{(x+1)}\left[(x^2+1)^2+2(x^2+1)+4\right]}{\cancel{x+1}}=-2\cdot12=-24.$$

ii. Έχουμε $\lim_{x\to1}\frac{|g(x)-f(x)|-|f(x)|+2}{\sqrt{f(x)-1}-1}=\lim_{x\to1}\frac{|x^2+\cancel{1}-x-\cancel{1}|-|x+1|+2}{\sqrt{x+\cancel{1}-\cancel{1}}-1}=$

$$\lim_{x\to1}\frac{|x^2-x|-|x+1|+2}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to1}\frac{\left[|x(x-1)|-(x+1)+2\right](\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\left[|x||x-1|-x+1\right](\sqrt{x}+1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\left[x|x-1|-x+1\right](\sqrt{x}+1)}{x-1}.$$

(Είναι $\lim_{x\to1}(x+1)>0, \lim_{x\to1}x>0$ οπότε $x+1>0, x>0$ κοντά στο 1.)

Είναι $\lim_{x\to1^-}\frac{\left[|x||x-1|-x+1\right](\sqrt{x}+1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{\left[-x(x-1)-x+1\right](\sqrt{x}+1)}{x-1}=$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{(-x^2+\cancel{x}-\cancel{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{-\cancel{(x-1)}(x+1)(\sqrt{x}+1)}{\cancel{x-1}}=-4 \text{ και}$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{\left[|x||x-1|-x+1\right](\sqrt{x}+1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{\left[x(x-1)-(x-1)\right](\sqrt{x}+1)}{x-1}=$$

$\lim_{x\to1^-}\frac{\cancel{(x-1)}(x-1)(\sqrt{x}+1)}{\cancel{x-1}}=0$ άρα δεν υπάρχει το $\lim_{x\to1}\frac{|g(x)-f(x)|-|f(x)|+2}{\sqrt{f(x)-1}-1}$.

iii. $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{g(x)}-f(x)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x-1\right)=$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}-1\right)=0-1=-1.$$

ε) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\kappa g(x)+\lambda f(x)}{x-1}=2\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\kappa x^2+\kappa+\lambda x+\lambda}{x-1}=2$.

Έστω $\varphi(x)=\dfrac{\kappa x^2+\kappa+\lambda x+\lambda}{x-1}$, $x\neq1$ με $\lim\limits_{x\to1}\varphi(x)=2$.

Τότε $\varphi(x)(x-1)=\kappa x^2+\kappa+\lambda x+\lambda\Rightarrow$

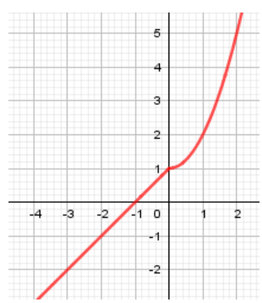
$\lim\limits_{x\to1}\left[\varphi(x)(x-1)\right]=\lim\limits_{x\to1}\left(\kappa x^2+\kappa+\lambda x+\lambda\right)\Leftrightarrow0=2\kappa+2\lambda\Leftrightarrow\lambda=-\kappa$.

Είναι $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\kappa x^2+\kappa+\lambda x+\lambda}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\kappa x^2+\cancel{\kappa}-\kappa x-\cancel{\kappa}}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\kappa x\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=\kappa$, άρα

$\kappa=2$ και λ = -2. Τότε $\lim\limits_{x\to1}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2+\cancel{2}-2x-\cancel{2}}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=2$.

στ) Είναι $h(x)=\begin{cases}x+1, & x\leq0\\ x^2+1, & x>0\end{cases}$.

Στο διπλανό σχήμα σχεδιάσαμε τη γραφική παράσταση της h, στην οποία φαίνεται ότι η h είναι 1-1.



2^{ος} τρόπος

Η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0)$ γιατί είναι της μορφής $\alpha x+\beta$ με $\alpha>0$, είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ γιατί η συνάρτηση x^2+1 είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Έστω $x_1\leq0<x_2$.

Τότε $x_1+1\leq1<x_2^2+1$ οπότε $h(x_1)<h(x_2)$ άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της άρα και 1-1.

Για $x\leq0$ είναι $h(x)=y\Leftrightarrow x+1=y\Leftrightarrow x=y-1$.

Είναι $x\leq0\Leftrightarrow y-1\leq0\Leftrightarrow y\leq1$, άρα $h^{-1}(y)=y-1,\ y\leq1$.

Για $x>0$ είναι $h(x)=y\Leftrightarrow x^2+1=y\Leftrightarrow x^2=y-1$.

Είναι $x^2>0\Leftrightarrow y-1>0\Leftrightarrow y>1$, οπότε $x=\sqrt{y-1}\Leftrightarrow h^{-1}(y)=\sqrt{y-1},\ y>1$.

Άρα $h^{-1}(y)=\begin{cases}y-1, & y\leq1\\ \sqrt{y-1}, & y>1\end{cases}$ και $h^{-1}(x)=\begin{cases}x-1, & x\leq1\\ \sqrt{x-1}, & x>1\end{cases}$.

16.α) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, είναι $e^{x_1} < e^{x_2}$.

Με πρόσθεση έχουμε $e^{x_1} + x_1 < e^{x_2} + x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \nearrow \mathbb{R}$.

β) Από τη σχέση που μας δίνεται έχουμε:

$e^{x_0} = \alpha - x_0 \Leftrightarrow e^{x_0} + x_0 = \alpha \Leftrightarrow f(x_0) = \alpha$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x + x\right) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x + x\right) = +\infty$.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ έχει σύνολο τιμών το $f(A) = \mathbb{R}$. Το $\alpha \in \mathbb{R}$ άρα υπάρχει μοναδικός $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = \alpha \Leftrightarrow e^{x_0} = \alpha - x_0$.

γ) i. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-x+2^x}{f(x)-x+3^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+\cancel{x}-\cancel{x}+2^x}{e^x+\cancel{x}-\cancel{x}+3^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(1+\left(\frac{2}{e}\right)^x\right)}{3^x\left(\left(\frac{e}{3}\right)^x+1\right)} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{e}{3}\right)^x\cdot\frac{1+\left(\frac{2}{e}\right)^x}{\left(\frac{e}{3}\right)^x+1}\right] = 0$$ αφού $\frac{e}{3}, \frac{2}{e} \in (0,1)$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e}{3}\right)^x = 0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{e}\right)^x = 0$

ii. $$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{f(x)-e^x}-\sqrt{f(x)-e^x}}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{\cancel{e^x}+x-\cancel{e^x}}-\sqrt{\cancel{e^x}+x-\cancel{e^x}}}{x-1} =$$

$\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{x-1}$. Θέτουμε $\sqrt[6]{x} = u$, τότε $\sqrt[3]{x} = u^2$, $\sqrt{x} = u^3$ και $x = u^6$, οπότε:

1ος τρόπος: Έχουμε:

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{x-1} = \lim_{u\to1}\frac{u^2-u^3}{u^6-1} = \lim_{u\to1}\frac{-u^2\,\cancel{(u-1)}}{\cancel{(u-1)}\left(u^5+u^4+u^3+u^2+u+1\right)} = -\frac{1}{6}.$$

2ος τρόπος: $$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{x-1} = \lim_{u\to1}\frac{u^2-u^3}{u^6-1} = \lim_{u\to1}\frac{-u^2(u-1)}{\left(u^3\right)^2-1} = \lim_{u\to1}\frac{-u^2(u-1)}{\left(u^3-1\right)\left(u^3+1\right)} =$$

$$= \lim_{u\to1}\frac{-u^2\,\cancel{(u-1)}}{\cancel{(u-1)}\left(u^2+u+1\right)\left(u^3+1\right)} = -\frac{1}{6}.$$

δ) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα η f είναι 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

Η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ άρα η αντίστροφη f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Για τη συνάρτηση g πρέπει $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ (e^x + x) \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ άρα η g έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $g(x) = f^{-1}(f(x)) = x \Leftrightarrow g(x) = x$.

17.α) $A_{f\circ g} = \{x \in A_g \,/\, g(x) \in A_f\} = \{x > 0 \,/\, \ln x \geq 0\} = \{x > 0 \,/\, x \geq 1\} = [1,+\infty)$ και $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = \ln x \cdot e^{\ln x} = x\ln x$.

Είναι $A_{g\circ f} = \{x \in A_f \,/\, f(x) \in A_g\} = \{x \geq 0 \,/\, xe^x > 0\} = (0,+\infty)$.

$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = \ln(xe^x) = \ln x + \ln e^x = \ln x + x,\ x > 0$.

β) Είναι $(f\circ g)(x) = (g\circ f)(x) \Leftrightarrow x\ln x = \ln x + x \Leftrightarrow x\ln x - \ln x - x = 0$.

Έστω $\varphi(x) = x\ln x - \ln x - x,\ x \in [e, e^2]$. Είναι $\varphi(e) = e\ln e - \ln e - e = -1 < 0$,

$\varphi(e^2) = e^2\ln e^2 - \ln e^2 - e^2 = 2e^2 - 2 - e^2 = e^2 - 2 > 0$, άρα $\varphi(e^2)\varphi(e) < 0$.

Η φ είναι συνεχής στο $[e, e^2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε η εξίσωση $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow$ $(f\circ g)(x) = (g\circ f)(x)$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (e, e^2).

2ος τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(g(x)) - g(f(x))$.

Η h είναι συνεχής σαν πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων στο $[e, e^2]$.

Είναι $h(e) = f(g(e)) - g(f(e)) = f(1) - g(e^{e+1}) = e - e - 1 = -1 < 0,$

$$h(e^2) = f(g(e^2)) - g(f(e^2)) = f(2) - g\left(e^{e^2+2}\right) = 2e^2 - e^2 - 2 = e^2 - 2 > 0$$

άρα $h(e^2)h(e) < 0$.

Η h είναι συνεχής στο $[e, e^2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε η εξίσωση

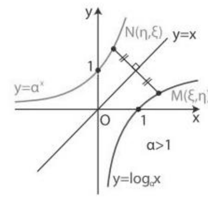
$h(x) = 0 \Leftrightarrow (f\circ g)(x) = (g\circ f)(x)$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (e, e^2).

γ) Για κάθε $x_1, x_2 \in [1,+\infty)$ με $x_1 < x_2$ είναι $0 \leq \ln x_1 < \ln x_2$, οπότε $x_1\ln x_1 < x_2\ln x_2 \Leftrightarrow h(x_1) < h(x_2)$ οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ άρα είναι 1-1 επομένως αντιστρέφεται.

Είναι $h(1) = 0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$.

Επειδή η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A = [1,+\infty)$ έχει σύνολο τιμών το $h(A) = [0,+\infty)$, οπότε η h^{-1} έχει πεδίο ορισμού το $[0,+\infty)$.

δ) i. Για κάθε $x \ge 0$ είναι: $f(x) \ge x \Leftrightarrow xe^x - x \ge 0 \Leftrightarrow x\left(e^x - 1\right) \ge 0$ που ισχύει γιατί $x \ge 0 \Leftrightarrow e^x \ge 1$.



ii. Από τη Β΄ Λυκείου γνωρίζουμε ότι $\ln x < x$ για κάθε $x > 0$, οπότε $g(x) < x$, άρα $f(x) > g(x)$ για κάθε $x > 0$.

ε) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{f(x)-x} = \lim\limits_{x\to 0}\left[g(x)\dfrac{1}{f(x)-x}\right] = -\infty(+\infty) = -\infty$

αφού $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{f(x)-x} \underset{\substack{x\to 0 \Rightarrow \\ u\to 0^+}}{\overset{\substack{f(x)-x=u \\ f(x)>x}}{=}} \lim\limits_{u\to 0^+}\dfrac{1}{u} = +\infty$.

18.α) Για να ορίζεται η f πρέπει $x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 1$, άρα $A_f = [1,+\infty)$.

Έστω $x_1, x_2 \in [1,+\infty)$ με $x_1 < x_2$, τότε $x_1 - 1 < x_2 - 1 \Leftrightarrow \sqrt{x_1 - 1} < \sqrt{x_2 - 1} \Leftrightarrow$ $\sqrt{x_1 - 1} + 1 < \sqrt{x_2 - 1} + 1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \nearrow [1,+\infty) \Rightarrow f$ 1−1 οπότε αντιστρέφεται. Θέτουμε $f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{x-1} + 1 = y \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = y - 1$.

Πρέπει $y - 1 \ge 0 \Leftrightarrow y \ge 1$, τότε $\left(\sqrt{x-1}\right)^2 = (y-1)^2 \Leftrightarrow x - 1 = y^2 - 2y + 1 \Leftrightarrow$

$x = y^2 - 2y + 2$ άρα $f^{-1}(y) = y^2 - 2y + 2,\ y \ge 1$, οπότε

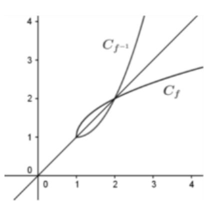
$f^{-1}(x) = x^2 - 2x + 2,\ x \ge 1$.

β) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα τα κοινά σημεία των $C_f, C_{f^{-1}}$ βρίσκονται στην $y = x$, επομένως: $f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f^{-1}(x) = x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = x \Leftrightarrow$

$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 2$.

Τα κοινά σημεία τους είναι τα σημεία $(1,1)$ και $(2,2)$.

γ)



δ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x) - \sqrt[3]{\left(f(x)-1\right)^2} - 1}{\sqrt[6]{\left(f(x)-1\right)^2} - 1} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-1} + 1 - \sqrt[3]{\left(\sqrt{x-1} + \cancel{1} - \cancel{1}\right)^2} - 1}{\sqrt[6]{\left(\sqrt{x-1} + \cancel{1} - \cancel{1}\right)^2} - 1} =$

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-1} - \sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[6]{x-1} - 1}$. Θέτουμε $\sqrt[6]{x-1} = u$, τότε $\sqrt[3]{x-1} = u^2$ και $\sqrt{x-1} = u^3$.

Όταν $x \to 2$ τότε $u \to 1$ και το όριο γίνεται: $\lim\limits_{u\to 1}\dfrac{u^3-u^2}{u-1}=\lim\limits_{u\to 1}\dfrac{u^2\cancel{(u-1)}}{\cancel{u-1}}=1$.

ε) $(f(x)-1)^4=x^2+x-x^4-x^3 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1}+\cancel{1}-\cancel{1}\right)^4=x^2+x-x^4-x^3 \Leftrightarrow$

$(x-1)^2=x^2+x-x^4-x^3 \Leftrightarrow \cancel{x^2}-2x+1=\cancel{x^2}+x-x^4-x^3 \Leftrightarrow$

$x^4+x^3-3x+1=0$. Με σχήμα Horner η εξίσωση γράφεται

$(x-1)(x^3+2x^2+2x-1)=0 \Leftrightarrow (x=1$ απορρίπτεται) ή ($x^3+2x^2+2x-1=0$).

Έστω $g(x)=x^3+2x^2+2x-1,\ x\in[0,1]$. Είναι $g(0)=-1<0,\ g(1)=4>0$ οπότε $g(0)g(1)<0$. Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ σαν πολυωνυμική άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$.

19.α) Πρέπει $\begin{cases} x>0 \\ \dfrac{1-\ln x}{\ln x}>0 \end{cases} \underset{\ln x=\omega}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x>0 \\ \omega(1-\omega)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ 0<\omega<1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x>0 \\ 0<\ln x<1 \end{cases} \Rightarrow 1<x<e$. Επομένως $A_f=(1,e)$.

β) Για κάθε $x_1,x_2\in(1,e)$ με $x_1<x_2$ ισχύει:

$\ln x_1<\ln x_2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\ln x_1}>\dfrac{1}{\ln x_2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\ln x_1}-1>\dfrac{1}{\ln x_2}-1 \Leftrightarrow$

$\dfrac{1-\ln x_1}{\ln x_1}>\dfrac{1-\ln x_2}{\ln x_2} \Leftrightarrow \ln\dfrac{1-\ln x_1}{\ln x_1}>\ln\dfrac{1-\ln x_2}{\ln x_2} \Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,e)$.

γ) Είναι $\alpha<\beta \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(\alpha)>f(\beta) \Leftrightarrow \ln\dfrac{1-\ln\alpha}{\ln\alpha}>\ln\dfrac{1-\ln\beta}{\ln\beta} \Leftrightarrow \dfrac{1-\ln\alpha}{\ln\alpha}>\dfrac{1-\ln\beta}{\ln\beta} \Leftrightarrow$

$\dfrac{\ln\beta}{\ln\alpha}>\dfrac{1-\ln\beta}{1-\ln\alpha}$.

2ος τρόπος: $\dfrac{\ln\beta}{\ln\alpha}>\dfrac{1-\ln\beta}{1-\ln\alpha} \Leftrightarrow \ln\beta\cdot(1-\ln\alpha)>(1-\ln\beta)\cdot\ln\alpha \Leftrightarrow$

$\ln\beta-\cancel{\ln\alpha\cdot\ln\beta}>\ln\alpha-\cancel{\ln\alpha\cdot\ln\beta} \Leftrightarrow \ln\beta>\ln\alpha \Leftrightarrow \beta>\alpha$ ισχύει.

δ) Είναι $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1-\ln x}{\ln x} \underset{u\to 0^+}{\overset{\ln x=u}{=}} \lim\limits_{u\to 0^+}\dfrac{1-u}{u}=\lim\limits_{u\to 0^+}\left(\dfrac{1}{u}-1\right)=+\infty$, άρα

$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\ln\dfrac{1-\ln x}{\ln x} \underset{t\to+\infty}{\overset{\frac{1-\ln x}{\ln x}=t}{=}} \lim\limits_{t\to+\infty}\ln t=+\infty$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to e^-} f(x) = \lim\limits_{x\to e^-} \ln\dfrac{1-\ln x}{\ln x} \overset{\frac{1-\ln x}{\ln x}=t}{=} \lim\limits_{t\to 0^+} \ln t = -\infty$.

Επομένως $f(A) \overset{f\nearrow}{=} \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = \mathbb{R}$.

ε) Η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα και 1-1.

Θέτουμε $f(x) = y \Leftrightarrow \ln\dfrac{1-\ln x}{\ln x} = y \Leftrightarrow \dfrac{1-\ln x}{\ln x} = e^y \Leftrightarrow 1-\ln x = e^y \ln x \Leftrightarrow$

$1 = e^y \ln x + \ln x \Leftrightarrow 1 = \left(e^y + 1\right)\ln x \Leftrightarrow \ln x = \dfrac{1}{e^y+1} \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{e^y+1}}$, άρα

$f^{-1}(y) = e^{\frac{1}{e^y+1}}$, $y \in \mathbb{R}$, οπότε $f^{-1}(x) = e^{\frac{1}{e^x+1}}$, $x \in \mathbb{R}$.

στ) Έστω ότι η C_f τέμνει την $y = x$ σε δύο σημεία, τα $A(\alpha,\alpha)$ και $B(\beta,\beta)$. Τότε $f(\alpha) = \alpha$ και $f(\beta) = \beta$. Έστω ότι $\alpha < \beta \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(\alpha) > f(\beta) \Leftrightarrow \alpha > \beta$ άτοπο.

Όμοια αν β>α. Άρα η C_f δεν τέμνει την $y = x$ σε δύο σημεία και τη τέμνει σε λιγότερα, δηλαδή το πολύ σε ένα σημείο.

Επίπεδο δυσκολίας Γ Θέματος

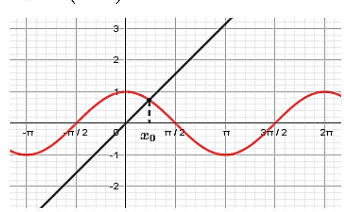
20.α) Είναι $f(0) = 1 > 0$, $f(\pi) = -1-\pi < 0$ οπότε $f(0)f(\pi) < 0$.

Η f είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος οπότε υπάρχει $x_0 \in (0,\pi)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in (0,\pi)$ με $x_1 < x_2$ είναι $\text{συν}x_1 > \text{συν}x_2$, $-x_1 > -x_2$.

Με πρόσθεση κατά μέλη των δύο σχέσεων έχουμε: $f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow f\searrow[0,\pi]$, οπότε το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της f στο διάστημα $(0,\pi)$.

Γεωμετρικά: Είναι $f(x) = 0 \Leftrightarrow \text{συν}x = x$.
Σχεδιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = \text{συν}x$ και $y = x$, οι οποίες έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο στο διάστημα $(0,\pi)$.



β) Για κάθε $x > \pi$ είναι $-1 \le \text{συν}x \le 1$, $y = x > \pi$ οπότε οι $y = \text{συν}x$, $y = x$ δεν τέμνονται άρα η εξίσωση $\text{συν}x = x \Leftrightarrow f(x) = 0$ είναι αδύνατη.

Για $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$, είναι $y = \text{συν}x > 0$, $y = x < 0$, οπότε οι $y = \text{συν}x$, $y = x$ δεν τέμνονται άρα η εξίσωση $\text{συν}x = x \Leftrightarrow f(x) = 0$ είναι αδύνατη.

Για $x \le -\frac{\pi}{2}$ είναι $-1 \le συνx \le 1$, $y = x \le -\frac{\pi}{2}$ οπότε οι $y = συνx$, $y = x$ δεν τέμνονται άρα η εξίσωση $συνx = x \Leftrightarrow f(x) = 0$ είναι αδύνατη.

Άρα το $x_0 \in (0,\pi)$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.

γ) Για κάθε $0 < x < x_0 \overset{f\searrow}{\Rightarrow} f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow f(x) > 0$ και για κάθε $x_0 < x < \pi \overset{f\searrow}{\Rightarrow} f(x_0) > f(x) \Leftrightarrow f(x) < 0$. Στο διάστημα $(-\infty, 0]$ είναι $f(x) \ne 0$, η f είναι συνεχής άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Είναι $f(0) = 1 > 0$, άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \le 0$. Στο διάστημα $[\pi, +\infty)$ είναι $f(x) \ne 0$, η f είναι συνεχής άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Είναι $f(\pi) = -1 - \pi < 0$, άρα $f(x) < 0$ για κάθε $x \ge \pi$.

δ) Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(συνx - x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\left(\frac{συνx}{x} - 1\right)\right] = -\infty(0-1) = +\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(συνx - x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{συνx}{x} - 1\right)\right] = +\infty(0-1) = -\infty$.

(Για $x \ne 0$ είναι $\left|\frac{συνx}{x}\right| = \frac{|συνx|}{|x|} \le \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|x|} \le \frac{συνx}{x} \le \frac{1}{|x|}$,

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{|x|}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{|x|} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{|x|}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{|x|} = 0$, οπότε

από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{συνx}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{συνx}{x} = 0$).

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ άρα έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

ε) $συνx\left(συν^2x - 3xσυνx + 3x^2\right) = x^3 - \frac{\pi^3}{8} \Leftrightarrow$

$συν^3x - 3xσυν^2x + 3x^2συνx - x^3 = -\frac{\pi^3}{8} \Leftrightarrow (συνx - x)^3 = -\frac{\pi^3}{8} \Leftrightarrow$

$f^3(x) = \left(-\frac{\pi}{2}\right)^3 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) \overset{f\,1-1}{\Leftrightarrow} x = \frac{\pi}{2}$.

21.α) Αφού η $f(x) = \begin{cases} αx - βημx + 4α^2 - β^2 &, x \ne 0 \\ 5α^2 - 2α - 4β + 5 &, x = 0 \end{cases}$ είναι συνεχής ισχύει

$\lim\limits_{x\to0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0}\left(αx - βημx + 4α^2 - β^2\right) = 5α^2 - 2α - 4β + 5 \Leftrightarrow$

$4\alpha^2-\beta^2=5\alpha^2-2\alpha-4\beta+5 \Leftrightarrow \alpha^2-2\alpha+\beta^2-4\beta+5=0 \Leftrightarrow$

$\alpha^2-2\alpha+1+\beta^2-4\beta+4=0 \Leftrightarrow (\alpha-1)^2+(\beta-2)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha-1=0\\ \beta-2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=1\\ \beta=2\end{cases}$.

Επομένως $f(x)=\begin{cases}x-2\eta\mu x\ ,\ x\neq 0\\ 0\qquad ,\ x=0\end{cases} \Leftrightarrow f(x)=x-2\eta\mu x\ ,\ x\in\mathbb{R}$.

β) Είναι $f(-\pi)=-\pi-2\eta\mu(-\pi)=-\pi<0$ και

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}-2\eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}+2=\frac{4-\pi}{2}>0$, οπότε $f(-\pi)f\left(-\frac{\pi}{2}\right)<0$.

Η f είναι συνεχής στο $\left[-\pi,-\frac{\pi}{2}\right]$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_1\in\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f(x_1)=0$.

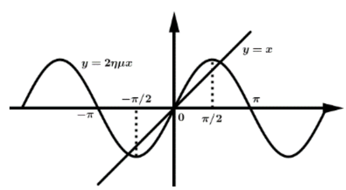
Είναι $f(\pi)=\pi-2\eta\mu\pi=\pi>0$ και $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-2=\frac{\pi-4}{2}<0$,

οπότε $f(\pi)f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$.

Η f είναι συνεχής άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_2\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ τέτοιο ώστε $f(x_2)=0$.

γ) i. Είναι $f(x)=0 \Leftrightarrow x-2\eta\mu x=0 \Leftrightarrow$ $x=2\eta\mu x$.

Σχεδιάζουμε τις $y=x$ και $y=2\eta\mu x$ και παρατηρούμε ότι έχουν ακριβώς 3 κοινά σημεία.



ii. Το x_1 ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ άρα $f(x_1)=0$.

Επίσης $f(-x_1)=-x_1-2\eta\mu(-x_1)= \ =-x_1+2\eta\mu x_1=0$ άρα το $-x_1$ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$. Όμως η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς 3 ρίζες τις $x_1,0,x_2$ με $x_1<0<x_2$ άρα $-x_1=x_2$ οπότε οι αριθμοί x_1,x_2 είναι αντίθετοι.

δ) Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x-2\eta\mu x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\left(1-\frac{2}{x}\eta\mu x\right)\right]=-\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2\eta\mu x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(1-\frac{2}{x}\eta\mu x\right)\right]=+\infty$. (Είναι

$\left|\frac{2}{x}\eta\mu x\right| = \frac{2}{|x|}|\eta\mu x| \le \frac{2}{|x|} \Leftrightarrow -\frac{2}{|x|} \le \frac{2}{x}\eta\mu x \le \frac{2}{|x|}$. Όμως $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2}{|x|} = 0 = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{2}{|x|}\right)$

άρα από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2}{x}\eta\mu x\right) = 0$. Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$,

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ οπότε έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

22.α) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι $(f\circ f)(x_1) < (f\circ f)(x_2)$ άρα η $f\circ f$ είναι γνησίως αύξουσα.

β) Είναι $f(f(x)) = \alpha(\alpha x+\beta)+\beta = \alpha^2 x + \alpha\beta + \beta$. Είναι $(f\circ f)(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα $\begin{cases} \alpha^2 = 1 \\ \alpha\beta+\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \pm 1 \\ \alpha\beta+\beta = 0 \end{cases}$.

Αν $\alpha = 1$ τότε $\beta+\beta = 0 \Leftrightarrow 2\beta = 0 \Leftrightarrow \beta = 0$ και $f(x) = x$.

Αν $\alpha = -1$ τότε $-\beta+\beta = 0$ ισχύει για κάθε $\beta \in \mathbb{R}$, οπότε $f(x) = -x+\beta,\ x \in \mathbb{R}$.

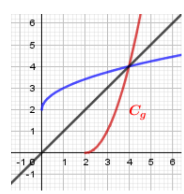
γ) Είναι $f(x) = -x+2$.

i. Η συνάρτηση g έχει τύπο $g(x) = f^2(x) = (x-2)^2$, $x \ge 2$. Για κάθε $x_1, x_2 \ge 2$ με $x_1 < x_2$ είναι $x_1 - 2 < x_2 - 2 \Leftrightarrow (x_1-2)^2 < (x_2-2)^2 \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2)$ άρα η g είναι $\nearrow$ στο $[2,+\infty)$ άρα 1-1 οπότε αντιστρέφεται. Η g είναι συνεχής στο $[2,+\infty)$ άρα έχει σύνολο τιμών το $g([2,+\infty)) = \left[g(2), \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\right) = [0,+\infty)$ αφού

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}(x-2)^2 = \lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)^2\right] = +\infty.$$

Θέτουμε $g(x) = y \Leftrightarrow x-2 = \sqrt{y} \Leftrightarrow x = \sqrt{y}+2$ άρα $g^{-1}(x) = \sqrt{x}+2,\ x \ge 0$.

ii. Είναι $g(x) < x \Leftrightarrow (x-2)^2 < x \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 < x \Leftrightarrow$ $x^2 - 5x + 4 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 4$. Όμως $x \ge 2$ άρα η C_g βρίσκεται κάτω από την $y = x$ στο διάστημα $(2,4)$.



iii. $\lim\limits_{x\to-2}\frac{\sqrt{f(x)}-2}{x+2} = \lim\limits_{x\to-2}\frac{\sqrt{2-x}-2}{x+2} =$

$$\lim_{x\to-2}\frac{\left(\sqrt{2-x}-2\right)\left(\sqrt{2-x}+2\right)}{(x+2)\left(\sqrt{2-x}+2\right)} = \lim_{x\to-2}\frac{2-x-4}{(x+2)\left(\sqrt{2-x}+2\right)} =$$

$$\lim_{x\to-2}\frac{-\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}\left(\sqrt{2-x}+2\right)} = -\frac{1}{4},\ \lim_{x\to2}\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} \underset{\omega\to0}{\overset{f(x)=\omega}{=}} \lim_{\omega\to0}\frac{\eta\mu\omega}{\omega} = 1,$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{f^2(x)+1}-f(x)\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+4+1}-2+x\right)=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{x^2-4x+5}+x\right)\left(\sqrt{x^2-4x+5}-x\right)}{\left(\sqrt{x^2-4x+5}-x\right)}-2\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{x^2-4x+5}\right)^2-x^2}{\left(-x\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}-x\right)}-2\right)=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\cancel{x^2}-4x+5-\cancel{x^2}}{-x\left(\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}+1\right)}-2\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\cancel{x}\left(-4+\frac{5}{x}\right)}{-\cancel{x}\left(\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}+1\right)}-2\right)=2-2=0\,.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f^2(x)+2x}{x^2-3f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2-x)^2+2x}{x^2-3(2-x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-4x+4+2x}{x^2-6+3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1\,.$$

iv. Είναι $\dfrac{x^4+1}{f(x)-1}+\dfrac{x^6+1}{f(x)}=0\Leftrightarrow\dfrac{x^4+1}{2-x-1}+\dfrac{x^6+1}{2-x}=0\Leftrightarrow\dfrac{x^4+1}{1-x}+\dfrac{x^6+1}{2-x}=0\Leftrightarrow$

$(2-x)(x^4+1)+(1-x)(x^6+1)=0$.

Έστω $\varphi(x)=(2-x)(x^4+1)+(1-x)(x^6+1),\ x\in[1,2]$.

Είναι $\varphi(1)=2>0,\ \varphi(2)=-65<0$ οπότε $\varphi(1)\varphi(2)<0$. Η φ είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε η εξίσωση $\varphi(x)=0\Leftrightarrow(2-x)(x^4+1)+(1-x)(x^6+1)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,2)$.

v. Είναι $h^2(x)=(2-x)^4\Leftrightarrow|h(x)|=(2-x)^2,\ h(x)=0\Leftrightarrow x=2$.

Για κάθε $x\neq2$ είναι $h(x)\neq0$ και επειδή είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,2),(2,+\infty)$.

Άρα στο $(-\infty,2)$ είναι $h(x)=(2-x)^2$ ή $h(x)=-(2-x)^2$ και στο $(2,+\infty)$ είναι $h(x)=(2-x)^2$ ή $h(x)=-(2-x)^2$.

Επειδή $h(2)=0$ τελικά $h(x)=(2-x)^2,\ x\in\mathbb{R}$ ή $h(x)=-(2-x)^2,\ x\in\mathbb{R}$ ή

$$h(x)=\begin{cases}(2-x)^2, & x\le2\\ -(2-x)^2, & x>2\end{cases}\quad\text{ή}\quad h(x)=\begin{cases}-(2-x)^2, & x\le2\\ (2-x)^2, & x>2\end{cases}.$$

23.α) Είναι $f\left(x^2\right)=|x|=\sqrt{x^2}$. Θέτουμε $x^2=\omega$ με $\omega\geq 0$, οπότε

$f(\omega)=\sqrt{\omega},\ \omega\geq 0$ άρα $f(x)=\sqrt{x}$, $x\geq 0$.

β) Η f είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση (είναι βασική), οπότε είναι 1-1 και αντιστρέφεται. Η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ οπότε έχει σύνολο τιμών το

$f\left([0,+\infty)\right)=\left[f(0),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=[0,+\infty)$ αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$.

Θέτουμε $f(x)=y\Leftrightarrow\sqrt{x}=y,\ y\geq 0\Leftrightarrow x=y^2$ άρα $f^{-1}(y)=y^2,\ y\geq 0$ οπότε

$f^{-1}(x)=x^2,\ x\geq 0$.

γ) i. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-\sqrt[3]{f^2(x)}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{\left(\sqrt{x}\right)^2}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{x-1}$.

Θέτουμε $\sqrt[6]{x}=\omega$, τότε $\sqrt{x}=\omega^3$, $\sqrt[3]{x}=\omega^2$ και $x=\omega^6$, οπότε:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{x-1}=\lim_{\omega\to 1}\frac{\omega^3-\omega^2}{\omega^6-1}=\lim_{\omega\to 1}\frac{\omega^2\cancel{(\omega-1)}}{\cancel{(\omega-1)}\left(\omega^2+\omega+1\right)\left(\omega^3+1\right)}=\frac{1}{6}.$$

ii. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{f\left(x^2+x\right)}-e^{f\left(x^2\right)}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{\sqrt{x^2+x}}-e^x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^x\left(\dfrac{e^{\sqrt{x^2+x}}}{e^x}-1\right)\right]=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^x\left(e^{\sqrt{x^2+x}-x}-1\right)\right]=+\infty$ αφού

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}+x-\cancel{x^2}}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}=\frac{1}{2}$$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$.

iii. Έχουμε: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f\left(x^2-4x+4\right)}{f(x+2)-f(3x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2-4x+4}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}=$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{(x-2)^2}\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}\right)}{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{|x-2|\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}\right)}{\left(\sqrt{x+2}\right)^2-\left(\sqrt{3x-2}\right)^2}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{|x-2|\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}\right)}{x+2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{|x-2|\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}\right)}{-2(x-2)}.$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{|x-2|\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}\right)}{-2(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}\right)}{-2\cancel{(x-2)}}=-2$,

$\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{|x-2|\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}\right)}{-2(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}\right)}{-2\cancel{(x-2)}}=2$, οπότε δεν υπάρχει το ζητούμενο όριο.

δ) Είναι $g(x)=e^{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{e^{\sqrt{x}}}$. Η g έχει ελάχιστο το 2 όταν $g(x)\ge 2$ και υπάρχει τιμή του x για την οποία ισχύει η ισότητα. Επομένως

$g(x)\ge 2\Leftrightarrow e^{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{e^{\sqrt{x}}}\ge 2\Leftrightarrow \left(e^{\sqrt{x}}\right)^2+1\ge 2e^{\sqrt{x}}\Leftrightarrow \left(e^{\sqrt{x}}\right)^2-2e^{\sqrt{x}}+1\ge 0\Leftrightarrow$

$\left(e^{\sqrt{x}}-1\right)^2\ge 0$ ισχύει. Επειδή $g(0)=2$ η θέση ελαχίστου είναι η $x=0$.

ε) $h^2(x)-4h(x)\le f(x^4)-4\Leftrightarrow h^2(x)-4h(x)+4\le x^2\Leftrightarrow$

$\left(h(x)-2\right)^2\le x^2\Leftrightarrow |h(x)-2|\le |x|$ (1)

Η (1) για $x=0$ γίνεται $|h(0)-2|\le 0\Leftrightarrow h(0)-2=0\Leftrightarrow h(0)=2$. Για $x\ne 0$ η (1) γίνεται $|h(x)-2|\le |x|\Leftrightarrow -|x|\le h(x)-2\le |x|\Leftrightarrow 2-|x|\le h(x)\le 2+|x|$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-|x|\right)=0,\ \lim\limits_{x\to 0}\left(2+|x|\right)=0$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to 0}h(x)=2$. Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}h(x)=h(0)$, η h είναι συνεχής στο $x=0$.

24.α) Είναι $A_f=\mathbb{R}-\{-1\}$ και $f(x)=1+\dfrac{1}{x+1}$.

Έστω $x_1,x_2<-1$ με $x_1<x_2\Leftrightarrow x_1+1<x_2+1\Leftrightarrow \dfrac{1}{x_1+1}>\dfrac{1}{x_2+1}\Leftrightarrow$

$1+\dfrac{1}{x_1+1}>1+\dfrac{1}{x_2+1}\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-1)$. Όμοια η η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1,+\infty)$. Η f είναι συνεχής οπότε έχει σύνολο τιμών $f(A)=f\left((-\infty,-1)\right)\cup f\left((-1,+\infty)\right)=\mathbb{R}-\{1\}$ αφού

$f\left((-\infty,-1)\right)\overset{f\searrow}{=}\left(\lim\limits_{x\to -1^-}f(x),\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)\right)=(-\infty,1)$.

β) Είναι $f\left((-\infty,-1)\right)\cap f\left((-1,+\infty)\right)=\varnothing$ η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty,-1),(-1,+\infty)$ άρα η f είναι $1-1$ οπότε αντιστρέφεται.

Θέτουμε $f(x)=y \Leftrightarrow 1+\frac{1}{x+1}=y \Leftrightarrow \frac{1}{x+1}=y-1 \Leftrightarrow$

$x+1=\frac{1}{y-1} \Leftrightarrow x=\frac{1}{y-1}-1 \Leftrightarrow f^{-1}(y)=\frac{2-y}{y-1}$ οπότε $f^{-1}(x)=\frac{2-x}{x-1}$, $x \neq 1$.

$A_{f^{-1}}=f(A)=\mathbb{R}-\{1\}$.

γ) Είναι $f(x)=f^{-1}(x) \Leftrightarrow \frac{x+2}{x+1}=\frac{2-x}{x-1} \Leftrightarrow x^2+x-2=-x^2+x+2 \Leftrightarrow$

$2x^2=4 \Leftrightarrow x^2=2 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$. Κοινά σημεία τα $\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ και $\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$.

δ) Είναι $f(x)=\ln x \Leftrightarrow \frac{x+2}{x+1}=\ln x \Leftrightarrow (x+1)\ln x=x+2 \Leftrightarrow$

$(x+1)\ln x-x-2=0$. Έστω $g(x)=(x+1)\ln x-x-2,\ x>0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=-\infty$ οπότε $g(x)<0$ κοντά στο 0 από δεξιά άρα υπάρχει α>0 τέτοιο ώστε $g(\alpha)<0$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\cdot\left(\frac{(x+1)\ln x}{x}-1-\frac{2}{x}\right)\right]=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\cdot\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x-1-\frac{2}{x}\right)\right]=+\infty\cdot(+\infty-1)=+\infty$, οπότε $g(x)>0$ κοντά στο $+\infty$ άρα υπάρχει β> α>0 τέτοιο ώστε $g(\beta)>0$. Επομένως $g(\alpha)\cdot g(\beta)<0$.

Η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)=\ln x_0$.

Επομένως η εξίσωση $f(x)=\ln x$ έχει τουλάχιστον μια θετική ρίζα.

25.α) Για $x\neq 0$ είναι

$$\frac{f^2(x)}{x^2}+\frac{\eta\mu^2 x}{x^2}=2\frac{\cancel{x}f(x)}{x^{\cancel{2}}} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)^2-2\left(\frac{f(x)}{x}\right)+\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2-2\left(\frac{f(x)}{x}\right)+1=1-\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}-1\right)^2=1-\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2 \text{ οπότε}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{x}-1\right)^2=\lim_{x\to 0}\left[1-\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2\right]=1-1=0.$$

Επίσης

$$-\left|\frac{f(x)}{x}-1\right|\le\frac{f(x)}{x}-1\le\left|\frac{f(x)}{x}-1\right| \Leftrightarrow -\sqrt{\left(\frac{f(x)}{x}-1\right)^2}\le\frac{f(x)}{x}-1\le\sqrt{\left(\frac{f(x)}{x}-1\right)^2}.$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\left(\frac{f(x)}{x}-1\right)^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(-\sqrt{\left(\frac{f(x)}{x}-1\right)^2}\right)=0$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{x}-1\right)=0\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu x)}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\frac{1}{x-1}\right]=-1$ γιατί

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\overset{\eta\mu x=u}{\underset{u\to 0}{=}}\lim\limits_{u\to 0}\frac{f(u)}{u}=L=1$.

γ) i. Είναι $f^2(x)+\eta\mu^2 x=2xf(x)\Leftrightarrow f^2(x)-2xf(x)=-\eta\mu^2 x\Leftrightarrow$

$f^2(x)-2xf(x)+x^2=x^2-\eta\mu^2 x\Leftrightarrow (f(x)-x)^2=x^2-\eta\mu^2 x\Leftrightarrow$

$h^2(x)=x^2-\eta\mu^2 x\Leftrightarrow |h(x)|\le\sqrt{x^2-\eta\mu^2 x}$. Είναι $|\eta\mu x|\le|x|$ άρα $x^2-\eta\mu^2 x\ge 0$ και $x^2-\eta\mu^2 x=0$ μόνο για $x=0$. Επομένως η h έχει μοναδική ρίζα την $x=0$, $h(x)\ne 0$ για $x\ne 0$ οπότε διατηρεί πρόσημο σε καθένα $(-\infty,0),(0,-\infty)$.

ii. Άρα $h(x)=h(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-\eta\mu^2 x} & ,x<0\\ 0 & ,x=0\\ \sqrt{x^2-\eta\mu^2 x} & ,x>0\end{cases}=\sqrt{x^2-\eta\mu^2 x}$ ή

$h(x)=h(x)=\begin{cases}-\sqrt{x^2-\eta\mu^2 x} & ,x<0\\ 0 & ,x=0\\ -\sqrt{x^2-\eta\mu^2 x} & ,x>0\end{cases}=-\sqrt{x^2-\eta\mu^2 x}$ ή

$h(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-\eta\mu^2 x} & ,x<0\\ 0 & ,x=0\\ -\sqrt{x^2-\eta\mu^2 x} & ,x>0\end{cases}$, ή $h(x)=\begin{cases}-\sqrt{x^2-\eta\mu^2 x} & ,x<0\\ 0 & ,x=0\\ \sqrt{x^2-\eta\mu^2 x} & ,x>0\end{cases}$.

26.α) Για $x=0$ είναι

$f^2(0)+1\le 2f(0)\Leftrightarrow f^2(0)-2f(0)+1\le 0\Leftrightarrow (f(0)-1)^2\le 0\Leftrightarrow f(0)=1$.

Επίσης

$f^2(x)+1\le 2f(x)+x^4\Leftrightarrow f^2(x)-2f(x)+1\le x^4\Leftrightarrow (f(x)-1)^2\le x^4\ (1)\Leftrightarrow$

$|f(x)-1|\le x^2\Leftrightarrow -x^2\le f(x)-1\le x^2\Leftrightarrow 1-x^2\le f(x)\le 1+x^2$.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-x^2\right)=1,\ \lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)=1$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to 0}f\left(x\right)=1$. Επομένως $\lim\limits_{x\to 0}f\left(x\right)=f\left(0\right)$ άρα η f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

β) Θέτουμε $x+1=\omega,\ \omega\in\mathbb{R}$ και έχουμε $f^2\left(\omega\right)-2f\left(\omega\right)\geq\omega^4-1$ για κάθε $\omega\in\mathbb{R}$, άρα και $f^2\left(x\right)-2f\left(x\right)\geq x^4-1\Leftrightarrow f^2\left(x\right)-2f\left(x\right)+1\geq x^4\Leftrightarrow\left(f\left(x\right)-1\right)^2\geq x^4$ (2) για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Από τις σχέσεις (1),(2) προκύπτει ότι $\left(f\left(x\right)-1\right)^2=x^4$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ) Είναι $x^4\neq 0$ για κάθε $x\neq 0$, άρα $g\left(x\right)=f\left(x\right)-1\neq 0$.
Η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $\left(-\infty,0\right)$ και $\left(0,+\infty\right)$. Άρα:

- $\left(g\left(x\right)=x^2\Leftrightarrow f\left(x\right)-1=x^2\Leftrightarrow f\left(x\right)=1+x^2\right)$ ή $\left(g\left(x\right)=-x^2\Leftrightarrow f\left(x\right)-1=-x^2\Leftrightarrow f\left(x\right)=1-x^2\right)$ για κάθε $x<0$.
- $g\left(x\right)=x^2\Leftrightarrow f\left(x\right)-1=x^2\Leftrightarrow f\left(x\right)=1+x^2$ για κάθε $x>0$.

(Είναι $g\left(1\right)=f\left(1\right)-1>0$ οπότε $g\left(x\right)>0$ για κάθε $x>0$). Επομένως οι δυνατοί τύποι της f είναι: $f\left(x\right)=1+x^2,\ x\in\mathbb{R}$ ή $f\left(x\right)=\begin{cases}1-x^2, & x<0\\ 1, & x=0\\ 1+x^2, & x>0\end{cases}$.

δ) i. Έστω $x_1,x_2<0$ με $x_1<x_2$, τότε $x_1^2>x_2^2\Leftrightarrow -x_1^2<-x_2^2\Leftrightarrow$ $1-x_1^2<1-x_2^2\Leftrightarrow f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\infty,0\right)$.
Έστω $x_1,x_2>0$ με $x_1<x_2$, τότε $x_1^2<x_2^2\Leftrightarrow 1+x_1^2<1+x_2^2\Leftrightarrow f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,+\infty\right)$. Έστω $x_1<0<x_2$, τότε $-x_1^2<0\Leftrightarrow 1-x_1^2<1\Leftrightarrow f\left(x_1\right)<1,\ x_2^2>0\Leftrightarrow 1+x_2^2>1\Leftrightarrow f\left(x_2\right)>1$, άρα ισχύει $f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-x^2\right)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+x^2\right)=+\infty$.
Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε έχει σύνολο τιμών το $f\left(A\right)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right),\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)\right)=\mathbb{R}$.

iii. Η f είναι γνησίως αύξουσα οπότε είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται.
Για $x<0$ είναι $f\left(x\right)=y\Leftrightarrow 1-x^2=y\Leftrightarrow 1-y=x^2$.
Είναι $1-y>0\Leftrightarrow y<1$. Άρα $x=-\sqrt{1-y},\ y<1$.

Για $x>0$ είναι $f(x)=y \Leftrightarrow 1+x^2=y \Leftrightarrow x^2=y-1$. Είναι $y-1>0 \Leftrightarrow y>1$.

Άρα $x=\sqrt{y-1}, y>1$. Άρα $f^{-1}(y)=\begin{cases} -\sqrt{1-y}, & y<1 \\ 0, & y=1 \\ \sqrt{y-1}, & y>1 \end{cases}$, οπότε

$$f^{-1}(x)=\begin{cases} -\sqrt{1-x}, & x<1 \\ 0, & x=1 \\ \sqrt{x-1}, & y>1 \end{cases}.$$

27.α) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, $-3,3$ διαδοχικές ρίζες της $f(x)=0$ άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε $x\in(-3,3)$. Επειδή $f(0)>0$ είναι $f(x)>0$ για κάθε $x\in(-3,3)$.

β) Έστω $g(x)=f(2)f(x)+5x^4+x^2-17 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{1}{f(2)}\left[g(x)-5x^4-x^2+17\right]$

με $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$.

Είναι $f(2)>0$ οπότε

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{f(2)}\left[g(x)-5x^4-x^2+17\right]\right)=\frac{1}{f(2)}\cdot(-\infty)=-\infty \text{ αφού}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-5x^4-x^2+17\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-5x^4\right)=-\infty$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

γ) Είναι $f(4)>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ άρα $f(x)<0$ για πολύ μεγάλες τιμές του x οπότε υπάρχει $\xi\in(4,+\infty)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)<0$. Επομένως $f(4)\cdot f(\xi)<0$.

Η f είναι συνεχής στο $[4,\xi]$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(4,\xi)$.

28.α) $f^2(x)-1=2xf(x) \Leftrightarrow f^2(x)-2xf(x)=1 \Leftrightarrow$

$$f^2(x)-2xf(x)+x^2=1+x^2 \Leftrightarrow \left(f(x)-x\right)^2=x^2+1\neq 0 \quad (1)$$

Η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, $g(x)\neq 0$ άρα η g διατηρεί σταθερό πρόσημο.

β) Από τη σχέση (1) για $x=0$ είναι $f^2(0)=1 \Leftrightarrow f(0)=\pm 1$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(0)\cdot x^4-5x^3+2}{x^3-2x^2-x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(0)x^4}{x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty} f(0)x$.

Για να είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(0)\cdot x^4-5x^3+2}{x^3-2x^2-x+3}=+\infty$, πρέπει $f(0)>0$, άρα $f(0)=1$.

γ) Είναι $g(0)=f(0)-0=1>0$ και $g(x)>0 \Leftrightarrow f(x)-x>0$, άρα $(1) \Rightarrow f(x)-x=\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x)=\sqrt{x^2+1}+x$.

δ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x}^{0} \cdot \dfrac{1}{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}^{0}}-1}\right) = 0$

29.α) Για κάθε $x_1, x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ με $x_1 < x_2$ ισχύει

$$\begin{cases} ημx_1 < ημx_2 \\ συνx_1 > συνx_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ημx_1 < ημx_2 \\ 1+συνx_1 > 1+συνx_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ημx_1 < ημx_2 & (1) \\ \dfrac{1}{1+συνx_1} < \dfrac{1}{1+συνx_2} & (2) \end{cases}$$

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των ανισοτήτων (1) και (2) που αποτελούνται από θετικούς αριθμούς έχουμε: $\dfrac{ημx_1}{1+συνx_1} < \dfrac{ημx_2}{1+συνx_2} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

β) Είναι $ημx < 1+συνx \Leftrightarrow \dfrac{ημx}{1+συνx} < 1 \Leftrightarrow f(x) < 1 \Leftrightarrow f(x) < f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} x < \dfrac{\pi}{2}$.

Όμως $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ οπότε η λύση της ανίσωσης είναι το διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=ημx(συνx-1)+(2x-1)(1+συνx)$.

Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ σαν πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $g(0)=-1<0, g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1+\pi-1=\pi-2>0$ οπότε $g(0)\cdot g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)<0$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα υπάρχει $\rho \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $g(\rho)=0 \Leftrightarrow ημρ(συνρ-1)+(2ρ-1)(1+συνρ)=0 \Leftrightarrow$

$\dfrac{ημρ}{1+συνρ}+\dfrac{2ρ-1}{συνρ-1}=0 \Leftrightarrow f(\rho)+\dfrac{2ρ-1}{συνρ-1}=0$.

δ) Είναι $f(\pi-x)=\dfrac{ημ(\pi-x)}{1+συν(\pi-x)}=\dfrac{ημx}{1-συνx}=\dfrac{ημx(1+συνx)}{(1-συνx)(1+συνx)} \Leftrightarrow$

$f(\pi-x)=\dfrac{ημx(1+συνx)}{1-συν^2x}=\dfrac{\cancel{ημx}(1+συνx)}{ημ^{\cancel{2}}x}=\dfrac{1+συνx}{ημx}=\dfrac{1}{f(x)}$ οπότε

$$\lim_{x\to 0^+} f(\pi - x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{f(x)} \underset{\substack{x\to 0^+,\, u\to 0^+ \\ u\to 0^+}}{\overset{u=f(x)}{=}} \lim \frac{1}{u} = +\infty .$$

ε) i. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\eta\mu x}{x}}{1+\sigma\upsilon\nu x} = \frac{1}{2}$.

ii. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{f(f(x))}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(f(x))}{f(x)} \cdot \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ αφού

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(f(x))}{f(x)} \overset{f(x)=u}{=} \lim_{u\to 0} \frac{f(u)}{u} = \frac{1}{2} .$$

iii. $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2 f(x)}{\eta\mu x} \right) = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2}{1+\sigma\upsilon\nu x} \right) = +\infty$ αφού $-1 \le \sigma\upsilon\nu x \le 1 \Leftrightarrow$

$0 \le 1+\sigma\upsilon\nu x \le 2$ και για $x \ne 2\kappa\pi + \pi$ είναι $\displaystyle \frac{1}{1+\sigma\upsilon\nu x} \ge \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{1+\sigma\upsilon\nu x} \ge \frac{x^2}{2}$.

Όμως $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{2} = +\infty$ οπότε $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2}{1+\sigma\upsilon\nu x} \right) = +\infty$.

30.α) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 1 = (x+1)^3 - 1$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι $x_1 + 1 < x_2 + 1 \Leftrightarrow (x_1+1)^3 < (x_2+1)^3 \Leftrightarrow$

$(x_1+1)^3 - 1 < (x_2+1)^3 - 1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ άρα f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, είναι 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

Θέτουμε $f(x) = y \Leftrightarrow (x+1)^3 - 1 = y \Leftrightarrow (x+1)^3 = y+1 \quad (1)$

Αν $y+1 \ge 0 \Leftrightarrow y \ge -1$ τότε η (1) γίνεται $x+1 = \sqrt[3]{y+1} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y+1} - 1$, ενώ αν $y+1 < 0 \Leftrightarrow y < -1$ τότε η (1) γίνεται: $x+1 = -\sqrt[3]{-y-1} \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{-y-1} - 1$, άρα

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt[3]{y+1} - 1, & y \ge -1 \\ \sqrt[3]{-y-1} - 1, & y < -1 \end{cases}, \text{ οπότε } f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+1} - 1, & x \ge -1 \\ \sqrt[3]{-x-1} - 1, & x < -1 \end{cases}.$$

γ) Είναι $f(x) = x^6 - x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 6x - 1 \Leftrightarrow$

$x^3 + 3x^2 + 3x = x^6 - x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 6x - 1 \Leftrightarrow x^6 - x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 1 = 0$.

Έστω $h(x) = x^6 - x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 1 = x^4(x^2-1) - 3x(x^2-1) + (x^2-1) =$

$(x^2-1)(x^4 - 3x + 1)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x^4 - 3x + 1,\ x \in [-1,1]$. Είναι

$g(-1) = 5 > 0,\ g(1) = -1 < 0$ οπότε $g(-1)g(1) < 0$. Η g είναι συνεχής στο $[-1,1]$

άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (-1,1)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=0$.

Τότε $h(x_0)=(x_0^2-1)\cancel{(x_0^4-3x_0+1)}^{0}=0$, άρα η εξίσωση $h(x)=0 \Leftrightarrow$ $f(x)=x^6-x^4-2x^3+4x^2+6x-1$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο $(-1,1)$.

δ) Είναι $x\eta\mu\left(\dfrac{f(x)}{x}-1\right)+x=f(x)\Leftrightarrow x\eta\mu\left(\dfrac{f(x)}{x}-1\right)=f(x)-x\Leftrightarrow$

$\eta\mu\left(\dfrac{f(x)}{x}-1\right)=\dfrac{f(x)}{x}-1$ (2). Γνωρίζουμε ότι $|\eta\mu x|\le|x|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$, άρα από την (2) ισοδύναμα έχουμε:

$$\frac{f(x)}{x}-1=0\overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow}\frac{x^3+3x^2+3x}{x}-1=0\Leftrightarrow\frac{\cancel{x}(x^2+3x+3)}{\cancel{x}}-1=0\Leftrightarrow$$

$x^2+3x+3-1=0\Leftrightarrow x^2+3x+2=0\Leftrightarrow(x=-1)$ ή $(x=-2)$.

ε) i. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\eta\mu x}{f(x)}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x^3+3x^2+3x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\cdot\dfrac{1}{x^2+3x+3}\right)=1\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$

ii. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(f(x))}\underset{\substack{x\to0\Rightarrow\\u\to0}}{\overset{f(x)=u}{=}}\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\eta\mu u}{f(u)}=\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\eta\mu u}{u(u^2+3u+3)}=$

$\lim\limits_{u\to0}\left(\dfrac{\eta\mu u}{u}\cdot\dfrac{1}{u(u^2+3u+3)}\right)=\dfrac{1}{3}$.

31.α) Είναι: $f^2(x)+x^2=e^{2x}+2xf(x)\Leftrightarrow f^2(x)-2xf(x)+x^2=e^{2x}\Leftrightarrow$ $(f(x)-x)^2=e^{2x}\Leftrightarrow|f(x)-x|=e^x$ (1). Επειδή $e^{2x}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)-x\neq0$. Η συνάρτηση $g(x)=f(x)-x$ είναι συνεχής άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Είναι $g(0)=f(0)-0=1>0$ άρα $g(x)=f(x)-x>0$.
Επομένως από τη σχέση (1) έχουμε:
$f(x)-x=e^x\Leftrightarrow f(x)=e^x+x,\ x\in\mathbb{R}$.

β) Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ (2), τότε: $e^{x_1}<e^{x_2}$ (3). Με πρόσθεση των σχέσεων (2) και (3) έχουμε $e^{x_1}+x_1<e^{x_2}+x_2\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)\Rightarrow f\nearrow\mathbb{R}$.

γ) Είναι $e^x=1821-x\Leftrightarrow e^x+x=1821\Leftrightarrow f(x)=1821$ (4)

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A=\mathbb{R}$ οπότε έχει σύνολο τιμών το $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=\mathbb{R}$.

Το $1821 \in f(A)$ άρα υπάρχει μοναδικός $x_0 \in A = \mathbb{R}$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = 1821$.

δ) Είναι $e^{e^x+x} + e^x - e < 1 - x \Leftrightarrow e^{e^x+x} + e^x + x < e + 1 \Leftrightarrow e^{f(x)} + f(x) < f(1) \Leftrightarrow$

$f(f(x)) < f(1) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) < 1 \Leftrightarrow f(x) < f(0) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} x < 0$.

ε) Είναι $e^x + x > x \Leftrightarrow f(x) > x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε λόγω συμμετρίας με την $y = x$ είναι $f^{-1}(x) < x$, άρα $f(x) > f^{-1}(x)$.

στ) i. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x) - x + 2^x}{(f(x)-x)^2 + e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x + \cancel{x} - \cancel{x} + 2^x}{(e^x + \cancel{x} - \cancel{x})^2 + e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x\left(1 + \left(\frac{2}{e}\right)^x\right)}{e^{2x}\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} =$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{1}{e^x} \dfrac{1 + \left(\frac{2}{e}\right)^x}{1 + \frac{1}{e^x}} \right] = 0$.

ii. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x)\,\eta\mu \dfrac{1}{f(x)} \right] \underset{\substack{x\to+\infty,\\ u\to 0}}{\overset{\frac{1}{f(x)}=u}{=}} \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\eta\mu u}{u} = 1$.

32.α) Είναι $f(x) = \dfrac{x^2 + 3\alpha x + \beta - 6}{x-2} \Leftrightarrow f(x)(x-2) = x^2 + 3\alpha x + \beta - 6$ οπότε

$\lim\limits_{x\to 2}[f(x)(x-2)] = \lim\limits_{x\to 2}(x^2 + 3\alpha x + \beta - 6) \Leftrightarrow 0 = 6\alpha + \beta - 2 \Leftrightarrow \beta = 2 - 6\alpha \quad (1)$

Τότε $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 + 3\alpha x + 2 - 6\alpha - 6}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 4 + 3\alpha x - 6\alpha}{x-2} =$

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\cancel{(x-2)}(x+2) + 3\alpha\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = 4 + 3\alpha$.

Είναι $4 + 3\alpha = 7 \Leftrightarrow 3\alpha = 3 \Leftrightarrow \alpha = 1$. Από την $(1) \Rightarrow \beta = -4$.

β) Είναι $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 10}{x-2} = \dfrac{(x-2)(x+5)}{x-2} = x + 5$.

i) $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{x-3}{f^2(x)} = \lim\limits_{x\to -5} \dfrac{x-3}{(x+5)^2} = \lim\limits_{x\to -5} \left[(x-3)\dfrac{1}{(x+5)^2} \right] = -\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x\to -5}(x-3) = -8 < 0$ και $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{1}{(x+5)^2} = +\infty$.

ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\text{συν}x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(x+5)\dfrac{1}{1-\text{συν}x}\right]=5\cdot(+\infty)=+\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to 0}(1-\text{συν}x)=0$ και $\text{συν}x<1$ για κάθε $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

γ) Για κάθε $x>0$, είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+5)=+\infty$, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$,

οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{g(x)}\underset{\substack{x\to+\infty\Rightarrow\\ u\to+\infty}}{\overset{g(x)=u}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{u}=0$.

δ) Είναι $f(x)=\dfrac{\text{ημ}x+11}{2}\Leftrightarrow x+5=\dfrac{\text{ημ}x+11}{2}\Leftrightarrow$

$2x+10=\text{ημ}x+11\Leftrightarrow\text{ημ}x-2x+1=0$. Έστω $g(x)=\text{ημ}x-2x+1,\ x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Είναι $g(0)=1>0,\ g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\text{ημ}\dfrac{\pi}{2}-\cancel{2}\dfrac{\pi}{\cancel{2}}+1=2-\pi<0$ οπότε $g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)g(0)<0$.

Η g είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων στο $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θ. Bolzano οπότε η εξίσωση $g(x)=0\Leftrightarrow\text{ημ}x-2x+1=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

33.α) Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι $f(x_1)<f(x_2)$ (1) και $2x_1<2x_2\Leftrightarrow f(2x_1)<f(2x_2)$ (2) αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
Από $(1)+(2)\Rightarrow f(x_1)+f(2x_1)<f(x_2)+f(2x_2)\Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2)$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Είναι $f(2x^2)-f(x^2+1)<f(2x^2+2)-f(4x^2)\Leftrightarrow$

$f(2x^2)+f(4x^2)<f(x^2+1)+f(2x^2+2)\Leftrightarrow$

$g(2x^2)<g(x^2+1)\overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow}2x^2<x^2+1\Leftrightarrow x^2<1\Leftrightarrow|x|<1\Leftrightarrow-1<x<1$.

γ) Για να ορίζεται η $g\circ f$ πρέπει $\begin{cases}x\in D_f\\ f(x)\in D_f\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\ 2x-1\in\mathbb{R}\end{cases}\Leftrightarrow D_{g\circ f}=\mathbb{R}$.

Είναι $g(x)=f(x)+f(2x)=2x-1+4x-1=6x-2$ οπότε

$g(f(x))=6(2x-1)-2=12x-8$.

Για να είναι $g(f(x))=\alpha x+\beta$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, πρέπει $\alpha=12$ και $\beta=-8$.

δ) Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(2x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)}{x}+\dfrac{f(2x)}{x}\right)=$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)}{x}+2\dfrac{f(2x)}{2x}\right)=3$ γιατί $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)}{2x}\underset{\substack{x\to 0\Rightarrow\\ \omega\to 0}}{\overset{2x=\omega}{=}}\lim\limits_{\omega\to 0}\dfrac{f(\omega)}{\omega}=1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{xg(4x)-g(-x)\eta\mu 2x}{4x^2-\eta\mu^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\cancel{x}g(4x)}{x^{\cancel{2}}}-\dfrac{g(-x)\eta\mu 2x}{x^2}}{\dfrac{4\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}-\dfrac{\eta\mu^2 x}{x^2}}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{4\dfrac{g(4x)}{4x}-\dfrac{g(-x)}{x}\cdot\dfrac{\eta\mu 2x}{x}}{4-\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^2}=\frac{4\cdot 3-(-3)\cdot 2}{4-1}=6 \text{ αφού}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(4x)}{4x}\underset{\substack{x\to 0\Rightarrow\\ \omega\to 0}}{\overset{4x=\omega}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{g(\omega)}{\omega}=3,\ \lim_{x\to 0}\frac{g(-x)}{x}\underset{\substack{x\to 0\Rightarrow\\ \omega\to 0}}{\overset{\substack{-x=\omega\Rightarrow\\ x=-\omega}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{g(\omega)}{-\omega}=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{g(\omega)}{\omega}\right)=-3.$$

34.α) Για κάθε $x>0$ έχουμε: $\left|\dfrac{\eta\mu x}{x}\right|=\dfrac{|\eta\mu x|}{|x|}\le\dfrac{1}{|x|}=\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow -\dfrac{1}{x}\le\dfrac{\eta\mu x}{x}\le\dfrac{1}{x}$. Είναι

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=0=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=0$.

Όμοια $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}=0$.

β) i. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(1+\dfrac{\eta\mu x}{x}-\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\right)\right]=+\infty$.

ii. Θέτουμε $\dfrac{1}{f(x)}=u$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}u=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)}=0$. Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ είναι

$f(x)>0$ κοντά στο $+\infty$, οπότε: $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{1}{f(x)}=\lim\limits_{u\to 0^+}\ln u=-\infty$.

iii. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\eta\mu\dfrac{1}{f(x)}=\lim\limits_{u\to 0^+}\dfrac{1}{u}\cdot\eta\mu u=\lim\limits_{u\to 0^+}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1$.

γ) Έστω $x_1,x_2\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ με $x_1<x_2$ (1), τότε: $\eta\mu x_1<\eta\mu x_2$ (2),

$\sigma\upsilon\nu x_1>\sigma\upsilon\nu x_2\Leftrightarrow-\sigma\upsilon\nu x_1<-\sigma\upsilon\nu x_2$ (3)

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2), (3) έχουμε:

$x_1 + ημx_1 - συνx_1 < x_2 + ημx_2 - συνx_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

δ) Είναι $x_0 + ημx_0 = συνx_0 \Leftrightarrow x_0 + ημx_0 - συνx_0 = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 0$.

Είναι $f(0) = -1 < 0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + 1 > 0$ οπότε $f(0)f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$. Η f είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 + ημx_0 = συνx_0$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ άρα το x_0 είναι μοναδικό.

35.α) Για να ορίζεται η f πρέπει: $\begin{cases} x \ge 0 \\ x+1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x \ge -1 \end{cases} \Rightarrow x \ge 0$, άρα $A_f = [0, +\infty)$. Έστω $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$, τότε $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$ (1), $x_1 + 1 < x_2 + 1 \Leftrightarrow \sqrt{x_1 + 1} < \sqrt{x_2 + 1}$ (2). Με πρόσθεση των σχέσεων (1) και (2) έχουμε $\sqrt{x_1+1} + \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2+1} + \sqrt{x_2} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \nearrow [0, +\infty)$.

β) Είναι $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right) = +\infty$ και $f(0) = 1$. Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ έχει σύνολο τιμών το

$f(A) = \left[f(0), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\right) = [1, +\infty)$.

γ) Η f είναι γνησίως αύξουσα οπότε είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται.

Θέτουμε $f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{x+1} + \sqrt{x} = y$ και επειδή $y \ge 1$ έχουμε:

$$\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)^2 = y^2 \Leftrightarrow x + 1 + 2\sqrt{x+1}\sqrt{x} + x = y^2 \Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{x(x+1)} = y^2 - (2x+1) \Leftrightarrow 4\left(x^2 + x\right) = \left[y^2 - (2x+1)\right]^2 \Leftrightarrow$$

$$4x^2 + 4x = y^4 - 2y^2(2x+1) + (2x+1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\cancel{4x^2} + \cancel{4x} = y^4 - 4y^2x - 2y^2 + \cancel{4x^2} + \cancel{4x} + 1 \Leftrightarrow 4y^2x = y^4 - 2y^2 + 1 \Leftrightarrow$$

$x = \frac{y^4 - 2y^2 + 1}{4y^2}$ άρα $f^{-1}(y) = \frac{y^4 - 2y^2 + 1}{4y^2}$, $y \ge 1$, οπότε

$f^{-1}(x) = \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{4x^2}$, $x \ge 1$. ($x \ge 0 \Leftrightarrow \frac{y^4 - 2y^2 + 1}{4y^2} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{\left(y^2 - 1\right)^2}{4y^2} \ge 0$ ισχύει.)

δ) Είναι: $\sqrt{\beta+1}-\sqrt{\beta}<\sqrt{\alpha+1}-\sqrt{\alpha}\Leftrightarrow$

$$\frac{\left(\sqrt{\beta+1}-\sqrt{\beta}\right)\left(\sqrt{\beta+1}+\sqrt{\beta}\right)}{\sqrt{\beta+1}+\sqrt{\beta}}<\frac{\left(\sqrt{\alpha+1}-\sqrt{\alpha}\right)\left(\sqrt{\alpha+1}+\sqrt{\alpha}\right)}{\sqrt{\alpha+1}+\sqrt{\alpha}}\Leftrightarrow$$

$$\frac{\cancel{\beta}+1-\cancel{\beta}}{\sqrt{\beta+1}+\sqrt{\beta}}<\frac{\cancel{\alpha}+1-\cancel{\alpha}}{\sqrt{\alpha+1}+\sqrt{\alpha}}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{\beta+1}+\sqrt{\beta}}<\frac{1}{\sqrt{\alpha+1}+\sqrt{\alpha}}\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{f(\beta)}<\frac{1}{f(\alpha)}\overset{f(\alpha)>0,f(\beta)>0}{\Leftrightarrow}f(\beta)>f(\alpha)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}\beta>\alpha$$ ισχύει.

ε) Είναι: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x+1)-f(x)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+2}+\cancel{\sqrt{x+1}}-\cancel{\sqrt{x+1}}-\sqrt{x}\right)\Leftrightarrow$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x+1)-f(x)\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}+2-\cancel{x}}{\sqrt{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{\sqrt{x}}\frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1\right)}\right]=0.$$

στ) i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\eta\mu x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)\left(1-\frac{\eta\mu x}{f(x)}\right)\right]=+\infty$.

Ισχύει: $\left|\frac{\eta\mu x}{f(x)}\right|=\frac{|\eta\mu x|}{f(x)}\le\frac{1}{f(x)}\Leftrightarrow-\frac{1}{f(x)}\le\frac{\eta\mu x}{f(x)}\le\frac{1}{f(x)}$.

Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}\underset{u\to+\infty}{\overset{f(x)=u}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{1}{u}=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{f(x)}\right)=0$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{f(x)}=0$.

ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\sqrt{x+2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x+2}\left(\frac{f(x)}{\sqrt{x+2}}-1\right)\right]=+\infty$.

($\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+2}=+\infty$,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\sqrt{x+2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}+\sqrt{x}}{\sqrt{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\frac{2}{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{\sqrt{x}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}{\cancel{\sqrt{x}}\cdot\sqrt{1+\frac{2}{x}}}=2\text{ .)}$$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)-\sqrt{x+2}}\overset{f(x)-\sqrt{x+2}=u}{\underset{u\to+\infty}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{1}{u}=0$.

iii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{f(x)}-e^{\sqrt{x+2}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^{\sqrt{x+2}}\left(\dfrac{e^{f(x)}}{e^{\sqrt{x+2}}}-1\right)\right]=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^{\sqrt{x+2}}\left(e^{f(x)-\sqrt{x+2}}-1\right)\right]=+\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\sqrt{x+2}}\overset{\sqrt{x+2}=u}{\underset{u\to+\infty}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}e^{u}=+\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}e^{f(x)-\sqrt{x+2}}\overset{f(x)-\sqrt{x+2}=u}{\underset{u\to+\infty}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}e^{u}=+\infty$.

ζ) Είναι $\sqrt{x^4+1}-\sqrt{x^2+1}<|x|-x^2\Leftrightarrow\sqrt{x^4+1}-\sqrt{x^2+1}<\sqrt{x^2}-\sqrt{x^4}\Leftrightarrow$

$\sqrt{x^4+1}+\sqrt{x^4}<\sqrt{x^2+1}+x^2\Leftrightarrow$

$f\left(x^4\right)<f\left(x^2\right)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}x^4<x^2\Leftrightarrow x^4-x^2<0\Leftrightarrow x^2\left(x^2-1\right)<0\Leftrightarrow x\in(-1,0)\cup(0,1)$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
x^2	+		+	0	+		+
x^2-1	+	0	−		−	0	+
$x^2\left(x^2-1\right)$	+	0	−	0	−	0	+

η) i. Είναι $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)=1$,

$\lim\limits_{x\to0}\left(f(x+1)-\sqrt{2}\right)\overset{x+1=u}{\underset{u\to1}{=}}\lim\limits_{u\to1}\left(f(u)-\sqrt{2}\right)=f(1)-\sqrt{2}=\sqrt{2}+1-\sqrt{2}=1$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to0}g(x)=1$.

ii. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)-2}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left((g(x)-2)\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=(1-2)(+\infty)=-\infty$.

iii. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|g(x)-3|-1}{x+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|g(x)-3|-1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{|g(x)-3|-1}{\sqrt{x}+1}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=$

$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{-g(x)+3-1}{\sqrt{x}+1}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{-g(x)+2}{\sqrt{x}+1}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=1\cdot(+\infty)=+\infty$.

($\lim\limits_{x\to0}(g(x)-3)-2<0$ οπότε $g(x)<0$ κοντά στο 0).

36.α) Για να ορίζεται η $f\circ f$ πρέπει:

$$\begin{cases} x\in A_f \\ f(x)\in A_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ \dfrac{\alpha x+2}{x-1}\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ \alpha x+2\neq x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ (\alpha-1)x\neq -3 \end{cases} \quad (1)$$

Αν $\alpha\neq 1$ τότε $\begin{cases} x\neq 1 \\ (\alpha-1)x\neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ x\neq -\dfrac{3}{\alpha-1} \end{cases}$, οπότε $A_{f\circ f}=\mathbb{R}-\left\{1,-\dfrac{3}{\alpha-1}\right\}$.

Για να έχει η $f\circ f$ πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}-\{1\}$ πρέπει

$-\dfrac{3}{\alpha-1}=1\Leftrightarrow \alpha-1=-3\Leftrightarrow \alpha=-2$ άτοπο.

Επομένως $\alpha=1$. Για $\alpha=1$: $(1)\Rightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ 0\neq -3 \text{ ισχύει} \end{cases}$, άρα $A_{f\circ f}=\mathbb{R}-\{1\}$.

Τότε $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$ και η $f\circ f$ έχει τύπο

$$(f\circ f)(x)=f(f(x))=\frac{\dfrac{x+2}{x-1}+2}{\dfrac{x+2}{x-1}-1}=\frac{\dfrac{x+\cancel{2}+2x-\cancel{2}}{\cancel{x-1}}}{\dfrac{\cancel{x}+2-\cancel{x}+1}{\cancel{x-1}}}=\frac{3x}{3}=x.$$

β) i. Είναι $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}=\dfrac{x-1+3}{x-1}=1+\dfrac{3}{x-1}$.

Έστω $x_1<x_2<1$, τότε $x_1-1<x_2-1\Leftrightarrow \dfrac{1}{x_1-1}>\dfrac{1}{x_2-1}\Leftrightarrow$

$\dfrac{3}{x_1-1}>\dfrac{3}{x_2-1}\Leftrightarrow 1+\dfrac{3}{x_1-1}>1+\dfrac{3}{x_2-1}\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1)$. Για κάθε $1<x_1<x_2$, τότε

$x_1-1<x_2-1\Leftrightarrow \dfrac{1}{x_1-1}>\dfrac{1}{x_2-1}\Leftrightarrow \dfrac{3}{x_1-1}>\dfrac{3}{x_2-1}\Leftrightarrow 1+\dfrac{3}{x_1-1}>1+\dfrac{3}{x_2-1}\Leftrightarrow$

$f(x_1)>f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$.

ii. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x}=1$,

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\left[(x+2)\dfrac{1}{x-1}\right]=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\left[(x+2)\dfrac{1}{x-1}\right]=+\infty$.

Στο διάστημα $\Delta_1=(-\infty,1)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, άρα

$f(\Delta_1)=\left(\lim\limits_{x\to1^-}f(x),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)=(-\infty,1)$. Στο διάστημα $\Delta_2=(1,+\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, άρα $f(\Delta_2)=\left(\lim\limits_{x+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\right)=(1,+\infty)$. Το σύνολο τιμών της f είναι το $f(A)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)=\mathbb{R}-\{1\}$.

iii. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}-\{1\}$ με $f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow \dfrac{x_1+2}{x_1-1}=\dfrac{x_2+2}{x_2-1} \Leftrightarrow$

$\cancel{x_1x_2}-x_1+2x_2-\cancel{2}=\cancel{x_1x_2}+2x_1-x_2-\cancel{2} \Leftrightarrow x_1=x_2 \Rightarrow f\ 1-1$, οπότε αντιστρέφεται.

iv. Είναι $(f\circ f\circ f\circ f\circ f)(x)=f\left(f\left(f\left(\underbrace{f(f(x))}_{x}\right)\right)\right)=f\left(\underbrace{f(f(x))}_{x}\right)=f(x)$,

οπότε $(f\circ f\circ f\circ f\circ f)(x)+(f\circ f)(x)=x+4 \Leftrightarrow f(x)+\cancel{x}=\cancel{x}+4 \Leftrightarrow$

$\dfrac{x+2}{x-1}=4 \Leftrightarrow x+2=4x-4 \Leftrightarrow 6=3x \Leftrightarrow x=2$ δεκτή.

37.α) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $[-2,4]$, $f(-2)=0, f(4)=0$ διαδοχικές ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$ οπότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-2,4)$. Όμως $f(0)=3>0$ οπότε $f(x)>0$ για κάθε $x\in(-2,4)$, άρα $f(2)>0$.

β) Έστω $g(x)=x^5f(5)f(6)+3x-2,\ x\in[0,1]$.

Η f είναι συνεχής στο $(4,+\infty)$, $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(4,+\infty)$ άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(4,+\infty)$ οπότε τα $f(5), f(6)$ είναι ομόσημοι και $f(5)f(6)>0$.

Είναι $g(0)=-2<0,\ g(1)=f(5)f(6)+1>0$ οπότε $g(0)\cdot g(1)<0$. Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano, άρα η $g(x)=0 \Leftrightarrow x^5f(5)f(6)+3x-2=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$.

γ) i. Για κάθε $x>4 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(x)<f(4)=0$, άρα $f(10)<0$. Επίσης $f(3)>0$, άρα

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(10)x^3-4x^2+f(1)}{f(3)x^2-5x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(10)x^{\cancel{3}}}{f(3)\cancel{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(10)}{f(3)}\cdot x\right)=-\infty.$$

ii. Έστω $h(x)=3f(x)-f(6)-f(7)-f(8),\ x\in[6,8]$.

Είναι $h(6)=3f(6)-f(6)-f(7)-f(8)=f(6)-f(7)+(f(6)-f(8))>0$,

$h(8)=3f(8)-f(6)-f(7)-f(8)=f(8)-f(6)+(f(8)-f(7))<0$

αφού $6<7<8 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(6)>f(7)>f(8)$ οπότε $h(6)\cdot h(8)<0$.

Η h είναι συνεχής στο $[6,8]$ σαν πράξεις συνεχών συναρτήσεων άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_0 \in (6,8)$ τέτοιο, ώστε $h(x_0)=0 \Leftrightarrow 3f(x_0)=f(6)+f(7)+f(8)$.

Για κάθε $6 \le x_1 < x_2 \le 8$ ισχύει $f(x_1)>f(x_2) \Leftrightarrow 3f(x_1)>3f(x_2) \Leftrightarrow$
$3f(x_1)-f(6)-f(7)-f(8)>3f(x_2)-f(6)-f(7)-f(8) \Leftrightarrow h(x_1)>h(x_2)$ άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[6,8]$ οπότε το x_0 είναι μοναδικό.

38.α) Για $x \ne 0$ είναι: $f(x)=\dfrac{\eta\mu(\kappa x)}{x}-x^3\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}$.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$ ως πράξη συνεχών συναρτήσεων, είναι συνεχής στο 0 από την υπόθεση άρα είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left[\kappa\dfrac{\eta\mu(\kappa x)}{\kappa x}-x^3\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}\right]=\kappa\cdot 1-0=f(0)=4$ άρα $\kappa=4$.

(Ισχύει $\left|x^3\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}\right| \le |x|^3 \Leftrightarrow -|x|^3 \le x^3\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x} \le |x|^3$.

Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}|x|^3=0=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-|x|^3\right)$ οπότε από το Κριτήριο παρεμβολής προκύπτει: $\lim\limits_{x\to 0}x^3\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}=0$. Επίσης $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu(\kappa x)}{\kappa x}\overset{u=kx}{\underset{x\to 0,\ u\to 0}{=}}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1$).

γ) Είναι $\left|\dfrac{\eta\mu x}{x}\right|=\dfrac{|\eta\mu x|}{|x|}\le\dfrac{1}{|x|}\Leftrightarrow -\dfrac{1}{|x|}\le\dfrac{\eta\mu x}{x}\le\dfrac{1}{|x|}$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\dfrac{1}{|x|}\right)=0=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{|x|}$ οπότε από το Κριτήριο παρεμβολής είναι:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=0$. Όμως $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}\right)\overset{\frac{1}{x}=u}{=}\lim\limits_{u\to 0^-}\left(\dfrac{1}{u^3}\sigma\upsilon\nu u\right)=-\infty$, άρα
$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

Όμοια $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

δ) Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ άρα υπάρχουν αντίστοιχα $\gamma<0$ τέτοιο, ώστε $f(\gamma)>0$ και $\delta>0$ τέτοιο, ώστε $f(\delta)<0$ οπότε $f(\gamma)\cdot f(\delta)<0$. Η f είναι συνεχής στο $[\gamma,\delta]$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θ. Bolzano οπότε υπάρχει $x_0\in(\gamma,\delta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$.

39.α) Η f ορίζεται όταν $1-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$. Έστω $x_1 < x_2 \leq 1$, τότε:
$-x_1 > -x_2 \Leftrightarrow 1-x_1 > 1-x_2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{1-x_1} > \sqrt[3]{1-x_2} \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$.

β) Αρκεί να υπάρχει $\rho \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ τέτοιο ώστε $f(\rho) = \rho$. Έστω

$g(x) = f(x) - x,\ x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Η g είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Είναι $g\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = \sqrt[3]{1-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{2} > 0$

αφού $\sqrt[3]{2} < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{2}} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{2} > 0$. Ακόμη $g(1) = f(1) - 1 = -1 < 0$, οπότε

$g\left(\frac{1}{2}\right) g(1) < 0$. Η g είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $\rho \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ τέτοιο, ώστε

$g(\rho) = 0 \Leftrightarrow f(\rho) - \rho = 0 \Leftrightarrow f(\rho) = \rho$. Έστω $x_1, x_2 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ με $x_1 < x_2$, τότε

$f(x_1) > f(x_2)$ (1) και $-x_1 > -x_2$ (2).Με πρόσθεση των σχέσεων (1) και (2), έχουμε $f(x_1) - x_1 > f(x_2) - x_2 \Leftrightarrow g(x_1) > g(x_2)$ οπότε η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ άρα το ρ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $g(x) = 0$.

γ) Αρκεί $\rho - \frac{1}{2} < 1 - \rho \Leftrightarrow 2\rho < \frac{3}{2} \Leftrightarrow \rho < \frac{3}{4}$. Είναι

$$g\left(\frac{3}{4}\right) = f\left(\frac{3}{4}\right) - \frac{3}{4} = \sqrt[3]{1-\frac{3}{4}} - \frac{3}{4} = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} - \frac{3}{4} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} - \frac{3}{4} = \frac{\sqrt[3]{4^2} - 3}{4} = \frac{\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{27}}{4} < 0$$

οπότε $g\left(\frac{1}{2}\right) g\left(\frac{3}{4}\right) < 0$. Η g είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ τέτοιο, ώστε

$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - x_0 = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0$. Όμως η g έχει μοναδική ρίζα το ρ στο $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, άρα το ρ ταυτίζεται με το x_0 οπότε $\rho \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ άρα $\rho < \frac{3}{4}$.

δ) $\sqrt[3]{1-f(\rho)} = f(\rho) \overset{f(\rho)=\rho}{\Leftrightarrow} \sqrt[3]{1-\rho} = \rho \Leftrightarrow f(\rho) = \rho$ που ισχύει.

ε) 1ος τρόπος

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{1-x} = +\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-x) = 1+\infty = +\infty$.

Θέτουμε $f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt[3]{1-x} = y \Leftrightarrow x = 1-y^3$. Όταν $x\to-\infty$, τότε $y\to+\infty$ (1)

Επομένως $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f^2(x)-f(x)}{x} = \lim\limits_{y\to+\infty}\frac{y^2-y}{1-y^3} = \lim\limits_{y\to+\infty}\frac{\cancel{y^2}}{-y^{\cancel{3}}} = \lim\limits_{y\to+\infty}\left(-\frac{1}{y}\right) = 0$.

2ος τρόπος

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f^2(x)-f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{1-x}\right)^2-\sqrt[3]{1-x}}{x} \underset{x\to-\infty\Rightarrow u\to+\infty}{\overset{u=\sqrt[3]{1-x}\Leftrightarrow x=1-u^3}{=}} \lim\limits_{u\to+\infty}\frac{u^2-u}{1-u^3} =$

$\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{u^2}{-u^3} = \lim\limits_{u\to+\infty}\left(-\frac{1}{u}\right) = 0$.

40.α) Είναι $f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0$ (1) για $x\in(\alpha,\beta)$.

Έστω η συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$, $x\in[\alpha,\beta]$.

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $g(\alpha) = f(\alpha)-\alpha = \beta-\alpha > 0$, $g(\beta) = f(\beta)-\beta = f^{-1}(\beta)-\beta = \alpha-\beta < 0$ αφού $f(\alpha) = \beta \Leftrightarrow f^{-1}(\beta) = \alpha$ οπότε $g(\alpha)g(\beta) < 0$.

(Το σημείο $M(\alpha,\beta)$ ανήκει στην γραφική παράσταση της f οπότε $f(\alpha) = \beta \Leftrightarrow f^{-1}(\beta) = \alpha \Leftrightarrow f(\beta) = \alpha$ αφού ισχύει $f(x) = f^{-1}(x)$ για κάθε $x\in\Delta$)

άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$.

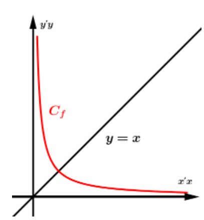
Για κάθε $x_1,x_2\in[\alpha,\beta]\subseteq\Delta$ με $x_1 < x_2$ έχουμε $-x_1 > -x_2$ (1) και $f(x_1) > f(x_2)$ (2) αφού f γνησίως φθίνουσα στο Δ.

Με πρόσθεση των σχέσεων (1) και (2) έχουμε

$f(x_1)-x_1 > f(x_2)-x_2 \Leftrightarrow g(x_1) > g(x_2)$ οπότε η g είναι γνησίως φθίνουσα.

Άρα το x_0 είναι μοναδικό και η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$ έχει μοναδική ρίζα στο (α,β).

β) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$. Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$ και έχει αντίστροφη την $f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$, δηλαδή $f = f^{-1}$. Το σημείο $M\left(\frac{1}{2},2\right)$ ανήκει στη C_f. Η f ικανοποιεί όλες τις προϋποθέσεις της



άσκησης και έχει μοναδικό κοινό σημείο με την $y = x$ το $M(1,1)$ στο διάστημα $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$.

γ) 1^{ος} τρόπος:

$$\left(f^2(x)+x-1\right)^2 = x^4+2x^3-x^2-2x+1 \Leftrightarrow \left(f^2(x)+x-1\right)^2 = \left(x^2+x-1\right)^2 \quad (M)$$

Έστω η συνάρτηση $g(x) = x^2+x-1$, $x \in [0,1]$ η οποία είναι συνεχής ως πολυωνυμική. Είναι $g(0) = -1$ και $g(1) = 1$ άρα $g(0)g(1) < 0$.

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα υπάρχει $x_1 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $g(x_1) = 0 \Leftrightarrow x_1^2 + x_1 - 1 = 0$.

Για $x = x_1$ στη σχέση (M) έχουμε: $\left(f^2(x_1)+x_1-1\right)^2 = \left(x_1^2+x_1-1\right)^2 \Leftrightarrow$

$\left(f^2(x_1)+x_1-1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow f^2(x_1)+x_1-1 = 0 \Leftrightarrow f^2(x_1) = 1-x_1$.

Άρα η εξίσωση $f^2(x) = 1-x$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$.

2^{ος} τρόπος:

Ομοίως με τον πρώτο απλά βρίσκουμε τις ρίζες της g αφού είναι τριώνυμο με $\Delta = 5$. Έχει ρίζες τις $\rho_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ και $\rho_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Έστω ότι το $\rho_1 \in (0,1)$, πράγματι $0 < \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} < 1 \Leftrightarrow 0 < -1+\sqrt{5} < 2 \Leftrightarrow$

$1 < \sqrt{5} < 3 \Leftrightarrow 1 < 5 < 9$ ισχύει.

Άρα όπως στον 1ο τρόπο δείχνουμε ότι μία ρίζα της εξίσωσης $f^2(x) = 1-x$ είναι η ρ_1 οπότε έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$.

δ) Είναι $f^{-1}(1) = -1 \Leftrightarrow f(-1) = 1$.

Επίσης $g^2(x)+2\left(f(x)-g(x)\right) = f^2(x) \Leftrightarrow g^2(x)-2g(x) = f^2(x)-2f(x) \Leftrightarrow$

$g^2(x)-2g(x)+1 = f^2(x)-2f(x)+1 \Leftrightarrow \left(g(x)-1\right)^2 = \left(f(x)-1\right)^2 \Leftrightarrow$

$|g(x)-1| = |f(x)-1|$.

Θέτω $\nu(x) = g(x)-1$, $x \in \mathbb{R}$.

Ισχύει $\nu(x) = 0 \Leftrightarrow |\nu(x)| = 0 \Leftrightarrow |f(x)-1| = 0 \Leftrightarrow f(x)-1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) = f(-1) \underset{f\ 1-1}{\overset{f \searrow}{\Leftrightarrow}} x = -1$.

Η ν είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών οπότε διατηρεί πρόσημο στα διαστήματα $(-\infty,-1), (-1,+\infty)$. Ισχύει: $\left(g(-2)-1\right)\left(g(0)-1\right) < 0 \Leftrightarrow \nu(-2)\nu(0) < 0$.

Αν $\nu(-2)<0$ τότε $\nu(x)<0$ στο $(-\infty,-1)$ και $\nu(0)>0$ οπότε $\nu(x)>0$ στο $(-1,+\infty)$. Αν $\nu(-2)>0$ τότε $\nu(x)>0$ στο $(-\infty,-1)$ και $\nu(0)<0$ οπότε $\nu(x)<0$ στο $(-1,+\infty)$.

1η περίπτωση: Αν $\nu(x)>0 \Leftrightarrow g(x)-1>0$ στο $(-\infty,-1)$ και $\nu(x)<0 \Leftrightarrow g(x)-1<0$ στο $(-1,+\infty)$.

Για $x<-1 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(x)>f(-1)=1 \Leftrightarrow f(x)-1>0$:

$|g(x)-1|=|f(x)-1| \Leftrightarrow g(x)-1=f(x)-1 \Leftrightarrow g(x)=f(x)$.

Για $x>-1 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(x)<f(-1)=1 \Leftrightarrow f(x)-1<0$:

$|g(x)-1|=|f(x)-1| \Leftrightarrow -g(x)+1=-f(x)+1 \Leftrightarrow -g(x)=-f(x) \Leftrightarrow g(x)=f(x)$

Για $x=-1: \nu(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=1$. Άρα $g(x)=\begin{cases} f(x) & , x\neq -1 \\ 1 & , x=-1 \end{cases}$.

2η περίπτωση: Αν $\nu(x)<0 \Leftrightarrow g(x)-1<0$ στο $(-\infty,-1)$ και $\nu(x)>0 \Leftrightarrow$ $g(x)-1>0$ στο $(-1,+\infty)$. Για $x<-1 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(x)>f(-1)=1 \Leftrightarrow f(x)-1>0$:

$|g(x)-1|=|f(x)-1| \Leftrightarrow -g(x)+1=f(x)-1 \Leftrightarrow g(x)=-f(x)+2$.

Για $x>-1 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(x)<f(-1)=1 \Leftrightarrow f(x)-1<0$:

$|g(x)-1|=|f(x)-1| \Leftrightarrow g(x)-1=-f(x)+1 \Leftrightarrow -g(x)=-f(x)+2$.

Για $x=-1$: $\nu(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=1$. Άρα $g(x)=\begin{cases} -f(x)+2 & , x\neq -1 \\ 1 & , x=-1 \end{cases}$.

Επίπεδο δυσκολίας Δ Θέματος

41.α) Αν $\alpha=0$, τότε $f(x)=\sqrt{\beta}$. Για να ορίζεται η f πρέπει $\beta\geq 0$. Τότε η f είναι σταθερή συνάρτηση, οπότε η περίπτωση αυτή απορρίπτεται. Αν $\alpha<0$, τότε η f ορίζεται όταν $\alpha x+\beta\geq 0 \Leftrightarrow \alpha x\geq -\beta \Leftrightarrow x\leq -\frac{\beta}{\alpha}$ οπότε $A_f=\left(-\infty,-\frac{\beta}{\alpha}\right]$.

Για κάθε $x_1,x_2\in A_f$ με $x_1<x_2$ είναι $\alpha x_1>\alpha x_2 \Leftrightarrow \alpha x_1+\beta>\alpha x_2+\beta \Leftrightarrow$ $\sqrt{\alpha x_1+\beta}>\sqrt{\alpha x_2+\beta} \Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της άρα απορρίπτεται η περίπτωση αυτή. Αν $\alpha>0$ τότε η f ορίζεται όταν $\alpha x+\beta\geq 0 \Leftrightarrow \alpha x\geq -\beta \Leftrightarrow x\geq -\frac{\beta}{\alpha}$, οπότε $A_f=\left[-\frac{\beta}{\alpha},+\infty\right)$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A_f$ με $x_1 < x_2$ είναι $\alpha x_1 < \alpha x_2 \Leftrightarrow \alpha x_1 + \beta < \alpha x_2 + \beta \Leftrightarrow$ $\sqrt{\alpha x_1 + \beta} < \sqrt{\alpha x_2 + \beta} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της. Άρα α > 0.

β) Είναι $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{\sqrt{x}} = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{\alpha x + \beta}}{\sqrt{x}} = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{\alpha x + \beta}{x}} = 1 \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\alpha + \dfrac{\beta}{x}} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha} = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1$.

Επίσης $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f^4(x) - x^2}{x+1} = -2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left[\left(\sqrt{x+\beta}\right)^2\right]^2 - x^2}{x+1} = -2 \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x+\beta)^2 - x^2}{x+1} = -2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cancel{x^2} + 2\beta x + \beta^2 - \cancel{x^2}}{x+1} = -2 \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cancel{x}\left(2\beta + \dfrac{\beta^2}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)} = -2 \Leftrightarrow 2\beta = -2 \Leftrightarrow \beta = -1$. Άρα $f(x) = \sqrt{x-1}$, $x \ge 1$.

γ) Η f είναι γνησίως αύξουσα είναι 1-1 οπότε αντιστρέφεται.
Άρα έχει σύνολο τιμών $f([1,+\infty)) = \left[f(1), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\right) = [0,+\infty) = A_{f^{-1}}$.

Για κάθε $x \ge 1$ είναι $f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = y \overset{y \ge 0}{\Leftrightarrow} \Leftrightarrow x - 1 = y^2 \Leftrightarrow x = y^2 + 1$.
Άρα $f^{-1}(y) = y^2 + 1,\ y \ge 0$, οπότε $f^{-1}(x) = x^2 + 1,\ x \ge 0$.

δ) Η $f \circ f$ έχει πεδίο ορισμού
$A_{f \circ f} = \{x \in A_f \,/\, f(x) \in A_f\} = \{x \ge 1 \,/\, \sqrt{x-1} \ge 1\} = \{x \ge 1 \,/\, x - 1 \ge 1\} =$

$\{x \ge 1 \,/\, x \ge 2\} = [2,+\infty)$ και τύπο $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \sqrt{\sqrt{x-1} - 1}$.

ε) $f(x) = \ln\dfrac{1}{x} \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = -\ln x$ (1). Για κάθε $x \ge 1$ είναι:

- $\sqrt{x-1} \ge 0$ με το ίσον να ισχύει για $x = 1$ και
- $\ln x \ge 0 \Leftrightarrow -\ln x \le 0$ με το ίσον να ισχύει για $x = 1$.

Άρα η μοναδική λύση της εξίσωσης είναι η x = 1.

42.α) 1ος τρόπος: Είναι $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x} = \dfrac{x^2}{x} - \dfrac{1}{x} = x - \dfrac{1}{x}$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in (0,+\infty)$ με $x_1 < x_2$ (1) είναι $\dfrac{1}{x_1} > \dfrac{1}{x_2} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{x_1} < -\dfrac{1}{x_2}$ (2)

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) έχουμε:

$$x_1-\frac{1}{x_1}<x_2-\frac{1}{x_2}\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)\Rightarrow f\nearrow(0,+\infty).$$

2^{ος} τρόπος: Για κάθε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ είναι

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1^2-1}{x_1}-\frac{x_2^2-1}{x_2}=\frac{x_1^2x_2-x_2-x_1x_2^2+x_1}{x_1x_2}=$$

$$\frac{x_1x_2(x_1-x_2)+x_1-x_2}{x_1x_2}=\frac{(x_1-x_2)(x_1x_2+1)}{x_1x_2}<0\Leftrightarrow$$

$f(x_1)<f(x_2)\Rightarrow f\nearrow(0,+\infty)$ αφού $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ και $x_1<x_2$.

β) Η f είναι γνησίως αύξουσα είναι 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(x-\frac{1}{x}\right)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\frac{1}{x}\right)=+\infty$.

Η f είναι συνεχής, άρα έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, οπότε $A_{f^{-1}}=\mathbb{R}$.

Για κάθε $x>0,\ y\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$f(x)=y\Leftrightarrow x-\frac{1}{x}=y\Leftrightarrow x^2-1=yx\Leftrightarrow x^2-yx-1=0\quad(3)$$

Η (3) είναι εξίσωση 2^{ου} βαθμού με διακρίνουσα $\Delta=y^2+4>0$ και ρίζες

$$x_{1,2}=\frac{y\pm\sqrt{y^2+4}}{2}.$$

Θα βρούμε το πρόσημο των ριζών με τους παρακάτω τρόπους:

1^{ος} τρόπος: (Με άλγεβρα Β΄ Λυκείου)

- Υποθέτουμε ότι $y+\sqrt{y^2+4}>0\Leftrightarrow\sqrt{y^2+4}>-y\quad(1)$

Αν $y>0\Leftrightarrow-y<0$ τότε η (1) ισχύει αφού $\sqrt{y^2+4}\geq0$ για κάθε $y\in\mathbb{R}$.

Αν $y=0$ τότε η (1) γίνεται $2>0$ ισχύει. Αν $y<0\Leftrightarrow-y>0$ τότε η (1) γίνεται:

$$\sqrt{y^2+4}^2>(-y)^2\Leftrightarrow\cancel{y^2}+4>\cancel{y^2}\Leftrightarrow4>0 \text{ ισχύει.}$$

Άρα τελικά $y+\sqrt{y^2+4}>0$ για κάθε $y\in\mathbb{R}$.

- Υποθέτουμε ότι $y-\sqrt{y^2+4}<0\Leftrightarrow\sqrt{y^2+4}>y\quad(2)$

Αν $y<0$ τότε η (2) ισχύει γιατί $\sqrt{y^2+4}\geq0$ για κάθε $y\in\mathbb{R}$.

Αν $y=0$ τότε η (2) γίνεται $2>0$ ισχύει.

Αν $y>0$ τότε η (2) γίνεται: $\sqrt{y^2+4}^2>y^2\Leftrightarrow\cancel{y^2}+4>\cancel{y^2}\Leftrightarrow4>0$ ισχύει.

Άρα τελικά $y-\sqrt{y^2+4}<0$ για κάθε $y\in\mathbb{R}$.

2ος τρόπος: (Αλγεβρική λύση με χρήση μίας ανισότητας που ισχύει)

- Ισχύει $4>0 \Leftrightarrow y^2+4>y^2 \Leftrightarrow \sqrt{y^2+4}>\sqrt{y^2} \Leftrightarrow \sqrt{y^2+4}>|y| \Leftrightarrow$ $-\sqrt{y^2+4}<y<\sqrt{y^2+4}$ για κάθε $y\in\mathbb{R}$ οπότε $y-\sqrt{y^2+4}<0$ για κάθε $y\in\mathbb{R}$ και $y+\sqrt{y^2+4}>0$ για κάθε $y\in\mathbb{R}$.

3ος τρόπος: $y+\sqrt{y^2+4}>y+\sqrt{y^2}=y+|y|$.

Όμως $|y|\geq -y \Leftrightarrow y+|y|\geq 0$ οπότε $y+\sqrt{y^2+4}>0$.

$\sqrt{y^2+4}-y>\sqrt{y^2}-y=|y|-y$.

Όμως $|y|\geq y \Leftrightarrow |y|-y\geq 0$ οπότε $\sqrt{y^2+4}-y>0 \Leftrightarrow y-\sqrt{y^2+4}<0$.

4ος τρόπος: (Με χρήση του θεωρήματος διατήρησης προσήμου)

- Έστω η συνάρτηση $g(y)=y+\sqrt{y^2+4}$, $y\in\mathbb{R}$.

Είναι $g(y)=0 \Leftrightarrow y+\sqrt{y^2+4}=0 \Leftrightarrow \sqrt{y^2+4}=-y$ (1)

Πρέπει $-y\geq 0 \Leftrightarrow y\leq 0$. Για $y\leq 0$ έχουμε $(1) \Leftrightarrow \sqrt{y^2+4}^{\,2}=(-y)^2 \Leftrightarrow$ $\sqrt{y^2+4}^{\,2}=(-y)^2 \Leftrightarrow y^2+4=y^2 \Leftrightarrow 4=0$ αδύνατη. Η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ σαν πράξεις συνεχών συναρτήσεων, $g(y)\neq 0$ για κάθε $y\in\mathbb{R}$ οπότε η g θα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Όμως $g(0)=2>0$ οπότε $g(y)>0$ για κάθε $y\in\mathbb{R}$.

Άρα τελικά $y+\sqrt{y^2+4}>0$ για κάθε $y\in\mathbb{R}$.

- Έστω η συνάρτηση $g(y)=y-\sqrt{y^2+4}$, $y\in\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής ως σύνθεση και πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $g(y)=0 \Leftrightarrow y-\sqrt{y^2+4}=0 \Leftrightarrow \sqrt{y^2+4}=y$ (2)

Για να έχει νόημα η εξίσωση πρέπει $y\geq 0$.

Για $y\geq 0$ έχουμε $(2) \Leftrightarrow \sqrt{y^2+4}^{\,2}=y^2 \Leftrightarrow y^2+4=y^2 \Leftrightarrow 4=0$ αδύνατη.

Η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ σαν πράξεις συνεχών συναρτήσεων, $g(y)\neq 0$ για κάθε $y\in\mathbb{R}$ οπότε η g θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Όμως $g(0)=-2<0$ οπότε $g(y)<0$ για κάθε $y\in\mathbb{R}$. Άρα $y-\sqrt{y^2+4}<0$ για κάθε $y\in\mathbb{R}$. Η λύση της εξίσωσης είναι θετικός αριθμός οπότε είναι δεκτή η λύση $x=\dfrac{y+\sqrt{y^2+4}}{2}$,

άρα $f^{-1}(y)=\dfrac{y+\sqrt{y^2+4}}{2}$, $y\in\mathbb{R}$, οπότε $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

γ) i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{xf(x)}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x\dfrac{x^2-1}{x}}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}=1$.

ii. $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{x\eta\mu(f(x))-x^2+1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{x\left[\eta\mu(f(x))-\dfrac{x^2-1}{x}\right]}=$

$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{x\left[\eta\mu(f(x))-f(x)\right]}$. Για κάθε $x>1$ είναι $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}>0$ και

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=0$. Θέτουμε $f(x)=u$ οπότε έχουμε

$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{\left[\eta\mu(f(x))-f(x)\right]}=\lim\limits_{u\to0^+}\dfrac{1}{\eta\mu u-u}$. Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

ότι $|\eta\mu x|\le|x|$ και το ίσον ισχύει μόνο για x = 0, οπότε για x > 0 είναι

$|\eta\mu x|<x\Leftrightarrow -x<\eta\mu x<x\Leftarrow \eta\mu x-x<0$. Επίσης $\lim\limits_{u\to0^+}(\eta\mu u-u)=0$ οπότε

$\lim\limits_{u\to0^+}\dfrac{1}{\eta\mu u-u}=-\infty$, άρα $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{x\left[\eta\mu(f(x))-f(x)\right]}=-\infty$.

δ) Έστω $g(x)=xf(x)-e^{-x}=x^2-1-e^{-x}$, $x\in[1,2]$.

Είναι $g(1)=-\dfrac{1}{e}<0$ και $g(2)=4-1-e^{-2}=3-\dfrac{1}{e^2}>0$ οπότε $g(1)g(2)<0$.

Η g είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα υπάρχει $\rho\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $g(\rho)=0\Leftrightarrow \rho f(\rho)=e^{-\rho}$.

Για κάθε $x_1,x_2\in[1,2]$ με $x_1<x_2$ είναι $x_1^2<x_2^2\Leftrightarrow x_1^2<x_2^2\Leftrightarrow x_1^2-1<x_2^2-1$ (4)

και $-x_1>-x_2\Leftrightarrow e^{-x_1}>e^{-x_2}\Leftrightarrow -e^{-x_1}<-e^{-x_2}$ (5)

Με πρόσθεση κατά μέλη των (4) και (5) προκύπτει ότι

$x_1^2-1-e^{-x_1}<x_2^2-1-e^{-x_2}\Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2)$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,2]$, οπότε το ρ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $g(x)=0\Leftrightarrow xf(x)=e^x$ στο $(1,2)$. Είναι $g\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{9}{4}-1-e^{-\frac{3}{2}}=\dfrac{5}{4}-\dfrac{1}{\sqrt{e^3}}>0$ ισχύει αφού $\dfrac{5}{4}>1>\dfrac{1}{\sqrt{e^3}}$.

Επομένως $g(1)g\left(\frac{3}{2}\right)<0$. Η g είναι συνεχής στο $\left[1,\frac{3}{2}\right]$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα η εξίσωση $g(x)=0 \Leftrightarrow xf(x)=e^x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα x_0 στο $\left(1,\frac{3}{2}\right)$.

Όμως το ρ είναι η μοναδική ρίζα της g στο $(1,2)$ οπότε το ρ ταυτίζεται με το x_0.

Άρα $\rho\in\left(1,\frac{3}{2}\right)$.

Το $\frac{3}{2}$ είναι το μέσο του διαστήματος $(1,2)$ οπότε το ρ είναι ποιο κοντά στο 1 από ότι στο 2.

43.α) Είναι $\left(f\circ g^{-1}\right)(x)=6-f(x)\ (1)$, άρα

$$2\left(f\circ g^{-1}\right)(x)-4(f\circ g)(x)=4x-18 \overset{(1)}{\Rightarrow} 12-2f(x)-4(f\circ g)(x)=4x-18 \Leftrightarrow$$
$$-2f(x)-4(f\circ g)(x)=4x-30 \Leftrightarrow f(x)+2(f\circ g)(x)=-2x+15 \quad (2)$$

Στη σχέση $f(x)+\left(f\circ g^{-1}\right)(x)=6$ θέτουμε όπου x το $g(x)$ οπότε:

$$f(g(x))+\left(f\circ g^{-1}\right)(g(x))=6 \Leftrightarrow f(g(x))+\left[\left(f\circ g^{-1}\right)\circ g\right](x)=6 \Leftrightarrow$$
$$f(g(x))+\left[f\circ\left(g\circ g^{-1}\right)(x)\right]=6 \Leftrightarrow f(g(x))+f(x)=6 \Leftrightarrow f(g(x))=6-f(x) \quad (3)$$

Από τη σχέση (2) μέσω της σχέσης (3) έχουμε:

$$f(x)+2(6-f(x))=-2x+15 \Leftrightarrow f(x)+12-2f(x)=-2x+15 \Leftrightarrow$$

$-f(x)=-2x+3 \Leftrightarrow f(x)=2x-3,\ x\in\mathbb{R}$. Θέτουμε όπου x το $g(x)$ στον τύπο της f οπότε $f(g(x))=2g(x)-3$ (4). Από τη σχέση (2) έχουμε μέσω της σχέσης (4): $2x-3+2(2g(x)-3)=-2x+15 \Leftrightarrow 2x-3+4g(x)-6=-2x+15 \Leftrightarrow$

$4g(x)=-4x+24 \Leftrightarrow g(x)=-x+6,\ x\in\mathbb{R}$.

β) i. Είναι $f(g(x))=6-(2x-3)=9-2x$, οπότε (4).

Θέτουμε $9-2x=\omega \Leftrightarrow x=\frac{9-\omega}{2}$ στη σχέση (4) οπότε

$h(\omega)=3e^{\omega+1}-3(9-\omega)+21 \Leftrightarrow h(\omega)=3e^{\omega+1}+3\omega-6$ άρα

$h(x)=3e^{x-1}+3x-6,\ x\in\mathbb{R}$.

ii. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι

$\begin{cases} x_1-1<x_2-1 \\ 3x_1<3x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x_1-1}<e^{x_2-1} \\ 3x_1-6<3x_2+6 \end{cases} \Rightarrow e^{x_1-1}+3x_1-6<e^{x_2-1}+3x_2+6$

οπότε $h(x_1)<h(x_2)$ άρα η h είναι γνησίως αύξουσα οπότε είναι $1-1$.

Είναι $h(x)=0 \Leftrightarrow h(x)=h(1) \overset{1\text{-}1}{\Leftrightarrow} x=1$.

iii. Είναι $e^{x^3-1}-e^{x-1}>3(x-x^3) \Leftrightarrow e^{x^3-1}-e^{x-1}>3x-3x^3 \Leftrightarrow$

$e^{x^3-1}+3x^3>e^{x-1}+3x$ (3). Έστω $\varphi(x)=e^{x-1}+3x,\ x\in\mathbb{R}$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Από τη σχέση (3) έχουμε:

$\varphi(x^3)>\varphi(x) \overset{\varphi\nearrow}{\Leftrightarrow} x^3>x \Leftrightarrow x^3-x>0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1)>0 \Leftrightarrow$

$x\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$ όπως φαίνεται από τον παρακάτω πίνακα..

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$	
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$	
x	$-$	$-$	$+$	$+$	
$P(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$	

44.α) Έστω $g(x)=f(x)-2x$, $x\in[0,1]$. Είναι $g(0)=f(0)>0$, $g(1)=f(1)-2<0$. Για $x=0$ είναι $0<f(0)<1$ και για $x=1$ είναι $1<f(1)<2 \Leftrightarrow -1<f(1)-2<0 \Leftrightarrow -1<g(1)<0$ οπότε $g(0)\cdot g(1)<0$.

Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα η εξίσωση $g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=2x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα x_0 στο $(0,1)$. Άρα η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $y=2x$ τουλάχιστον σε ένα σημείο με τετμημένη $x_0\in(0,1)$.

β) Είναι $0\le x^2<f(x)<x^2+1$ (*) οπότε $f(x)>0$ για κάθε $x\ge 0$. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ οπότε για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$, ισχύει :

$$\begin{cases} f(x_1)<f(x_2) \\ -x_1>-x_2 \end{cases} \overset{f(x_1),f(x_2)>0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \dfrac{1}{f(x_1)}>\dfrac{1}{f(x_2)} \\ e^{-x_1}>e^{-x_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{f(x_1)}-2>\dfrac{1}{f(x_2)}-2\ (1) \\ 2e^{-x_1}>2e^{-x_2}\ \ (2) \end{cases}.$$

με πρόσθεση των σχέσεων (1) και (2) έχουμε

$\dfrac{1}{f(x_1)}+2e^{-x_1}-2>\dfrac{1}{f(x_2)}+2e^{-x_2}-2 \Leftrightarrow h(x_1)>h(x_2)$ οπότε η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$.

γ) $e^x+2f(x)-2e^xf(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{e^x+2f(x)-2e^xf(x)}{e^x\cdot f(x)}=0 \Leftrightarrow$

$\dfrac{1}{f(x)}+\dfrac{2}{e^x}-2=0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{f(x)}+2e^{-x}-2=0 \Leftrightarrow h(x)=0$.

Είναι $h(0)=\dfrac{1}{f(0)}>0$, $h(1)=\dfrac{1}{f(1)}+\dfrac{2}{e}-2<0$ οπότε $h(0)\cdot h(1)<0$.

(από τη σχέση (*) για $x=1$ έχουμε $1<f(1)<2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{f(1)}<1 \Leftrightarrow$

$\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{e}-2<\dfrac{1}{f(1)}+\dfrac{2}{e}-2<\dfrac{2}{e}-1<0$ οπότε $h(1)<0$). Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα η εξίσωση $g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=2x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα x_0 στο $(0,1)$.

δ) Αν θέσουμε στη σχέση (*) όπου x το $\dfrac{1}{x}$ έχουμε

$\dfrac{1}{x^2}<f\left(\dfrac{1}{x}\right)<\dfrac{1}{x^2}+1 \overset{\cdot x^4}{\Rightarrow} x^2<x^4f\left(\dfrac{1}{x}\right)<x^2+x^4$. Όμως $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+x^4)=0=\lim\limits_{x\to 0}x^2$

οπότε από το Κριτήριο παρεμβολής έχουμε: $\lim\limits_{x\to 0}x^4f\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$. Επίσης

$\left|x^4\eta\mu\dfrac{1}{x}f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right|\le\left|x^4f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right| \Leftrightarrow -\left|x^4f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right|\le x^4\eta\mu\dfrac{1}{x}f\left(\dfrac{1}{x}\right)\le\left|x^4f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right|$.

Όμως $\lim\limits_{x\to 0}x^4f\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$ οπότε $\lim\limits_{x\to 0}\left|x^4f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right|=\lim\limits_{x\to 0}\left(-\left|x^4f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right|\right)=0$.

Από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε: $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^4\eta\mu\dfrac{1}{x}f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)=0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}(\ln x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x)=-\infty$ οπότε: $\lim\limits_{x\to 0}\left[x^4\eta\mu\dfrac{1}{x}f\left(\dfrac{1}{x}\right)+\ln x\right]=-\infty$.

45.α) Είναι $f^3(x)+f(x)=3x-1$ (*). Έστω ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1)\ge f(x_2)$ (1), τότε $f^3(x_1)\ge f^3(x_2)$ (2).
Με πρόσθεση των σχέσεων (1) και (2) έχουμε:

$f^3(x_1)+f(x_1)\ge f^3(x_2)+f(x_2) \overset{(*)}{\Leftrightarrow} 3x_1-1\ge 3x_2-1 \Leftrightarrow 3x_1\ge 3x_2 \Leftrightarrow x_1\ge x_2$

που είναι άτοπο. Άρα για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
β) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται.

Αν θέσουμε $f(x)=y \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$ στη σχέση (*) έχουμε

$y^3+y=3f^{-1}(y)-1 \Leftrightarrow 3f^{-1}(y)=y^3+y+1 \Leftrightarrow f^{-1}(y)=\frac{1}{3}(y^3+y+1)$, άρα

$f^{-1}(x)=\frac{1}{3}(x^3+x+1),\ x\in\mathbb{R}$.

γ) Είναι $f(x)>x$ (3) $\Leftrightarrow f^3(x)>x^3\ (4)$. Με πρόσθεση των σχέσεων (3) και (4)

έχουμε: $f^3(x)+f(x)>x^3+x \overset{(*)}{\Leftrightarrow} 3x-1>x^3+x \Leftrightarrow x^3-2x+1<0 \Leftrightarrow$

$(x-1)(x^2+x-1)<0 \Leftrightarrow$

$x\in(-\infty,-1)\cup\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2},1\right)$.

x	$-\infty$	$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		1		$+\infty$
x^2+x-1	+	0	–	0	+		+	
$x-1$	–		–		–	0	+	
$P(x)$	–	0	+	0	–	0	+	

δ) Θα αποδείξουμε ότι: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)=0$ για κάθε,

$x_0\in\mathbb{R}$. Από τη σχέση (*) για $x=x_0$ έχουμε: $f^3(x_0)+f(x_0)=3x_0-1$ (1).

Με αφαίρεση κατά μέλη των (*), (1) προκύπτει:

$f^3(x)-f^3(x_0)+f(x)-f(x_0)=3(x-x_0) \Leftrightarrow$

$\left(f(x)-f(x_0)\right)\left(f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+1\right)=3(x-x_0)$ (2).

Αν θέσουμε $f(x)=\omega$ προκύπτει το τριώνυμο $\omega^2+f(x_0)\cdot\omega+f^2(x_0)$.

Είναι $\Delta=-3f^2(x_0)\le 0$ άρα $\omega^2+f(x_0)\cdot\omega+f^2(x_0)\ge 0 \Leftrightarrow$

$f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)\ge 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε

$f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+1\ge 1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Από τη σχέση (2) έχουμε: $f(x)-f(x_0)=\dfrac{3(x-x_0)}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+1} \Leftrightarrow$

$$\left|f(x)-f(x_0)\right|=\frac{3|x-x_0|}{\left|f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+1\right|} \Leftrightarrow$$

$\left|f(x)-f(x_0)\right|=\dfrac{3|x-x_0|}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+1}$ (3). Είναι

$$f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+1\ge 1 \Leftrightarrow \frac{1}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+1}\le 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{3\left|x-x_0\right|}{\left|f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+1\right|}\le 3\left|x-x_0\right| \overset{(3)}{\Leftrightarrow}$$

$\left|f(x)-f(x_0)\right|\le 3\left|x-x_0\right| \Leftrightarrow -3\left|x-x_0\right|\le f(x)-f(x_0)\le 3\left|x-x_0\right|$.

Όμως $\lim\limits_{x\to x_0} 3\left|x-x_0\right|=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\left(-3\left|x-x_0\right|\right)=0$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)=0$, άρα η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

ε) $f\left(f(x)\right)-f\left(x^2-3x\right)=0 \Leftrightarrow f\left(f(x)\right)=f\left(x^2-3x\right) \overset{f\,1-1}{\Leftrightarrow} f(x)=x^2-3x \Leftrightarrow$

$f(x)-x^2+3x=0$. Έστω $g(x)=f(x)-x^2+3x$, $x\in[0,1]$.

Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ σαν πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $g(0)=f(0)<0, g(1)=f(1)+2>0$ οπότε $g(0)\cdot g(1)<0$.

(Από τη σχέση (*) για $x=0, x=1$ έχουμε αντίστοιχα: $f(0)\left(f^2(0)+1\right)=-1 \Leftrightarrow$

$f(0)=-\dfrac{1}{f^2(0)+1}<0$, $f(1)\left(f^2(1)+1\right)=2 \Leftrightarrow f(1)=\dfrac{1}{f^2(1)+1}>0$), άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε η εξίσωση

$g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)-x^2+3x=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$.

στ) Για κάθε $0<x<1 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(0)<f(x)<f(1)$. Άρα $f(0)<f(0{,}1)<f(1)$ (4) και $f(0)<f(0{,}01)<f(1)$ (5). Με πρόσθεση των σχέσεων (4) και (5) έχουμε:

$$2f(0)<f(0{,}1)+f(0{,}01)<2f(1) \Leftrightarrow f(0)<\frac{f(0{,}1)+f(0{,}01)}{2}<f(1).$$

Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών άρα υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε

$$f(\xi)=\frac{f(0{,}1)+f(0{,}01)}{2} \Leftrightarrow 2f(\xi)=f(0{,}1)+f(0{,}01).$$

Το ξ είναι μοναδικό αφού η f είναι γνησίως αύξουσα.

ζ) i. Είναι $f^3(2)+f(2)=5 \Leftrightarrow f(2)\left(\underbrace{f^2(2)+1}_{>0}\right)=5$, άρα $f(2)>0$ και

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(2)x^5+x^2-1821}{x^4+4x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(2)x^5}{x^4}=\lim_{x\to+\infty}\left(f(2)\cdot x\right)=+\infty.$$

ii. Θέτουμε $f(x)=y \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$. Όταν $x\to 1$, τότε $y\to f(1)=1$.

Είναι $f^{-1}(1)=\dfrac{1}{3}\cdot 3 \Leftrightarrow f^{-1}(1)=1 \Leftrightarrow f(1)=1$. Άρα

$$\lim_{x\to 1}\frac{3f(x)-6x+3}{x-1}=\lim_{y\to 1}\frac{3y-6f^{-1}(y)+3}{f^{-1}(y)-1}=\lim_{y\to 1}\frac{3y-6\cdot\frac{1}{3}\left(y^3+y+1\right)+3}{\frac{1}{3}\left(y^3+y+1\right)-1}=$$

$$3\lim_{y\to 1}\frac{-2y^3+y+1}{y^3+y-2}=3\lim_{y\to 1}\frac{\cancel{(y-1)}\left(-2y^2-2y-1\right)}{\cancel{(y-1)}\left(y^2+y+2\right)}=-\frac{15}{4}.$$

46.α) Είναι $f(xy)\le \ln x+f(y)$ (1).

Για $y=1$ είναι $f(x)\le \ln x+f(1)\Leftrightarrow f(x)\le \ln x$ (2). Θέτοντας $y=\frac{1}{x}$ στην (1) προκύπτει $f\left(\cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\right)\le \ln x+f\left(\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow 0\le \ln x+f\left(\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)\ge -\ln x$ (3)

Αν τώρα θέσουμε $\frac{1}{x}=\omega$ στη σχέση (3) έχουμε

$f(\omega)\ge -\ln\frac{1}{\omega}\Leftrightarrow f(\omega)\ge -\ln\omega^{-1}\Leftrightarrow f(\omega)\ge \ln\omega,\ \omega>0$ άρα

$f(x)\ge \ln x,\ x>0$ (4). Από τις σχέσεις (2),(4) προκύπτει ότι $f(x)=\ln x,\ x>0$.

β) Είναι $f(x)<1-x\Leftrightarrow \ln x+x-1<0$ (Κ). Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\ln x+x-1,\ x>0$. Έστω $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ τότε:

$\begin{cases}\ln x_1<\ln x_2\ (5)\\ x_1-1<x_2-1\ (6)\end{cases}$. Με πρόσθεση των σχέσεων (5) και (6) έχουμε:

$\ln x_1+x_1-1<\ln x_2+x_2-1\Leftrightarrow h(x_1)<h(x_2)$ οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Από τη σχέση (Κ) έχουμε $h(x)<0\Leftrightarrow h(x)<h(1)\overset{h\nearrow}{\underset{x>0}{\Leftrightarrow}}0<x<1$.

γ) $g(x)=f^2(x)-2\ln x+5=\ln^2 x-2\ln x+1+4=(\ln x-1)^2+4$.

Για κάθε $x>0$ είναι $(\ln x-1)^2\ge 0\Leftrightarrow (\ln x-1)^2+4\ge 4\Leftrightarrow g(x)\ge g(e)$, άρα η g έχει ελάχιστο το 4 για $x=e$.

δ) Για κάθε $x>e$ είναι: $\left|\frac{\eta\mu x}{f(x)}\right|=\frac{|\eta\mu x|}{\ln x}\le\frac{1}{\ln x}\Leftrightarrow -\frac{1}{\ln x}\le\frac{\eta\mu x}{f(x)}\le\frac{1}{\ln x}$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{\ln x}\right)=0$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{f(x)}=0$.

ε) $f(x)+x-e^{-2x}=0\Leftrightarrow \ln x+x-e^{-2x}=0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\alpha(x)=\ln x+x-e^{-2x}$, $x>0$. Έστω $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ τότε: $\begin{cases} x_1<x_2 \\ \ln x_1<\ln x_2 \\ -2x_1>-2x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1<x_2 \\ \ln x_1<\ln x_2 \\ e^{-2x_1}>e^{-2x_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1<x_2 \\ \ln x_1<\ln x_2 \\ -e^{-2x_1}<-e^{-2x_2} \end{cases}$.

Με πρόσθεση των τριών σχέσεων έχουμε:

$\ln x_1+x_1-e^{-2x_1}<\ln x_2+x_2-e^{-2x_2}\Leftrightarrow \alpha(x_1)<\alpha(x_2)$ οπότε η α είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln x+x-e^{-2x}\right)=-\infty+0-1=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to +\infty}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\ln x+x-e^{-2x}\right)=+\infty+\infty-0=+\infty$.

Επειδή η α είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A=(0,+\infty)$, έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to 0^+}\alpha(x),\lim\limits_{x\to +\infty}\alpha(x)\right)=\mathbb{R}$.Το $0\in\alpha(A)$ άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in A=(0,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $\alpha(x_0)=0$.

Το x_0 είναι μοναδικό αφού η συνάρτηση α είναι γνησίως αύξουσα.

Άρα η εξίσωση $\alpha(x)=0\Leftrightarrow \ln x+x-e^{-2x}=0$ έχει ακριβώς μια θετική ρίζα.

47.α) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(f^2(x)-4f(x)\right)=-4\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\left(f^2(x)-4f(x)+4\right)=0\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(f(x)-2\right)^2=0$. Από ιδιότητα των απόλυτων τιμών έχουμε:

$-|f(x)-2|\le f(x)-2\le |f(x)-2|\Leftrightarrow 2-\sqrt{\left(f(x)-2\right)^2}\le f(x)\le 2+\sqrt{\left(f(x)-2\right)^2}$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(2-\sqrt{\left(f(x)-2\right)^2}\right)=2$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(2+\sqrt{\left(f(x)-2\right)^2}\right)=2$ από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=2$.

β) i. Είναι $f^2(x)-4f(x)=x-4\Leftrightarrow f^2(x)-4f(x)+4=x\Leftrightarrow\left(f(x)-2\right)^2=x$ (1)

Από τη σχέση (1) για κάθε $x>0$ είναι $\left(f(x)-2\right)^2=x\Leftrightarrow |f(x)-2|=\sqrt{x}>0$ (2) οπότε $f(x)-2\neq 0$. Η συνάρτηση $g(x)=f(x)-2$ είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται στο $(0,+\infty)$, οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα αυτό.

Όμως $g(1)=f(1)-2=1-2=-1<0$ άρα $g(x)<0$ για κάθε $x>0$.

Από τη σχέση (2) έχουμε: $f(x)-2=-\sqrt{x}\Leftrightarrow f(x)=2-\sqrt{x}$.

Η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ οπότε $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(2-\sqrt{x}\right)=2$, άρα

$f(x)=\begin{cases} 2-\sqrt{x}, & x>0 \\ 2, & x=0 \end{cases}$, οπότε $f(x)=2-\sqrt{x}$ για κάθε $x\ge 0$.

ii. Έστω $x_1, x_2 \in [0,+\infty)$ με $x_1 < x_2$, τότε: $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \Leftrightarrow -\sqrt{x_1} > -\sqrt{x_2} \Leftrightarrow$ $2-\sqrt{x_1} > 2-\sqrt{x_2} \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$ άρα είναι 1-1 επομένως αντιστρέφεται.

Η f έχει σύνολο τιμών $f([0,+\infty)) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), f(0)\right] = (2-\infty, 2] = (-\infty, 2]$.

Θέτουμε $f(x) = y \Leftrightarrow 2-\sqrt{x} = y \Leftrightarrow 2-y = \sqrt{x} \overset{y\le 2}{\Leftrightarrow} x = (2-y)^2 \Leftrightarrow$ $x = y^2 - 4y + 4$, άρα $f^{-1}(y) = y^2 - 4y + 4,\ y \le 2$ οπότε $f^{-1}(x) = x^2 - 4x + 4,\ x \le 2$.

iii. Είναι $2f(x) = e^{2-f(x)} + 2 \Leftrightarrow 4 - 2\sqrt{x} - e^{2-2+\sqrt{x}} - 2 = 0 \Leftrightarrow 2 - 2\sqrt{x} - e^{\sqrt{x}} = 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = 2 - 2\sqrt{x} - e^{\sqrt{x}},\ x \ge 0$. Έστω $x_1, x_2 \in [0,+\infty)$ με $x_1 < x_2$, τότε: $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\sqrt{x_1} > -2\sqrt{x_2} \\ e^{\sqrt{x_1}} < e^{\sqrt{x_2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-2\sqrt{x_1} > 2-2\sqrt{x_2} \\ -e^{\sqrt{x_1}} > -e^{\sqrt{x_2}} \end{cases}$.

Με πρόσθεση των 2 σχέσεων έχουμε $2 - 2\sqrt{x_1} - e^{\sqrt{x_1}} > 2 - 2\sqrt{x_2} - e^{\sqrt{x_2}} \Leftrightarrow$ $g(x_1) > g(x_2)$ οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Είναι $g(0) = 2 - 2\sqrt{0} - e^{\sqrt{0}} = 1$ και

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(2 - 2\sqrt{x} - e^{\sqrt{x}}\right) \underset{\substack{x\to+\infty \Rightarrow \\ \omega\to+\infty}}{\overset{\sqrt{x}=\omega}{=}} \lim_{\omega\to+\infty}\left(2 - 2\omega - e^{\omega}\right) = -\infty.$$

Επειδή η g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A = [0,+\infty)$, έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $g(A) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} g(x), g(0)\right] = (-\infty, 1]$. Επειδή $0 \in g(A)$ και $g \searrow A = [0,+\infty)$, υπάρχει μοναδικό $x_1 \in A$ τέτοιο, ώστε $g(x_1) = 0$, επομένως η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - 2\sqrt{x} - e^{\sqrt{x}} = 0$ έχει μοναδική ρίζα.

2ος τρόπος: Είναι $2f(x) = e^{2-f(x)} + 2 \Leftrightarrow 4 - 2\sqrt{x} - e^{2-2+\sqrt{x}} - 2 = 0 \Leftrightarrow$ $2 - 2\sqrt{x} - e^{\sqrt{x}} = 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = 2 - 2x - e^{x},\ x \ge 0$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in [0,+\infty)$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $\begin{cases} -2x_1 > -2x_2 \\ e^{x_1} < e^{x_2} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 2-2x_1 > 2-2x_2 \\ -e^{x_1} > -e^{x_2} \end{cases} \overset{+}{\Rightarrow} 2 - 2x_1 - e^{x_1} > 2 - 2x_2 - e^{x_2}$ οπότε $g(x_1) > g(x_2)$ άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$. Είναι $g(0) = 2 - 1 = 1$ και

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(2 - 2x - e^{x}\right) = -\infty.$$

Επειδή η g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο, έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $g(A)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty} g(x), g(0)\right]=(-\infty,1]$. Το $0\in g(A)$ άρα υπάρχει $x_1\in A$ τέτοιο, ώστε $g(x_1)=0$, το οποίο είναι μοναδικό αφού η g είναι γνησίως φθίνουσα στο A. Είναι: $\begin{cases} x\ge 0 \\ \sqrt{x}\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow x\ge 0$ οπότε ορίζεται η συνάρτηση $l(x)=g\left(\sqrt{x}\right)$ με πεδίο ορισμού το $A=[0,+\infty)$. Για κάθε $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ με

$x_1<x_2 \Leftrightarrow \sqrt{x_1}<\sqrt{x_2} \overset{g\searrow}{\Leftrightarrow} g\left(\sqrt{x_1}\right)>g\left(\sqrt{x_2}\right) \Leftrightarrow l(x_1)>l(x_2)$ άρα η l είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$. Επομένως η εξίσωση

$2-2\sqrt{x}-e^{\sqrt{x}}=0 \Leftrightarrow l(x)=l(x_1) \overset{l\searrow}{\Leftrightarrow} x=x_1$. έχει μοναδική ρίζα το x_1.

48.α) Έστω ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1)\ge f(x_2)$ (1), τότε: $e^{f(x_1)}\ge e^{f(x_2)}$ (2). Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) έχουμε:
$f(x_1)+e^{f(x_1)}\ge f(x_2)+e^{f(x_2)} \Leftrightarrow x_1\ge x_2$ που είναι άτοπο.
Άρα για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
β) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα άρα 1-1 οπότε αντιστρέφεται.
Θέτουμε $f(x)=y$, τότε η σχέση $e^{f(x)}+f(x)=x$ γίνεται:
$e^y+y=x \Leftrightarrow f^{-1}(y)=e^y+y,\ y\in\mathbb{R}$, άρα $f^{-1}(x)=e^x+x,\ x\in\mathbb{R}$.
γ) Είναι $f^{-1}(x)=\underbrace{e^x}_{>0}+x>x$ άρα η γραφική παράσταση της f^{-1} βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y=x$. Οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την $y=x$ οπότε η C_f βρίσκεται κάτω κάτω από την $y=x$ άρα κάτω από την $C_{f^{-1}}$.
δ) i. Θέτουμε $\sqrt{x^2+1}-x=u$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}u=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}\right)=0,$$

οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f^{-1}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim\limits_{u\to0}f^{-1}(u)=\lim\limits_{u\to0}\left(e^u+u\right)=1$.

ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(f^{-1}(x)-x\right)-\ln\left(2^x+5^x\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln e^x-\ln\left(2^x+5^x\right)\right]=$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\dfrac{e^x}{2^x+5^x} \overset{u=\frac{e^x}{2^x+5^x}}{\underset{x\to+\infty\Rightarrow u\to0^+}{=}} \lim\limits_{u\to0^+} \ln u = -\infty$, αφού

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2^x+5^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{5^x\left[\left(\frac{2}{5}\right)^x+1\right]} = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{e}{5}\right)^x\frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^x+1}\right] = 0 .$$

ε) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f^2(x)}{x-e^{f(x)}} \overset{f(x)=y}{\underset{x\to1\Rightarrow y\to0}{=}} \lim\limits_{y\to0}\dfrac{y^2}{f^{-1}(y)-e^y} = \lim\limits_{y\to0}\dfrac{y^2}{\cancel{e^y}+y-\cancel{e^y}} = \lim\limits_{y\to0}\dfrac{y^{\cancel{2}}}{\cancel{y}} = 0$.

49.α) Είναι $A_f = \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1} = \dfrac{e^x+1-1}{e^x+1} = 1-\dfrac{1}{e^x+1}$. Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

με $x_1 < x_2$, ισχύει: $e^{x_1} < e^{x_2} \Leftrightarrow e^{x_1}+1 < e^{x_2}+1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{e^{x_1}+1} < \dfrac{1}{e^{x_2}+1} \Leftrightarrow$

$\dfrac{1}{e^{x_1}+1}+1 < \dfrac{1}{e^{x_2}+1}+1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

2ος τρόπος:

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι

$$f(x_1)-f(x_2) = \frac{e^{x_1}}{e^{x_1}+1}-\frac{e^{x_2}}{e^{x_2}+1} = \frac{\cancel{e^{x_1+x_2}}+e^{x_1}-\cancel{e^{x_1+x_2}}-e^{x_2}}{\left(e^{x_1}+1\right)\left(e^{x_2}+1\right)} < 0 .$$

(Είναι $x_1 < x_2 \Leftrightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \Leftrightarrow e^{x_1}-e^{x_2} < 0$ και $e^{x_1}+1 > 0$, $e^{x_2}+1 > 0$). Άρα $f(x_1)-f(x_2) < 0 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1} = \dfrac{0}{0+1} = 0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}\left(1+e^{-x}\right)} = 1$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε έχει σύνολο τιμών το $f(A) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = (0,1)$.

γ) Η f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται. Θέτουμε

$f(x) = y \Leftrightarrow \dfrac{e^x}{e^x+1} = y \Leftrightarrow e^x = ye^x + y \Leftrightarrow e^x - ye^x = y \Leftrightarrow e^x(1-y) = y \overset{y\neq1}{\Leftrightarrow}$ (1).

$e^x = \dfrac{y}{1-y} \overset{y\in(0,1)}{\Leftrightarrow} x = \ln\dfrac{y}{1-y}$, άρα $f^{-1}(y) = \ln\dfrac{y}{1-y}$, $y \in (0,1)$ οπότε και

$f^{-1}(x) = \ln\dfrac{x}{1-x}$, $x \in (0,1)$.

δ) $\begin{cases} x \in A_{f^{-1}} \\ f^{-1}(x) \in A_{f^{-1}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < \dfrac{1}{2} \\ 0 < \ln\dfrac{x}{1-x} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < \dfrac{1}{2} \\ 1 < \dfrac{x}{1-x} < e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < \dfrac{1}{2} \\ 1-x < x < e-ex \end{cases}$.

Είναι $1-x < x \Leftrightarrow 2x > 1 \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{2}$, $x < e-ex \Leftrightarrow (1+e)x > 1 \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{1+e}$ οπότε $x > \dfrac{1}{2}$. Επομένως: $\begin{cases} 0 < x < \dfrac{1}{2} \\ x > \dfrac{1}{2} \end{cases}$ το οποίο είναι αδύνατο άρα δεν ορίζεται η $f^{-1} \circ f^{-1}$ οπότε υπάρχει το $\left(f^{-1} \circ f^{-1}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

ε) i. Είναι $A_g = (0,+\infty)$. Για να ορίζεται η $f^{-1} \circ g$ πρέπει:

$\begin{cases} x \in A_g \\ g(x) \in A_{f^{-1}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 1-\ln x \in (0,1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 0 < 1-\ln x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ -1 < -\ln x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x > 0 \\ 0 < \ln x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 1 < x < e \end{cases} \Rightarrow 1 < x < e$, οπότε $A_{f^{-1}\circ g} = (1,e)$.

Είναι $\left(f^{-1} \circ g\right)(x) = f^{-1}\left(g(x)\right) = \ln\dfrac{1-\ln x}{\ln x} = \ln(1-\ln x) - \ln x$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in (1,e)$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $\ln x_1 < \ln x_2 \Leftrightarrow -\ln x_1 > -\ln x_2$ (2) και $1-\ln x_1 > 1-\ln x_2 \Leftrightarrow \ln(1-\ln x_1) > \ln(1-\ln x_2)$ (3). Με πρόσθεση κατά μέλη των (2) και (3) έχουμε: $\ln(1-\ln x_1) - \ln x_1 > \ln(1-\ln x_2) - \ln x_2 \Leftrightarrow$
$\left(f^{-1} \circ g\right)(x_1) > \left(f^{-1} \circ g\right)(x_2)$.

Άρα η $f^{-1} \circ g$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,e)$.

ii. $\dfrac{1-\ln\alpha}{1-\ln(\alpha+1)} > \dfrac{\ln\alpha}{\ln(\alpha+1)} \Leftrightarrow \dfrac{1-\ln\alpha}{\ln\alpha} > \dfrac{1-\ln(\alpha+1)}{\ln(\alpha+1)} \Leftrightarrow$

$\ln\dfrac{1-\ln\alpha}{\ln\alpha} > \ln\dfrac{1-\ln(\alpha+1)}{\ln(\alpha+1)} \Leftrightarrow \left(f^{-1} \circ g\right)(\alpha) > \left(f^{-1} \circ g\right)(\alpha+1) \overset{f^{-1}\circ g \searrow}{\Leftrightarrow} \alpha < \alpha+1$ ισχύει.

2ος τρόπος

$\dfrac{1-\ln\alpha}{1-\ln(\alpha+1)} > \dfrac{\ln\alpha}{\ln(\alpha+1)} \Leftrightarrow \ln(\alpha+1) - \ln\alpha \cdot \ln(\alpha+1) > \ln\alpha - \ln\alpha \cdot \ln(\alpha+1) \Leftrightarrow$

$\ln(\alpha+1) > \ln\alpha \Leftrightarrow \alpha+1 > \alpha \Leftrightarrow 1 > 0$ ισχύει.

50.α) Για $x=1$: $f\left(f\left(1\right)\right)-f\left(1\right)=2 \Leftrightarrow f\left(3\right)-3=2 \Leftrightarrow f\left(3\right)=5$.

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f\left(1\right)x^5+2x^3-3}{f\left(3\right)x^4+4x+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^5}{5x^4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{5}x=-\infty$.

β) Είναι $f\left(6\right)=\lim\limits_{x\to 6}f\left(x\right)=8$ αφού η f είναι συνεχής στο 6.

Άρα $f\left(3\right)\neq f\left(6\right)$ και $f\left(3\right)<7<f\left(6\right)$.

Η f είναι συνεχής στο $\left[3,6\right]$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών οπότε υπάρχει $x_0\in\left(3,6\right)$: $f\left(x_0\right)=7$.

γ) $h\left(3\right)=3f\left(3\right)-50\text{συν}3\pi=3\cdot5+50=65>0$,

$h\left(6\right)=6f\left(6\right)-50\text{συν}6\pi=6\cdot8-50=-2<0$ άρα $h\left(3\right)\cdot h\left(6\right)<0$.

Η h είναι συνεχής στο $\left[3,6\right]$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_1\in\left(3,6\right)$: $h\left(x_1\right)=0$.

Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης h, τέμνει τον άξονα x΄x σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη στο διάστημα $\left(3,6\right)$.

δ) Επειδή η f είναι συνεχής στο $\left[1,6\right]$, υπάρχουν $m,M\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $m\leq f\left(x\right)\leq M$ για κάθε $x\in\left[1,6\right]$.

Άρα $3m\leq 3f\left(2\right)\leq 3M$ (1), $2m\leq 2f\left(4\right)\leq 2M$ (2), $4m\leq 4f\left(5\right)\leq 4M$ (3).

Με πρόσθεση των σχέσεων (1),(2) και (3) έχουμε

$m\leq\dfrac{3f\left(2\right)+2f\left(4\right)+4f\left(5\right)}{9}\leq M$. Το $\dfrac{3f\left(2\right)+2f\left(4\right)+4f\left(5\right)}{9}\in\left[m,M\right]$, οπότε υπάρχει $x_0\in\left[1,6\right]$ τέτοιο, ώστε $f\left(x_0\right)=\dfrac{3f\left(2\right)+2f\left(4\right)+4f\left(5\right)}{9}$.

51.α) Για κάθε $x_1,x_2\in\left(0,+\infty\right)$ με $x_1<x_2$ είναι $\ln x_1<\ln x_2$ (1) και $x_1-1<x_2-1$ (2). Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) έχουμε:

$\ln x_1+x_1-1<\ln x_2+x_2-1\Leftrightarrow f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,+\infty\right)$.

β) i. Παρατηρούμε ότι $f\left(1\right)=\ln1+1-1=0$, οπότε:

$f\left(x\right)>0\Leftrightarrow f\left(x\right)>f\left(1\right)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}x>1$.

ii. Είναι $\ln x+x<e+1\Leftrightarrow\ln x+x-1<e\Leftrightarrow f\left(x\right)<e\Leftrightarrow f\left(x\right)<f\left(e\right)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}$ $0<x<e$.

iii. $\ln f\left(x\right)+f\left(x\right)>e+1\Leftrightarrow\ln f\left(x\right)+f\left(x\right)-1>e\Leftrightarrow f\left(f\left(x\right)\right)>e$ (4)

Για να ορίζεται η $f \circ f$ πρέπει: $\begin{cases} x>0 \\ f(x)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ f(x)>f(1) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} x>1 \end{cases} \Rightarrow x>1$.

Η (4) γίνεται: $f\left(f(x)\right)>f(e) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x)>e \Leftrightarrow f(x)>f(e) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} x>e$.

γ) Είναι $g(x)+e^{g(x)}-1=f(x) \Leftrightarrow \ln e^{g(x)}+e^{g(x)}-1=\ln x+x-1 \Leftrightarrow$

$f\left(e^{g(x)}\right)=f(x) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} e^{g(x)}=x \overset{x>0}{\Leftrightarrow} g(x)=\ln x$.

2^{ος} τρόπος

Είναι $g(x)+e^{g(x)}-1=\ln x+e^{\ln x}-1$ (5). Θεωρούμε τη συνάρτηση

$h(x)=x+e^x-1,\ x\in\mathbb{R}$. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ (i) είναι $e^{x_1}<e^{x_2}$ (ii) και από (i) + (ii) έχουμε $x_1+e^{x_1}<x_2+e^{x_2} \Leftrightarrow x_1+e^{x_1}-1<x_2+e^{x_2}-1 \Leftrightarrow$

$h(x_1)<h(x_2)$, άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι $1-1$.

Από τη σχέση (5) έχουμε: $h\left(g(x)\right)=h(\ln x) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} g(x)=\ln x$.

δ) $g(\rho)=2\rho-\rho^2 \Leftrightarrow \ln\rho-2\rho+\rho^2=0$. Έστω $\varphi(x)=\ln x-2x+x^2,\ x\in[1,e]$.

Η φ είναι συνεχής στο $[1,e]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Είναι

$\varphi(1)=\ln1-2+1=-1<0$, $\varphi(e)=\ln e-2e+e^2=1-2e+e^2=(e-1)^2>0$ οπότε

$\varphi(1)\varphi(e)<0$, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Bolzano οπότε υπάρχει $\rho\in(1,e)$ τέτοιο, ώστε $\varphi(\rho)=0 \Leftrightarrow g(\rho)=2\rho-\rho^2$.

52.α) Επειδή η f έχει ελάχιστο στο $x_1=-1$ είναι $f(x)\geq f(-1) \overset{f\ \text{περιττή}}{\Leftrightarrow}$

$-f(-x)\geq -f(-1) \Leftrightarrow f(-x)\leq f(1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν θέσουμε όπου $-x$ το x έχουμε $f(x)\leq f(1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα έχει μέγιστο στο $x_2=1$.

β) Η f είναι περιττή οπότε $f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

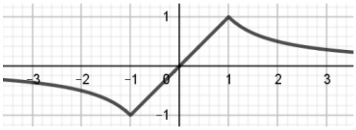
Για $x=0$ έχουμε: $f(0)=-f(0) \Leftrightarrow 2f(0)=0 \Leftrightarrow f(0)=0$.

γ) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-f(-x)\right) \overset{-x=u}{=} \lim\limits_{u\to+\infty}\left(-f(u)\right)=0$.

δ) Έστω $x_1,x_2\in(1,+\infty)$ με $x_1<x_2$ τότε $-1>-x_1>-x_2 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}$

$f(-x_1)<f(-x_2) \Leftrightarrow -f(x_1)<-f(x_2) \Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2) \Rightarrow f\searrow(1,+\infty)$.

ε)



στ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x-1)-f(1-x)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x-1)+f(x-1)\right)=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2f(x-1)\right)\underset{u\to+\infty}{\overset{x-1=u}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\left(2f(u)\right)=0$.

ζ) Έστω $g(x)=(x-1)f(x)+x^2-4x+2$, $x\in[0,1]$.

Είναι $g(0)=2>0,\ g(1)=-1<0$ οπότε $g(0)\cdot g(1)<0$.

Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης

$g(x)=0\Leftrightarrow(x-1)f(x)+x^2=4x-2$ στο $(0,1)$.

53.α) Πρέπει $x-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$,

$2\sqrt{x-1}\leq x\overset{x\geq1>0}{\Leftrightarrow}4(x-1)\leq x^2\Leftrightarrow 4x-4\leq x^2\Leftrightarrow x^2-4x+4\geq 0\Leftrightarrow\ (x-2)^2\geq 0$

ισχύει και $x+2\sqrt{x-1}\geq 0$ ισχύει αφού $x\geq 1$. Άρα $A_f=[1,+\infty)$.

Είναι $f(x)=\sqrt{x-1+1+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-1+1-2\sqrt{x-1}}\Leftrightarrow$

$f(x)=\sqrt{\left(\sqrt{x-1}\right)^2+2\sqrt{x-1}+1}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}\right)^2-2\sqrt{x-1}+1}\Leftrightarrow$

$f(x)=\sqrt{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}=\left|\sqrt{x-1}+1\right|+\left|\sqrt{x-1}+1\right|\Leftrightarrow$

$f(x)=\sqrt{x-1}+1+\left|\sqrt{x-1}-1\right|$.

Είναι $\sqrt{x-1}-1\geq 0\Leftrightarrow\sqrt{x-1}\geq 1\Leftrightarrow x-1\geq 1\Leftrightarrow x\geq 2$.

Αν $x\geq 2$ τότε $f(x)=\sqrt{x-1}+\cancel{1}+\sqrt{x-1}-\cancel{1}=2\sqrt{x-1}$ και αν $1\leq x<2$ τότε

$f(x)=\sqrt{x-1}+1-\sqrt{x-1}+1=2$. Άρα $f(x)=\begin{cases}2, & 1\leq x<2\\ 2\sqrt{x-1}, & x\geq 2\end{cases}$.

β) Όταν $x\in[1,2)$ η f είναι σταθερή. Έστω $x_1,x_2\in[2,+\infty)$ με $x_1<x_2$, τότε:

$x_1-1<x_2-1\Leftrightarrow\sqrt{x_1-1}<\sqrt{x_2-1}\Leftrightarrow 2\sqrt{x_1-1}<2\sqrt{x_2-1}\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2,+\infty)$.

γ) Αρχικά θα μελετήσουμε την f ως προς τη συνέχεια στο $x=2$.

Είναι $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\left(2\sqrt{x-1}\right)=2=\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=f(2)$, άρα η f είναι συνεχής στο $x=2$, είναι συνεχής στα διαστήματα $[1,2)$, $[2,+\infty)$ σαν πράξεις συνεχών συναρτήσεων οπότε η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\sqrt{x-1}\right)=+\infty$.

Για το διάστημα $A_1=[1,2)$ είναι $f(A_1)=\{2\}$ αφού η f είναι σταθερή.

Στο διάστημα $A_2 = [2,+\infty)$, η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, άρα

$f(A_2) = \left[\lim\limits_{x\to 2^+} f(x), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right) = [2,+\infty)$.

Το σύνολο τιμών της f είναι το $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = [2,+\infty)$.

δ) Θέτουμε $f(x) = u \Leftrightarrow 2\sqrt{x-1} = u \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = \dfrac{u}{2} \Leftrightarrow x-1 = \dfrac{u^2}{4} \Leftrightarrow x = \dfrac{u^2}{4}+1$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 2$, όταν $x \to 2^+$, τότε $u \to 2^+$. Είναι

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(f(x))-2}{x-2} = \lim_{u\to 2^+}\frac{f(u)-2}{\frac{u^2}{4}+1-2} = \lim_{u\to 2^+}\frac{2\sqrt{u-1}-2}{\frac{u^2-4}{4}} = \lim_{u\to 2^+}\frac{8\left(\sqrt{u-1}-1\right)}{(u-2)(u+2)} =$$

$$= \lim_{u\to 2^+}\frac{8\left(\sqrt{u-1}-1\right)\left(\sqrt{u-1}+1\right)}{(u-2)(u+2)\left(\sqrt{u-1}+1\right)} = \lim_{u\to 2^+}\frac{8\left(\left(\sqrt{u-1}\right)^2-1\right)}{(u-2)(u+2)\left(\sqrt{u-1}+1\right)} =$$

$$\lim_{u\to 2^+}\frac{8(u-1-1)}{(u-2)(u+2)\left(\sqrt{u-1}+1\right)} = \lim_{u\to 2^+}\frac{8\cancel{(u-2)}}{\cancel{(u-2)}(u+2)\left(\sqrt{u-1}+1\right)} = \frac{8}{8} = 1.$$

ε) Έστω $g(x) = f^3(x) + f^2(x) + 3f(x) - x^3 - x,\ x \in [2,5]$.

Η g είναι συνεχής στο $[2,5]$ ως σύνθεση και άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $g(2) = f^3(2) + f^2(2) + 3f(2) - 8 - 2 = 8+4+6-10 = 8 > 0$ και

$g(5) = f^3(5) + f^2(5) + 3f(5) - 5^3 - 5 = 4^3 + 4^2 + 3\cdot 4 - 125 - 5 = -38 < 0$ οπότε

$g(2)g(5) < 0$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano, υπάρχει

$x_0 \in (2,5)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f^3(x_0) + f^2(x_0) + 3f(x_0) = x_0^3 + x_0$.

54. α) Για κάθε $x_1, x_2 > 0$ με $x_1 < x_2$ είναι $x_1^2 < x_2^2\ (1) \Leftrightarrow \dfrac{1}{x_1^2} > \dfrac{1}{x_2^2} \Leftrightarrow$

$-\dfrac{1}{x_1^2} < -\dfrac{1}{x_2^2}\ (2)$. Με πρόσθεση των σχέσεων (1) και (2) έχουμε

$x_1^2 - \dfrac{1}{x_1^2} < x_2^2 - \dfrac{1}{x_2^2} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ άρα $f \nearrow (0,+\infty)$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2 - \dfrac{1}{x^2}\right) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(x^2 - \dfrac{1}{x^2}\right) = +\infty$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A = (0,+\infty)$, οπότε έχει αντίστοιχο

σύνολο τιμών το $f(A) = \left(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right) = \mathbb{R}$.

γ) $f(x)+\frac{1}{x^2}+4x\le g(x)\le 3x^2+2 \Leftrightarrow x^2-\cancel{\frac{1}{x^2}}+\cancel{\frac{1}{x^2}}+4x\le g(x)\le 3x^2+2 \Leftrightarrow$

$x^2+4x\le g(x)\le 3x^2+2$.

i. Είναι $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+4x\right)=5$, $\lim\limits_{x\to 1}\left(3x^2+2\right)=5$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=5$.

ii. $x^2+4x-5\le g(x)-5\le 3x^2-3$.

Για $x>1$ είναι $\frac{(x+5)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}\le\frac{g(x)-5}{x-1}\le 3\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 1^+}(x+5)=6=\lim\limits_{x\to 1^+}3(x+1)$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{g(x)-5}{x-1}=6$. Όμοια για $x<1$ είναι $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{g(x)-5}{x-1}=6$. Άρα $\lim\limits_{x\to 1}\frac{g(x)-5}{x-1}=6$.

iii. Επειδή $\lim\limits_{x\to 1}\left(g(x)-1\right)=4$, είναι $g(x)-1>0$ κοντά στο 1, άρα

$$\lim_{x\to 1}\frac{|g(x)-1|-4}{\sqrt{x+3}-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(g(x)-5)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\lim_{x\to 1}\left[\frac{g(x)-5}{x-1}\left(\sqrt{x+3}+2\right)\right]=24$$

δ) Αρκεί η εξίσωση $f(x)=-x-1 \Leftrightarrow x^2-\frac{1}{x^2}=-x-1 \Leftrightarrow x^4-1=-x^3-x^2 \Leftrightarrow$ $x^4+x^3+x^2-1=0$ να έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα $(0,1)$. Έστω $h(x)=x^4+x^3+x^2-1,\ x\in[0,1]$. Είναι $h(0)=-1,\ h(1)=2$ οπότε $h(0)h(1)<0$. Η h είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $h(x_0)=0$ Εύκολα αποδεικνύεται ότι η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$, οπότε το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της h.

2^{ος} τρόπος: Αρκεί η εξίσωση $f(x)=-x-1 \Leftrightarrow x^2-\frac{1}{x^2}=-x-1 \Leftrightarrow$

$x^4-1=-x^3-x^2 \Leftrightarrow x^4+x^3+x^2-1=0 \Leftrightarrow x^3(x+1)+(x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow$

$(x+1)\cdot\left(x^3+x-1\right)=0 \underset{\text{στο}[0,1]}{\overset{x+1\neq 0}{\Leftrightarrow}} x^3+x-1=0$.

Έστω $l(x)=x^3+x-1,\ x\in[0,1]$. Είναι $l(0)=-1,\ l(1)=2$, δηλαδή $h(0)h(1)<0$ Η h είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $h(x_0)=0$.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$, οπότε το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της h.

ε) Έστω ότι υπάρχει γνησίως αύξουσα συνάρτηση $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία να ισχύει ότι $f(h(x))+f(x)=-x$ για κάθε $x>0$. Τότε για κάθε $0<x_1<x_2$ είναι

$f(x_1)<f(x_2)$ (1), $h(x_1)<h(x_2)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(h(x_1))<f(h(x_2))$ (2), οπότε από

$(1)+(2)\Rightarrow f(h(x_1))+f(x_1)<f(h(x_2))+f(x_2)\Leftrightarrow -x_1<-x_2\Leftrightarrow x_1>x_2$ άτοπο.

55.α) $x^2f^2(x)+1=x^2\ln^2x-2xf(x)\Leftrightarrow x^2f^2(x)+2xf(x)+1=x^2\ln^2x\Leftrightarrow$

$(xf(x)+1)^2=x^2\ln^2x$ (1).

Θέτουμε $g(x)=xf(x)+1,\ x>0$ οπότε η (1) γίνεται $g^2(x)=x^2\ln^2x$ (2).

Είναι $x^2\ln^2x\neq 0$ για κάθε $x>1$ οπότε $g(x)\neq 0$ για κάθε $x>1$. Επειδή η g είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(1,+\infty)$.

Είναι $g(e)=ef(e)+1=\cancel{e}\dfrac{e-1}{\cancel{e}}+1=e>0$, άρα $g(x)>0$ για κάθε $x>1$.

Από τη σχέση (2) έχουμε $g(x)=x\ln x\Leftrightarrow xf(x)+1=x\ln x\Leftrightarrow$

$xf(x)=x\ln x-1\Leftrightarrow f(x)=\ln x-\dfrac{1}{x},\ x>1$. Από τη σχέση (1) για $x=1$ έχουμε:

$(f(1)+1)^2=0\Leftrightarrow f(1)=-1$, άρα $f(x)=\begin{cases}\ln x-\dfrac{1}{x}, & x>1\\ -1, & x=1\end{cases}$.

Η f είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$ άρα $f(x)=\ln x-\dfrac{1}{x},\ x\geq 1$.

β) $x\ln x-1=0\Leftrightarrow \ln x-\dfrac{1}{x}=0\Leftrightarrow f(x)=0$. Για κάθε $x_1,x_2\in[1,+\infty)$ με $x_1<x_2$ ισχύει $\ln x_1<\ln x_2$ (1) και $\dfrac{1}{x_1}>\dfrac{1}{x_2}\Leftrightarrow -\dfrac{1}{x_1}<-\dfrac{1}{x_2}$ (2)

Με πρόσθεση των σχέσεων (1) και (2) έχουμε $\ln x_1-\dfrac{1}{x_1}<\ln x_2-\dfrac{1}{x_2}\Leftrightarrow$

$f(x_1)<f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x-\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$. Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A=[1,+\infty)$ έχει σύνολο τιμών το $f(A)=\left[f(1),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=[-1,+\infty)$

Το μηδέν βρίσκεται στο σύνολο τιμών της f και η f είναι γνησίως αύξουσα στο A οπότε υπάρχει μοναδικός $x_0 \in A$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=0$ άρα η δοθείσα εξίσωση έχει μοναδική ρίζα.

γ) $\ln(\ln x)+e^{-2}<\dfrac{1}{\ln x}+2 \Leftrightarrow \ln(\ln x)-\dfrac{1}{\ln x}<2-e^{-2} \Leftrightarrow f(\ln x)<f(e^2)$ (3)

Για να ορίζεται η σύνθεση $f(\ln x)$ πρέπει x>0 και $\ln x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq e$. Άρα ορίζεται για $x \geq e$. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ οπότε από τη σχέση (3) έχουμε: $\ln x < e^2 \Leftrightarrow x < e^{e^2}$. Επομένως η λύση της ανίσωσης είναι το διάστημα $\left[e, e^{2}\right]$.

δ) $\dfrac{\alpha}{\beta}<\sqrt[\alpha\beta]{e^{\beta-\alpha}} \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\beta}<e^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha\beta}} \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\beta}<e^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}} \Leftrightarrow \ln\dfrac{\alpha}{\beta}<\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\beta} \Leftrightarrow \ln\alpha-\ln\beta<\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\beta} \Leftrightarrow$

$\ln\alpha-\dfrac{1}{\alpha}<\ln\beta-\dfrac{1}{\beta} \Leftrightarrow f(\alpha)<f(\beta)$ που ισχύει αφού $1<\alpha<\beta$ και f $\nearrow$ στο $[1,+\infty)$

ε) $\lim\limits_{x\to e^2}\dfrac{x\ln^2 x - xf(x)-2x-1}{\ln x-2}=\lim\limits_{x\to e^2}\dfrac{x\ln^2 x - x\left(\ln x-\frac{1}{x}\right)-2x-1}{\ln x-2}=$

$\lim\limits_{x\to e^2}\dfrac{x\ln^2 x + x\ln x+\cancel{1}-2x-\cancel{1}}{\ln x-2}=\lim\limits_{x\to e^2}\dfrac{x\left(\ln^2 x-\ln x-2\right)}{\ln x-2}=$

$\lim\limits_{x\to e^2}\dfrac{x\cancel{(\ln x-2)}(\ln x+1)}{\cancel{\ln x-2}}=3e^2$.

56.α) Είναι $|f(x)-2x+1|\leq e^{-x} \Leftrightarrow -e^{-x}\leq f(x)-2x+1\leq e^{-x} \Leftrightarrow$

$2x-1-e^{-x}\leq f(x)\leq 2x-1+e^{-x}$.

Για $x>0$ είναι $\dfrac{2x-1-e^{-x}}{x}\leq\dfrac{f(x)}{x}\leq\dfrac{2x-1+e^{-x}}{x}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1-e^{-x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x x}\right)=2-0-0=2$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1+e^{-x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{e^x x}\right)=2-0+0=2$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2$.

β) Έστω $\dfrac{f(x)}{x}=g(x)\overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow}f(x)=xg(x)$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\cdot 2=+\infty$.

γ) Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ είναι $f(x)>0$ για πολύ μεγάλες τιμές του x, άρα υπάρχει πολύ μεγάλος θετικός αριθμός α, τέτοιος ώστε $f(\alpha)>0$.

δ) Είναι $f(0)=-1<0,\ f(\alpha)>0$ οπότε $f(0)f(\alpha)<0$. Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θ. Bolzano άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,\alpha)$. Επειδή η ρίζα βρίσκεται στο διάστημα $(0,\alpha)$ είναι θετικός αριθμός, οπότε η C_f τέμνει τον θετικό ημιάξονα τουλάχιστον μια φορά.

ε) Οι ευθείες που είναι παράλληλες στην $y=x$ και προκύπτουν από παράλληλη μετατόπισή της προς τα πάνω έχουν εξίσωση της μορφής $y=x+\beta$ με $\beta>0$.
Επομένως αρκεί η εξίσωση $f(x)=x+\beta$, να έχει τουλάχιστον μια ρίζα.
Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x-\beta$.
Για $x=0$ είναι $g(0)=f(0)-\beta=-1-\beta$.
Είναι $\beta>0\Leftrightarrow-\beta<0\Leftrightarrow-1-\beta<-1<0$, άρα $g(0)<0$. Όμως

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x-\beta\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{f(x)}{x}-1-\frac{\beta}{x}\right)\right]=+\infty(2-1-0)=+\infty,$$

οπότε υπάρχει $\gamma>0$ τέτοιος ώστε $g(\gamma)>0$. Η g είναι συνεχής στο $[0,\gamma]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, $g(0)g(\gamma)<0$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,\gamma)$.

57.α) Για $x=y=0$ είναι $\cancel{f(0)}=\cancel{f(0)}+f(0)\Leftrightarrow f(0)=0$.

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και το $-x\in\mathbb{R}$.
Για $y=-x$ είναι $f(x-x)=f(x)+f(-x)\Leftrightarrow f(0)=f(x)+f(-x)\Leftrightarrow$
$0=f(x)+f(-x)\Leftrightarrow f(-x)=-f(x)$ οπότε η f είναι περιττή.

γ) Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ ισχύει $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=0$.
Για να είναι η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ αρκεί $\lim\limits_{h\to0}f(x_0+h)=f(x_0)$ για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$.
Είναι $\lim\limits_{h\to0}f(x_0+h)=\lim\limits_{h\to0}\left[f(x_0)+f(h)\right]=f(x_0)+\lim\limits_{h\to0}f(h)=f(x_0)+0=f(x_0)$.

δ) Επειδή $f(0)=0$ η $x=0$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.
Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow f(x_1)-f(x_2)=0\Leftrightarrow$
$f(x_1)+f(-x_2)=0\Leftrightarrow f(x_1-x_2)=0\Leftrightarrow x_1-x_2=0\Leftrightarrow x_1=x_2$ άρα η f είναι 1-1.

ε) Αν η f ήταν γνησίως φθίνουσα τότε $0<1\Leftrightarrow f(0)>f(1)\Leftrightarrow f(1)<0$ άτοπο.
Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη, είναι γνησίως αύξουσα.

στ) $f\left(3^x\right)+f\left(2\cdot 4^x\right)>f\left(4^x\right)+f\left(5^x\right)\Leftrightarrow f\left(3^x+2\cdot 4^x\right)>f\left(4^x+5^x\right)\overset{f1}{\Leftrightarrow}$

$3^x+2\cdot 4^x>4^x+5^x\Leftrightarrow 3^x+4^x-5^x>0\Leftrightarrow\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x-1>0\quad(1)$

Έστω $g(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x-1$, $x\in\mathbb{R}$. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ τότε

$\left(\frac{3}{5}\right)^{x_1}>\left(\frac{3}{5}\right)^{x_2}$ (1), $\left(\frac{4}{5}\right)^{x_1}>\left(\frac{4}{5}\right)^{x_2}$ (2).

Με πρόσθεση των σχέσεων (1) και (2) έχουμε:

$\left(\frac{3}{5}\right)^{x_1}+\left(\frac{4}{5}\right)^{x_1}>\left(\frac{3}{5}\right)^{x_2}+\left(\frac{4}{5}\right)^{x_2}\Leftrightarrow\left(\frac{3}{5}\right)^{x_1}+\left(\frac{4}{5}\right)^{x_1}-1>\left(\frac{3}{5}\right)^{x_2}+\left(\frac{4}{5}\right)^{x_2}-1\Leftrightarrow$

$g(x_1)>g(x_2)$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Από τη σχέση (1) έχουμε: $g(x)>g(2)\overset{g\searrow}{\Leftrightarrow}x<2$.

58.Α. α) Είναι $3f(x)-\eta\mu f(x)=2x\Leftrightarrow 3f(x)-2x=\eta\mu f(x)$.

Γνωρίζουμε ότι $|\eta\mu f(x)|\le|f(x)|\Leftrightarrow|3f(x)-2x|\le|f(x)|$.

β) Είναι $3f(x)=\eta\mu f(x)+2x$ άρα

$|3f(x)|=|\eta\mu f(x)+2x|\le|\eta\mu f(x)|+|2x|\le|f(x)|+2|x|$ οπότε

$3|f(x)|\le|f(x)|\le 2|x|\Leftrightarrow\ |f(x)|\le|x|$.

Β) α) Είναι $|f(x)|\le|x|\Leftrightarrow-|x|\le f(x)\le|x|$.

Όμως $\lim\limits_{x\to0}|x|=0=\lim\limits_{x\to0}(-|x|)$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$. Οπότε $\lim\limits_{x\to0}\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\underset{\substack{x\to0,\\ h\to0}}{\overset{h=f(x)}{=}}\lim\limits_{h\to0}\frac{\eta\mu h}{h}=1$.

β) Από τη σχέση $3f(x)-\eta\mu f(x)=2x\overset{x\ne0}{\Rightarrow}\frac{3f(x)}{x}-\frac{\eta\mu f(x)}{x}=2\Rightarrow$

$$\frac{3f(x)}{x}-\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\cdot\frac{f(x)}{x}=2\Leftrightarrow\frac{f(x)}{x}\left(3-\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\right)=2\Rightarrow\frac{f(x)}{x}=\frac{2}{3-\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}}$$

άρα $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2}{3-\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}}\right)=\frac{2}{3-1}=1$.

59.α) Έστω ότι υπάρχει $\rho \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(\rho) < \rho$ τότε επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα ισχύει ότι $f(f(\rho)) < f(\rho) \Leftrightarrow \rho < f(\rho)$ άτοπο.

β) Έστω ότι υπάρχει $\rho \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(\rho) > \rho$ τότε επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα ισχύει ότι $f(f(\rho)) > f(\rho) \Leftrightarrow \rho > f(\rho)$ άτοπο. Άρα $f(x) = x,\ x \in \mathbb{R}$.

γ) Από β) ερώτημα $g(x) = x^3 + 3x - 3,\ x \in \mathbb{R}$.

i. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ τότε $x_1^3 < x_2^3$ (1), $3x_1 < 3x_2 \Leftrightarrow$ $3x_1 - 3 < 3x_2 - 3$ (2). Με πρόσθεση των σχέσεων $(1)+(2)$ έχουμε $f(x_1) < f(x_2)$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. $g(x) = 2x^4 - 1 \Leftrightarrow x^3 + 3x - 3 = 2x^4 - 1 \Leftrightarrow 2x^4 - x^3 - 3x + 2 = 0$.

Έστω $h(x) = 2x^4 - x^3 - 3x + 2 = (x-1)(2x^3 + x^2 + x - 2)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = 2x^3 + x^2 + x - 2,\ x \in [0,1]$.

Είναι $\varphi(0) = -2$, $\varphi(1) = 2$, οπότε $\varphi(0)\varphi(1) < 0$.

Η φ είναι συνεχής στο $[0,1]$, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_0 \in (0,1) : \varphi(x_0) = 0 \Leftrightarrow (x_0 - 1)\varphi(x_0) = 0 \Leftrightarrow h(x_0) = 0$.

60.α) Επειδή f συνεχής, και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$. Άρα $f(x) < 0$ ή $f(x) > 0$ στο $[\alpha,\beta]$.

Αν $f(x) < 0$ τότε $f(\alpha)f(\beta)f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < 0 \Leftrightarrow \frac{(\alpha+\beta)^3}{8} < 0$ άτοπο. Άρα $f(x) > 0$.

β) Η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.

Είναι $\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(\alpha) < f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < f(\beta)$, οπότε ισχύει το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $f(x_0) = \frac{\alpha+\beta}{2}$.

γ) i. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\alpha+\beta)^3 x^3 + \eta\mu x}{8f(\alpha)x^3 - 5x^2 + 7} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\alpha+\beta)^3 + \frac{\eta\mu x}{x^3}}{8f(\alpha) - \frac{5}{x} + \frac{7}{x^3}} = \frac{(\alpha+\beta)^3}{8f(\alpha)} = f(\beta)f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$.

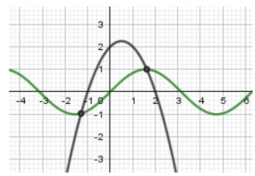
Είναι $\left|\frac{\eta\mu x}{x^3}\right| \leq \frac{1}{|x^3|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|x^3|} \leq \frac{\eta\mu x}{x^3} \leq \frac{1}{|x^3|}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{|x^3|} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{|x^3|}\right) = 0$, άρα

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\eta\mu x}{x^3} = 0$. Επίσης $f(\alpha)f(\beta)f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{(\alpha+\beta)^3}{8} \Leftrightarrow \frac{(\alpha+\beta)^3}{8f(\alpha)} = f(\beta)f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$.

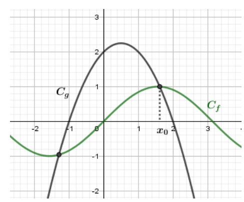
ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f\left(\dfrac{\alpha+2\beta}{3}\right)x^4-f(\alpha)x^3-2f(\beta)}{f(\beta)x^3+f(\alpha)x^2-\beta}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f\left(\dfrac{\alpha+2\beta}{3}\right)x^4}{f(\beta)x^3}=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{f\left(\dfrac{\alpha+2\beta}{3}\right)}{f(\beta)}\cdot x\right]=+\infty$.

61.α) $g(x)=-x^2+x+2=-\left(x^2-2\cdot\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}\right)+2\Leftrightarrow$



$g(x)=-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}$. Η C_g προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της $y=-x^2$ κατά 1/2 προς τα δεξιά και κατά 9/4 προς τα πάνω. Παρατηρούμε στο σχήμα ότι οι C_f, C_g έχουν δύο κοινά σημεία, οπότε η εξίσωση $f(x)=g(x)$ έχει ακριβώς δύο λύσεις.



β) i. $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{1}{\eta\mu x+x^2-x-2}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{1}{f(x)-g(x)}=+\infty$

αφού $\lim\limits_{x\to x_0^+}\left(f(x)-g(x)\right)=f(x_0)-g(x_0)=0$ και

$f(x)>g(x)$ για κάθε $x>x_0$.

ii. $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{x+1}{g(x)-g(x_0)}=\lim\limits_{x\to x_0^-}(x+1)\dfrac{1}{g(x)-g(x_0)}=(x_0+1)(+\infty)=+\infty$ αφού

$\lim\limits_{x\to x_0^-}g(x)=g(x_0)$ και $g(x)>g(x_0)$ για κάθε $x\in(1,x_0)$

iii. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{(x_0-x)^2(1-x_0-x)^2}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\left[(x_0-x)(1-x_0-x)\right]^2}=$

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\left(x_0-x-x_0^2+\cancel{xx_0}-\cancel{xx_0}+x^2\right)^2}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\left(-x_0^2+x_0+2+x^2-x-2\right)^2}=$

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\left(g(x_0)-g(x)\right)^2}=\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\dfrac{1}{\left(g(x_0)-g(x)\right)^2}\right]=\eta\mu x_0\cdot(+\infty)=+\infty$ αφού

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{\left(g(x_0)-g(x)\right)^2}\overset{g(x_0)-g(x)=u}{\underset{u\to 0}{=}}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{1}{u^2}=+\infty$.

γ) Έχουμε: $\left|\frac{f(x)}{x}\right| = \left|\frac{\eta\mu x}{x}\right| = \frac{|\eta\mu x|}{|x|} \le \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|x|} \le \frac{\eta\mu x}{x} \le \frac{1}{|x|}$. Είναι

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{|x|} = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{|x|}\right)$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x} = 0$

δ) Είναι **i.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-g(x)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\eta\mu x + x^2 - x - 2\right) =$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{\eta\mu x}{x} + x - 1 - \frac{2}{x}\right)\right] = +\infty$.

ii. $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln f(x)}{\ln x} = \lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(\eta\mu x)}{\ln x} = \lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(\eta\mu x) - \ln x + \ln x}{\ln x} =$

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right) + \ln x}{\ln x} = \lim\limits_{x\to0^+}\left[\frac{1}{\ln x}\ln\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right) + 1\right] = 0\cdot 0 + 1 = 1$ γιατί

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{\ln x} \overset{\ln x = u}{=} \lim\limits_{u\to-\infty}\frac{1}{u} = 0$, $\lim\limits_{x\to0^+}\ln\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right) \overset{\frac{\eta\mu x}{x}=u}{=} \lim\limits_{u\to1}\ln u = 0$.

ε) Για να ορίζεται η $f\circ g$ πρέπει $\begin{cases} x\in D_g \\ g(x)\in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ \left(-x^2+x+2\right)\in\mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$.

Άρα η $f\circ g$ έχει πεδίο ορισμού $D_{f\circ g} = \mathbb{R}$. Είναι

$(f\circ g)(x) = g(x) \Leftrightarrow \eta\mu g(x) = g(x) \Leftrightarrow g(x) = 0$. Γνωρίζουμε ότι $|\eta\mu x| \le |x|$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$.

Άρα $-x^2 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ή $x = 2$.

στ) $h(f(\xi)) = h(\sigma\upsilon\nu\xi) \Leftrightarrow h(\eta\mu\xi) - h(\sigma\upsilon\nu\xi) = 0$.

Έστω $t(x) = h(\eta\mu x) - h(\sigma\upsilon\nu x),\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Είναι: $t(0) = h(\eta\mu 0) - h(\sigma\upsilon\nu 0) = h(0) - h(1)$ και

$t\left(\frac{\pi}{2}\right) = h\left(\eta\mu\frac{\pi}{2}\right) - h\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}\right) = h(1) - h(0) = -\left(h(0)-h(1)\right)$.

Άρα $t(0)t\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\left(h(0)-h(1)\right)^2 \le 0$. Αν:

- $t(0)t\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow t(0) = 0$ ή $t\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Τότε $\xi = 0$ ή $\xi = \frac{\pi}{2}$.

- $t(0)t\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$ τότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano αφού η t είναι

συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ως σύνθεση και άθροισμα συνεχών συναρτήσεων άρα

υπάρχει $\xi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $t(\xi)=0\Leftrightarrow h(\eta\mu\xi)=h(\sigma\upsilon\nu\xi)$.

Άρα υπάρχει $\xi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ τέτοιο ώστε: $t(\xi)=0\Leftrightarrow h(\eta\mu\xi)=h(\sigma\upsilon\nu\xi)$.

ζ) Έστω ότι $b(2)b(-1)<0$. Η b είναι συνεχής στο $[-1,2]$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_0\in(-1,2)$ τέτοιο, ώστε:

$b(x_0)=0\Leftrightarrow\ \ g(x_0)a(x_0)=0\Leftrightarrow$

$\left(-x_0^2+x_0+2=0\Leftrightarrow x_0=-1\text{ ή } x_0=2\text{ άτοπο}\right)$ ή $a(x_0)=0$ που είναι επίσης άτοπο, άρα $b(-1)b(2)\geq 0$. (Η a έχει διαδοχικές ρίζες το -1 και το 2 άρα δεν έχει άλλη ρίζα στο διάστημα $(-1,2)$).

62. α) Είναι $2f(x)+4f(-x)=e^{-x}-e^{x}$ (1).

Θέτουμε όπου x το – x στην (1) οπότε έχουμε: $2f(-x)+4f(x)=e^{x}-e^{-x}$ (2).

Με πρόσθεση των σχέσεων (1)και (2) έχουμε:

$6f(x)+6f(-x)=0\Leftrightarrow f(-x)=-f(x),\ x\in\mathbb{R}$.

Επίσης για κάθε $x\in\mathbb{R},-x\in\mathbb{R}$ οπότε η f είναι περιττή.

β) Είναι $\begin{cases}2f(x)+4f(-x)=e^{-x}-e^{x}\\ 2f(-x)+4f(x)=e^{x}-e^{-x}\end{cases}\begin{vmatrix}\\ -2\end{vmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}2f(x)+4f(-x)=e^{-x}-e^{x}\ (1)\\ -4f(-x)-8f(x)=-2e^{x}+2e^{-x}\ (3)\end{cases}$.

Με πρόσθεση των σχέσεων (1) και (3) έχουμε

$-6f(x)=-3e^{x}+3e^{-x}\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}\Leftrightarrow\ f(x)=\frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right)$.

γ) Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ ισχύουν

$e^{x_1}<e^{x_2}$ (1), $-x_1>-x_2\Leftrightarrow e^{-x_1}>e^{-x_2}\Leftrightarrow -e^{-x_1}<-e^{-x_2}$ (2).

Με πρόσθεση των σχέσεων $(1),(2)$ έχουμε:

$e^{x_1}-e^{-x_1}<e^{-x_2}-e^{x_2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left(e^{x_1}-e^{-x_1}\right)<\frac{1}{2}\left(e^{-x_2}-e^{x_2}\right)\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)\Rightarrow f\nearrow\mathbb{R}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right)=-\infty$.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A=\mathbb{R}$ έχει σύνολο τιμών το

$f(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=\mathbb{R}$.

δ) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε είναι 1-1.

Θέτουμε $f(x)=y \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 2y \Leftrightarrow$

$e^x - \frac{1}{e^x} = 2y \Leftrightarrow (e^x)^2 - 1 = 2ye^x \Leftrightarrow (e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0$.

Θέτουμε $\omega = e^x > 0$ οπότε προκύπτει η δευτεροβάθμια εξίσωση

$\omega^2 - 2y\omega - 1 = 0$ με $\Delta = 4y^2 + 4$ και ρίζες $\omega_{1,2} = \frac{2y \pm 2\sqrt{y^2+1}}{2} = y \pm \sqrt{y^2+1}$.

Είναι $y^2 < y^2 + 1 \Leftrightarrow \sqrt{y^2} < \sqrt{y^2+1} \Leftrightarrow |y| < \sqrt{y^2+1} \Leftrightarrow -\sqrt{y^2+1} < y < \sqrt{y^2+1} \Rightarrow$

$y - \sqrt{y^2+1} < 0$ απορρίπτεται και $y + \sqrt{y^2+1} > 0$. Άρα

$e^x = y + \sqrt{y^2+1} \Leftrightarrow x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$, οπότε $f^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

ε) Είναι $f(x_0) + 2f(-x_0) = x_0^3 + x_0 - 5 \Leftrightarrow f(x_0) - 2f(x_0) = x_0^3 + x_0 - 5 \Leftrightarrow$

$x_0^3 + x_0 - 5 + f(x_0) = 0$. Έστω $h(x) = x^3 + x - 5 + f(x)$, $x \in [1,2]$.

Είναι $h(1) = -2 + f(1) = -2 + \frac{e}{2} - \frac{1}{2e} = \frac{-4e + e^2 - 1}{2e} = \frac{e(e-4)-1}{2e} < 0,$

$h(2) = 5 + \frac{1}{2}\left(e^2 - \frac{1}{e^2}\right) > 0$ οπότε $h(1)h(2) < 0$.

Η h είναι συνεχής στο $[1,2]$, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_0 \in (1,2): h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) + 2f(-x_0) = x_0^3 + x_0 - 5$.

63.α) Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left(2f(x) + f(-x)\right) = 0$. Θέτουμε $-x = u$, όταν $x \to 0, u \to 0$

οπότε: $\lim\limits_{x\to 0}\left(2f(x) + f(-x)\right) = 0 = \lim\limits_{u\to 0}\left(2f(-u) + f(u)\right) = 0$ άρα

$\lim\limits_{x\to 0}\left(2f(-x) + f(x)\right) = 0$ (1). Επίσης $\lim\limits_{x\to 0}\left(2f(x) + f(-x)\right) = 0 \Leftrightarrow$

$-2\lim\limits_{x\to 0}\left(2f(x) + f(-x)\right) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\left(-4f(x) - 2f(-x)\right) = 0$ (2)

1ος τρόπος:

Με πρόσθεση των σχέσεων (1) και (2) έχουμε:

$\lim\limits_{x\to 0}\left(2f(-x) + f(x)\right) + \lim\limits_{x\to 0}\left(-4f(x) - 2f(-x)\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\cancel{2f(-x)} + f(x) - 4f(x) - \cancel{2f(-x)}\right) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\left(-3f(x)\right) = 0 \Leftrightarrow$

$-3\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

2ος τρόπος

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\left(-3f(x)\right) = -\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x) + 2f(-x) - 2f(-x) - 4f(x)\right) \overset{(1),(2)}{=} 0$.

3ος τρόπος
Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=2f(x)+f(-x)$ με $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$.
Αν θέσουμε στον τύπο της g όπου x το –x έχουμε $g(-x)=2f(-x)+f(x)$
με $\lim\limits_{x\to 0}g(-x)\overset{u=-x}{\underset{x\to 0,\ u\to 0}{=}}\lim\limits_{u\to 0}g(u)=0$.

Είναι $\begin{cases}2f(x)+f(-x)=g(x)\\ 2f(-x)+f(x)=g(-x)\end{cases}\Bigg|\cdot(-2) \Leftrightarrow \begin{cases}-4f(x)-2f(-x)=-2g(x)\ \text{(A)}\\ 2f(-x)+f(x)=g(-x)\ \text{(B)}\end{cases}$.

Με πρόσθεση των σχέσεων (A) και (B) έχουμε
$-3f(x)=-2g(x)+g(-x)\Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{3}\left(-2g(x)+g(-x)\right)$ οπότε

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{3}\left(-2g(x)+g(-x)\right)\right]=0$.

β) Αν στη σχέση $2f(x)+f(-x)=x^3+x$ (3), θέσουμε όπου x το $-x$ έχουμε:
$2f(-x)+f(x)=(-x)^3-x\Leftrightarrow 2f(-x)+f(x)=-x^3-x$ (4)
Επίσης $(3)\Leftrightarrow -4f(x)-2f(-x)=-2x^3-2x$ (5).
Με πρόσθεση κατά μέλη των (4) και (5) έχουμε:
$-3f(x)=-3x^3-3x\Leftrightarrow f(x)=x^3+x$.

γ) Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ (6) ισχύουν: $x_1^3<x_2^3$ (7)
Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (6) και (7) έχουμε: $x_1^3+x_1<x_2^3+x_2\Leftrightarrow$
$f(x_1)<f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα οπότε είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται. Είναι $f\left((-\infty,+\infty)\right)\overset{f\nearrow}{=}\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to\infty}f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=A_{f^{-1}}$ οπότε η $f^{-1}\circ f^{-1}$ ορίζεται στο $\mathbb{R}$.

Έχουμε: $f^{-1}\left(f^{-1}(x)\right)>1\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f\left(f^{-1}\left(f^{-1}(x)\right)\right)>f(1)\Leftrightarrow f^{-1}(x)>2\Leftrightarrow$
$f\left(f^{-1}(x)\right)>f(2)\Leftrightarrow x>10$.

δ) Έστω $g(x)=f(x)-e^{-x}=x^3+x-e^{-x},\ x\in\mathbb{R}$.
Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$, τότε: $-x_1>-x_2\Leftrightarrow e^{-x_1}>e^{-x_2}\Leftrightarrow -e^{-x_1}<-e^{-x_2}$ (8), και $f(x_1)<f(x_2)$ (9). Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (8) και (9) έχουμε:
$f(x_1)-e^{-x_1}<f(x_2)-e^{-x_2}\Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2)$ άρα η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
Η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε έχει σύνολο τιμών το
$g(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}g(x),\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)\right)=\mathbb{R}$.

Το μηδέν ανήκει στο σύνολο τιμών της g, άρα η εξίσωση $g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=e^{-x}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα, η οποία είναι μοναδική αφού η g είναι γνησίως αύξουσα.

ε) i. Θέτουμε $\frac{1}{f(x)}=u$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} u=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}=0$, οπότε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)\eta\mu\frac{1}{f(x)}\right]=\lim_{u\to0}\left(\frac{1}{u}\eta\mu u\right)=\lim_{u\to0}\frac{\eta\mu u}{u}=1.$$

ii. Θέτουμε $f^{-1}(x)=u \Leftrightarrow x=f(u)$. Όταν $x\to2$, τότε $u\to f^{-1}(2)\Leftrightarrow u\to1$ αφού $f(1)=2\Leftrightarrow f^{-1}(2)=1$. Είναι

$$\lim_{x\to2}\frac{f^{-1}(x)-1}{x-2}=\lim_{u\to1}\frac{u-1}{f(u)-2}=\lim_{u\to1}\frac{u-1}{u^3+u-2}=\lim_{u\to1}\frac{\cancel{u-1}}{\cancel{(u-1)}(u^2+u+2)}=\frac{1}{4}.$$

64.α) Για $x=y=0$ είναι $\cancel{f(0)}=\cancel{f(0)}f(0)\overset{f(0)>0}{\Leftrightarrow} f(0)=1$. Για $y=-x$ είναι:

$$f(x-x)=f(x)f(-x)\Leftrightarrow f(0)=f(x)f(-x)\Leftrightarrow 1=f(x)f(-x)\Leftrightarrow f(-x)=\frac{1}{f(x)}$$

β) Για να είναι η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ αρκεί $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ ή $\lim\limits_{h\to0} f(x_0+h)=f(x_0)$ για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$. Είναι

$$\lim_{h\to0} f(x_0+h)=\lim_{h\to0}\big(f(x_0)f(h)\big)=f(x_0)\lim_{h\to0} f(h)=f(x_0)f(0)=f(x_0).$$

γ) $\frac{f(x^{1821})}{f(2)}=\frac{f(x)}{f(2x)}\Leftrightarrow f(x^{1821})f(2x)=f(x)f(2)\Leftrightarrow f(x^{1821}+2x)=f(x+2)\overset{f\,1-1}{\Leftrightarrow}$

$x^{1821}+2x=x+2\Leftrightarrow x^{1821}+x-2=0 \quad (1)$

Έστω $g(x)=x^{1821}+x-2,\ x\in\mathbb{R}$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι 1-1. Τότε $(1)\Leftrightarrow g(x)=0\Leftrightarrow g(x)=g(1)\overset{1-1}{\Leftrightarrow} x=1$.

δ) $\frac{f(x)}{e^y}=\frac{e^x}{f(y)}\Leftrightarrow f(x)f(y)=e^xe^y\Leftrightarrow f(x+y)=e^{x+y} \quad (2)$

Θέτουμε όπου x+y το x οπότε $f(x)=e^x,\ x\in\mathbb{R}$.

ε) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(4x)-f(x)}{f(3x)+f(2x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{4x}-e^x}{e^{3x}+e^{2x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(e^4)^x-e^x}{(e^3)^x+(e^2)^x}=$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^4\right)^x\left(1-\left(\frac{e}{e^4}\right)^x\right)}{\left(e^3\right)^x\left(1+\left(\frac{e^2}{e^3}\right)^x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{e^4}{e^3}\right)^x\frac{1-\left(\frac{1}{e^3}\right)^x}{1+\left(\frac{1}{e}\right)^x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[e^x\,\frac{1-\left(\frac{1}{e^3}\right)^x}{1+\left(\frac{1}{e}\right)^x}\right]=+\infty$$

Αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^3}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^x=0$.

65.α) Είναι $h(x)f^2(x)-e^xh(x)-1=0\Leftrightarrow h(x)\left(f^2(x)-e^x\right)=1\neq 0$ άρα $f^2(x)-e^x\neq 0\Leftrightarrow g(x)\neq 0$. Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ σαν διαφορά συνεχών συναρτήσεων άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

β) Είναι $g(0)=f^2(0)-1<0$ αφού

$|f(0)|<1\Rightarrow|f(0)|^2<1^2\Leftrightarrow f^2(0)<1\Leftrightarrow f^2(0)-1<0$.

Άρα $g(x)<0\Leftrightarrow f^2(x)-e^x<0\Leftrightarrow |f(x)|<\sqrt{e^x}\Leftrightarrow -\sqrt{e^x}<f(x)<\sqrt{e^x}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{e^x}\right)=0=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{e^x}$ οπότε από το Κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$.

γ) Είναι $h(x)\left(f^2(x)-e^x\right)=1\Leftrightarrow h(x)=\dfrac{1}{f^2(x)-e^x}$ οπότε η $h(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f^2(x)-e^x}=-\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f^2(x)-e^x\right)=0-0=0$ και $f^2(x)-e^x<0$.

δ) $(x-1)\left(e^x+x\right)\left[h(x)+e^x\right]-x^2=xf(x-1)\Leftrightarrow$

$(x-1)\left(e^x+x\right)\left[h(x)+e^x\right]-x\left[x+f(x-1)\right]=0$.

Έστω η συνάρτηση $\varphi(x)=(x-1)\left(e^x+x\right)\left[h(x)+e^x\right]-x\left[x+f(x-1)\right]$, $x\in\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής ως πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $\varphi(0)=-\left[h(0)+1\right]=-\left(\dfrac{1}{f^2(0)-1}+1\right)=-\dfrac{f^2(0)}{f^2(0)-1}>0$ γιατί

$|f(0)|<1\Leftrightarrow f^2(0)<1$ και $f(0)\neq 0$ άρα $f^2(0)>0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left((x-1)\left(e^x+x\right)\left[h(x)+e^x\right]-x\left[x+f(x-1)\right]\right)=-\infty$

γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x-1) \overset{x-1=u}{\underset{u\to-\infty}{=}} \lim\limits_{u\to-\infty} f(u)=0$ άρα υπάρχει $\rho<0$ σε περιοχή του $-\infty$ τέτοιο ώστε $\varphi(\rho)<0$. Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0\in(\rho,0)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0)=0$.

66. Είναι $f\left(e^{-x}\right)+e^{f(x)}=e^{-x}$ (1)

α) Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ είναι συνεχής και στο $x_0=0$, άρα $\lim\limits_{x\to0} f(x)=f(0)$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{f(x)}\right) \overset{k=f(x)}{\underset{\substack{x\to+\infty,\ k\to0\\ k\to0}}{=}} \lim e^{k}=e^{0}=1$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(e^{-x}\right) \overset{u=e^{-x}}{\underset{\substack{x\to+\infty,\ u\to0\\ u\to0}}{=}} \lim f(u)=f(0)$.

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f\left(e^{-x}\right)+e^{f(x)}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x}\right)=0 \Leftrightarrow f(0)+1=0 \Leftrightarrow f(0)=-1$.

β) Από τη σχέση (1) για $x=1$ έχουμε $f(1)+e^{f(0)}=1 \Leftrightarrow$ $f(1)+e^{-1}=1 \Leftrightarrow f(1)=1-e^{-1}$. Έστω $h(x)=2f(x)+2x+1$, $x\in[0,1]$.

Είναι $h(0)=2f(0)+1=-2+1=-1<0$.

$h(1)=2f(1)+2+1=2-2e^{-1}+3=5-\dfrac{2}{e}>0$ οπότε $h(0)h(1)<0$.

Η h είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε η εξίσωση $h(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$.

γ) Έστω $g(x)=f(x)+\dfrac{1}{2e}$, $x\in[0,1]$. Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ σαν άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. $g(0)=f(0)+\dfrac{1}{2e}=-1+\dfrac{1}{2e}<0$,

$g(1)=f(1)+\dfrac{1}{2e}=1-\dfrac{1}{e}+\dfrac{1}{2e}=\dfrac{2e-2+1}{2e}=\dfrac{2e-1}{2e}>0$ οπότε $g(0)\cdot g(1)<0$.

Άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)=-\dfrac{1}{2e}$.

67. Είναι $f(xy)=f(x)f(y)-\dfrac{x^2+y^2}{xy}$ (1)

α) Έστω ότι υπάρχει $\theta\in(0,+\infty)$ τέτοιο ώστε $f(\theta)=0$. Για $x=\theta$ και $y=1$

έχουμε $f(\theta)=f(\theta)\cdot f(1)-\dfrac{\theta^2+1}{\theta} \Leftrightarrow 0=0-\dfrac{\theta^2+1}{\theta} \Leftrightarrow \dfrac{\theta^2+1}{\theta}=0 \Leftrightarrow \theta^2+1=0 \Leftrightarrow$ $\theta^2=-1$ άτοπο. Άρα $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα αυτό.

β) Αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, υπάρχει $\alpha\in(0,+\infty)$: $f(\alpha)>0$ άρα $f(x)>0$ για κάθε $x>0$.

Στην (1) για $x=y=1$ είναι: $f(1)=f^2(1)-2 \Leftrightarrow f^2(1)+f(1)-2=0 \Leftrightarrow$ $\left(f(1)=2\right)$ ή ($f(1)=-1$ που απορρίπτεται). Άρα $f(1)=2$.

γ) Στην (1) για $y=1$ έχουμε $f(x)=2f(x)-\dfrac{x^2+1}{x} \Leftrightarrow f(x)=x+\dfrac{1}{x}$.

δ) Διαιρώντας με x η εξίσωση γίνεται

$x+\text{συν}\dfrac{\pi}{x}-1+\dfrac{1}{x}=0 \Leftrightarrow x+\dfrac{1}{x}=1-\text{συν}\dfrac{\pi}{x} \Leftrightarrow f(x)=1-\text{συν}\dfrac{\pi}{x}\ (2)$.

Για κάθε $x>0$ ισχύει: $x+\dfrac{1}{x}\geq 2 \Leftrightarrow f(x)\geq 2$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$. ($x+\dfrac{1}{x}\geq 2 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x^2+1\geq 2x \Leftrightarrow x^2-2x+1\geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2\geq 0$ ισχύει).

Επίσης $-1\leq \text{συν}\dfrac{\pi}{x} \Leftrightarrow -\text{συν}\dfrac{\pi}{x}\leq 1 \Leftrightarrow 1-\text{συν}\dfrac{\pi}{x}\leq 2$.

Άρα η εξίσωση (2) έχει λύση όταν: $\left.\begin{array}{r} x+\dfrac{1}{x}=2 \\ 1-\text{συν}\dfrac{\pi}{x}=2 \end{array}\right\} \Rightarrow x=1$.

68.α) Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$f(x_1)-f(x_2)=\sqrt{x_1^2+1}-x_1-\sqrt{x_2^2+1}+x_2 \Leftrightarrow$

$f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{x_1^2+\cancel{1}-x_2^2-\cancel{1}}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_1^2+1}}-(x_1-x_2)=\dfrac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_1^2+1}}-(x_1-x_2)=$

$(x_1-x_2)\left[\dfrac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}-1\right]=(x_1-x_2)\left[\dfrac{x_1+x_2-\sqrt{x_1^2+1}-\sqrt{x_2^2+1}}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}\right]$.

Είναι $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x| \Leftrightarrow -\sqrt{x^2+1}<x<\sqrt{x^2+1} \Rightarrow x-\sqrt{x^2+1}<0$, άρα $x_1-\sqrt{x_1^2+1}<0$, $x_2-\sqrt{x_2^2+1}<0$. Επίσης $x_1-x_2<0$ οπότε $f(x_1)-f(x_2)>0 \Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Είναι $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[x\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1\right)\right] = +\infty$ και

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}\right) = 0.$$

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ έχει σύνολο τιμών το $f(A) = \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = (0,+\infty)$.

γ) $\sqrt{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^2+1} - \sqrt{x^2+1} + x = \sqrt{10}-3 \Leftrightarrow \sqrt{f^2(x)+1} - f(x) = \sqrt{10}-3 \Leftrightarrow$

$f(f(x)) = f(3) \overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow} f(x) = 3$**.** Επειδή το 3 ανήκει στο σύνολο τιμών της f και η f είναι γνησίως φθίνουσα, η εξίσωση $f(x)=3$ έχει μοναδική ρίζα.

δ) Έστω $g(x) = f(x) - x^2 + 2,\ x\in[1,2]$.

Είναι $g(1) = f(1) - 1 + 2 = \sqrt{2} - 1 + 1 = \sqrt{2} > 0$,

$g(2) = f(2) - 4 + 2 = \sqrt{5} - 2 - 2 = \sqrt{5} - 4 < 0$ οπότε $g(1)g(2) < 0$.

Η g είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_0 \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0^2 - 2$.

69. α) i) Είναι: $2f^2(x) + g^2(x) + 2x^2 = 2g(x)\left[f(x) + x\right] \Leftrightarrow$

$2f^2(x) - 2f(x)g(x) + g^2(x) + 2x^2 - 2xg(x) = 0 \quad (2)$

Αν θέσουμε όπου $f(x) = \omega$ στη σχέση (2) προκύπτει η δευτεροβάθμια εξίσωση

$2\omega^2 - 2g(x)\cdot\omega + g^2(x) + 2x^2 - 2xg(x) = 0 \quad (3)$

Υπάρχουν $f(x), g(x)$ που επαληθεύουν την (2) άρα υπάρχουν ω που επαληθεύουν την (3) οπότε: $\Delta \ge 0 \Leftrightarrow 4g^2(x) - 8\left[g^2(x) - 2xg(x) + 2x^2\right] \ge 0 \Leftrightarrow$

$4g^2(x) - 8g^2(x) + 16xg(x) - 16x^2 \ge 0 \Leftrightarrow -4g^2(x) + 16xg(x) - 16x^2 \ge 0 \Leftrightarrow$

$g^2(x) - 4xg(x) + 4x^2 \le 0 \Leftrightarrow \left(g(x) - 2x\right)^2 \le 0 \Leftrightarrow g(x) - 2x = 0 \Leftrightarrow g(x) = 2x$,

$x\in\mathbb{R}$. Τότε η σχέση (2) γίνεται: $2f^2(x) - 4xf(x) + \cancel{4x^2} + 2x^2 - \cancel{4x^2} = 0 \Leftrightarrow$

$2f^2(x) - 4xf(x) + 2x^2 = 0 \Leftrightarrow f^2(x) - 2xf(x) + x^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\left(f(x) - x\right)^2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = x,\ x\in\mathbb{R}$.

ii) Από το ερώτημα α) έχουμε: $f^2(x)=x^2$ και $g^3(x)=8x^3$.

Είναι $\left(f^2\circ g^3\right)(x)=f^2\left(g^3(x)\right)=\left(g^3(x)\right)^2=\left(8x^3\right)^2=64x^6$, ενώ

$\left[g^3\circ\left(2f^2\right)\right](x)=g^3\left(2f^2(x)\right)=8\cdot\left(2x^2\right)^3=64x^6$, $x\in\mathbb{R}$.

Επομένως $\left(f^2\circ g^3\right)(x)=\left[g^3\circ\left(2f^2\right)\right](x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$ και η g το $(-\infty,2)$, ισχύει:

$f^2(x)=x^2$, $x>0$ και $g^3(x)=8x^3$, $x<2$. Για το πεδίο ορισμού της $f^2\circ g^3$,

έχουμε: $\begin{cases}x\in A_{g^3}\\ g^3\in A_{f^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<2\\ g^3(x)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<2\\ 8x^3>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<2\\ x>0\end{cases}$ άρα $x\in(0,2)$ (1)

$\begin{cases}x\in A_{2f^2}\\ 2f^2(x)\in A_{g^3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ 2x^2<2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x^2<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ -1<x<1\end{cases}\Rightarrow x\in(0,1)$ (2)

Από τις (1),(2) προκύπτει ότι $x\in(0,1)$.

γ) Οι συναρτήσεις f,g έχουν τύπο ευθείας με συντελεστή διεύθυνσης θετικό άρα είναι γνησίως αύξουσες οπότε και $1-1$.

Θέτουμε $f(x)=y\Leftrightarrow x=y$ άρα $f^{-1}(y)=y$ οπότε $f^{-1}(x)=x$, $x\in\mathbb{R}$.

Θέτουμε $g(x)=y\Leftrightarrow 2x=y\Leftrightarrow x=\frac{y}{2}$ άρα $g^{-1}(y)=\frac{y}{2}$ άρα $g^{-1}(x)=\frac{x}{2}$, $x\in\mathbb{R}$

Είναι $A_{f^{-1}\circ g^{-1}}=A_{g^{-1}\circ 2f}=\mathbb{R}$, $\left(f^{-1}\circ g^{-1}\right)(x)=f^{-1}\left(g^{-1}(x)\right)=\frac{x}{2}$,

$\left(g^{-1}\circ 2f\right)(x)=g^{-1}\left(2f(x)\right)=\frac{2x}{2}=x$.

Άρα $2\left(f^{-1}\circ g^{-1}\right)(x)=2\cdot\frac{x}{2}=x=f(x)=\frac{1}{2}g(x)=\left(g^{-1}\circ 2f\right)(x)$.

δ) $f^{1821}+g(x)+1=0\Leftrightarrow x^{821}+2x+1=0$ (3). Έστω $h(x)=x^{1821}+2x+1$, $x\in\mathbb{R}$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι $h\nearrow\mathbb{R}$. $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=+\infty$ άρα

$h(A)=\mathbb{R}$. Επειδή $0\in h(A)$, υπάρχει μοναδικό $x_1\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $h(x_1)=0$.

70.α) Για κάθε $x_1,x_2>0$ με $x_1<x_2$ (1) είναι $\ln x_1<\ln x_2$ (2) και $e^{x_1}<e^{x_2}$ (3)

Με πολλαπλασιασμό των σχέσεων (1) και (3) έχουμε $x_1e^{x_1}<x_2e^{x_2}$ (4)

Με πρόσθεση των σχέσεων (1), (2),(4) έχουμε:

$x_1e^{x_1}+\ln x_1+x_1<x_2e^{x_2}+\ln x_2+x_2\Leftrightarrow e^{f(x_1)}+f(x_1)<e^{f(x_2)}+f(x_2)$ (5)

Έστω $g(x)=e^x+x$, $x\in\mathbb{R}$.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε από την (5) έχουμε: $g(f(x_1))<g(f(x_2))\overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x_1)<f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

β) Είναι $e^{f(x)}+f(x)=xe^x+\ln x+x \Leftrightarrow e^{f(x)}+f(x)=e^{\ln x}e^x+\ln x+x \Leftrightarrow$

$e^{f(x)}+f(x)=e^{(\ln x+x)}+(\ln x+x)\Leftrightarrow g(f(x))=g(\ln x+x)\overset{g1-1}{\Leftrightarrow}$

$f(x)=\ln x+x, x>0$.

γ) $\dfrac{\ln\frac{\alpha}{\beta}}{\beta-\alpha}<1\Leftrightarrow \ln\alpha-\ln\beta<\beta-\alpha\Leftrightarrow \ln\alpha+\alpha<\ln\beta+\beta\Leftrightarrow f(\alpha)<f(\beta)$ που ισχύει αφού $0<\alpha<\beta$ και $f\nearrow(0,+\infty)$.

δ) Επειδή οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την $y=x$, η C_f βρίσκεται πάνω από την $C_{f^{-1}}$ όταν βρίσκεται πάνω από την $y=x$.
Δηλαδή: $f(x)>f^{-1}(x)\Leftrightarrow f(x)>x\Leftrightarrow \ln x+x>x\Leftrightarrow \ln x>0\Leftrightarrow x>1$.

ε) $\ln x_0=\alpha-x_0\Leftrightarrow \ln x_0+x_0=\alpha\Leftrightarrow f(x_0)=\alpha$.
Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(\ln x+x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x+x)=+\infty$.
Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A=(0,+\infty)$ έχει σύνολο τιμών το $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to0^+}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$. Το $\alpha\in\mathbb{R}$ οπότε υπάρχει θετικός αριθμός x_0 για τον οποίο ισχύει $f(x_0)=\alpha\Leftrightarrow \ln x_0=\alpha-x_0$, ο οποίος είναι μοναδικός αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $A=(0,+\infty)$.

71. α) Είναι $f^2(x)+x=x^2+1\Leftrightarrow f^2(x)=x^2-x+1$ (1)
Επειδή $x^2-x+1\neq0$ $(\Delta<0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f^2(x)\neq0\Leftrightarrow f(x)\neq0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.
Όμως $f(0)=1>0$ άρα $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Επομένως $f(x)=\sqrt{x^2-x+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

β) $f(x)=\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{x^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1}=\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$. Είναι

$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\geq0\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}\Leftrightarrow\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\geq\frac{\sqrt3}{2}\Leftrightarrow f(x)\geq\frac{\sqrt3}{2}$ (2)

και $f(x)=\frac{\sqrt3}{2}\Leftrightarrow\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt3}{2}\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=0\Leftrightarrow$

$x=\frac{1}{2}$. Άρα η (2) γίνεται $f(x)\geq \frac{\sqrt{3}}{2}=f\left(\frac{1}{2}\right)$, οπότε η f έχει ελάχιστο το $\frac{\sqrt{3}}{2}$ για $x=\frac{1}{2}$.

2ος τρόπος:

Η συνάρτηση $k(x)=x^2-x+1$ σαν τριώνυμο έχει ελάχιστο στο $-\frac{\beta}{2\alpha}=\frac{1}{2}$ το $k\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1=\frac{1-2+4}{4}=\frac{3}{4}$.

Επομένως $k(x)\geq k\left(\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow k(x)\geq \frac{3}{4}\Leftrightarrow \sqrt{k(x)}\geq \frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow f(x)\geq f\left(\frac{1}{2}\right)$ άρα η f έχει ελάχιστο το $\frac{\sqrt{3}}{2}$ για $x=\frac{1}{2}$.

γ) Για κάθε $x_1,x_2<\frac{1}{2}$ με $x_1<x_2$ ισχύει

$$x_1-\frac{1}{2}<x_2-\frac{1}{2}<0\Rightarrow\left(x_1-\frac{1}{2}\right)^2>\left(x_2-\frac{1}{2}\right)^2\Leftrightarrow$$

$$\left(x_1-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>\left(x_2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\Leftrightarrow\sqrt{\left(x_1-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}>\sqrt{\left(x_2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\Leftrightarrow$$

$f(x_1)>f(x_2)\Rightarrow f\searrow\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$. Για κάθε $x_1,x_2\geq\frac{1}{2}$ με $x_1<x_2$ ισχύει

$$0\leq x_1-\frac{1}{2}<x_2-\frac{1}{2}\Rightarrow\left(x_1-\frac{1}{2}\right)^2<\left(x_2-\frac{1}{2}\right)^2\Leftrightarrow$$

$$\left(x_1-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}<\left(x_2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\Leftrightarrow\sqrt{\left(x_1-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}<\sqrt{\left(x_2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\Leftrightarrow$$

$f(x_1)<f(x_2)\Rightarrow f\nearrow\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.

2ος τρόπος:

Η συνάρτηση $k(x)=x^2-x+1$ σαν τριώνυμο είναι γνησίως φθίνου-σα στο $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$. Για κάθε $x_1,x_2<\frac{1}{2}$ με $x_1<x_2$ ισχύει $k(x_1)>k(x_2)\Leftrightarrow\sqrt{k(x_1)}>\sqrt{k(x_2)}\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$. Για κάθε $x_1,x_2\geq\frac{1}{2}$ με $x_1<x_2$ ισχύει

$k(x_1) < k(x_2) \Leftrightarrow \sqrt{k(x_1)} < \sqrt{k(x_2)} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

δ) Επειδή $f(x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $|x|+1 \geq 1$, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ οπότε $f(f(x)) < f(|x|+1) \Leftrightarrow f(x) < |x|+1 \Leftrightarrow$

$\sqrt{x^2 - x + 1} < |x| + 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 < (|x|+1)^2 \Leftrightarrow$

$\cancel{x^2} - x + \cancel{1} < \cancel{x^2} + 2|x| + \cancel{1} \Leftrightarrow 2|x| + x > 0 \quad (\alpha)$

Αν $x \geq 0$ τότε η (α) γίνεται: $2x + x > 0 \Leftrightarrow 3x > 0 \Leftrightarrow x > 0$ και αν $x < 0$ τότε η (α) γίνεται: $-2x + x > 0 \Leftrightarrow -x > 0 \Leftrightarrow x < 0$.

Άρα η ανίσωση ισχύει για κάθε $x \neq 0$.

ε) i. Είναι $\lim\limits_{x \to 0^+} (f(x) - 1 - x) = 1 - 1 - 0 = 0$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) - 1 - x > 0 \Leftrightarrow f(x) > x + 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x + 1} > x + 1 \Leftrightarrow$

$\left(\sqrt{x^2 - x + 1}\right)^2 > (x+1)^2 \Leftrightarrow \cancel{x^2} - x + \cancel{1} > \cancel{x^2} + 2x + \cancel{1} \Leftrightarrow 3x < 0 \Leftrightarrow x < 0$ άτοπο.

Άρα για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) - 1 - x < 0$.

Θέτουμε $f(x) - 1 - x = u$ οπότε $u \to -\infty$ και $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{f(x) - 1 - x} = \lim\limits_{u \to 0^-} \frac{1}{u} = -\infty$.

ii. $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) + x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 - x + 1} + x\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x^2} - x + 1 - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2 - x + 1} - x} =$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(-1 + \frac{1}{x}\right)}{-x\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x}\left(-1 + \frac{1}{x}\right)}{-\cancel{x}\left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1\right)} = \frac{1}{2} > 0 \text{ άρα}$$

$f(x) + x > 0$ σε περιοχή του $-\infty$. Επομένως

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2|f(x) + x| - 1}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2(f(x) + x) - 1}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left((2(f(x) + x) - 1)\frac{1}{x} \right) = 0 \cdot 0 = 0.$$

στ) i. Επειδή υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$, $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$, είναι

$\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} g(x)$ και $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} g(x)$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $xg(x) > f(x) - 1 \Leftrightarrow g(x) > \frac{f(x) - 1}{x}$ οπότε

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) \geq \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{x} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) \geq \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2-x+\cancel{1}-\cancel{1}}{x\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)} =$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\cancel{x}(x-1)}{\cancel{x}\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)} = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} g(x) \geq -\dfrac{1}{2}$ (2). Για κάθε $x<0$ είναι

$xg(x) > f(x)-1 \Leftrightarrow g(x) < \dfrac{f(x)-1}{x}$ οπότε $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) \leq \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{x} \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) \leq -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} g(x) \leq -\dfrac{1}{2}$ (3). Από τις (2),(3) είναι $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\dfrac{1}{2}$.

Για κάθε $x>1$ είναι $(x-1)g(x) > f(x)-1 \Leftrightarrow g(x) > \dfrac{f(x)-1}{x-1}$ οπότε

$\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) \geq \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{x-1} \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) \geq \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-x+\cancel{1}-\cancel{1}}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to 1} g(x) \geq \dfrac{1}{2}$ (4). Για κάθε $x<1$ είναι $(x-1)g(x) > f(x)-1 \Leftrightarrow$

$g(x) < \dfrac{f(x)-1}{x-1}$ οπότε $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) \leq \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{x-1} \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) \leq \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-x+\cancel{1}-\cancel{1}}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to 1} g(x) \leq \dfrac{1}{2}$ (5). Από τις (4),(5) είναι $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = \dfrac{1}{2}$.

ii. Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = -\dfrac{1}{2}$ υπάρχει $\alpha>0$ όπου ο α είναι πολύ κοντά στο 0, τέτοιος ώστε $g(\alpha)<0$. Επίσης $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \dfrac{1}{2}$ οπότε υπάρχει $\beta<1$ όπου ο β είναι πολύ κοντά στο 1, τέτοιος ώστε $g(\beta)>0$ άρα $g(\alpha)g(\beta)<0$.

Επειδή η g είναι συνεχής στο $(0,1)$ είναι συνεχής και στο $[\alpha,\beta]$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (α,β) άρα και στο $(0,1)$.

72.α) Για κάθε $x>0$ είναι: $f(x)=\ln(x+1)-\ln x=\ln\frac{x+1}{x}=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$.

Για κάθε $0<x_1<x_2$ είναι:

$$\frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2}\Leftrightarrow 1+\frac{1}{x_1}>1+\frac{1}{x_2}\Leftrightarrow \ln\left(1+\frac{1}{x_1}\right)>\ln\left(1+\frac{1}{x_2}\right)\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)\Leftrightarrow$$

$f\searrow(0,+\infty)$ οπότε f 1−1. Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\underset{\substack{x\to0^+\Rightarrow\\ u\to+\infty}}{\overset{1+\frac{1}{x}=u}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\underset{\substack{x\to+\infty\Rightarrow\\ u\to1}}{\overset{1+\frac{1}{x}=u}{=}}\lim\limits_{u\to1}\ln u=0$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A=(0,+\infty)$, οπότε έχει σύνολο τιμών το $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\right)=(0,+\infty)$, οπότε $D_{f^{-1}}=(0,+\infty)$.

Θέτουμε $f(x)=y\Leftrightarrow\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=y\Leftrightarrow1+\frac{1}{x}=e^y\Leftrightarrow\frac{1}{x}=e^y-1\Leftrightarrow x=\frac{1}{e^y-1}$, άρα

$f^{-1}(y)=\frac{1}{e^y-1},\ y>0$ οπότε $f^{-1}(x)=\frac{1}{e^x-1},\ x>0$.

β) Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ ισχύει: $-x_1>-x_2\Leftrightarrow e^{-x_1}>e^{-x_2}\ (1)$,

$-x_1-1>-x_2-1\ (2)$. Με πρόσθεση των σχέσεων $(1),(2)$ έχουμε

$g(x_1)>g(x_2)\Leftrightarrow g\searrow\mathbb{R}$ οπότε g 1−1 άρα αντιστρέφεται.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{-x}-x-1\right)=+\infty+\infty-1=+\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x}-x-1\right)=0-\infty-1=-\infty$.

Η g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε έχει σύνολο τιμών το $g(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=\mathbb{R}$, άρα $D_{g^{-1}}=\mathbb{R}$.

γ) Είναι $D_f\cap D_g=(0,+\infty)$. Η g έχει σύνολο τιμών στο $(0,+\infty)$:

$g((0,+\infty))=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}g(x),\lim\limits_{x\to0^+}g(x)\right)=(-\infty,0)$, άρα $g(x)<0$ για κάθε $x>0$.

Όμως $f(x)>0$ για κάθε $x>0$, οπότε $f(x)>g(x)$. Άρα οι γραφικές παραστάσεις των f, g δεν έχουν κοινά σημεία.

δ) Στο διάστημα $(-\infty,0)$ η g έχει σύνολο τιμών

$g((-\infty,0))=\left(\lim\limits_{x\to0^-}g(x),\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)\right)=(0,+\infty)$. Επίσης $\alpha>0\Leftrightarrow-\alpha<0$ οπότε

$g(-\alpha)>0$. Άρα $g(-\alpha)\in f(A)$, οπότε υπάρχει $x_1\in A=(0,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1)=g(-\alpha)$. Το x_1 είναι μοναδικό αφού η f είναι 1-1.

73.α) Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$ έχει σύνολο τιμών το $f((0,+\infty))=\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x),\lim\limits_{x\to0^+} f(x)\right)$. Όμως το σύνολο τιμών της f είναι το $(0,+\infty)$, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$.

α1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)}\underset{\substack{x\to+\infty\Rightarrow\\ u\to0^+}}{\overset{f(x)=u>0}{=}}\lim\limits_{u\to0^+}\dfrac{1}{u}=+\infty$.

α2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\dfrac{1}{x}\right)=0\cdot0=0$.

α3) Επειδή η f ορίζεται στο $(0,+\infty)$ είναι $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(f(x)\dfrac{1}{\eta\mu x}\right)=+\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{\eta\mu x}\underset{\substack{x\to0^+\Rightarrow\\ u\to0^+}}{\overset{\eta\mu x=u>0}{=}}\lim\limits_{u\to0^+}\dfrac{1}{u}=+\infty$.

α4) Είναι $|f(x)\eta\mu x|=f(x)|\eta\mu x|\le f(x)\Leftrightarrow -f(x)\le f(x)\eta\mu x\le f(x)$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0=\lim\limits_{x\to+\infty}(-f(x))$, από το κριτήριο παρεμβολής είναι

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)\eta\mu x)=0$.

α5) $\lim\limits_{x\to0}\left(\sqrt{f^2(x)+1}-f(x)\right)\underset{\substack{x\to0\Rightarrow\\ u\to+\infty}}{\overset{f(x)=u}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\left(\sqrt{u^2+1}-u\right)=$

$$\lim_{u\to+\infty}\frac{\cancel{u^2}+1-\cancel{u^2}}{\sqrt{u^2\left(1+\dfrac{1}{u^2}\right)}+u}=\lim_{u\to+\infty}\frac{1}{u\sqrt{1+\dfrac{1}{u^2}}+u}=\lim_{u\to+\infty}\left(\frac{1}{u}\,\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{u^2}}+1}\right)=0.$$

α6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{f\left(\dfrac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\dfrac{1}{f\left(\dfrac{1}{x}\right)}\right)=0\cdot0=0$ γιατί

$\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\dfrac{1}{x}\right)\underset{\substack{x\to+\infty\Rightarrow\\ u\to0}}{\overset{\frac{1}{x}=u}{=}}\lim\limits_{u\to0} f(u)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f\left(\dfrac{1}{x}\right)}\underset{\substack{x\to+\infty\Rightarrow\\ t\to+\infty}}{\overset{f\left(\frac{1}{x}\right)=t}{=}}\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1}{t}=0$.

β) Έστω $g(x)=f(x)-\ln x$, $x>0$. Για κάθε $0<x_1<x_2$ είναι

$f(x_1)>f(x_2)$ (1) και $\ln x_1<\ln x_2 \Leftrightarrow -\ln x_1>-\ln x_2$ (2)

Με πρόσθεση των σχέσεων (1) και (2) έχουμε $g(x_1)>g(x_2) \Leftrightarrow g\searrow(0,+\infty)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(f(x)-\ln x\right)=+\infty-(-\infty)=+\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\ln x\right)=0-\infty=-\infty$, οπότε η g έχει σύνολο τιμών το

$g\left((-\infty,+\infty)\right)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty} g(x),\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$. Το 0 βρίσκεται στο σύνολο τιμών της g, οπότε υπάρχει $x_0>0$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=0$. Το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $g(x)=0$ αφού η g είναι γνησίως φθίνουσα.

γ) Για κάθε $x>x_0 \overset{g\searrow}{\Leftrightarrow} g(x)<g(x_0)=0$, οπότε όταν $x\to x_0^+$ είναι

$g(x)=f(x)-\ln x<0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{x}{f(x)-\ln x}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\left(x\dfrac{1}{f(x)-\ln x}\right)=x_0(-\infty)=-\infty$ αφού

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{1}{f(x)-\ln x}\underset{\substack{x\to x_0^+\Rightarrow\\ u\to 0^-}}{\overset{f(x)-\ln x=u}{=}}\lim_{u\to 0^-}\frac{1}{u}=-\infty.$$

δ) Έστω $h(x)=1-x-e^x$, $x\ge 0$. Για κάθε $0\le x_1<x_2$ είναι

$-x_1>-x_2 \Leftrightarrow 1-x_1>1-x_2$ (3) και $e^{x_1}<e^{x_2} \Leftrightarrow -e^{x_1}>-e^{x_2}$ (4)

Με πρόσθεση των σχέσεων (3) και (4) έχουμε $h(x_1)>h(x_2) \Leftrightarrow h\searrow[0,+\infty)$.

Για $x>0$ είναι $h(x)<h(0)=0 \Leftrightarrow 1-x-e^x<0$.

Όμως για κάθε $x>0$ είναι $f(x)>0$, οπότε $f(x)>0>1-x-e^x$.

ε) Γνωρίζουμε ότι $|\eta\mu x|\le|x|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και το ίσον ισχύει μόνο για $x=0$.

Επειδή $f(x)>0$, για κάθε $x>0$ είναι

$|\eta\mu f(x)|<f(x) \Leftrightarrow -f(x)<\eta\mu f(x)<f(x) \Rightarrow f(x)-\eta\mu f(x)>0$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)-\eta\mu f(x)}\underset{\substack{x\to+\infty\Rightarrow\\ u\to 0^+}}{\overset{f(x)-\eta\mu f(x)=u}{=}}\lim_{u\to 0^+}\frac{1}{u}=+\infty.$$

στ) 1ος τρόπος: Επειδή f γνησίως φθίνουσα, είναι $f(1)>\dfrac{f(1)+f(2)}{2}>f(2)$.

Η f είναι συνεχής στο $[1,2]$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών οπότε υπάρχει $\rho\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $f(\rho)=\dfrac{f(1)+f(2)}{2}$.

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα, το ρ είναι μοναδικό.

2ος τρόπος: $f(\rho)=\dfrac{f(1)+f(2)}{2} \Leftrightarrow 2f(\rho)-f(1)-f(2)=0$.

Έστω $\varphi(x)=2f(x)-f(1)-f(2),\ x\in[1,2]$.

Η φ είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Είναι

$\varphi(1)=2f(1)-f(1)-f(2)=f(1)-f(2),\ \varphi(2)=2f(2)-f(1)-f(2)=f(2)-f(1)$

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα, είναι $f(1)>f(2)$, οπότε $\varphi(1)>0,\ \varphi(2)<0$, άρα $\varphi(1)\varphi(2)<0$. Άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $\rho\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $\varphi(\rho)=0 \Leftrightarrow f(\rho)=\dfrac{f(1)+f(2)}{2}$. Το ρ είναι μοναδικό αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα.

74.α) Έστω $\varphi(x)=f(x)-\ln x,\ x>0$. Είναι $\varphi(x)\neq 0$ και η φ είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, οπότε η φ διατηρεί σταθερό πρόσημο. Έστω ότι $\varphi(x)<0 \Leftrightarrow f(x)<\ln x$ για κάθε $x>0$. Η f είναι συνεχής στο $x=0$ οπότε $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$. Άρα $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\le \lim\limits_{x\to 0^+}\ln x \Leftrightarrow f(0)\le -\infty$ που είναι άτοπο, άρα $f(x)>\ln x$ για κάθε $x>0$.

β) Η C_f διέρχεται από το Μ οπότε $x_0\ge 0$, $f(x_0)=0$.

Αν $x_0>0$, είναι $f(x_0)>\ln x_0 \Leftrightarrow \ln x_0<0 \Leftrightarrow x_0<1$, άρα $0\le x_0<1$.

γ) Είναι $\dfrac{f(x)}{x-e}+\dfrac{f(e-x)}{x-1}=0 \Leftrightarrow (x-1)f(x)+(x-e)f(e-x)=0$.

Έστω $g(x)=(x-1)f(x)+(x-e)f(e-x),\ x\in[1,e]$. Η g είναι συνεχής στο $[1,e]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $g(1)=(1-1)f(1)+(1-e)f(e-1)=(1-e)f(e-1)$.

Από τη σχέση $f(x)>\ln x$ για $x=e-1$ προκύπτει ότι

$f(e-1)>\ln(e-1)>\ln 1=0$, οπότε $g(1)<0$.

Επίσης $g(e)=(e-1)f(e)+(e-e)f(e-e)=(e-1)f(e)>0$, αφού $f(e)>\ln e=1$.

Άρα $g(1)g(e)<0$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε, η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,e)$.

δ) Για κάθε $0\le x<x_0 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x)<f(x_0)=0$ και για $x>x_0 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x)>f(x_0)=0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{\ln\left(f(x)-f(x_0)\right)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\ln\left(f(x)-f(x_0)\right)\dfrac{1}{x-x_0}=-\infty(+\infty)=-\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x\to x_0^+}\ln\left(f(x)-f(x_0)\right)\underset{\substack{x\to x_0^+\Rightarrow\\ u\to 0^+}}{\overset{f(x)-f(x_0)=u}{=}}\lim\limits_{u\to 0^+}\ln u=-\infty$ και

$\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{1}{x-x_0}\underset{\substack{x\to x_0^+\Rightarrow\\ u\to 0^+}}{\overset{x-x_0=u}{=}}\lim\limits_{u\to 0^+}\dfrac{1}{u}=+\infty$.

ε) Η f είναι γνησίως αύξουσα οπότε είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται.
Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, για κάθε $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ είναι $f(x_1)<f(x_2)$. Πρέπει να αποδείξουμε ότι Έστω ότι υπάρχουν $y_1,y_2\in f(A)$ για τα οποία ισχύουν $f^{-1}(y_1)\ge f^{-1}(y_2)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}$
$f\left(f^{-1}(y_1)\right)\ge f\left(f^{-1}(y_2)\right)\Leftrightarrow y_1\ge y_2$ που είναι άτοπο. Άρα για κάθε $y_1,y_2\in f(A)$ με $y_1<y_2$ ισχύει $f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2)$ οπότε η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.

στ) Είναι $f(x)>\ln x\overset{f^{-1}\nearrow}{\Leftrightarrow}f^{-1}\left(f(x)\right)>f^{-1}(\ln x)\Leftrightarrow f^{-1}(\ln x)<x$ (1). Θέτουμε $\ln x=u\Leftrightarrow x=e^u$ οπότε έχουμε από τη σχέση (1) $f^{-1}(u)<e^u$ για κάθε $u\in\mathbb{R}$, άρα $f^{-1}(x)<e^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

75.α) Είναι $e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x\Leftrightarrow e^{f(x)}-\dfrac{1}{e^{f(x)}}=2x\Leftrightarrow\left(e^{f(x)}\right)^2-1=2xe^{f(x)}\Leftrightarrow$
$\left(e^{f(x)}\right)^2-2xe^{f(x)}+x^2=x^2+1\Leftrightarrow\left(e^{f(x)}-x\right)^2=x^2+1$ (1)
Είναι $x^2+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε $\varphi(x)=e^{f(x)}-x\ne 0$, η φ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως σύνθεση και άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Όμως $\varphi(0)=e^{f(0)}-0=1>0$ άρα $\varphi(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Επομένως από τη σχέση (1) έχουμε: $e^{f(x)}-x=\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow e^{f(x)}=\sqrt{x^2+1}+x$ (2)
Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, είναι
$x^2+1>x^2\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}\Leftrightarrow|x|<\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow-\sqrt{x^2+1}<x<\sqrt{x^2+1}\Rightarrow$
$0<\sqrt{x^2+1}+x$, οπότε η (2) γίνεται $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$.

β) Αρχικά παρατηρούμε ότι για κάθε $x\in D_f=\mathbb{R}$ και $-x\in D_f$.
Αρκεί $f(-x)=-f(x)\Leftrightarrow\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=-\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\Leftrightarrow$
$\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)+\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=0\Leftrightarrow\ln\left[\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\right]=0\Leftrightarrow$
$\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-x^2=1\Leftrightarrow x^2+1-x^2=1\Leftrightarrow 1=1$ ισχύει.

γ) Έστω $h(x)=\sqrt{x^2+1}+x$, $x\in\mathbb{R}$. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι:

$$h(x_1)-h(x_2)=\sqrt{x_1^2+1}+x_1-\left(\sqrt{x_2^2+1}+x_2\right)=\sqrt{x_1^2+1}+x_1-\sqrt{x_2^2+1}-x_2=$$

$$\frac{\left(\sqrt{x_1^2+1}-\sqrt{x_2^2+1}\right)\left(\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}\right)}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}+(x_1-x_2)=$$

$$\frac{x_1^2+\cancel{1}-x_2^2-\cancel{1}}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}+(x_1-x_2)=\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}+(x_1-x_2)=$$

$$(x_1-x_2)\left(\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}+1\right)=(x_1-x_2)\frac{x_1+x_2+\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}=$$

$(x_1-x_2)\dfrac{h(x_1)+h(x_2)}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}$. Είναι $h(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα

$h(x_1)>0$ και $h(x_2)>0$. Όμως $x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1-x_2<0$, $\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}>0$,
οπότε $h(x_1)-h(x_2)<0 \Leftrightarrow h(x_1)<h(x_2) \Leftrightarrow \ln h(x_1)<\ln h(x_2) \Leftrightarrow$
$f(x_1)<f(x_2) \Leftrightarrow f\nearrow\mathbb{R}$.

δ) Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}-x}=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-\dfrac{1}{x}\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}\right]=0$, οπότε

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\ln h(x)\underset{\substack{x\to-\infty\Rightarrow\\ u\to0^+}}{\overset{h(x)=u}{=}}\lim_{u\to0^+}\ln u=-\infty.$$

Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1\right)\right]=+\infty$, οπότε

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln h(x)\underset{\substack{x\to+\infty\Rightarrow\\ u\to+\infty}}{\overset{h(x)=u}{=}}\lim_{u\to+\infty}\ln u=+\infty.$$

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

ε) Η f είναι γνησίως αύξουσα οπότε είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται. Θέτουμε
$f(x)=y \Leftrightarrow \ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=y \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}+x=e^y \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}=e^y-x \Leftrightarrow$

$\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2=\left(e^y-x\right)^2 \Leftrightarrow \cancel{x^2}+1=e^{2y}-2xe^y+\cancel{x^2} \Leftrightarrow 2xe^y=e^{2y}-1 \Leftrightarrow$

$x=\dfrac{e^{2y}-1}{2e^y}$, άρα $f^{-1}(y)=\dfrac{e^{2y}-1}{2e^y}$, $y\in\mathbb{R}$, οπότε $f^{-1}(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{2e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

στ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(2x)-f(x)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)-\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\right]=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{\sqrt{4x^2+1}+2x}{\sqrt{x^2+1}+x}$. Θέτουμε $\dfrac{\sqrt{4x^2+1}+2x}{\sqrt{x^2+1}+x}=u$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+1}+2x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x}\left(\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}+2\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=\dfrac{2+2}{1+1}=2$, οπότε

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(2x)-f(x)\right)=\lim\limits_{u\to2}\ln u=\ln 2$.

ζ) $\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{9x^2+1}+3x\right)<\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)\left(\sqrt{16x^2+1}+4x\right)\Leftrightarrow$

$\ln\left[\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{9x^2+1}+3x\right)\right]<\ln\left[\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)\left(\sqrt{16x^2+1}+4x\right)\right]\Leftrightarrow$

$\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)+\ln\left(\sqrt{9x^2+1}+3x\right)<\ln\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)+\ln\left(\sqrt{16x^2+1}+4x\right)\Leftrightarrow$

$f(x)+f(3x)<f(2x)+f(4x)$.

Αν $x\le0$ είναι $x\ge2x\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x)\ge f(2x)$, $3x\ge4x\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(3x)\ge f(4x)$ και με πρόσθεση κατά μέλη: $f(x)+f(3x)\ge f(2x)+f(4x)$ άτοπο.

Αν $x>0$ είναι $x<2x\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x)<f(2x)$, $3x<4x\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(3x)<f(4x)$ και με πρόσθεση κατά μέλη: $f(x)+f(3x)<f(2x)+f(4x)$, άρα

$f(x)+f(3x)<f(2x)+f(4x)\Leftrightarrow x>0$.

76.α) Για $0<x<3: f(x)=\lim\limits_{\nu\to+\infty}\dfrac{3^\nu\left(x^3+\alpha x^2+3x+1\right)+x^\nu\left(2x^3+6x^2+6x+2\right)}{2x^\nu+3^\nu}=$

$$=\lim_{\nu\to+\infty}\frac{\cancel{3^\nu}\left[x^3+\alpha x^2+3x+1+\left(\frac{x}{3}\right)^\nu\left(2x^3+6x^2+6x+2\right)\right]}{\cancel{3^\nu}\left[2\left(\frac{x}{3}\right)^\nu+1\right]}=x^3+\alpha x^2+3x+1$$

γιατί $0<\dfrac{x}{3}<1$ άρα $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\left(\dfrac{x}{3}\right)^\nu=0$.

Για $x>3: f(x)=\lim\limits_{\nu\to+\infty}\dfrac{3^{\nu}\left(x^3+\alpha x^2+3x+1\right)+x^{\nu}\left(2x^3+6x^2+6x+2\right)}{2x^{\nu}+3^{\nu}}=$

$$=\lim_{\nu\to+\infty}\frac{\cancel{x^{\nu}}\left[\left(\dfrac{3}{x}\right)^{\nu}\left(x^3+\alpha x^2+3x+1\right)+2x^3+6x^2+6x+2\right]}{\cancel{x^{\nu}}\left[2+\left(\dfrac{3}{x}\right)^{\nu}\right]}=\frac{2x^3+6x^2+6x+2}{2}=$$

$=x^3+3x^2+3x+1=(x+1)^3$ γιατί $0<\dfrac{3}{x}<1$ άρα $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\left(\dfrac{3}{x}\right)^{\nu}=0$.

Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ άρα $\lim\limits_{x\to3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=f(3)\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to3^-}\left(x^3+\alpha x^2+3x+1\right)=\lim\limits_{x\to3^+}(x+1)^3=f(3)\Leftrightarrow 9\alpha+37=64=f(3)$.

Άρα $9\alpha+37=64\Leftrightarrow 9\alpha=27\Leftrightarrow \alpha=3$.

Επομένως $f(x)=\begin{cases}x^3+3x^2+3x+1, & 0<x<3\\ 64, & x=3\\ (x+1)^3, & x>3\end{cases}\Leftrightarrow f(x)=(x+1)^3,\ x>0$.

β) Θα δείξουμε αρχικά ότι η f είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται.

Για κάθε $x_1,x_2>0$ με $x_1<x_2\Leftrightarrow x_1+1<x_2+1\Leftrightarrow$

$(x_1+1)^3<(x_2+1)^3\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$ άρα $f\nearrow(0,+\infty)$ οπότε η f είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται. Έστω $f(x)=y\Leftrightarrow(x+1)^3=y\overset{y\ge0}{\Leftrightarrow}x+1=\sqrt[3]{y}\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{y}-1$.

Πρέπει $x>0\Leftrightarrow\sqrt[3]{y}>1\Leftrightarrow y>1$ άρα $x=\sqrt[3]{y}-1\Leftrightarrow f^{-1}(y)=\sqrt[3]{y}-1$, $y>1$, επομένως $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}-1$, $x>1$.

γ) Είναι $\dfrac{f(x)}{x-2}+\dfrac{x}{x-1}=0\Leftrightarrow\dfrac{(x+1)^3}{x-2}+\dfrac{x}{x-1}=0$.

Πρέπει: $\begin{cases}x>0\\ x\neq1\\ x\neq2\end{cases}\Leftrightarrow x\in(0,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$.

$$\frac{(x+1)^3}{x-2}+\frac{x}{x-1}=0\Leftrightarrow\frac{(x-1)(x+1)^3+x(x-2)}{(x-1)(x-2)}=0\quad(1)$$

Έστω η συνάρτηση $g(x)=(x-1)(x+1)^3+x(x-2)$, $x>0$.

- Η g είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως πολυωνυμική.
- $g(1)=-1<0$, $g(2)=27>0$ άρα $g(1)g(2)<0$.

Άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1,2)\subseteq(0,2)$.

Επομένως η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,2)$ διαφορετική του 1, άρα η εξίσωση (1) έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,2)$.

δ) $L=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|f(x)-\beta|-|f(x)+\beta|}{x^2}=$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\left|(x+1)^3-\beta\right|-\left|(x+1)^3+\beta\right|}{x^2}$.

β	$-\infty$ $\quad -1$	1	$+\infty$
$1-\beta$	+	+	-
$1+\beta$	-	+	+

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[(x+1)^3-\beta\right]=1-\beta$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[(x+1)^3+\beta\right]=1+\beta$.

Αν $\beta<-1$: $L=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(x+1)^3-\cancel{\beta}+(x+1)^3+\cancel{\beta}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2(x+1)^3}{x^2}=+\infty$. Αν $\beta=-1$:

$$L=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left|(x+1)^3+1\right|-\left|(x+1)^3-1\right|}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cancel{(x+1)^3}+1-\cancel{(x+1)^3}+1}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2}{x^2}=+\infty$$

γιατί $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[(x+1)^3+1\right]=2>0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[(x+1)^3-1\right]=0$.

Όμως για $x>0\Leftrightarrow x+1>1\Leftrightarrow(x+1)^3>1\Leftrightarrow(x+1)^3-1>0$.

Αν $-1<\beta<1$:

$$L=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cancel{(x+1)^3}-\beta-\cancel{(x+1)^3}-\beta}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-2\beta}{x^2}=\begin{cases}+\infty\ , \text{ αν } -1<\beta<0\\ -\infty\ . \text{ αν } 0<\beta<1\end{cases}.$$

Στην περίπτωση που $\beta=0$ τότε $L=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cancel{(x+1)^3}-\beta-\cancel{(x+1)^3}-\beta}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{0}{x^2}=0$

Αν $\beta=1$:

$$L=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left|(x+1)^3-1\right|-\left|(x+1)^3+1\right|}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cancel{(x+1)^3}-1-\cancel{(x+1)^3}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-2}{x^2}=-\infty$$

γιατί $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[(x+1)^3+1\right]=2>0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[(x+1)^3-1\right]=0$.

Όμως για $x>0\Leftrightarrow x+1>1\Leftrightarrow(x+1)^3>1\Leftrightarrow(x+1)^3-1>0$.

- Αν $\beta>1$: $L=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-(x+1)^3+\cancel{\beta}-(x+1)^3-\cancel{\beta}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-2(x+1)^3}{x^2}=-\infty$.

15 Επαναληπτικά διαγωνίσματα στις συναρτήσεις και τα όριά τους

Θέμα Α

Α1. 1. Λ **2.** Σ **3.** Λ **4.** Σ **5.** Λ **6.** Σ **7.** Λ **8.** Λ **9.** Λ **10.** Λ

Α2. α) Ψευδής.

β) Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=x^2,\ x\neq 0$ και $g(x)=-x^2,\ x\neq 0$.

Είναι $f(x)>g(x)$ για κάθε $x\neq 0$, όμως $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0=\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

Θέμα Β

Β1. Για το πεδίο ορισμού της $f\circ f$ έχουμε:

$$\begin{cases} x\in A_f \\ f(x)\in A_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 2 \\ \dfrac{\lambda x}{x-2}\neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 2 \\ \lambda x\neq 2x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 2 \\ (\lambda-2)x\neq -4 \end{cases} \quad (1)$$

- Αν $\lambda\neq 2$, τότε $\begin{cases} x\neq 2 \\ x\neq \dfrac{-4}{\lambda-2} \end{cases}$. Για να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}-\{2\}$ πρέπει

$$-\frac{4}{\lambda-2}=2 \Leftrightarrow -4=2\lambda-4 \Leftrightarrow 2\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=0 \text{ άτοπο.}$$

- Αν $\lambda=2$, τότε από την (1) έχουμε: $\begin{cases} x\neq 2 \\ 0\neq -4 \quad \text{ισχύει} \end{cases} \Leftrightarrow x\neq 2$.

Έχει πεδίο ορισμού το ζητούμενο $A_{f\circ f}=\mathbb{R}-\{2\}$.

Για λ=2: $f(x)=\dfrac{2x}{x-2}$ οπότε

$$(f\circ f)(x)=f(f(x))=\frac{2\dfrac{2x}{x-2}}{\dfrac{2x}{x-2}-2}=\frac{\dfrac{4x}{\cancel{x-2}}}{\dfrac{\cancel{2x}-\cancel{2x}+4}{\cancel{x-2}}}=\frac{4x}{4}=x.$$

Β2. $f(x)=\dfrac{2x}{x-2}=\dfrac{2x-4+4}{x-2}=2+\dfrac{4}{x-2}$.

Για κάθε $x_1<x_2<2$ τότε $x_1-2<x_2-2<0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x_1-2}>\dfrac{1}{x_2-2} \Leftrightarrow$

$$\frac{4}{x_1-2}>\frac{4}{x_2-2} \Leftrightarrow 2+\frac{4}{x_1-2}>2+\frac{4}{x_2-2} \Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2) \Rightarrow f\searrow(-\infty,2)$$

Για κάθε $2<x_1<x_2$ τότε $0<x_1-2<x_2-2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x_1-2}>\dfrac{1}{x_2-2} \Leftrightarrow$

$\dfrac{4}{x_1-2} > \dfrac{4}{x_2-2} \Leftrightarrow 2+\dfrac{4}{x_1-2} > 2+\dfrac{4}{x_2-2} \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f \searrow (2,+\infty)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{x-2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2\cancel{x}}{\cancel{x}} = 2$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{x-2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\cancel{x}}{\cancel{x}} = 2$. $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to2^-} \left(2x\dfrac{1}{x-2}\right) = -\infty$ και

$\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to2^+} \left(2x\dfrac{1}{x-2}\right) = +\infty$. Στο διάστημα $\Delta_1 = (-\infty,2)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, άρα $f(\Delta_1) = \left(\lim\limits_{x\to2^-} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right) = (-\infty,2)$.

Στο διάστημα $\Delta_2 = (2,+\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, άρα

$f(\Delta_2) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to2^+} f(x)\right) = (2,+\infty)$.

Επομένως $f(A) = (-\infty,2)\cup(2,+\infty) = \mathbb{R}-\{2\}$.

Β3. Για κάθε $x_1, x_2 \neq 2$ με $f(x_1) = f(x_2)$ ισχύει $\dfrac{2x_1}{x_1-2} = \dfrac{2x_2}{x_2-2} \Leftrightarrow$

$\cancel{2x_1x_2} - 4x_1 = \cancel{2x_1x_2} - 4x_2 \Leftrightarrow -4x_1 = -4x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ άρα η f είναι 1–1 οπότε αντιστρέφεται. Θέτουμε:

$f(x) = y \Leftrightarrow \dfrac{2x}{x-2} = y \Leftrightarrow 2x = xy-2y \Leftrightarrow 2y = xy-2x \Leftrightarrow x(y-2) = 2y \overset{y\neq2}{\Leftrightarrow}$

$x = \dfrac{2y}{y-2}$ οπότε $f^{-1}(y) = \dfrac{2y}{y-2}$, $y \neq 2$, άρα $f^{-1}(x) = \dfrac{2x}{x-2} = f(x)$, $x \neq 2$.

Β4. Επειδή $(f\circ f)(x) = x$ για κάθε $x \neq 2$, είναι $f(f(x+1)) = x+1$ με $x+1 \neq 2 \Leftrightarrow x \neq 1$.

$f(f(x+1)) + f(x+1) = x + \dfrac{2e^{-x}}{e^{-x}-2} + 1 \Leftrightarrow x+1+f(x+1) = x + f(e^{-x}) + 1 \Leftrightarrow$

$f(x+1) = f(e^{-x}) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x+1 = e^{-x} \Leftrightarrow e^{-x} - x - 1 = 0$ (3) με

$e^{-x} \neq 2 \Leftrightarrow -x \neq \ln2 \Leftrightarrow x \neq -\ln2$. Έστω $h(x) = e^{-x} - x - 1,\ x\in\mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι $-x_1 > -x_2$ (4) και $e^{-x_1} > e^{-x_2}$ (5)

Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (4) και (5) έχουμε:

$e^{-x_1} - x_1 > e^{-x_2} - x_2 \Leftrightarrow e^{-x_1} - x_1 - 1 > e^{-x_2} - x_2 - 1 \Leftrightarrow h(x_1) > h(x_2)$ άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα οπότε είναι 1-1.

Από τη σχέση (3) έχουμε $h(x) = h(0) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x = 0$ δεκτή.

Θέμα Γ

Γ1. Για κάθε $x \neq 2$ είναι $f(x) = \dfrac{x^2 + \alpha x + \beta}{x-2} \Leftrightarrow f(x)(x-2) = x^2 + \alpha x + \beta$

άρα $\lim\limits_{x\to 2}\left[f(x)(x-2)\right] = \lim\limits_{x\to 2}\left(x^2 + \alpha x + \beta\right) \Leftrightarrow 0 = 4 + 2\alpha + \beta \Leftrightarrow \beta = -4 - 2\alpha$ (1)

Επομένως $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 + \alpha x + \beta}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 + \alpha x - 4 - 2\alpha}{x-2} =$

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\cancel{(x-2)}(x+2) + \alpha\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = 4 + \alpha$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 7$ είναι $4 + \alpha = 7 \Leftrightarrow \alpha = 3$.

Από τη σχέση (1) έχουμε $\beta = -10$.

Γ2. Για $\alpha = 3$ και $\beta = -10$ είναι $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 10}{x-2} = \dfrac{\cancel{(x-2)}(x+5)}{\cancel{x-2}} \Leftrightarrow$

$f(x) = x + 5, x \neq 2$. Έστω

$h(x) = x^4 + x^3 + 6x + 28 - f^2(x) = x^4 + x^3 + 6x + 28 - (x+5)^2 \Leftrightarrow$

$h(x) = x^4 + x^3 + 6x + 28 - x^2 - 10x - 25 \Leftrightarrow h(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 4x + 3 \Leftrightarrow$

$h(x) = (x-1)\left(x^3 + 2x^2 + x - 3\right)$.

Έστω $\varphi(x) = x^3 + 2x^2 + x - 3,\ x \in [0,1]$.

Είναι $\varphi(0) = -3, \varphi(1) = 1$ οπότε $\varphi(0)\varphi(1) < 0$.

Η φ είναι συνεχής ως πολυωνυμική στο $[0,1]$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $\varphi(x_0) = 0 \Leftrightarrow$

$x_0^3 + 2x_0^2 + x_0 - 3 = 0 \Leftrightarrow (x_0 - 1)\left(x_0^3 + 2x_0^2 + x_0 - 3\right) = 0 \Leftrightarrow h(x_0) = 0 \Leftrightarrow$

$f^2(x_0) = x_0^4 + x_0^3 + 6x_0 + 28$.

Γ3 i. Είναι $f(g(x)) = \sqrt{x^2+1} - x + 5 \Leftrightarrow g(x) + 5 = \sqrt{x^2+1} - x + 5 \Leftrightarrow$

$g(x) = \sqrt{x^2+1} - x$.

ii. Για κάθε x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$f(x_1) - f(x_2) = \sqrt{x_1^2+1} - x_1 - \sqrt{x_2^2+1} + x_2 = \dfrac{x_1^2 + \cancel{1} - x_2^2 - \cancel{1}}{\sqrt{x_1^2+1} + \sqrt{x_1^2+1}} - (x_1 - x_2) \Leftrightarrow$

$f(x_1) - f(x_2) = \dfrac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{\sqrt{x_1^2+1} + \sqrt{x_1^2+1}} - (x_1 - x_2) =$

$$\left(x_1-x_2\right)\left[\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}-1\right]=\left(x_1-x_2\right)\left[\frac{x_1+x_2-\sqrt{x_1^2+1}-\sqrt{x_2^2+1}}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}\right].$$

Είναι $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x| \Leftrightarrow -\sqrt{x^2+1}<x<\sqrt{x^2+1}\Rightarrow x-\sqrt{x^2+1}<0$, άρα $x_1-\sqrt{x_1^2+1}<0$, $x_2-\sqrt{x_2^2+1}<0$. Όμως $x_1-x_2<0$ οπότε $f(x_1)-f(x_2)>0\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)\Rightarrow f\searrow\mathbb{R}$.

iii. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x+1)-g(x)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(x+1)^2+1}-x-1-\sqrt{x^2+1}+x\right)=$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{x^2+1}-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cancel{x^2}+2x+2-\cancel{x^2}-1}{\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2+1}}-1\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cancel{x}\left(2+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}-1\right)=\frac{2}{1+1}-1=0.$$

iv. $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{10}<x-3\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}-x<\sqrt{10}-3\Leftrightarrow g(x)<g(3)\overset{g\searrow}{\Leftrightarrow}x>3$.

Θέμα Δ

Δ1. Είναι $f^2(x)+x^2=e^{2x}+2xf(x)\Leftrightarrow f^2(x)-2xf(x)+x^2=e^{2x}\Leftrightarrow$ $\left(f(x)-x\right)^2=e^{2x}$ (1). Επειδή $e^{2x}\neq 0$ είναι $h(x)=f(x)-x\neq 0$.

Η h είναι συνεχής σαν πράξεις συνεχών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$, διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επειδή $h(0)=f(0)=1>0$ είναι $h(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η (1) γίνεται: $f(x)-x=e^x \Leftrightarrow f(x)=e^x+x$.

Δ2. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2\,(1)$ τότε $e^{x_1}<e^{x_2}$ (2). Με πρόσθεση των σχέσεων (1) και (2) έχουμε: $e^{x_1}+x_1<e^{x_2}+x_2 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$ άρα η f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε είναι 1-1. Είναι:

$$e^{e^{x_0}+x_0}+e^{x_0}+x_0=1\Leftrightarrow e^{f(x_0)}+f(x_0)=f(0)\Leftrightarrow f\left(f(x_0)\right)=f(0)\overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow}f(x_0)=0.$$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x+x\right)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x+x\right)=+\infty$.

Επομένως η f έχει σύνολο τιμών το $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=\mathbb{R}$.

Το $0\in f(A)$ άρα υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$.

Το x_0 είναι μοναδικό αφού η f είναι 1-1.

Δ3. $e^{g(x)} - e^{\eta\mu x} = \eta\mu x - g(x) \Leftrightarrow e^{g(x)} + g(x) = e^{\eta\mu x} + \eta\mu x \Leftrightarrow$

$f(g(x)) = f(\eta\mu x) \overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow} g(x) = \eta\mu x, x \in \mathbb{R}$.

Δ4. α) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-g(x)}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-\eta\mu x}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cancel{x}\left(1-\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)} = 1$

(για κάθε $x \in (0,+\infty)$ είναι $\left|\dfrac{\eta\mu x}{x}\right| = \dfrac{|\eta\mu x|}{|x|} \le \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{x} \le \dfrac{\eta\mu x}{x} \le \dfrac{1}{x}$ οπότε από το Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\eta\mu x}{x} = 0$.)

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2 g\left(\dfrac{1}{x}\right)\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2 \eta\mu \dfrac{1}{x}\right) \underset{u\to0^+}{\overset{\frac{1}{x}=u}{=}} \lim\limits_{u\to0^+}\left(\dfrac{1}{u^2}\eta\mu u\right) = \lim\limits_{u\to0^+}\left(\dfrac{1}{u}\dfrac{\eta\mu u}{u}\right) = +\infty$.

γ) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{2-x}{1-g(x)} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[(2-x)\dfrac{1}{1-\eta\mu x}\right] = +\infty$.

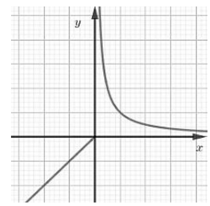
Είναι $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(2-x) = 2-\dfrac{\pi}{2} > 0$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{1-\eta\mu x} = +\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-\eta\mu x) = 0$ και $1-\eta\mu x > 0$ για κάθε $x \in \left(0,\dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$.

2ο Διαγώνισμα

Θέμα Α

Α1. α) Ψευδής.

β) Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x, & x \le 0 \\ \dfrac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$ είναι 1-1 και δεν είναι γνησίως μονότονη.



Α2. Έστω $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+\alpha_1 x+\alpha_0$. Σύμφωνα με τις ιδιότητες ορίων, ισχύει:

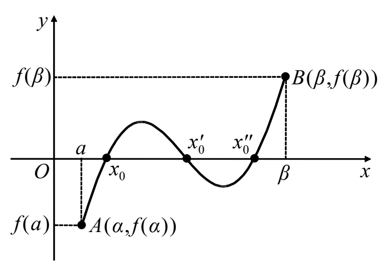
$$\lim_{x\to x_0}P(x)=\lim_{x\to x_0}\left(\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...\alpha_1 x+\alpha_0\right)=\lim_{x\to x_0}\left(\alpha_\nu x^\nu\right)+\lim_{x\to x_0}\left(\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}\right)+$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(\alpha_1 x\right)+\lim_{x\to x_0}\alpha_0=\alpha_\nu\lim_{x\to x_0}x^\nu+\alpha_{\nu-1}\lim_{x\to x_0}x^{\nu-1}+...+\alpha_1\lim_{x\to x_0}x+\alpha_0=$$

$$\alpha_\nu x_0^\nu+\alpha_{\nu-1}x_0^{\nu-1}+...+\alpha_1 x+\alpha_0=P(x_0).$$

Α3. Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$.
Αν: η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και, επιπλέον, ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$, τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$.

Γεωμετρική ερμηνεία
Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή τα σημεία $A(\alpha,f(\alpha))$ και $B(\beta,f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα $x'x$, η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα σε ένα τουλάχιστον σημείο.



Α4. α) Λ **β)** Σ **γ)** Λ **δ)** Λ **ε)** Λ

Θέμα Β

Β1. Είναι $f^6(x)+x^{18}=2\left[x^3 f(x)\right]^3 \Leftrightarrow f^6(x)+x^{18}=2x^9 f^3(x)\Leftrightarrow$

$f^6(x)-2x^9 f^3(x)+x^{18}=0\Leftrightarrow$

$\left(f^3(x)-x^9\right)^2=0\Leftrightarrow f^3(x)-x^9=0\Leftrightarrow f^3(x)=x^9$.

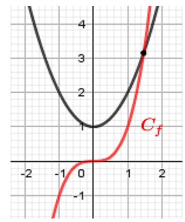
Αν $x\ge 0$ τότε $f(x)=\sqrt[3]{x^9}=x^3$ και αν $x<0$ τότε $f^3(x)=x^9 \Leftrightarrow$

$f(x)=-\sqrt[3]{-x^9}=-\sqrt[3]{(-x)^9}=-(-x)^3=x^3$. Άρα $f(x)=x^3$, $x\in\mathbb{R}$.

Β2 Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα είναι και 1-1 και αντιστρέφεται.
Αν $x \geq 0$ τότε $f(x) = y \Leftrightarrow x^3 = y \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y}$ και αν $x < 0$ τότε
$f(x) = y \Leftrightarrow x^3 = y \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{-y}$.

Άρα $f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt[3]{y}, & y \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-y}, & y < 0 \end{cases}$ οπότε $f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-x}, & x < 0 \end{cases}$.

Β3. Είναι $f(x) = x^2 + 1 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 1 = 0$. Έστω $h(x) = x^3 - x^2 - 1,\ x \geq 0$.
Είναι $h(0) = -1 < 0,\ h(2) = 3 > 0$ οπότε $h(0)h(2) < 0$.
Η h είναι συνεχής ως πολυωνυμική στο $[0,2]$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε η εξίσωση $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x^2 + 1$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,2)$. Σχεδιάζοντας τις γραφικές παραστάσεις των C_f, $y = x^2 + 1$ διαπιστώνουμε ότι έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο με τετμημένη στο $(1,2)$.



Β4. Η g είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ οπότε $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = g(0)$.

Για $x > 0$ είναι $xg(x) > x^3 \Leftrightarrow g(x) > \frac{x^3}{x} = x^2$ οπότε
$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) \geq \lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \Leftrightarrow g(0) \geq 0\ (1)$. Για $x < 0$ είναι
$xg(x) > x^3 \Leftrightarrow g(x) < \frac{x^3}{x} = x^2$ οπότε $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) \leq \lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \Leftrightarrow g(0) \leq 0\ (2)$.
Από (1),(2) $\Rightarrow g(0) = 0$.

Β5. $x^4 + 3x^2 - 4x + 1 = x^3 \Leftrightarrow x^4 - x^3 + 3x^2 - 4x + 1 = 0$.
Έστω $\varphi(x) = x^4 - x^3 + 3x^2 - 4x + 1 = (x-1)(x^3 + 3x - 1)$.
Έστω $t(x) = x^3 + 3x - 1,\ x \in [0,1]$. Είναι $t(0) = -1,\ t(1) = 3$ οπότε $t(0)t(1) < 0$. Η t είναι συνεχής στο $[0,1]$, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_1 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $t(x_1) = 0$. Τότε $\varphi(x_1) = (x-1)t(x_1) = 0$ άρα η εξίσωση $x^4 + 3x^2 - 4x + 1 = f(x)$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$.

Θέμα Γ

Γ1. Για $x > 0 : \left|\frac{\eta\mu x}{x}\right| = \frac{|\eta\mu x|}{|x|} \leq \frac{1}{x} \Leftrightarrow -\frac{1}{x} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{1}{x}$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)$ οπότε από το Κριτήριο Παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0.$

Γ2. α. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(1+\frac{\eta\mu x}{x}\right)\right]=+\infty$.

β. Είναι $|\eta\mu x|\le|x|$ και για $x>0$: $|\eta\mu x|<x\Leftrightarrow -x<\eta\mu x<x\Rightarrow \eta\mu x+x>0\Leftrightarrow$

$f(x)>0$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{1}{f(x)}\overset{\frac{1}{f(x)}=u}{\underset{u\to0^+}{=}}\lim\limits_{u\to0^+}\ln u=-\infty$.

γ. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\eta\mu\frac{1}{f(x)}\overset{\frac{1}{f(x)}=u}{\underset{u\to0^+}{=}}\lim\limits_{u\to0^+}\frac{\eta\mu u}{u}=1$.

Γ3. Είναι $g(x)=\frac{\alpha(f(x)-\eta\mu x)+\beta}{f(x)-\eta\mu x-\alpha}=\frac{\alpha x+\beta}{x-\alpha},\ x\neq\alpha$ **.**

Για να ορίζεται η $g\circ g$ πρέπει:

$\begin{cases}x\in D_g\\ g(x)\in D_g\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\alpha\\ \frac{\alpha x+\beta}{x-\alpha}\neq\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\alpha\\ \cancel{\alpha x}+\beta\neq\cancel{\alpha x}-\alpha^2 \text{ ισχύει}\end{cases}$, άρα $D_{g\circ g}=\mathbb{R}-\{\alpha\}$,

$$g(g(x))=\frac{\alpha g(x)+\beta}{g(x)-\alpha}=\frac{\alpha\frac{\alpha x+\beta}{x-\alpha}+\beta}{\frac{\alpha x+\beta}{x-\alpha}-\alpha}=\frac{\frac{\alpha^2x+\cancel{\alpha\beta}+\beta x-\cancel{\alpha\beta}}{\cancel{x-\alpha}}}{\frac{\cancel{\alpha x}+\beta-\cancel{\alpha x}+\alpha^2}{\cancel{x-\alpha}}}=\frac{\cancel{(\alpha^2+\beta)}x}{\cancel{\alpha^2+\beta}}=x .$$

Θέμα Δ

Δ1. Έστω $h(x)=e^x+x,\ x\in\mathbb{R}$.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι $h\nearrow\mathbb{R}$.

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ τότε $h(f(x_1))<h(f(x_2))\overset{h\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x_1)<f(x_2)$.

Οπότε $f\nearrow\mathbb{R}$.

Δ2. Θέτουμε $f(x)=y$ οπότε $e^y+y=x\Leftrightarrow f^{-1}(y)=e^y+y,\ y\in\mathbb{R}$ άρα $f^{-1}(x)=e^x+x,\ x\in\mathbb{R}$.

Δ3. Είναι $e^x>0\Leftrightarrow e^x+x>x\Leftrightarrow f^{-1}(x)>x$ οπότε η γραφική παράσταση της f^{-1} βρίσκεται πάνω από την $y=x$ άρα λόγω συμμετρίας η C_f είναι κάτω από την $y=x$.

Δ4. α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1\right)}\right]=0$

οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f^{-1}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\underset{u\to0}{\overset{\sqrt{x^2+1}-x=u}{=}}\lim\limits_{u\to0}f^{-1}(u)=1$.

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(f^{-1}(x)-x\right)-\ln\left(2^x+5^x\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{e^x}{2^x+5^x}=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{\left(\dfrac{e}{5}\right)^x}{\left(\dfrac{2}{5}\right)^x+1}\underset{x\to+\infty,\ u\to+\infty}{\overset{u=\frac{\left(\frac{e}{5}\right)^x}{\left(\frac{2}{5}\right)^x+1}}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\dfrac{e}{5}\right)^x}{\left(\dfrac{2}{5}\right)^x+1}=+\infty$.

Δ5. Είναι $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f^2(x)}{x-e^{f(x)}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f^2(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to1}f(x)\underset{x\to1,\ u\to0}{\overset{f(x)=u}{=}}\lim\limits_{u\to0}u=0$ αφού

$f^{-1}(0)=1\Leftrightarrow f(1)=0$.

3ο Διαγώνισμα

Θέμα Α

Α1. α) Λ **β)** Λ **γ)** Σ **δ)** Λ **ε)** Λ **στ)** Λ **ζ)** Λ **η)** Λ **θ)** Σ **ι)** Σ

Α2. Η C_1 είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, όμως $f(\alpha)>0$, $f(\beta)>0$ δηλαδή $f(\alpha)f(\beta)>0$ οπότε δεν ισχύει η δεύτερη υπόθεση του θεωρήματος Bolzano. Επειδή η C_1 δεν τέμνει τον x΄x, η εξίσωση $f(x)=0$ δεν έχει ρίζες στο (α,β).
Η C_2 δεν είναι συνεχής στο $x_0\in(\alpha,\beta)$, οπότε δεν είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Όμως $f(\alpha)f(\beta)<0$ αφού $f(\alpha)<0$ και $f(\beta)>0$ άρα ισχύει μόνο η πρώτη υπόθεση του θεωρήματος Bolzano. Η C_2 τέμνει τον x΄x σε ένα σημείο, οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια ρίζα στο (α,β).
Η C_3 δεν είναι συνεχής στα α και β, οπότε δεν είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Όμως $f(\alpha)f(\beta)<0$ αφού $f(\alpha)>0$ και $f(\beta)<0$ άρα ισχύει μόνο η δεύτερη υπόθεση του θεωρήματος Bolzano.
Η C_3 τέμνει τον x΄x σε ένα σημείο, οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια ρίζα στο (α,β). Η C_4 δεν είναι συνεχής στο β, οπότε δεν είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή $f(\alpha), f(\beta)<0$ είναι $f(\alpha)f(\beta)>0$ άρα δεν ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano. Η C_4 τέμνει τον x΄x σε ένα σημείο, οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια ρίζα στο (α,β).

Θέμα Β

Β1. Είναι $f^2(x)-x^6=0 \Leftrightarrow f^2(x)=x^6$.
Για κάθε $x\neq 0$ είναι $x^6\neq 0 \Leftrightarrow f^2(x)\neq 0 \Leftrightarrow f(x)\neq 0$.
Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$. Άρα $f^2(x)=x^6 \Leftrightarrow f(x)=\pm x^3$ σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$. Οι δυνατοί τύποι της f είναι:

$f(x)=x^3,\ x\in\mathbb{R}$ ή $f(x)=-x^3,\ x\in\mathbb{R}$ ή $f(x)=\begin{cases} x^3 & ,x\geq 0 \\ -x^3, & x<0 \end{cases}$ ή

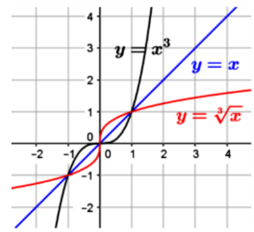
$f(x)=\begin{cases} -x^3 & ,x\geq 0 \\ x^3 & ,x<0 \end{cases}$.

Β2. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$, τότε: $x_1^3<x_2^3 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται. Θέτουμε

$f(x)=y \Leftrightarrow x^3=y$. Αν $y \geq 0$ τότε $x=\sqrt[3]{y}$, ενώ αν $y<0$ τότε $x=-\sqrt[3]{-y}$,

άρα $f^{-1}(y)=\begin{cases} \sqrt[3]{y}, & y \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-y}, & y<0 \end{cases}$, οπότε $f^{-1}(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{x}, & x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-x}, & x<0 \end{cases}$.

B3. Για $x \geq 0$:



$f(x)=f^{-1}(x) \Leftrightarrow x^3=\sqrt[3]{x} \Leftrightarrow x^9=x \Leftrightarrow x^9-x=0 \Leftrightarrow$

$x\left(x^8-1\right)=0 \Leftrightarrow (x=0)$ ή $(x=1)$ ή ($x=-1$ που απορρίπτεται). Για $x<0$:

$f(x)=f^{-1}(x) \Leftrightarrow x^3=-\sqrt[3]{-x} \Leftrightarrow x^9=x \Leftrightarrow$

$x^9-x=0 \Leftrightarrow x\left(x^8-1\right)=0 \Leftrightarrow$ ($x=0$ απορρίπτεται) ή

($x=1$ απορρίπτεται) ή ($x=-1$ δεκτή).

Για $x=-1,0,1$ έχουμε αντίστοιχα $f(-1)=f^{-1}(-1)=-1, f(0)=f^{-1}(0)=0$ και $f(1)=f^{-1}(1)=1$. Άρα οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} έχουν κοινά σημεία τα $(-1,-1),(0,0)$ και $(1,1)$.

B4. α) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f^{-1}(x)+\sqrt{x}-2}{\sqrt[3]{f(x)}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}-2}{x-1} \underset{x\to 1 \Rightarrow u\to 1}{\overset{\substack{\sqrt[6]{x}=u \Rightarrow x=u^6 \\ \sqrt[3]{x}=u^2 \\ \sqrt{x}=u^3}}{=}} \lim\limits_{u\to 1}\dfrac{u^2+u^3-2}{u^6-1}=$

$\lim\limits_{u\to 1}\dfrac{\cancel{(u-1)}\left(u^2+2u+2\right)}{\cancel{(u-1)}\left(u^5+u^4+u^3+u^2+u+1\right)}=\dfrac{5}{6}$.

β) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$, οπότε $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\,\etaμ\dfrac{1}{f(x)} \underset{\substack{x\to +\infty \Rightarrow \\ u\to 0}}{\overset{\frac{1}{f(x)}=u}{=}} \lim\limits_{u\to 0}\left(\dfrac{1}{u}\etaμu\right)=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\etaμu}{u}=1$

γ) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[e^{-f(x)}\etaμ f(x)\right] \underset{\substack{x\to +\infty \Rightarrow \\ u\to +\infty}}{\overset{f(x)=u}{=}} \lim\limits_{u\to +\infty} e^{-u}\etaμu$. Είναι

$\left|e^{-u}\etaμu\right|=e^{-u}\left|\etaμu\right| \leq e^{-u} \Leftrightarrow -e^{-u} \leq e^{-u}\etaμu \leq e^{-u}$. Όμως $\lim\limits_{u\to +\infty} e^{-u}=0$,

$\lim\limits_{u\to +\infty}\left(-e^{-u}\right)=0$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{u\to +\infty} e^{-u}\etaμu=0$.

B5. $f^2(\rho)+f(\rho)+2\rho^4=3\rho^5+7\rho^2-14\rho+8$.

Αντικαθιστώντας όπου ρ το x, η εξίσωση γίνεται:

$f^2(x)+f(x)+2x^4=3x^5+7x^2-14x+8 \Leftrightarrow$

$x^6+x^3+2x^4-3x^5-7x^2+14x-8=0 \Leftrightarrow x^6-3x^5+2x^4+x^3-7x^2+14x-8=0$

Έστω $g(x)=x^6-3x^5+2x^4+x^3-7x^2+14x-8,\ x\in[1,2]$.

Είναι $g(1)=1-3+2+1-7+14-8=0$,

$g(2)=64-96+32+8-28+28-8=0$. Με χρήση του σχήματος Horner ο τύπος της η g γίνεται: $g(x)=(x-1)(x-2)(x^4+x-4)$.

Έστω $h(x)=x^4+x-4,\ x\in[1,2]$. Είναι $h(1)=-2<0,\ h(2)=14>0$ οπότε $h(1)h(2)<0$.

Η h είναι συνεχής ως πολυωνυμική στο $[1,2]$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα υπάρχει $\rho\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $h(\rho)=0$.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η h είναι γνησίως αύξουσα, οπότε το ρ είναι η μοναδική της ρίζα άρα μοναδική ρίζα της εξίσωσης $g(x)=0$ στο $(1,2)$.

Θέμα Γ

Γ1. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με

$(g\circ f)(x_1)=(g\circ f)(x_2)\Leftrightarrow x_1^3+3x_1+\cancel{1}=x_2^3+3x_2+\cancel{1}\Leftrightarrow$

$x_1^3-x_2^3+3x_1-3x_2=0\Leftrightarrow(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)+3(x_1-x_2)=0\Leftrightarrow$

$(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2+3)=0\Leftrightarrow x_1=x_2$ ή $x_1^2+x_1x_2+x_2^2+3=0$ (1)

Η (1) είναι εξίσωση 2ου βαθμού ως προς x_1 με

$\Delta=x_2^2-4(x_2^2+3)=-3x_2^2-12<0$ οπότε είναι αδύνατη.

Άρα $x_1=x_2$ οπότε η $g\circ f$ είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

Γ2. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$ ισχύει $g(f(x_1))=g(f(x_2))\Leftrightarrow$

$(g\circ f)(x_1)=(g\circ f)(x_1)\overset{g\circ f\,1-1}{\Leftrightarrow}x_1=x_2$. Άρα η f είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

Γ3. $f^3(x^3)+3f(x^3)=f^3(x)+3f(x)\Leftrightarrow$

$f^3(x^3)+3f(x^3)+1=f^3(x)+3f(x)+1\Leftrightarrow g(f(x^3))=g(f(x))\Leftrightarrow$

$(g\circ f)(x^3)=(g\circ f)(x)\overset{g\circ f\,1-1}{\Leftrightarrow}x^3=x\Leftrightarrow x^3-x=0\Leftrightarrow$

$x(x^2-1)=0\Leftrightarrow(x=0)$ ή $(x^2=1\Leftrightarrow x=\pm1)$.

Γ4. Έστω $(g\circ f)^{-1}(x)=u$ τότε $x=(g\circ f)(u)$. Όταν $x\to5$ τότε $u\to1$.

(Είναι $(gof)(1)=5\Leftrightarrow(gof)^{-1}(5)=1\overset{gof\ \text{συνεχής}}{\Leftrightarrow}\lim\limits_{x\to5}(g\circ f)^{-1}(x)=1$). Τότε:

$$\lim_{x\to5}\frac{(g\circ f)^{-1}(x)-1}{x-5}=\lim_{u\to1}\frac{u-1}{(g\circ f)(u)-5}=\lim_{u\to1}\frac{u-1}{u^3+3u+1-5}=\lim_{u\to1}\frac{u-1}{u^3+3u-4}=$$

$$\lim_{u\to1}\frac{\cancel{u-1}}{\cancel{(u-1)}(u^2+u+4)}=\frac{1}{6}.$$

Γ5. $\left(g\circ f\circ f\right)(x)=e^{3x}+3e^{x}+1\Leftrightarrow\left(g\circ f\right)\left(f(x)\right)=\left(g\circ f\right)\left(e^{x}\right)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}f(x)=e^{x}$.

Θέτουμε $f(x)=y\Leftrightarrow e^{x}=y>0\Leftrightarrow x=\ln y$. Τότε: $g\left(f(x)\right)=x^{3}+3x+1\Leftrightarrow$

$g(y)=\ln^{3}y+3\ln y+1,\ y>0$, άρα $g(x)=\ln^{3}x+3\ln x+1,\ x>0$

Θέμα Δ

Δ1. Είναι $f(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{(\ln x+x)\left(\sqrt{y^{2}+2y+2}+y\right)}{\left(\sqrt{y^{2}+2y+2}-y\right)\left(\sqrt{y^{2}+2y+2}+y\right)}\Leftrightarrow$

$$f(x)=\lim_{y\to+\infty}\frac{(\ln x+x)\left(y\sqrt{1+\frac{2}{y}+\frac{2}{y^{2}}}+y\right)}{\cancel{y^{2}}+2y+2-\cancel{y^{2}}}=$$

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{(\ln x+x)\cancel{y}\left(\sqrt{1+\cancelto{0}{\frac{2}{y}}+\cancelto{0}{\frac{2}{y^{2}}}}+1\right)}{\cancel{y}\left(2+\cancelto{0}{\frac{2}{y}}\right)}=\frac{\cancel{2}(\ln x+x)}{\cancel{2}}=\ln x+x.$$

Δ2. Είναι $\ln x=1821-x\Leftrightarrow\ln x+x=1821\Leftrightarrow f(x)=1821$. Για κάθε $x_{1},x_{2}>0$ με $x_{1}<x_{2}$ (1), ισχύει $\ln x_{1}<\ln x_{2}$ (2)

Με πρόσθεση των σχέσεων (1) και (2) έχουμε:

$\ln x_{1}+x_{1}<\ln x_{2}+x_{2}\Leftrightarrow f(x_{1})<f(x_{2})$ άρα η f γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x+x)=+\infty+\infty=+\infty$ και

$\lim\limits_{x\to0^{+}}f(x)=\lim\limits_{x\to0^{+}}(\ln x+x)=-\infty+0=-\infty$. Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A=(0,+\infty)$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών:

$f(A)=\left(\lim\limits_{x\to0^{+}}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$.

Το $1821\in f(A)$ οπότε υπάρχει $x_{0}\in A$ τέτοιο, ώστε $f(x_{0})=1821$, το οποίο είναι μοναδικό αφού η f είναι γνησίως αύξουσα.

Δ3. $\alpha e^{\alpha}<\beta e^{\beta}\Leftrightarrow\dfrac{e^{\alpha}}{e^{\beta}}<\dfrac{\beta}{\alpha}\Leftrightarrow e^{\alpha-\beta}<\dfrac{\beta}{\alpha}\Leftrightarrow\alpha-\beta<\ln\dfrac{\beta}{\alpha}\Leftrightarrow\alpha-\beta<\ln\beta-\ln\alpha\Leftrightarrow$

$\ln\alpha+\alpha<\ln\beta+\beta\Leftrightarrow f(\alpha)<f(\beta)$ που ισχύει αφού η f είναι γνησίως αύξουσα και $\alpha<\beta$.

Δ4. Είναι $f\left(\dfrac{1}{e}\right)=\ln\dfrac{1}{e}+\dfrac{1}{e}=-1+\dfrac{1}{e}<0,\ f(1)=1>0$ οπότε $f\left(\dfrac{1}{e}\right)f(1)<0$.

Η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική στο $\left[\frac{1}{e},1\right]$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα υπάρχει $x_1 \in \left(\frac{1}{e},1\right)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1)=0$. Επειδή $e^{1-x-\ln x}>0$ για κάθε $x>0$, έχουμε:

- Αν $\ln x + x \le 0 \Leftrightarrow f(x)\le 0 \Leftrightarrow f(x)\le f(x_1) \Leftrightarrow x \le x_1$, η εξίσωση είναι αδύνατη.
- Αν $\ln x + x > 0 \Leftrightarrow f(x)>0 \Leftrightarrow f(x)>f(x_1) \Leftrightarrow x > x_1$ η εξίσωση γίνεται:

$$\ln x + x = e^{1-x-\ln x} \Leftrightarrow \ln(\ln x + x) = 1-(x+\ln x) \Leftrightarrow \ln f(x) + f(x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$f(f(x)) = f(1) \overset{f\nearrow \Rightarrow 1-1}{\Leftrightarrow} f(x) = 1 = f(1) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x = 1.$$

Επειδή $f(1)=1>x_1$ η $x=1$ είναι δεκτή λύση.

Δ5. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\eta\mu(\ln x + x)+\ln\left(xe^x\right)\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\eta\mu f(x)+\ln x+\ln e^x\right]=$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\eta\mu f(x)+\ln x + x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\eta\mu f(x)+f(x)\right] \underset{\substack{x\to+\infty \Rightarrow\\ u\to+\infty}}{\overset{f(x)=u}{=}} \lim_{u\to+\infty}(\eta\mu u + u) =$$

$$\lim_{u\to+\infty}\left[u\left(\frac{\eta\mu u}{u}+1\right)\right] = +\infty(0+1) = +\infty \text{ αφού}$$

$\left|\frac{\eta\mu u}{u}\right| = \frac{|\eta\mu u|}{|u|} \le \frac{1}{|u|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|u|} \le \frac{\eta\mu u}{u} \le \frac{1}{|u|}$. Όμως $\lim\limits_{u\to+\infty}\left(-\frac{1}{|u|}\right) = 0 = \lim\limits_{u\to+\infty}\frac{1}{|u|}$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{\eta\mu u}{u}=0$.

4ο Διαγώνισμα

Θέμα Α

Α1. Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha)<f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha)<\eta<f(\beta)$. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\eta$, $x\in[\alpha,\beta]$, παρατηρούμε ότι: η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $g(\alpha)g(\beta)<0$, αφού $g(\alpha)=f(\alpha)-\eta<0$ και $g(\beta)=f(\beta)-\eta>0$.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=f(x_0)-\eta=0$, οπότε $f(x_0)=\eta$.

Α2. α) Λ

β) Αν θεωρήσουμε τις συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ και $g(x)=-\dfrac{1}{x^4}$, τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty,\ \lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty.$$

Όμως $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cancel{x^2}}}{-\frac{1}{x^{\cancel{4}\,2}}}=\lim_{x\to 0}\left(-x^2\right)=0$. **Α3.** Σ Λ Σ Λ Λ

Θέμα Β

Β1. Είναι $A_f=(-\infty,+\infty), f(A)=(-\infty,1]$.

Β2. i) $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=0$ και $f(x)>0$ κοντά στο 0 άρα $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{f(x)}=+\infty$.

ii) $\displaystyle\lim_{x\to -2^+}\frac{1}{f(x)}=+\infty$ αφού $\displaystyle\lim_{x\to -2}f(x)=0$ και $f(x)>0$ στο $(-2,-1)$.

$\displaystyle\lim_{x\to -2^-}\frac{1}{f(x)}=-\infty$ αφού $\displaystyle\lim_{x\to -2}f(x)=0$ και $f(x)<0$ στο $(-\infty,-2)$ οπότε δεν υπάρχει το $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{1}{f(x)}$.

iii) $\displaystyle\lim_{x\to 2^-}\ln f(x)\overset{u=f(x)}{\underset{u\to 0^+}{=}}\lim_{x\to u^+}\ln u=-\infty$ αφού $\displaystyle\lim_{x\to 2}f(x)=0$.

iv) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\overset{h=f(x)}{\underset{\substack{x\to+\infty,\\ h\to-\infty}}{=}}\lim_{h\to-\infty}\frac{\eta\mu h}{h}=0$. ($\displaystyle\left|\frac{\eta\mu h}{h}\right|\le\left|\frac{1}{h}\right|=-\frac{1}{h}\Leftrightarrow\frac{1}{h}\le\frac{\eta\mu h}{h}\le-\frac{1}{h}$.

$\displaystyle\lim_{h\to-\infty}\left(-\frac{1}{h}\right)=0=\lim_{h\to-\infty}\frac{1}{h}$ άρα από κριτήριο παρεμβολής $\displaystyle\lim_{h\to-\infty}\frac{\eta\mu h}{h}=0$).

v) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{f(x)}}{f(x)}\underset{\substack{x\to-\infty,\ \theta\to-\infty\\ \theta\to-\infty}}{\overset{\theta=f(x)}{=}}\lim\limits_{\theta\to-\infty}\dfrac{e^{\theta}}{\theta}=\lim\limits_{\theta\to-\infty}e^{\theta}\dfrac{1}{\theta}=0\cdot 0=0$.

Β3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\kappa(x)=f(x)-g(x)$. Η συνάρτηση κ είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων. $k(1)=f(1)-g(1)=1-g(1)>0$, $k(2)=f(2)-g(2)=0-g(2)=-g(2)<0$. Άρα $\kappa(1)\cdot\kappa(2)<0$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $\kappa(x)=0$ στο $(1,2)$. Επομένως οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο.

Θέμα Γ

Γ1. $e^{2f(x)}-2e^{f(x)}=e^{x}+2\Leftrightarrow e^{2f(x)}-2e^{f(x)}+1=e^{x}+3\Leftrightarrow$

$\left(e^{f(x)}-1\right)^2=e^{x}+3\neq 0$ (1). Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=e^{f(x)}-1$.

Η h είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ σαν διαφορά συνεχών συναρτήσεων, δεν μηδενίζεται για καμία πραγματική τιμή άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Όμως $h(0)=e^{f(0)}-1=e^{\ln 3}-1=3-1=2>0$ άρα $h(x)>0$. Από την (1) έχουμε

$h^2(x)=e^{x}+3\Leftrightarrow h(x)=\sqrt{e^{x}+3}\Leftrightarrow e^{f(x)}-1=\sqrt{e^{x}+3}\Leftrightarrow$

$e^{f(x)}=\sqrt{e^{x}+3}+1\Leftrightarrow f(x)=\ln\left(\sqrt{e^{x}+3}+1\right)$.

Γ2. Για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in A_f$ με

$x_1<x_2\Leftrightarrow x_1+3<x_2+3\Leftrightarrow e^{x_1+3}<e^{x_2+3}\Leftrightarrow$

$\sqrt{e^{x_1+3}}<\sqrt{e^{x_2+3}}\Leftrightarrow\sqrt{e^{x_1+3}}+1<\sqrt{e^{x_2+3}}+1\Leftrightarrow$

$\ln\left(\sqrt{e^{x_1+3}}+1\right)<\ln\left(\sqrt{e^{x_2+3}}+1\right)\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα, οπότε το σύνολο τιμών της είναι:

$f(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=\left(\ln\left(\sqrt{3}+1\right),+\infty\right)$.

(Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{e^{x}+3}+1=\sqrt{3}+1$ οπότε

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\ln\left(\sqrt{e^{x}+3}+1\right)\underset{\substack{x\to+\infty,\\ \theta\to\sqrt{3}+1}}{\overset{\theta=\sqrt{e^{x}+3}+1}{=}}\lim_{\theta\to\sqrt{3}+1}\ln\theta=\ln\left(\sqrt{3}+1\right),$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{e^{x}+3}+1\underset{\substack{x\to+\infty,\ h\to+\infty\\ h\to+\infty}}{\overset{h=e^{x}+3}{=}}\lim\left(\sqrt{h}+1\right)=+\infty \quad \text{οπότε}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\sqrt{e^{x}+3}+1\right)\underset{\substack{x\to+\infty,\\ u\to+\infty}}{\overset{u=\sqrt{e^{x}+3}+1}{=}}\lim_{u\to+\infty}\ln u=+\infty\ .)$$

Γ3. Έχουμε: $\sqrt{e}+2>\ln\left(\sqrt{3}+1\right)\Leftrightarrow \ln e^{\sqrt{e}+2}>\ln\left(\sqrt{3}+1\right)\Leftrightarrow e^{\sqrt{e}+2}>\sqrt{3}+1$

ισχύει αφού $e^{\sqrt{e}+2}>e^2>3>2+1>\sqrt{3}+1$.

Άρα $\sqrt{e}+2\in f(A)$ οπότε υπάρχει πραγματικός αριθμός γ τέτοιος ώστε $f(\gamma)=\sqrt{e}+2$.

Ο γ είναι μοναδικός αφού η f είναι γνησίως αύξουσα οπότε 1-1.

Γ4. $\ln\dfrac{\sqrt{e^{e^x}+3}+1}{\sqrt{e^{1-x}+3}+1}=0\Leftrightarrow \ln\left(\sqrt{e^{e^x}+3}+1\right)-\ln\left(\sqrt{e^{1-x}+3}+1\right)=0\Leftrightarrow$

$\ln\left(\sqrt{e^{e^x}+3}+1\right)=\ln\left(\sqrt{e^{1-x}+3}+1\right)\Leftrightarrow f\left(e^x\right)=f(1-x)\overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow}e^x=1-x\Leftrightarrow$

$e^x+x-1=0$ (*). Θεωρούμε τη συνάρτηση $a(x)=e^x+x-1$, η οποία αποδεικνύεται εύκολα ότι είναι γνησίως αύξουσα οπότε και 1-1.

$(*)\Rightarrow a(x)=a(0)\overset{a\ 1-1}{\Leftrightarrow}x=0$.

Θέμα Δ

Δ1. α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\dfrac{f(x)-\sqrt[3]{x}+1}{x-1},\ x\neq 1\Leftrightarrow$

$f(x)-\sqrt[3]{x}+1=(x-1)h(x)\Leftrightarrow f(x)=(x-1)h(x)+\sqrt[3]{x}+1$, οπότε

$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left[(x-1)h(x)+\sqrt[3]{x}-1\right]=0=f(1)$ αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο 1.

β) Η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο 1, οπότε

$\lim\limits_{x\to 1^-}g(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}g(x)=g(1)\Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\left[f^3(x)+\left(\sigma\upsilon\nu(x-1)-1\right)\cdot f^2(x)+\eta\mu^2(x-1)\cdot f(x)+2(x-1)^3\right]=\delta\Leftrightarrow$

$\delta=0$. Για $x>1$:

$\lim\limits_{x\to 1^+}g(x)=0\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+}\left(ax^2+\beta x+\gamma\right)=0\Leftrightarrow \alpha+\beta+\gamma=0\Leftrightarrow \gamma=-\alpha-\beta \quad (1)$

γ) Από το **α)** έχουμε

$f(x)=(x-1)h(x)+\sqrt[3]{x}-1\overset{x\neq 1}{\Leftrightarrow}\dfrac{f(x)}{x-1}=h(x)+\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}\Leftrightarrow$

$\dfrac{f(x)}{x-1}=h(x)+\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x}^3-1^3}\Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x-1}=h(x)+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}+1}$,οπότε

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\left[h(x)+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}+1}\right]=\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}=1$.

δ) Για $x<1$:

$$g(x)=f^3(x)+(\sigma\upsilon\nu(x-1)-1)\cdot f^2(x)+\eta\mu^2(x-1)\cdot f(x)+2(x-1)^3 \Leftrightarrow$$

$$\frac{g(x)}{(x-1)^3}=\left(\frac{f(x)}{x-1}\right)^3+\left(\frac{\sigma\upsilon\nu(x-1)-1}{x-1}\right)\cdot\left(\frac{f(x)}{x-1}\right)^2+\left(\frac{\eta\mu(x-1)}{x-1}\right)^2\cdot\frac{f(x)}{x-1}+2.$$

Άρα $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{g(x)}{(x-1)^3}=$

$$\lim_{x\to1^-}\left[\left(\frac{f(x)}{x-1}\right)^3+\left(\frac{\sigma\upsilon\nu(x-1)-1}{x-1}\right)\cdot\left(\frac{f(x)}{x-1}\right)^2+\left(\frac{\eta\mu(x-1)}{x-1}\right)^2\cdot\frac{f(x)}{x-1}+2\right]\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{g(x)}{(x-1)^3}=1+0\cdot1^2+1\cdot1+2=4.$$

($\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\sigma\upsilon\nu(x-1)-1}{x-1}\underset{\theta\to0^-}{\overset{\theta=x-1}{=}}\lim\limits_{x\to1^-,\,\theta\to0^-}\dfrac{\sigma\upsilon\nu\theta-1}{\theta}=0$, $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\eta\mu(x-1)}{x-1}\underset{\theta\to0^-}{\overset{\theta=x-1}{=}}\lim\limits_{x\to1^-,\,\theta\to0^-}\dfrac{\eta\mu\theta}{\theta}=1$).

Δ2. α) Έχουμε $\gamma=-\alpha-\beta$ (1)

$$\lim_{x\to1^-}\frac{g(x)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{f^3(x)+(\sigma\upsilon\nu(x-1)-1)\cdot f^2(x)+\eta\mu^2(x-1)\cdot f(x)+2(x-1)^3}{x-1}=$$

$$\lim_{x\to1^-}\left[\frac{f^3(x)}{x-1}+\frac{(\sigma\upsilon\nu(x-1)-1)\cdot f^2(x)}{x-1}+\frac{\eta\mu^2(x-1)\cdot f(x)}{x-1}+2(x-1)^2\right]=$$

$$\lim_{x\to1^-}\left[\frac{f(x)}{x-1}f^2(x)+\frac{(\sigma\upsilon\nu(x-1)-1)}{x-1}f^2(x)+\right.$$

$$\left.\frac{\eta\mu(x-1)}{x-1}\eta\mu(x-1)f(x)+2(x-1)^2\right]=1\cdot0+0\cdot0+1\cdot0+0=0=\lim_{x\to1^+}\frac{g(x)}{x-1}.$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{g(x)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\alpha x^3+\beta x+\gamma}{x-1}\overset{(1)}{=}\lim_{x\to1^+}\frac{\alpha x^3+\beta x-\alpha-\beta}{x-1}$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{\alpha(x^3-1)+\beta(x-1)}{x-1}=0\Leftrightarrow\lim_{x\to1^+}\frac{\alpha\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)+\beta\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=0\Leftrightarrow$$

$3\alpha+\beta=0\Leftrightarrow\beta=-3\alpha$ (2)

β) Είναι $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{g(x)}{(x-1)^3}=4$ από Δ1δ) οπότε: $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{g(x)}{(x-1)^2}=4.$

Όμως $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\alpha x^2+\alpha x-2\alpha}{x-1}=4\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+}\alpha\dfrac{x^2+x-2}{x-1}=4\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\alpha\dfrac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{\cancel{x-1}}=4\Leftrightarrow 3\alpha=4\Leftrightarrow \alpha=\dfrac{4}{3}$.

Από τη σχέση (2) έχουμε $\beta=-3\dfrac{4}{3}=-4$ και από τη σχέση (1) $\gamma=-\dfrac{4}{3}+4=\dfrac{8}{3}$.

Άρα

$$g(x)=\begin{cases} f^3(x)+(\sigma\upsilon\nu(x-1)-1)\cdot f^2(x)+\eta\mu^2(x-1)\cdot f(x)+2(x-1)^3, x<1\\ 0, x=1\\ \dfrac{4}{3}x^3-4x+\dfrac{8}{3}, x>1\end{cases}.$$

5ο Διαγώνισμα

Θέμα Α

Α1. α) $A_f = (1,5) \cup (5,9]$, $f(A) = [-2,5]$

β) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

i) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -2$.

ii) Είναι $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 2$.

Επειδή $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$ δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$.

iii) Είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (5,6) \cup (6,7)$, οπότε:

$$\lim_{x \to 6} \frac{1}{f(x)} \underset{u \to 0^+}{\overset{u=f(x)}{=}} \lim_{u \to 0^+} \frac{1}{u} = +\infty .$$

iv) Είναι $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{f(x)} \underset{u \to 0^-}{\overset{u=f(x)<0}{=}} \lim\limits_{u \to 0^-} \dfrac{1}{u} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{f(x)} \underset{u \to 0^+}{\overset{u=f(x)>0}{=}} \lim\limits_{u \to 0^+} \dfrac{1}{u} = +\infty$.

Άρα $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{f(x)} \neq \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{f(x)}$ οπότε δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{f(x)}$.

v) Είναι $\lim\limits_{x \to 8} f(x) = 5$ οπότε αν θέσουμε $f(x) = u$, $u \to 5$.

Επομένως $\lim\limits_{x \to 8} f(f(x)) = \lim\limits_{u \to 5} f(u) = 3$.

γ) Δεν υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ (από β)ii)) και $\lim\limits_{x \to 7} f(x)$ άρα η f δεν είναι συνεχής στο 3 και στο 7. ($\lim\limits_{x \to 7^-} f(x) = 2 \neq \lim\limits_{x \to 7^+} f(x) = 4$.)

Α2. α) Αληθής.

β) Από τις ιδιότητες απολύτων ισχύει ότι $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επειδή $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} (-|f(x)|) = 0$, από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Α3. δ) **Α4. α)** Λ **β)** Λ **γ)** Λ **δ)** Σ **ε)** Λ

Θέμα Β

Β1. Η f ορίζεται όταν $\begin{cases} x > 0 \\ 1 - \ln x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq e \end{cases}$, άρα

$A_f = (0,e) \cup (e,+\infty)$.

Β2. Για κάθε $x_1, x_2 \in A_f$ με $f(x_1) = f(x_2)$, τότε:

$$\frac{\ln x_1}{1-\ln x_1}=\frac{\ln x_2}{1-\ln x_2} \Leftrightarrow \ln x_1-\cancel{\ln x_1 \ln x_2}=\ln x_2-\cancel{\ln x_1 \ln x_2} \Leftrightarrow$$

$\ln x_1=\ln x_2 \Leftrightarrow x_1=x_2$ οπότε η f είναι 1-1.

Θέτουμε $f(x)=y \Leftrightarrow \dfrac{\ln x}{1-\ln x}=y \Leftrightarrow$

$\ln x=y-y\ln x \Leftrightarrow y\ln x+\ln x=y \Leftrightarrow (y+1)\ln x=y \quad (1)$

Αν $y+1=0 \Leftrightarrow y=-1$ τότε η (1) είναι αδύνατη, οπότε για $y\neq -1$ είναι

$\ln x=\dfrac{y}{y+1} \Leftrightarrow x=e^{\frac{y}{y+1}}$. Αν $x\in(0,e)$ τότε

$$0<e^{\frac{y}{y+1}}<e \Leftrightarrow \begin{cases} e^{\frac{y}{y+1}}>0 \text{ ισχύει} \\ e^{\frac{y}{y+1}}<e \end{cases} \Leftrightarrow \frac{y}{y+1}<1 \Leftrightarrow \frac{y}{y+1}-1<0 \Leftrightarrow \frac{\cancel{y}-\cancel{y}-1}{y+1}<0 \Leftrightarrow$$

$\dfrac{-1}{y+1}<0 \Leftrightarrow y+1>0 \Leftrightarrow y>-1$.

Όταν $x\in A_1=(0,e)$ η f έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(A_1)=(-1,+\infty)$.

Αν $x\in(e,+\infty)$ τότε $e^{\frac{y}{y+1}}>e \Leftrightarrow \dfrac{y}{y+1}>1 \Leftrightarrow \dfrac{y}{y+1}-1>0 \Leftrightarrow \dfrac{\cancel{y}-\cancel{y}-1}{y+1}>0 \Leftrightarrow$

$\dfrac{-1}{y+1}>0 \Leftrightarrow y+1<0 \Leftrightarrow y<-1$.

Όταν $x\in A_2=(e,+\infty)$ η f έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(A_2)=(-\infty,-1)$.

Επειδή $f(A_1)\cap f(A_2)=\varnothing$ η f αντιστρέφεται με $f^{-1}(y)=e^{\frac{y}{y+1}},\ y\neq -1$ άρα

$f^{-1}(x)=e^{\frac{x}{x+1}},\ x\neq -1$.

Β3. Για κάθε $x>e$ είναι $\ln x>\ln e=1>0 \Rightarrow 1-\ln x<0$ άρα $f(x)<0$.

Όμως $f^{-1}(x)=e^{\frac{x}{x+1}}>0$ για κάθε $x>e$, άρα $f(x)<f^{-1}(x),\ x>e$.

Β4. α) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{1-\ln x} \underset{\substack{x\to 0^+\Rightarrow \\ u\to -\infty}}{\overset{\ln x=u}{=}} \lim\limits_{u\to -\infty}\dfrac{u}{1-u}=\lim\limits_{u\to -\infty}\dfrac{u}{-u}=-1$.

β) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{1-\ln x} \underset{\substack{x\to +\infty\Rightarrow \\ u\to +\infty}}{\overset{\ln x=u}{=}} \lim\limits_{u\to +\infty}\dfrac{u}{1-u}=\lim\limits_{u\to +\infty}\dfrac{u}{-u}=-1$.

γ) Είναι $\lim\limits_{x\to +\infty} f^{-1}(x)=\lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{x}{x+1}} \underset{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1}{\overset{\frac{x}{x+1}=u}{=}} \lim\limits_{u\to 1} e^u=e$, άρα $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f^{-1}(x)}{f(x)}=\dfrac{e}{-1}=-e$.

Θέμα Γ

Γ1. Από το σχήμα παρατηρούμε ότι $f\searrow(-\infty,2)$. Για κάθε $x_1, x_2 \in(-\infty,2)$ με

$x_1 < x_2 \; (1) \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(x_1) > f(x_2) \; (2)$

Από $(1)+(2) \Rightarrow g(x_1) > g(x_2) \Rightarrow g\searrow(-\infty,2)$.

Γ2. Είναι $f(x) = x+\alpha \Leftrightarrow f(x)-x=\alpha \Leftrightarrow g(x)=\alpha \quad (3)$

Από το σχήμα παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$ και $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=-\infty$, οπότε:

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right)=2+\infty=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to2^-} g(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\left(f(x)-x\right)=-\infty-2=-\infty$.

Επειδή η g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A=(-\infty,2)$ έχει σύνολο τιμών το $g(A)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty} g(x), \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$. Το $\alpha\in g(A)$ οπότε υπάρχει $x_0\in A=(-\infty,2)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=\alpha$.

Το x_0 είναι μοναδικό αφού η g είναι γνησίως φθίνουσα στα A.

Γ3. Είναι $2f(-2)+4 > f(-1)+f(1) \Leftrightarrow 2\left(f(-2)+2\right) > f(-1)+1+f(1)-1 \Leftrightarrow$

$2g(-2) > g(-1)+g(1)$.

Όμως $-2<-1 \overset{g\searrow}{\Leftrightarrow} g(-2)>g(-1) \; (1)$, $-2<1 \overset{g\searrow}{\Leftrightarrow} g(-2)>g(1) \; (2)$.

Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) προκύπτει το ζητούμενο $2g(-2)>g(-1)+g(1)$.

Γ4. Είναι: $\begin{cases} 0<x<2 \\ 0<x^2<2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<2 \\ 0<x<\sqrt{2} \end{cases}$ οπότε η εξίσωση ορίζεται στο $\left(0,\sqrt{2}\right)$.

Για $x\in\left(0,\sqrt{2}\right)$ έχουμε: $f(x^2)-f(x)=x^2-x \Leftrightarrow f(x^2)-x^2=f(x)-x \Leftrightarrow$

$g(x^2)=g(x) \overset{g\searrow \Rightarrow 1-1}{\Leftrightarrow} x^2=x \Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow x(x-1)=0 \Leftrightarrow (x=0)$ ή $(x=1)$

οι οποίες είναι δεκτές.

Γ5. Είναι $h(0)\le f(0)=0$ και $\lim\limits_{x\to2^-} h(x)\le \lim\limits_{x\to2^-} f(x)$ άρα $\lim\limits_{x\to2^-} h(x)=-\infty$.

Αν η h ήταν συνεχής και γνησίως αύξουσα τότε θα είχε σύνολο τιμών στο διάστημα $\Delta=[0,2)$ το $g(\Delta)=\left[f(0),-\infty\right)$ που είναι αδύνατο.

Θέμα Δ

Δ1. $\left|f(x)-2x+1\right|\le e^{-x} \Leftrightarrow -e^{-x}\le f(x)-2x+1\le e^{-x} \Leftrightarrow$

$2x-1-e^{-x}\le f(x)\le 2x-1+e^{-x}$.

Για $x>0$ είναι $\frac{2x-1-e^{-x}}{x}\le\frac{f(x)}{x}\le\frac{2x-1+e^{-x}}{x}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-1-e^{-x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x x}\right)=2-0-0=2$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-1+e^{-x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\frac{1}{x}+\frac{1}{e^x x}\right)=2-0+0=2$ οπότε ισχύει το κριτήριο παρεμβολής άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=2$.

Δ2. Έστω $\frac{f(x)}{x}=g(x)\overset{x\neq0}{\Leftrightarrow}f(x)=xg(x)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xg(x)\right)=+\infty\cdot2=+\infty$.

Δ3. Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ είναι $f(x)>0$ για πολύ μεγάλες τιμές του x, άρα υπάρχει πολύ μεγάλος θετικός αριθμός α, τέτοιος ώστε $f(\alpha)>0$.

Είναι $f(0)=-2<0$, $f(\alpha)>0$ οπότε $f(0)f(\alpha)<0$.

Η f είναι συνεχής στο $[0,\alpha]$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,\alpha)$. Επειδή η ρίζα που βρίσκεται στο διάστημα $(0,\alpha)$, είναι θετικός αριθμός, η C_f τέμνει τον θετικό ημιάξονα Οx τουλάχιστον μια φορά.

Δ4. Οι ευθείες που είναι παράλληλες στην $y=x$ και προκύπτουν από παράλληλη μετατόπισή της προς τα πάνω έχουν εξίσωση της μορφής $y=x+\beta$ με $\beta>0$.

Επομένως αρκεί η εξίσωση $f(x)=x+\beta$, να έχει τουλάχιστον μια ρίζα.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x-\beta$.

Για $x=0$ είναι $g(0)=f(0)-\beta=-2-\beta$.Όμως

$\beta>0\Leftrightarrow-\beta\le0\Leftrightarrow-2-\beta\le-2<0$, άρα $g(0)<0$. Επίσης

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x-\beta\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{f(x)}{x}-1-\frac{\beta}{x}\right)\right]=+\infty(2-1-0)=+\infty$,

οπότε υπάρχει $\gamma>0$ τέτοιος ώστε $g(\gamma)>0$ οπότε $g(0)g(\gamma)<0$. Η g είναι συνεχής στο $[0,\gamma]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,\gamma)$.

6ο Διαγώνισμα

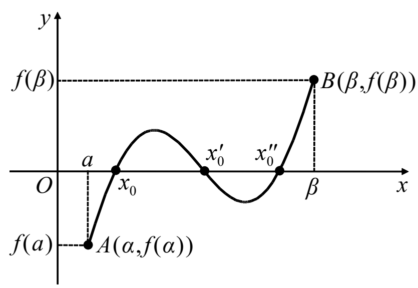
Θέμα Α

Α1. Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha)<f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha)<\eta<f(\beta)$. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\eta$, $x\in[\alpha,\beta]$, παρατηρούμε ότι: η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $g(\alpha)g(\beta)<0$, αφού $g(\alpha)=f(\alpha)-\eta<0$ και $g(\beta)=f(\beta)-\eta>0$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=f(x_0)-\eta=0$, οπότε $f(x_0)=\eta$.

Α2. Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:
η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και, επιπλέον, ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$, τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$. Δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο ανοικτό διάστημα. (α,β).

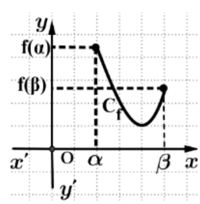
Γεωμετρική ερμηνεία

Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή τα σημεία $A(\alpha,f(\alpha))$ και $B(\beta,f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα $x'x$, η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα σε ένα τουλάχιστον σημείο.

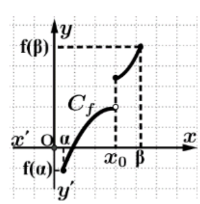


Το αντίστροφο του θ. Bolzano δεν ισχύει.

- Στο διπλανό σχήμα δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ που έχει δύο ρίζες στο (α,β) χωρίς όμως να ισχύει ότι $f(\alpha)f(\beta)<0$.



- Στο διπλανό σχήμα δίνεται συνάρτηση f με $f(\alpha)f(\beta)<0$ που έχει ρίζα στο (α,β), χωρίς όμως να είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.



Α3. α) Λ **β)** Λ **γ)** Λ **δ)** Σ **ε)** Σ

Θέμα Β

Β1. Είναι $f(x+1)=x^3+3x^2+3x+1=(x+1)^3$.

Θέτουμε $x+1=\omega$, οπότε $f(\omega)=\omega^3$, $\omega\in\mathbb{R}$ άρα και $f(x)=x^3$, $x\in\mathbb{R}$.

Β2. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ τότε $x_1^3 < x_2^3 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα οπότε είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται.

Θέτουμε $f(x) = y \Leftrightarrow x^3 = y$. Αν $y \geq 0$ τότε $x = \sqrt[3]{y}$, ενώ αν $y < 0$ τότε $x = -\sqrt[3]{-y}$, άρα $f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt[3]{y} & , y \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-y}, & y < 0 \end{cases}$, οπότε $f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & , x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-x}, & x < 0 \end{cases}$.

Β3. i. Είναι $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)+x-2}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+x-2}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x^2+x+2)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} =$

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x^2+x+2)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x})^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+2)(\sqrt{x}+1)}{\cancel{x-1}} = 8$.

ii. Είναι $\lim\limits_{x\to\sqrt[3]{\pi}} (f(x)-\pi) = (\sqrt[3]{\pi})^3 - \pi = 0$ οπότε αν θέσουμε $f(x)-\pi = y$ τότε $y \to 0$. Άρα $\lim\limits_{x\to\sqrt[3]{\pi}} \dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)-\pi} = \lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\eta\mu(\pi+y)}{y} = \lim\limits_{x\to\pi}\left(-\dfrac{\eta\mu y}{y}\right) = -1$.

iii. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+1}{f^2(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+1}{x^6} = \lim\limits_{x\to 0}\left[(x+1)\cdot\dfrac{1}{x^6}\right] = +\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to 0}(x+1) = 1$ και $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^6} = +\infty$.

Β4. Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ και $g(x) \leq f(x)$, είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$.

Θέμα Γ

Γ1. α) Είναι $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$, οπότε $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{f(x)} \overset{f(x)=y}{\underset{y\to+\infty}{=}} \lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{1}{y} = 0$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{|f(x)|} = +\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to 2} |f(x)| = 0$ και $|f(x)| > 0$.

γ) Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο $-\infty$ είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$.

Επομένως $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)\eta\mu\dfrac{1}{f(x)}\right) \overset{\frac{1}{f(x)}=\omega}{\underset{\omega\to+\infty}{=}} \lim\limits_{\omega\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\omega}\eta\mu\omega\right) = \lim\limits_{\omega\to+\infty} \dfrac{\eta\mu\omega}{\omega} = 0$.

($\left|\dfrac{\eta\mu\omega}{\omega}\right| = \dfrac{|\eta\mu\omega|}{|\omega|} \leq \dfrac{1}{|\omega|} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{|\omega|} \leq \dfrac{\eta\mu\omega}{\omega} \leq \dfrac{1}{|\omega|}$. Είναι $\lim\limits_{\omega\to+\infty} \dfrac{1}{|\omega|} = 0 = \lim\limits_{\omega\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{|\omega|}\right)$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{\omega\to+\infty} \dfrac{\eta\mu\omega}{\omega} = 0$).

δ) Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{f(x)}\eta\mu f(x)\right)\underset{y\to0}{\overset{f(x)=y}{=}}\lim\limits_{y\to0}\left(\frac{1}{y}\eta\mu y\right)=\lim\limits_{y\to0}\frac{\eta\mu y}{y}=1$.

Γ2. α) Από το σχήμα παρατηρούμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,1)$.
Για κάθε $x_1,x_2\in(-\infty,1)$ με $x_1<x_2$ είναι $f(x_1)<f(x_2)$ (1)
και $f^3(x_1)<f^3(x_2)$ (2). Με πρόσθεση των σχέσεων (1) και (2) έχουμε
$f^3(x_1)+f(x_1)<f^3(x_2)+f(x_2)\Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2)$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,1)$.

β) $f^3(x)+f(x)=2023\Leftrightarrow g(x)=2023$. Όμως $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ οπότε $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=0^3+0=0$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=+\infty$ οπότε $\lim\limits_{x\to1^-}g(x)\underset{y\to+\infty}{\overset{f(x)=y}{=}}\lim\limits_{y\to+\infty}(y^3+y)=\lim\limits_{y\to+\infty}y^3=+\infty$.

Η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A=(-\infty,1)$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $g(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}g(x),\lim\limits_{x\to1^-}g(x)\right)=(0,+\infty)$. Το 2023 βρίσκεται στο σύνολο τιμών της g, οπότε υπάρχει $x_0\in A$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=2023$.
Το x_0 είναι μοναδικό αφού η g είναι γνησίως αύξουσα.

Γ3. $xf(x)=3x+1\overset{x>1}{\Leftrightarrow}f(x)=3+\frac{1}{x}\Leftrightarrow f(x)-3-\frac{1}{x}=0$. Έστω
$h(x)=f(x)-3-\frac{1}{x}$, $x>1$. Είναι $\lim\limits_{x\to1^+}h(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\left(f(x)-3-\frac{1}{x}\right)=-\infty-4=-\infty$
οπότε υπάρχει $\alpha>1$ πολύ κοντά στο 1 τέτοιο, ώστε $h(a)<0$. Είναι
$\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-3-\frac{1}{x}\right)=+\infty-3-0=+\infty$, άρα υπάρχει κάποιος πολύ μεγάλος αριθμός β τέτοιος ώστε $h(\beta)>0$. Είναι $h(\alpha)h(\beta)<0$.
Η h είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα η εξίσωση
$h(x)=0\Leftrightarrow f(x)-3-\frac{1}{x}=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(\alpha,\beta)\subseteq(1,+\infty)$.

Θέμα Δ

Δ1. $f^2(x)+x^2=e^{2x}+2xf(x)\Leftrightarrow f^2(x)-2xf(x)+x^2=e^{2x}\Leftrightarrow$
$(f(x)-x)^2=e^{2x}\Leftrightarrow|f(x)-x|=e^x$ (1)
Επειδή $e^{2x}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $|f(x)-x|>0\Leftrightarrow f(x)-x\neq0$.

Η συνάρτηση $g(x)=f(x)-x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Είναι $f(0)-0=1>0$ άρα $g(x)>0 \Leftrightarrow f(x)-x>0$.
Επομένως από την (1) έχουμε: $f(x)-x=e^x \Leftrightarrow f(x)=e^x+x,\ x\in\mathbb{R}$.

Δ2. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ (1), ισχύει $e^{x_1}<e^{x_2}$ (2)
Με πρόσθεση των σχέσεων (1) και (2) έχουμε
$e^{x_1}+x_1<e^{x_2}+x_2 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ3. Είναι $e^x=1821-x \Leftrightarrow e^x+x=1821 \Leftrightarrow f(x)=1821$ (2)
Όμως $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A=\mathbb{R}$ οπότε έχει σύνολο τιμών το $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=\mathbb{R}$.
Επειδή $1821\in f(A)$ υπάρχει $x_0\in A=\mathbb{R}$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=1821$.
Το x_0 είναι μοναδικό αφού η f είναι γνησίως αύξουσα.

Δ4. Είναι $e^{e^x+x}+e^x-e<1-x \Leftrightarrow e^{e^x+x}+e^x+x<e+1 \Leftrightarrow e^{f(x)}+f(x)<f(1) \Leftrightarrow$
$f(f(x))<f(1) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x)<1 \Leftrightarrow f(x)<f(0) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} x<0$.

Δ5. Είναι $e^x+x>x \Leftrightarrow f(x)>x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε λόγω συμμετρίας με την $y=x$ είναι και $f^{-1}(x)<x$, άρα $f(x)>f^{-1}(x)$.

Δ6. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-x+2^x}{\left(f(x)-x\right)^2+e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+\cancel{x}-\cancel{x}+2^x}{\left(e^x+\cancel{x}-\cancel{x}\right)^2+e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(1+\left(\frac{2}{e}\right)^x\right)}{e^{2x}\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{e^x}\,\frac{1+\left(\frac{2}{e}\right)^x}{1+\frac{1}{e^x}}\right]=0.$$

7ο Διαγώνισμα

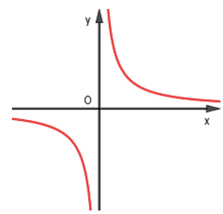
Θέμα Α

Α1. Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha)<f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha)<\eta<f(\beta)$. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\eta$, $x\in[\alpha,\beta]$, παρατηρούμε ότι: η g είναι συνεχής στο [α,β] και $g(\alpha)g(\beta)<0$, αφού $g(\alpha)=f(\alpha)-\eta<0$ και $g(\beta)=f(\beta)-\eta>0$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=f(x_0)-\eta=0$, οπότε $f(x_0)=\eta$.

Α2. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0\in A$ μέγιστο το $f(x_0)$, όταν $f(x)\le f(x_0)$ για κάθε $x\in A$.

Α3. α) Ψευδής.

β) Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$, όμως δεν είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}^*$ αφού για $x_1<0<x_2$ είναι $f(x_1)<0<f(x_2)$.



Α4. α) Λ **β)** Λ **γ)** Σ **δ)** Λ **ε)** Λ

Θέμα Β

Β1. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^3-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x-\alpha}{x^3-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x^3}\left(\alpha+\frac{\beta}{x}+\frac{\gamma}{x^2}-\frac{\alpha}{x^3}\right)}{\cancel{x^3}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}=\alpha$

άρα $\alpha=1$. Έστω $\dfrac{f(x)}{x-1}=\varphi(x),x\neq1\Leftrightarrow f(x)=(x-1)\varphi(x)\Leftrightarrow$

$x^3+\beta x^2+\gamma x-1=(x-1)\varphi(x)$, οπότε

$\lim\limits_{x\to1}(x^3+\beta x^2+\gamma x-1)=\lim\limits_{x\to1}(x-1)\varphi(x)\Leftrightarrow1+\beta+\gamma-1=0\Leftrightarrow\gamma=-\beta\quad(1)$

Τότε $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+\beta x^2-\beta x-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)+\beta x(x-1)}{x-1}=$

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1+\beta x)}{\cancel{x-1}}=3+\beta$.

Όμως $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=0\Leftrightarrow 3+\beta=0\Leftrightarrow\beta=-3$.

Από τη σχέση (1) είναι $\gamma=3$. Άρα $f(x)=x^3-3x^2+3x-1$.

Β2. Είναι $f(x)=x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3$. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι $x_1-1<x_2-1 \Leftrightarrow (x_1-1)^3<(x_2-1)^3 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2) \Leftrightarrow f\nearrow\mathbb{R}$.

Θέτουμε $f(x)=y \Leftrightarrow (x-1)^3=y$. Αν $y\ge 0$ τότε $x-1=\sqrt[3]{y} \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{y}+1$, ενώ αν $y<0$ τότε $x-1=-\sqrt[3]{-y} \Leftrightarrow x=-\sqrt[3]{-y}+1$, άρα

$f^{-1}(y)=\begin{cases}\sqrt[3]{y}+1\ , & y\ge 0\\ -\sqrt[3]{-y}+1, & y<0\end{cases}$, οπότε $f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x}+1\ , & x\ge 0\\ -\sqrt[3]{-x}+1, & x<0\end{cases}$.

Β3. Αρκεί η εξίσωση $f(x)=x \Leftrightarrow f(x)-x=0$ να έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(2,3)$. Έστω

$g(x)=f(x)-x=x^3-3x^2+3x-1-x=x^3-3x^2+2x-1,\ x\in[2,3]$.

Η g είναι συνεχής στο $[2,3]$ ως πολυωνυμική.

Είναι $g(2)=8-12+4-1=-1<0$, $g(3)=27-27+6-1=5>0$ οπότε $g(2)g(3)<0$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_0\in(2,3)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)=x_0$.

Β4. Αρκεί η εξίσωση $f^{-1}(x)=2x-2 \Leftrightarrow f^{-1}(x)-2x+2=0$ να έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\left(\frac{1}{2},x_0\right)$. Έστω $h(x)=f^{-1}(x)-2x+2,\ x\in\left[\frac{1}{2},x_0\right]$.

Η h είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},x_0\right]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $h\left(\frac{1}{2}\right)=f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)-2\cdot\frac{1}{2}+2=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}+\cancel{1}-\cancel{1}+2>0$,

$h(x_0)=f^{-1}(x_0)-2x_0+2>0$ οπότε $h\left(\frac{1}{2}\right)h(x_0)<0$.

(Από το Β3 έχουμε $f(x_0)=x_0 \Leftrightarrow x_0=f^{-1}(x_0)$, οπότε $h(x_0)=x_0-2x_0+2=2-x_0<0$).

Άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε η εξίσωση $h(x)=0 \Leftrightarrow f^{-1}(x)=-2x-2$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\left(\frac{1}{2},x_0\right)$.

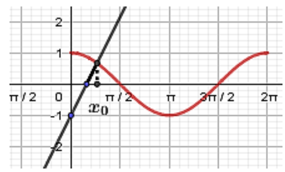
Θέμα Γ

Γ1. Είναι $f(0)=\sigma\upsilon\nu 0-2\cdot 0+1=2>0,\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}-2\frac{\pi}{2}+1=-\pi+1<0$, δηλαδή $f(0)f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$. Έστω $0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$, τότε $συνx_1 > συνx_2 \ (1)$,

$-2x_1 > -2x_2 \Leftrightarrow -2x_1 + 1 > -2x_2 + 1 \ (2)$.

Από $(1)+(2) \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow f \searrow \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, οπότε το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της f στο διάστημα αυτό.

Γ2. $f(x)=0 \Leftrightarrow συνx - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow συνx = 2x - 1$.



Για να αποδείξουμε ότι η f έχει ακριβώς μια ρίζα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, αρκεί να δείξουμε ότι οι συναρτήσεις $y = συνx$ και $y = 2x - 1$ τέμνονται σε ένα μόνο σημείο στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Για το λόγο αυτό κατασκευάζουμε τη γραφική παράσταση της $y = συνx$ και της ευθεία $y = 2x - 1$. Από τις γραφικές τους παραστάσεις παρατηρούμε ότι τέμνονται σε σημείο του οποίου η τετμημένη βρίσκεται στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Γ3. Για κάθε $x > x_0 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(x) < f(x_0) \Leftrightarrow f(x) < 0$.

Είναι $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{συνx}{f(x)} = \lim\limits_{x \to x_0^+} \left[συνx \frac{1}{f(x)}\right] = -\infty$ αφού $\lim\limits_{x \to x_0} συνx = συνx_0 > 0$ και

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{1}{f(x)} \underset{\substack{x \to x_0^+ \Rightarrow \\ u \to 0^-}}{\overset{f(x)=u}{=}} \lim_{u \to 0^-} \frac{1}{u} = -\infty .$$

Γ4. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (συνx - 2x + 1) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[x\left(\frac{συνx}{x} - 2 + \frac{1}{x}\right)\right] = +\infty \cdot (-2) = -\infty$

(Για $x > 0$ είναι $\left|\frac{συνx}{x}\right| \le \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{x} \Leftrightarrow -\frac{1}{x} \le \frac{συνx}{x} \le \frac{1}{x}$.

Όμως $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0 = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x}$ οπότε $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{συνx}{x} = 0$).

Γ5. Έστω $g(x) = \frac{αf(x) + β}{x}, x \ne 0$ με $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 2$. Τότε $xg(x) = αf(x) + β$ &

$\lim\limits_{x \to 0}\left[xg(x)\right] = \lim\limits_{x \to 0}\left[αf(x) + β\right] \Leftrightarrow 0 = αf(0) + β \Leftrightarrow 2α + β = 0 \Leftrightarrow β = -2α$ (3).

Με τη βοήθεια της σχέσης (3) έχουμε:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha f(x)+\beta}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(\sigma\upsilon\nu x-2x+1)-2\alpha}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\alpha\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-2x+1-2}{x}=2\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to 0}\left[\alpha\left(\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}-\dfrac{2\cancel{x}}{\cancel{x}}\right)\right]=2\Leftrightarrow\alpha(0-2)=2\Leftrightarrow -2\alpha=2\Leftrightarrow\ \alpha=-1$.

Από τη σχέση (3) έχουμε $\beta=-2(-1)=2$.

Θέμα Δ

Δ1. Είναι $f^3(x)-5f^2(x)+7f(x)=x^3+5x-15\Leftrightarrow$

$f(x)\left(f^2(x)-5f(x)+7\right)=x^3+5x-15\quad(1)$

Αν θέσουμε $f(x)=\omega$ προκύπτει το τριώνυμο $\omega^2-5\omega+7$, το οποίο έχει $\Delta=-3<0$, οπότε $\omega^2-5\omega+7>0$.

Επομένως $f^2(x)-5f(x)+7>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η (1) γίνεται:

$f(x)=\dfrac{x^3+5x-15}{f^2(x)-5f(x)+7}$.

Είναι $f(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{x^3+5x-15}{f^2(x)-5f(x)+7}=0\Leftrightarrow x^3+5x-15=0$.

Έστω $g(x)=x^3+5x-15,\ x\in[1,2]$. Η g είναι συνεχής σαν πολυωνυμική στο $[1,2]$. Είναι $g(1)=-9<0,\ g(2)=3>0$, οπότε $g(1)g(2)<0$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_0\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0\Leftrightarrow x_0^3+5x_0-15=0\Leftrightarrow f(x_0)=0$.

Για την μοναδικότητα της ρίζας: Εύκολα αποδεικνύεται ότι η g είναι γνησίως αύξουσα, οπότε το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της g και κατά συνέπεια της f.

Δ2. α) Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+5x-15\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3+5x-15\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$, οπότε:

- Αν $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\kappa\in\mathbb{R}$, τότε

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f^3(x)-5f^2(x)+7f(x)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+5x-15\right)\Leftrightarrow\ \kappa^3-5\kappa^2+7\kappa=-\infty$ που είναι αδύνατο.

- Αν $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$, τότε

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f^3(x)-5f^2(x)+7f(x)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+5x-15\right)=-\infty$.

Θέτουμε $f(x)=u$ και έχουμε:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f^3(x)-5f^2(x)+7f(x)\right]=\lim\limits_{u\to+\infty}\left(u^3-5u^2+7u\right)=\lim\limits_{u\to+\infty}u^3=+\infty$

που είναι αδύνατο.

- Τέλος αν $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ τότε

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f^3(x)-5f^2(x)+7f(x)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+5x-15\right)=-\infty$.

Θέτουμε $f(x)=u$ και έχουμε:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f^3(x)-5f^2(x)+7f(x)\right]=\lim\limits_{u\to-\infty}\left(u^3+5u^2+7u\right)=\lim\limits_{u\to-\infty}u^3=-\infty$.

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$. Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\kappa\in\mathbb{R}$, τότε

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f^3(x)-5f^2(x)+7f(x)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3+5x-15\right)\Leftrightarrow \kappa^3-5\kappa^2+7\kappa=+\infty$ που είναι αδύνατο.

- Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, τότε

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f^3(x)-5f^2(x)+7f(x)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3+5x-15\right)=+\infty$.

Θέτουμε $f(x)=u$ και έχουμε:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f^3(x)-5f^2(x)+7f(x)\right]=\lim\limits_{u\to-\infty}\left(u^3-5u^2+7u\right)=\lim\limits_{u\to-\infty}u^3=-\infty$ που είναι αδύνατο.

- Τέλος αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ τότε

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f^3(x)-5f^2(x)+7f(x)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3+5x-15\right)=+\infty$. Θέτουμε $f(x)=u$ οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f^3(x)-5f^2(x)+7f(x)\right]=\lim\limits_{u\to+\infty}\left(u^3+5u^2+7u\right)=\lim\limits_{u\to+\infty}u^3=+\infty$.

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Επειδή η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f, είναι διάστημα, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, το σύνολο τιμών της f είναι το $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

β) i. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f^3(x)-4f(x)+5}{f^2(x)+6f(x)-4}\underset{\substack{x\to-\infty\Rightarrow\\ u\to-\infty}}{\overset{f(x)=u}{=}}\lim\limits_{u\to-\infty}\dfrac{u^3-4u+5}{u^2+6u-4}=\lim\limits_{u\to-\infty}\dfrac{u^{\cancel{3}}}{\cancel{u^2}}=-\infty$.

ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{f^2(x)+1}-f(x)\right)\underset{\substack{x\to+\infty\Rightarrow\\ u\to+\infty}}{\overset{f(x)=u}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\left(\sqrt{u^2+1}-u\right)=$

$$\lim_{u\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{u^2+1}-u\right)\left(\sqrt{u^2+1}+u\right)}{\sqrt{u^2+1}+u}=$$

$$\lim_{u\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{u^2+1}\right)^2-u^2}{\sqrt{u^2\left(1+\frac{1}{u^2}\right)}+u}=\lim_{u\to+\infty}\frac{1}{u\left(\sqrt{1+\frac{1}{u^2}}+1\right)}=\lim_{u\to+\infty}\left[\frac{1}{u}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{u^2}}+1}\right]=0.$$

iii. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\eta\mu\dfrac{1}{f(x)} \underset{\substack{x\to-\infty \Rightarrow \\ u\to 0}}{\overset{u=\frac{1}{f(x)}}{=}} \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{1}{u}\eta\mu u = \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u} = 1$.

γ) Η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα, το x_0 είναι η μοναδική της ρίζα,

οπότε: για κάθε $x < x_0 \overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow} g(x) < g(x_0) \Leftrightarrow x^3+5x-15<0 \Leftrightarrow$

$f(x) = \dfrac{x^3+5x-15}{f^2(x)-5f(x)+7} < 0$ και για κάθε

$x > x_0 \overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow} g(x) > g(x_0) \Leftrightarrow x^3+5x-15>0 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{x^3+5x-15}{f^2(x)-5f(x)+7} > 0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to x_0^-}\left[\left(f(x)+1\right)\dfrac{1}{f(x)}\dfrac{1}{x-x_0}\right] = (0+1)(-\infty)(-\infty) = +\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{1}{f(x)} \underset{\substack{x\to x_0^- \Rightarrow \\ u\to 0^-}}{\overset{f(x)=u}{=}} \lim\limits_{u\to 0^-}\dfrac{1}{u} = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{1}{x-x_0} \underset{\substack{x\to x_0^- \Rightarrow \\ u\to 0^-}}{\overset{x-x_0=u}{=}} \lim\limits_{u\to 0^-}\dfrac{1}{u} = -\infty$.

Είναι $\lim\limits_{x\to x_0^+}\left[\left(f(x)+1\right)\dfrac{1}{f(x)}\dfrac{1}{x-x_0}\right] = (0+1)(+\infty)(+\infty) = +\infty$ αφού

$\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{1}{f(x)} \underset{\substack{x\to x_0^+ \Rightarrow \\ u\to 0^+}}{\overset{f(x)=u}{=}} \lim\limits_{u\to 0^+}\dfrac{1}{u} = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{1}{x-x_0} \underset{\substack{x\to x_0^+ \Rightarrow \\ u\to 0^+}}{\overset{x-x_0=u}{=}} \lim\limits_{u\to 0^+}\dfrac{1}{u} = +\infty$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)+1}{f(x)(x-x_0)} = \lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)+1}{f(x)(x-x_0)} = +\infty$, είναι

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)+1}{f(x)(x-x_0)} = +\infty$.

16 Η έννοια της παραγώγου

Η παράγωγος στη γραφική παράσταση

23. α) Είναι $ABx = 135^\circ$ οπότε $OBA = 45^\circ$ άρα το τρίγωνο AOB είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, επομένως $(OA) = (OB) \Leftrightarrow f(0) = 2$.

Όμως $f'(0) = \lambda_\varepsilon = \varepsilon\varphi 135^\circ = = -\varepsilon\varphi 45^\circ = -1$.

β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^2(x)-4}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(f(x)-2)(f(x)+2)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{f(x)-2}{x}(f(x)+2)\right] =$

$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{f(x)-f(0)}{x}(f(x)+2)\right] = f'(0)(f(0)+2) = -4$.

24.α) Από το σχήμα διαπιστώνουμε ότι $f(-3) = -1$ και $f(4) = -4$.

Επίσης $f'(-3) = \lambda_{\varepsilon_2} = \dfrac{2-0}{0-(-2)} = \dfrac{2}{2} = 1$ και $f'(4) = \lambda_{\varepsilon_1} = 0$.

Άρα $\Pi = \dfrac{f(-3)f'(4)+f(4)f'(-3)}{f(-3)-f(-4)} = \dfrac{-1\cdot 0+(-4)\cdot 1}{-1-(-4)} = \dfrac{-4}{3}$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{f(x)+1}{x+3} = \lim\limits_{x\to -3}\dfrac{f(x)-f(-3)}{x+3} = f'(-3) = 1$ και

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(4+h)+4+h}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(4+h)-f(4)}{h}+\dfrac{h}{h}\right) = f'(4)+1 = 1$.

25.α) Είναι $\lambda_\varepsilon = \dfrac{4-0}{2+6} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$ οπότε η (ε) έχει εξίσωση :

$y-4 = \dfrac{1}{2}(x-2) \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{2}x+3$.

β) Το σημείο $A(-2, g(-2))$ ανήκει στην ευθεία (ε) οπότε

$g(-2) = \dfrac{1}{2}\cdot(-2)+3 = -1+3 = 2$.. Επίσης $f(2) = 4$, $f'(2) = g'(-2) = \lambda_\varepsilon = \dfrac{1}{2}$,

άρα $8f'(2)g'(-2) = f(2)-g(-2) \Leftrightarrow 8\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = 4-2 \Leftrightarrow 2 = 2$ που ισχύει.

γ) Είναι $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-4}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = f'(2) = \dfrac{1}{2}$,

$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{g(x)-2}{x+2} = \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{g(x)-g(-2)}{x+2} = g'(-2) = \dfrac{1}{2}$.

δ) Είναι $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{xf(x)-8}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{xf(x)-4x+4x-8}{x-2}=$

$\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x\left(f(x)-4\right)}{x-2}+\dfrac{4\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}\right)=2f'(2)+4=5$.

ε) Είναι $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)g(h-2)-2f(2+h)-4g(h-2)+8}{h^2}=$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)\left(g(h-2)-2\right)-4\left(g(h-2)-2\right)}{h^2}=$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\left(f(2+h)-4\right)\left(g(h-2)-2\right)}{h^2}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-4}{h}\cdot\dfrac{g(h-2)-2}{h}=\dfrac{1}{4}$.

Εύρεση $f'(x_0)$

26. α) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-1)\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}}=2$ οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στο 3 με $f'(3)=2$.

β) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{x-2}+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(x-2)}=-1$ οπότε η g είναι παραγωγίσιμη στο 1 με $g'(1)=-1$.

γ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{h(x)-h(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{2}}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x^2-x}+\sqrt{2}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\cancel{(x-2)}(x+1)}{\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{x^2-x}+\sqrt{2}\right)}=\dfrac{3}{2\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$ οπότε η h είναι παραγωγίσιμη στο 2 με $h'(2)=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$.

δ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x+1}{x-2}+\frac{1}{2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{2x+2+x-2}{x-2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\cancel{x}}{2\cancel{x}(x-2)}=$

$-\dfrac{3}{4}=\varphi'(0)$ οπότε η φ είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $\varphi'(0)=-\dfrac{3}{4}$.

27.α) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\left|x^2-1\right|}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-\left(x^2-1\right)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}=-2$,

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{|x^2-1|}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}=2$ άρα δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=-1$.

β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημ^2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{ημx}{x}\cdot ημx\right)=0$ οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0)=0$.

γ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cancel{\sqrt{x}-1}}{\left(\sqrt{x}-1\right)^{\cancel{2}}}=+\infty$ άρα δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$

δ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sqrt{x}+2ημx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sqrt{x}+2\dfrac{ημx}{x}\right)=2$.

28.α) Είναι $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=4$, $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\dfrac{11}{2}$ οπότε η f δεν είναι συνεχής στο 2 άρα δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

β) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2ημx}{x}=2$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cancel{x}(x+2)}{\cancel{x}}=2$

οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0)=2$.

29.α) Για $x=0$ είναι $f(0)=0^2-0+ημ0=0$. Αν $x>0$ τότε

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{x}{\ln x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\ln x}=0$, γιατί $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$.

Αν $x<0$ τότε $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2-x+ημx}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x-1+\dfrac{ημx}{x}\right)=0$.

Επομένως $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=0$ άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=0$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}xημ\dfrac{1}{x}$. Όμως $\left|xημ\dfrac{1}{x}\right|=|x|\left|ημ\dfrac{1}{x}\right|\le|x|\Leftrightarrow$

$-|x|\le xημ\dfrac{1}{x}\le|x|$. Είναι $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0=\lim\limits_{x\to 0}\left(-|x|\right)$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}xημ\dfrac{1}{x}=0=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=0$.

30. Είναι $g(2)=\left(2^2-3\cdot 2+2\right)f(2)=0$ οπότε

$$\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x^2-3x+2\right)f(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)\cancel{(x-2)}f(x)}{\cancel{x-2}}=f(2)$$, άρα η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=2$ με $g'(2)=f(2)$.

Αυξημένης δυσκολίας

31. Είναι: $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$. Θέτουμε $\dfrac{1}{x}=u$, όταν $x\to 0^+$ είναι $u\to+\infty$ $(x>0)$. Άρα $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{1}{1+e^u}=0$.

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, με $f'(0)=0$.

32.α) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cancel{\sqrt[3]{x-1}}}{\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^{\cancel{3}\,2}}=+\infty$, άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1.

β) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{4}}{x-2}=$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{4}\right)\left[\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^2+\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{4}+\left(\sqrt[3]{4}\right)^2\right]}{(x-2)\left[\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^2+\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{4}+\left(\sqrt[3]{4}\right)^2\right]}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^3-\left(\sqrt[3]{4}\right)^3}{(x-2)\left[\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^2+\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{4}+\left(\sqrt[3]{4}\right)^2\right]}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{(x-2)\left[\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^2+\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{4}+\left(\sqrt[3]{4}\right)^2\right]}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}\left[\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^2+\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{4}+\left(\sqrt[3]{4}\right)^2\right]}=\frac{4}{6\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{4}}{3}.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 2, με $f'(2)=\dfrac{\sqrt[3]{4}}{3}$.

33.α) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\cancel{x^2}-1-\cancel{x^2}+16+x^3-x-21}{x-2}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^3-x-6}{x-2}=$

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\cancel{(x-2)}\left(x^2+2x+3\right)}{\cancel{x-2}}=11$ άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 2, με $f'(2)=11$.

(Είναι $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-1\right)=3>0,\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-16\right)=-12<0,\lim\limits_{x\to 2}\left(x^3-x\right)=6>0$ οπότε $x^2-1>0, x^2-16<0$ και $x^3-x>0$ κοντά στο 2).

β) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-x^2+1-x^2+16-x^3+x-15}{x-1}=$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-x^3-2x^2+x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\cancel{(x-1)}\left(-x^2-3x-2\right)}{\cancel{x-1}}=-6$.

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\cancel{x^2}-1-\cancel{x^2}+16+x^3-x-15}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}=2$,

άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1.

34. Η f είναι παραγωγίσιμη στο 4 οπότε

$\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{f(x)-f(4)}{x-4}=f'(4)=0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(3x+1)-f(4)}{x-1}\overset{3x+1=u}{\underset{u\to 4^-}{=}}\lim\limits_{u\to 4^-}\dfrac{f(u)-f(4)}{\frac{u-1}{3}-1}=$

$\lim\limits_{u\to 4^-}3\dfrac{f(u)-f(4)}{u-4}=3f'(4)=0$,

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(6x-2)-f(4)}{x-1}\overset{6x-2=u}{\underset{u\to 4^+}{=}}\lim\limits_{u\to 4^+}\dfrac{f(u)-f(4)}{\frac{u+2}{6}-1}=$

$\lim\limits_{u\to 4^+}6\dfrac{f(u)-f(4)}{u-4}=6f'(4)=0$, άρα η g είναι παραγωγίσιμη στο 1 με $g'(1)=0$

35. Η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και στο 1 οπότε

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$ και

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(4)}{x-1}=f'(1)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^-}\dfrac{g(x)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}=2\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^-}\dfrac{f(2x)-f(1)}{2x-1}\overset{h=2x}{\underset{x\to \frac{1}{2}^-,\ h\to 1^-}{=}}2\lim\limits_{h\to 1^-}\dfrac{f(h)-f(1)}{h-1}=2f'(1)$,

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\frac{g(x)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}} = 2\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\frac{f(2x-1)-f(1)}{2x-1} \underset{\substack{x\to\frac{1}{2}^+,\\ u\to 0^+}}{\overset{u=2x-1}{=}} 2\cdot\lim_{u\to0^+}\frac{f(u)-f(0)}{u} = 2f'(0).$$

Είναι $\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}\frac{g(x)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}} = \lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\frac{g(x)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 2f'(1)=2f'(0) \Leftrightarrow$

$f'(1)=f'(0)$. Άρα η g είναι παραγωγίσιμη στο $\frac{1}{2}$ αν και μόνο αν $f'(0)=f'(1)$.

36. Η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 οπότε

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to0}\frac{f(x)-2}{x} = f'(0)=1.$$

α) Είναι $g(0)=0$ οπότε $\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x\to0}\frac{2x^{\cancel{2}}f(x)-3\cancel{x}}{\cancel{x}} =$

$\lim_{x\to0}(2xf(x)-3)=-3$, άρα η g είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $g'(0)=-3$.

β) Είναι $g(0)=2$ οπότε

$$\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x\to0}\frac{f(x)-\frac{x}{f(x)}-2}{x} = \lim_{x\to0}\left(\frac{f(x)-2}{x}-\frac{1}{f(x)}\right) = 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}, \text{ άρα}$$

η g είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $g'(0)=\frac{1}{2}$.

γ) Είναι $g(0)=0$ οπότε

$$\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x\to0}\left(\frac{(x^2+2x)f(x)-3x}{x}\right) = \lim_{x\to0}\left(\frac{(x^2+2x)f(x)}{x}-\frac{3\cancel{x}}{\cancel{x}}\right) =$$

$\lim_{x\to0}\left(\frac{\cancel{x}(x+2)f(x)}{\cancel{x}}-3\right) = 2f(0)-3=1$ άρα η g είναι παραγωγίσιμη στο 0 με

$g'(0)=1$.

δ) Είναι $g(0)=2$ οπότε

$$\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{f^2(x)+x+x^2}{f(x)}-2}{x} = \lim_{x\to0}\frac{f^2(x)+x+x^2-2f(x)}{xf(x)} =$$

$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\cancel{f(x)}\left(f(x)-2\right)}{x\,\cancel{f(x)}}+\dfrac{\cancel{x}(x+1)}{\cancel{x}f(x)}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\left(f(x)-2\right)}{x}+\dfrac{\cancel{x}(x+1)}{\cancel{x}f(x)}\right]=\dfrac{3}{2}$, άρα η g είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $g'(0)=\dfrac{3}{2}$.

Εύρεση f ΄(x0) από ανισοτική σχέση

37. Για $x=0$ είναι $\etaμ0-2\cdot 0^3\le f(0)\le \etaμ0+2\cdot 0^2 \Leftrightarrow 0\le f(0)\le 0\Leftrightarrow f(0)=0$

Αν $x>0$ τότε

$\etaμx-2x^3\le f(x)\le \etaμx+2x^2 \Leftrightarrow \dfrac{\etaμx}{x}-2x^2\le \dfrac{f(x)-f(0)}{x}\le \dfrac{\etaμx}{x}+2x$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\etaμx}{x}-2x^2\right)=1$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\etaμx}{x}+2x\right)=1$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=1$ (1). Αν $x<0$ τότε

$\etaμx-2x^3\le f(x)\le \etaμx+2x^2 \Leftrightarrow \dfrac{\etaμx}{x}-2x^2\ge \dfrac{f(x)-f(0)}{x}\ge \dfrac{\etaμx}{x}+2x$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{\etaμx}{x}-2x^2\right)=1$ και $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{\etaμx}{x}+2x\right)=1$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=1$ (2). Από τις σχέσεις $(1),(2)$ προκύπτει ότι

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=1$ άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=1$.

38. Για $x=e$ είναι $f(e)\le g(e)\le f(e)\Leftrightarrow g(e)=f(e)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=e$ άρα

$\lim\limits_{x\to e^+}\dfrac{f(x)-f(e)}{x-e}=\lim\limits_{x\to e^-}\dfrac{f(x)-f(e)}{x-e}=f'(e)=3$.

Για $x>e$ είναι $f(x)-f(e)\le g(x)-g(e)\le f(x)-f(e)+(x-e)^3 \Leftrightarrow$

$\dfrac{f(x)-f(e)}{x-e}\le \dfrac{g(x)-g(e)}{x-e}\le \dfrac{f(x)-f(e)}{x-e}+(x-e)^2$.

Είναι $\lim\limits_{x\to e^+}\dfrac{f(x)-f(e)}{x-e}=f'(e)=3$ και $\lim\limits_{x\to e^+}\left(\dfrac{f(x)-f(e)}{x-e}+(x-e)^2\right)=f'(e)=3$, άρα $\lim\limits_{x\to e^+}\dfrac{g(x)-g(e)}{x-e}=3$ (1). Όμοια για $x<e$ είναι $\lim\limits_{x\to e^-}\dfrac{g(x)-g(e)}{x-e}=3$ (2)

Από (1),(2) έχουμε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο e με $g'(e)=3$.

39.Οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $x_0=1$ άρα

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)}{x-1}=f'(1) \text{ και } \lim_{x\to 1^+}\frac{g(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{g(x)}{x-1}=g'(1).$$

Για $x>1$ είναι $f(x)-f(1)\le g(x)-g(1)+x^2-x \Leftrightarrow$

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\le\frac{g(x)-g(1)}{x-1}+\frac{x\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}, \text{ οπότε}$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\le\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{g(x)-g(1)}{x-1}+x\right)\Leftrightarrow f'(1)\le g'(1)+1 \quad (1)$$

Για $x<1$ είναι $f(x)-f(1)\le g(x)-g(1)+x^2-x \Leftrightarrow$

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\ge\frac{g(x)-g(1)}{x-1}+\frac{x\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}, \text{ οπότε}$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\ge\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{g(x)-g(1)}{x-1}+x\right)\Leftrightarrow f'(1)\ge g'(1)+1 \quad (2)$$

Από (1),(2) έχουμε $f'(1)=g'(1)+1\Leftrightarrow f'(1)-g'(1)=1$.

40.Είναι $|f(x)-g(x)|\le x^2$ (1). Η σχέση (1) για $x=0$ γίνεται:

$|f(0)-g(0)|\le 0^2 \Leftrightarrow f(0)-g(0)=0\Leftrightarrow f(0)=g(0)$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ άρα

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=g'(0)=2$. Από την (1) έχουμε:

$$-x^2\le f(x)-g(x)\le x^2 \Leftrightarrow g(x)-x^2\le f(x)\le x^2+g(x)\overset{g(0)=f(0)}{\Leftrightarrow}$$

$$g(x)-g(0)-x^2\le f(x)-f(0)\le x^2+g(x)-g(0) \quad (2)$$

Αν $x>0$ έχουμε: $\dfrac{g(x)-g(0)}{x}-x\le\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\le\dfrac{g(x)-g(0)}{x}+x$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{g(x)-g(0)}{x}-x\right)=g'(0)=2=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{g(x)-g(0)}{x}+x\right)$ άρα από το

κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=2$ (3).

Αν $x<0$ από τη (2) έχουμε:

$$\frac{g(x)-g(0)}{x}-x \geq \frac{f(x)-f(0)}{x} \geq \frac{g(x)-g(0)}{x}+x \Leftrightarrow$$

$$\frac{g(x)-g(0)}{x}+x \leq \frac{f(x)-f(0)}{x} \leq \frac{g(x)-g(0)}{x}-x .$$

Είναι: $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{g(x)-g(0)}{x}-x\right)=g'(0)=2=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{g(x)-g(0)}{x}+x\right)$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=2 \quad (4)$

Από τις σχέσεις $(3),(4)$ προκύπτει: $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=2$.

Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=2$.

Αυξημένης δυσκολίας

41. Οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $x_0=0$ άρα

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0) \text{ και}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{g(x)-g(0)}{x}=g'(0).$$

Για x>0 είναι $f(x)>g(x)\Leftrightarrow f(x)-f(0)>g(x)-g(0)\Leftrightarrow$

$\frac{f(x)-f(0)}{x}>\frac{g(x)-g(0)}{x}$ οπότε $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}\geq \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x}\Leftrightarrow$

$f'(0)\geq g'(0)\ (1)$. Για x<0 είναι $f(x)>g(x)\Leftrightarrow f(x)-f(0)>g(x)-g(0)\Leftrightarrow$

$\frac{f(x)-f(0)}{x}<\frac{g(x)-g(0)}{x}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}\leq \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{g(x)-g(0)}{x}\Leftrightarrow$

$f'(0)\leq g'(0)\ (2)$. Από $(1),(2)\Rightarrow f'(0)=g'(0)$.

42. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στα $x_0=0, x_1=1$, οπότε

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}=f'(0)$ και $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)}{x-1}=f'(1)$.

Είναι $f(x)>x^2-x\Leftrightarrow f(x)>x(x-1)\ (1)$. Αν $x>0$ η (1) γίνεται

$\frac{f(x)}{x}>x-1$ οπότε $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}\geq \lim\limits_{x\to 0^+}(x-1)\Leftrightarrow f'(0)\geq -1$ (2). Αν $x<0$ η (1)

γίνεται $\frac{f(x)}{x}<x-1$ οπότε $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}\leq \lim\limits_{x\to 0^+}(x-1)\Leftrightarrow f'(0)\leq -1$ (3)

Από (2),(3) $\Rightarrow f'(0)=-1$. Αν $x>1$ η (1) γίνεται $\dfrac{f(x)}{x-1}>x$ οπότε

$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)}{x-1}\ge\lim\limits_{x\to1^+}x \Leftrightarrow f'(1)\ge1$ (4). Αν $x<1$ η (1) γίνεται $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}<x$

οπότε $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\le\lim\limits_{x\to1^-}x \Leftrightarrow f'(1)\le1$ (5)

Από (4),(5) $\Rightarrow f'(1)=1$. Επομένως $f'(0)+f'(1)=-1+1=0$.

43. Στη σχέση $f(x)\ge|x|$ για $x=0$ προκύπτει $f(0)\ge0$. Πρέπει να αποκλείσουμε την περίπτωση όπου $f(0)=0$. Έστω $f(0)=0$.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ οπότε

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)}{x}=f'(0)$.

• Αν $x>0$ τότε $f(x)\ge x \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x}\ge1 \Leftrightarrow$ άρα $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\ge1$ οπότε $f'(0)\ge1$ (1)

• Αν $x<0$ τότε $f(x)\ge-x \overset{:x<0}{\Leftrightarrow} \dfrac{f(x)}{x}\le-1 \Leftrightarrow$ άρα $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\le-1$ οπότε $f'(0)\le-1$ (2)

Από (1) και (2) καταλήγουμε σε άτοπο, άρα $f(0)>0$.

44.α) Για $x=0$ είναι $|f(0)|\le0 \Leftrightarrow f(0)=0$. Είναι $|f(x)-3x|\le ημ^2x \Leftrightarrow$

$-ημ^2x\le f(x)-3x\le ημ^2x \Leftrightarrow 3x-ημ^2x\le f(x)\le 3x+ημ^2x$.

Για $x>0$ είναι: $3-ημx\cdot\dfrac{ημx}{x}\le\dfrac{f(x)}{x}\le3+ημx\cdot\dfrac{ημx}{x}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}\left(3+ημx\dfrac{ημx}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(3-ημx\dfrac{ημx}{x}\right)=3$ οπότε $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}=3$.

Όμοια $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)}{x}=3$, οπότε $f'(0)=3$.

β) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(9x)-f(x)}{f(2x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{9\dfrac{f(9x)}{9x}-\dfrac{f(x)}{x}}{2\dfrac{f(2x)}{2x}}=\dfrac{27-3}{6}=4$, γιατί για οποιοδήποτε

$k\ne0$ ισχύει $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(kx)}{kx}\underset{u\to0}{\overset{kx=u}{=}}\lim\limits_{u\to0}\dfrac{f(u)}{u}=3$.

45. Η g είναι παραγωγίσιμη στο 1 με $g'(1)=0$ οπότε

$$\lim_{x\to1^+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)\Leftrightarrow\lim_{x\to1^+}\frac{g(x)+1}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{g(x)+1}{x-1}=0.$$

Για x = 1 είναι $|f(1)-1|\le|g(1)+1|\Leftrightarrow|f(1)-1|\le0\Leftrightarrow f(1)=1$. Για $x\ne1$ είναι

$$|f(x)-1|\le|g(x)+1|\Leftrightarrow\frac{|f(x)-f(1)|}{|x-1|}\le\frac{|g(x)-g(1)|}{|x-1|}\Leftrightarrow$$

$$\left|\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right|\le\left|\frac{g(x)-g(1)}{x-1}\right| \text{ οπότε}$$

$$\lim_{x\to1}\left|\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right|\le\lim_{x\to1}\left|\frac{g(x)-g(1)}{x-1}\right|\Leftrightarrow\lim_{x\to1}\left|\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right|\le\left|\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}\right|\Leftrightarrow$$

$\lim\limits_{x\to1}\left|\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right|\le0$ (1). Όμως $\left|\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right|\ge0$ άρα $\lim\limits_{x\to1}\left|\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right|\ge0\ (2)$.

Από (1), (2) είναι

$$\lim_{x\to1}\left|\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right|=0\Leftrightarrow\left|\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right|=0\Leftrightarrow\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=0\Leftrightarrow f'(1)=0$$

46. Είναι $f'(1)>0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)}{x-1}>0$ οπότε $\frac{f(x)}{x-1}>0$ για τιμές του x πολύ κοντά στο 1. Όμως $x<1\Leftrightarrow x-1<0$, οπότε $f(x)<0$.

Εύρεση f ΄(x₀) από ανισοτική σχέση

47. β) Για $h=0$ είναι $f(-3)=2$. Είναι $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(-3+h)-f(-3)}{h}=$

$\lim\limits_{h\to0}\frac{2-2h+3h^2-4h^3-2}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{\cancel{h}(-2+3h-4h^2)}{\cancel{h}}=-2$, άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο -3 με $f'(-3)=-2$.

β) Είναι $f(-3)+f'(-3)=2-2=0$.

Αυξημένης δυσκολίας

48. Η σχέση (1) για $x=1$ γίνεται: $f^3(1)+2f(1)=1-3+2\Leftrightarrow$

$f(1)\left(\underbrace{f^2(1)+2}_{\ne0}\right)=0\Leftrightarrow f(1)=0$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ οπότε θα είναι και συνεχής στο 1 άρα $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)=0$.

Για $x \neq 1$ έχουμε: $f^3(x)+2f(x)=x^2-3x+2 \Leftrightarrow$

$$f(x)\left(\underbrace{f^2(x)+2}_{\neq 0}\right)=(x-1)(x-2) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x-1}=\frac{x-2}{f^2(x)+2}, \text{ άρα}$$

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{f(x)}{x-1}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{x-2}{f^2(x)+2} \Leftrightarrow f'(1)=-\frac{1}{2}.$$

49. Στη σχέση $g^3(x)+g(x)+4=x^2 \quad (1)$. Θέτουμε $x=2$, οπότε

$$g^3(2)+g(2)+4=4 \Leftrightarrow g(2)\Big[\underbrace{g^2(2)+1}_{\neq 0}\Big]=0 \Leftrightarrow g(2)=0.$$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=2$, οπότε θα είναι συνεχής, άρα

$$\lim_{x\to 2}g(x)=g(2)=0 \text{ και } g'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{g(x)}{x-2}.$$

Από την (1) έχουμε $g^3(x)+g(x)=x^2-4 \Leftrightarrow$

$$g(x)\left[g^2(x)+1\right]=(x-2)(x+2) \Leftrightarrow \frac{g(x)}{x-2}=\frac{x+2}{g^2(x)+1} \text{ οπότε}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{g(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{g^2(x)+1} \Leftrightarrow g'(2)=4.$$

50. Είναι $f^3(x)+4f(x)=x^2-4x+3$. Από τη σχέση (1) για $x=1$, $x=3$ έχουμε αντίστοιχα: $f^3(1)+4f(1)=0 \Leftrightarrow f(1)\left(\underbrace{f^2(1)+4}_{\neq 0}\right)=0 \Leftrightarrow f(1)=0$ και

$$f^3(3)+4f(3)=0 \Leftrightarrow f(3)\left(\underbrace{f^2(3)+4}_{\neq 0}\right)=0 \Leftrightarrow f(3)=0.$$

Είναι $f(x)\left(f^2(x)+4\right)=(x-1)(x-3) \overset{x\neq 1}{\Leftrightarrow} \dfrac{f(x)}{x-1}=\dfrac{x-3}{f^2(x)+4}$ οπότε

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-3}{f^2(x)+4} \Leftrightarrow f'(1)=-\frac{1}{2}.$$

Είναι $f(x)\left(f^2(x)+4\right)=(x-1)(x-3) \overset{x\neq 3}{\Leftrightarrow} \dfrac{f(x)}{x-3}=\dfrac{x-1}{f^2(x)+4}$ οπότε

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{x-1}{f^2(x)+4} \Leftrightarrow f'(3)=\frac{1}{2}=-f'(1).$$

51. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ οπότε

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x} = f'(0)$. Για $x \neq 0$ είναι $f(x)\eta\mu x + xf(\eta\mu x) = 4x^2 \Leftrightarrow$

$\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{\eta\mu x}{x} + \frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\cdot\frac{\eta\mu x}{x} = 4$ οπότε $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{x}\frac{\eta\mu x}{x} + \frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\frac{\eta\mu x}{x}\right) = 4 \Leftrightarrow$

$f'(0) + f'(0) = 4 \Leftrightarrow f'(0) = 2$ αφού $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x} \underset{u\to 0}{\overset{\eta\mu x = u}{=}} \lim\limits_{u\to 0}\frac{f(u)}{u} = f'(0)$.

52. Είναι $f^2(x) + xf(x) + \eta\mu^2 x = 0$ (1). Από τη σχέση (1):

- Για $x = 0$ είναι $f(0) = 0$,
- Για $x \neq 0$ είναι $\frac{f^2(x)}{x^2} + \frac{xf(x)}{x^2} + \frac{\eta\mu^2 x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow$

$\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 + \frac{f(x)}{x} + \left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2 = 0$. Αν η f ήταν παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ τότε

$f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R}$. Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 + \frac{f(x)}{x} + \left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2\right] = 0 \Leftrightarrow$

$\left(f'(0)\right)^2 + f'(0) + 1 = 0$ που είναι αδύνατη αφού έχει $\Delta < 0$.

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

53. Είναι $f^3(x) + x^2 f(x) = \eta\mu x$ (1). Από τη σχέση (1):

- για $x = 0$ είναι $2f^3(0) = 0 \Leftrightarrow f^3(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$,
- για $x \neq 0$ είναι $2\frac{f^3(x)}{x^3} + \frac{f(x)}{x} = \frac{\eta\mu x}{x^3}$.

Αν η f ήταν παραγωγίσιμη στο $x = 0$, τότε $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left(2\frac{f^3(x)}{x^3} + \frac{f(x)}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\frac{1}{x^2}\right) \Leftrightarrow 2\lambda^2 + 2\lambda = +\infty$ που είναι αδύνατο. Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Συνεχής και παραγωγίσιμη

54.α) Είναι $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(x^2 + 2) = 3 = f(1)$ και $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(2x + 1) = 3$,
οπότε η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$. Για την παράγωγο στο $x_0 = 1$ έχουμε:

Για $x<1$: $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2+2-3}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-1}{x-1}=$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=2$ και για $x>1$: $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x+1-3}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x-2}{x-1}=$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2(x-1)}{x-1}=2$ οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 με $f'(1)=2$.

β) Είναι $f(2)=2^3-2+1=7$. Για $x<2$ είναι: $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x^3-x+1)=7$, για $x>2$ είναι: $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(4x-1)=7$ οπότε

$\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=f(2)$ άρα η f είναι συνεχής στο $x_0=2$.

Για $x<2$ είναι: $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^3-x+1-7}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^3-x-6}{x-2}=$

$=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{(x-2)(x^2+2x+3)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2+2x+3)=11$. Για $x>2$ είναι:

$\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{4x-1-7}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{4x-8}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{4(x-2)}{x-2}=4$.

Επομένως $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}\neq\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$, οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=2$.

γ) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως απόλυτη τιμή συνεχούς συνάρτησης.

Είναι $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{-(x^2-4)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{-\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}=-4$ και

$\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{(x^2-4)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}=4$, άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 2.

δ) Είναι $-1\leq \eta\mu\dfrac{1}{x}\leq 1\overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow}-x^2\leq x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}\leq x^2$. Όμως $\lim\limits_{x\to 0}(-x^2)=\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$, άρα από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$ επομένως η f είναι συνεχής στο 0.

Επίσης $\left|x\eta\mu\dfrac{1}{x}\right|\leq|x|\Leftrightarrow -|x|\leq x\eta\mu\dfrac{1}{x}\leq|x|$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}|x|=\lim\limits_{x\to 0}(-|x|)=0$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι

$\lim\limits_{x\to 0}x\eta\mu\dfrac{1}{x}=0$. Άρα $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\eta\mu\dfrac{1}{x}=0$.

55. Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ πρέπει να είναι και συνεχής σε αυτό, δηλαδή: $\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^+} f(x) = f(1)$. Είναι: $\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-}\left(3x^2-1\right) = 2$,

$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+}(\alpha x+\beta) = \alpha+\beta$ και $f(1) = 2$ άρα $\alpha+\beta = 2 \quad (1)$

Για $x<1$ είναι: $\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^-}\frac{3x^2-1-2}{x-1} = \lim_{x\to1^-}\frac{3x^2-3}{x-1} =$

$\lim_{x\to1^-}\frac{3(x-1)(x+1)}{x-1} = 6$. Για $x>1$ είναι:

$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^+}\frac{\alpha x+\beta-2}{x-1} = \lim_{x\to1^+}\frac{\alpha x+\beta-\alpha-\beta}{x-1} = \lim_{x\to1^+}\frac{\alpha(x-1)}{x-1} = \alpha$.

Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ πρέπει

$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ άρα $\alpha = 6$. Από την (1) έχουμε $\beta = -4$.

56. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$, θα είναι και συνεχής στο 2, οπότε

- $\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^+} f(x) = f(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha+3 = 4 \\ 4-2\beta+\gamma = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha = 1 \\ -2\beta+\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{4} \\ \gamma = 2\beta \end{cases}$.
- $\lim_{x\to2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$.

Όμως $\lim_{x\to2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} \overset{\alpha=\frac{1}{4}}{=} \lim_{x\to2^-}\frac{\frac{1}{4}x^2+2x-1-4}{x-2} = \lim_{x\to2^-}\frac{\frac{1}{4}x^2+2x-5}{x-2} =$

$\lim_{x\to2^-}\frac{x^2+8x-20}{4(x-2)} \lim_{x\to2^-}\frac{\cancel{(x-2)}(x+10)}{4\cancel{(x-2)}} = 3$,

$\lim_{x\to2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} \overset{\gamma=2\beta}{=} \lim_{x\to2^+}\frac{x^2-\beta x+2\beta-4}{x-2} = \lim_{x\to2^+}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2-\beta)}{\cancel{x-2}} = 4-\beta$.

Επομένως $4-\beta = 3 \Leftrightarrow \beta = 1$ και $\gamma = 2$.

Αυξημένης δυσκολίας

57. Για να είναι οι συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο $x_0 = 0$ πρέπει να είναι και συνεχείς στο 0, οπότε

- $\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^+} f(x) = f(0) = 1$,

$\lim_{x\to0^-} g(x) = \lim_{x\to0^+} g(x) = g(0) \Leftrightarrow \lim_{x\to0^-} f^2(x) = \lim_{x\to0^+}(\alpha x+\beta) = f^2(0) \Leftrightarrow \beta = 1$.

- $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-1}{x}=1,\ \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=g'(0)$.

Όμως $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f^2(x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{f(x)-1}{x}\left(f(x)+1\right)\right)=1\cdot 2=2$

- και $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\alpha x+\beta-1}{x}\overset{\beta=1}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\alpha x}{x}=\alpha$, άρα $\alpha=2$.

58. $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-\alpha(x^2-x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\alpha(x^2-x)}{x}\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-\alpha\cancel{x}(x-1)}{\cancel{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\alpha\cancel{x}(x-1)}{\cancel{x}}\Leftrightarrow\alpha=-\alpha\Leftrightarrow 2\alpha=0\Leftrightarrow\alpha=0$.

Τότε $f(x)=\beta$.

59. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ ισχύει:

- $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2}{x}=2$,
- η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ οπότε $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=2$.

Είναι $g(x)-g(0)=f(x)+\dfrac{x-2}{f(x)}-f(0)+\dfrac{2}{f(0)}=f(x)+\dfrac{x-2}{f(x)}-1$.

Επομένως $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+\dfrac{x-2}{f(x)}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^2(x)+x-2-f(x)}{xf(x)}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{f^2(x)-f(x)-2}{xf(x)}+\dfrac{x}{xf(x)}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{(f(x)-2)(f(x)+1)}{xf(x)}+\dfrac{1}{f(x)}\right]=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{f(x)-2}{x}\cdot\dfrac{f(x)+1}{f(x)}+\dfrac{1}{f(x)}\right]=2\cdot\dfrac{f(0)+1}{f(0)}+\dfrac{1}{f(0)}=2\cdot\dfrac{2+1}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{2}$.

60. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=2$ οπότε

$\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)}{x}=f'(2)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{g(x)\etaμ\dfrac{3x}{x-2}}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{g(x)}{x-2}\etaμ\dfrac{3x}{x-2}=0$.

(Ισχύει $\left|\frac{g(x)}{x-2}\eta\mu\frac{3x}{x-2}\right|=\left|\frac{g(x)}{x-2}\right|\left|\eta\mu\frac{3x}{x-2}\right|\le\left|\frac{g(x)}{x-2}\right|\Leftrightarrow$

$-\left|\frac{g(x)}{x-2}\right|\le\frac{g(x)}{x-2}\eta\mu\frac{3x}{x-2}\le\left|\frac{g(x)}{x-2}\right|$).

Είναι $\lim\limits_{x\to2}\left|\frac{g(x)}{x-2}\right|=|g'(2)|=0=\lim\limits_{x\to2}\left(-\left|\frac{g(x)}{x-2}\right|\right)$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to2}\frac{g(x)}{x-2}\eta\mu\frac{3x}{x-2}=0$).

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 2 με $f'(2)=0$.

61. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ ισχύει:

- $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$,
- η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ οπότε $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=$

$$\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu f(x)-x}{x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\eta\mu f(x)}{x}-\frac{x}{x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\cdot\frac{f(x)}{x}-1\right)=0.$$

(Αν θέσουμε $f(x)=u$, τότε $\lim\limits_{x\to0}u=\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=0$ οπότε

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}=\lim\limits_{u\to0}\frac{\eta\mu u}{u}=1$).

62. Επειδή η g είναι συνεχής στο $x_0=\rho$, ισχύει $\lim\limits_{x\to\rho^-}g(x)=\lim\limits_{x\to\rho^+}g(x)=g(\rho)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=\rho$, αν και μόνο αν:

$$\lim_{x\to\rho^-}\frac{f(x)-f(\rho)}{x-\rho}=\lim_{x\to\rho^+}\frac{f(x)-f(\rho)}{x-\rho}\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to\rho^-}\frac{|x-\rho|g(x)}{x-\rho}=\lim_{x\to\rho^+}\frac{|x-\rho|g(x)}{x-\rho}\Leftrightarrow\lim_{x\to\rho^-}\frac{-(x-\rho)g(x)}{x-\rho}=\lim_{x\to\rho^+}\frac{(x-\rho)g(x)}{x-\rho}\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to\rho^-}(-g(x))=\lim_{x\to\rho^+}g(x)\Leftrightarrow -g(\rho)=g(\rho)\Leftrightarrow 2g(\rho)=0\Leftrightarrow g(\rho)=0.$$

63.α) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 είναι και συνεχής σε αυτό, δηλαδή $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$. Για $x\ne0$ είναι $(x^2+x)f(x)+xf(x^2+x)=2x^3+2x^2\Leftrightarrow$

$xf(x^2+x)=2x(x^2+x)-x(x+1)f(x)\Leftrightarrow f(x^2+x)=2(x^2+x)-(x+1)f(x)$

οπότε $\lim\limits_{x\to 0} f\left(x^2+x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left[2\left(x^2+x\right)-\left(x+1\right)f\left(x\right)\right]=-f\left(0\right)$ (1)

Θέτουμε $x^2+x=u$. Όταν $x\to 0$ τότε $u\to 0$, οπότε η (1) γίνεται:

$\lim\limits_{u\to 0} f\left(u\right)=-f\left(0\right)\Leftrightarrow f\left(0\right)=-f\left(0\right)\Leftrightarrow 2f\left(0\right)=0\Leftrightarrow f\left(0\right)=0$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 άρα $f'\left(0\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(x\right)}{x}$. Για $x\neq 0,\ -1$ είναι:

$\left(x^2+x\right)f\left(x\right)+xf\left(x^2+x\right)=2x^3+2x^2\Leftrightarrow$

$\left(x^2+x\right)f\left(x\right)=2x\left(x^2+x\right)-xf\left(x^2+x\right)\Leftrightarrow f\left(x\right)=2x-x\dfrac{f\left(x^2+x\right)}{x^2+x}\Leftrightarrow$

$\dfrac{f\left(x\right)}{x}=2-\dfrac{f\left(x^2+x\right)}{x^2+x}$ οπότε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(x\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(2-\dfrac{f\left(x^2+x\right)}{x^2+x}\right)\Leftrightarrow$

$f'\left(0\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(2-\dfrac{f\left(x^2+x\right)}{x^2+x}\right)$ (2). Θέτουμε $x^2+x=u$.

Όταν $x\to 0$ τότε $u\to 0$, οπότε η (2) γίνεται:

$$f'\left(0\right)=\lim\limits_{u\to 0}\left(2-\dfrac{f\left(u\right)}{u}\right)\Leftrightarrow f'\left(0\right)=2-f'\left(0\right)\Leftrightarrow 2f'\left(0\right)=2\Leftrightarrow f'\left(0\right)=1$$

f ΄(x₀) και όρια

64.α) Έστω $\dfrac{f\left(2+h\right)}{h}=g\left(h\right)\overset{h\neq 0}{\Leftrightarrow} f\left(2+h\right)=hg\left(h\right)$. Η f είναι συνεχής στο 2 οπότε $f\left(2\right)=\lim\limits_{h\to 0}f\left(2+h\right)=\lim\limits_{h\to 0}hg\left(h\right)=0$.

β) Είναι $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(2+h\right)-f\left(2\right)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(2+h\right)}{h}=3$, άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 2 με $f'\left(2\right)=3$.

65. Θέτουμε $\dfrac{f\left(x-1\right)}{x}=g\left(x\right)\overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} f\left(-1+x\right)=xg\left(x\right)$. Η f είναι συνεχής στο -1 οπότε $f\left(-1\right)=\lim\limits_{x\to 0}f\left(-1+x\right)=\lim\limits_{x\to 0}xg\left(x\right)=0$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(-1+x\right)-f\left(-1\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(-1+x\right)}{x}=4\Leftrightarrow f'\left(-1\right)=4$.

66. Η f είναι παραγωγίσιμη στο 3 άρα:

- η f είναι συνεχής στο 3 οπότε $\lim\limits_{x\to 3}f\left(x\right)=f\left(3\right)=5$.
- $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f\left(x\right)-f\left(3\right)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f\left(x\right)-5}{x-3}=f'\left(3\right)=5$.

Επομένως $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f^2(x)-25}{x^2-x-6}=\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{f(x)-5}{x-3}\cdot\dfrac{f(x)+5}{x+2}\right)=5\cdot\dfrac{f(3)+5}{5}=10$.

67.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ άρα:

- η f είναι συνεχής στο 1 οπότε $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$,
- $f'(1)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

Επομένως $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{\sqrt{4x}-2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{[f(x)-f(1)]\cdot(\sqrt{4x}+2)}{(\sqrt{4x}-2)(\sqrt{4x}+2)}=$

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{[f(x)-f(1)]\cdot(\sqrt{4x}+2)}{4(x-1)}==\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\dfrac{\sqrt{4x}+2}{4}\right)=f'(1)\cdot1=f'(1)$.

β) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(f(x))^2-(f(1))^2}{\sqrt{4x}-2}=\lim\limits_{x\to1}\left[\left(\dfrac{f(x)-f(1)}{\sqrt{4x}-2}\right)(f(x)+f(1))\right]=f'(1)\cdot2\cdot f(1)$.

68. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)-\alpha}{x-x_0},x\neq x_0$ με $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\beta$.

Είναι $g(x)=\dfrac{f(x)-\alpha}{x-x_0}\Leftrightarrow f(x)-\alpha=g(x)(x-x_0)\Leftrightarrow$

$f(x)=\alpha+g(x)(x-x_0)$. Επομένως $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}[\alpha+g(x)(x-x_0)]\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\alpha\Leftrightarrow f(x_0)=\alpha$ αφού η f είναι συνεχής στο x_0.

Άρα $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-\alpha}{x-x_0}=\beta$ οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με $f'(x_0)=\beta$.

Αυξημένης δυσκολίας

69.α) Έστω $\dfrac{f(x)-2x}{x^2}=g(x)\overset{x\neq0}{\Leftrightarrow}f(x)=x^2g(x)+2x$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2g(x)+2x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cancel{x}(xg(x)+2)}{\cancel{x}}=$

$\lim\limits_{x\to0}(xg(x)+2)=2$, άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0)=2$.

γ) Είναι $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+x\eta\mu x-2x}{1-\sigma\upsilon\nu x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)x^2+\cancel{2x}+x\eta\mu x-\cancel{2x}}{1-\sigma\upsilon\nu x}=$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(g(x)x^2+x\eta\mu x\right)(1+\sigma\upsilon\nu x)}{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{g(x)x^2+x\eta\mu x}{\eta\mu^2 x}(1+\sigma\upsilon\nu x)\right]=$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{g(x)x^2}{\eta\mu^2 x}+\frac{x}{\eta\mu x}\right)(1+\sigma\upsilon\nu x)\right]=\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{g(x)}{\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2}+\frac{1}{\frac{\eta\mu x}{x}}\right)(1+\sigma\upsilon\nu x)\right]=4.$$

70.Έστω $\frac{f(x)-3x}{x^2}=g(x)\overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow}f(x)=x^2g(x)+3x$. Η f είναι συνεχής στο 0 οπότε $f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left(x^2g(x)+3x\right)=0$.

Είναι $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2g(x)+3x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(xg(x)+3\right)=3$, άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0)=3$.

71.Θέτουμε $3x-1=u\Leftrightarrow x=\frac{u+1}{3}$. Όταν $x\to 1$ τότε $u\to 2$. Είναι

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(3x-1)-\sqrt{x^2+3}}{x-1}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\lim_{u\to 2}\frac{f(u)-\sqrt{\left(\frac{u+1}{3}\right)^2+3}}{\frac{u+1}{3}-1}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow$$

$$\lim_{u\to 2}\frac{f(u)-\sqrt{\frac{(u+1)^2}{9}+3}}{\frac{u+1-3}{3}}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\lim_{u\to 2}\frac{f(u)-\sqrt{\frac{u^2+2u+1+27}{9}}}{\frac{u-2}{3}}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow$$

$$\lim_{u\to 2}\frac{f(u)-\sqrt{\frac{u^2+2u+1+27}{9}}}{\frac{u-2}{3}}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\lim_{u\to 2}\frac{f(u)-\frac{\sqrt{u^2+2u+28}}{3}}{\frac{u-2}{3}}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow$$

$\lim_{u\to 2}\frac{3f(u)-\sqrt{u^2+2u+28}}{u-2}=\frac{3}{2}$. Έστω $\frac{3f(u)-\sqrt{u^2+2u+28}}{u-2}=g(u)\overset{u\neq 2}{\Leftrightarrow}$

$f(u)=\frac{g(u)(u-2)+\sqrt{u^2+2u+28}}{3}$. Η f είναι συνεχής στο 2 οπότε

$$f(2)=\lim_{u\to 2}f(u)=\lim_{u\to 2}\frac{g(u)(u-2)+\sqrt{u^2+2u+28}}{3}=2.$$

Είναι $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{g(x)(x-2)+\sqrt{x^2+2x+28}}{3}-2}{x-2}=$

$=\lim_{x\to 2}\frac{g(x)(x-2)+\sqrt{x^2+2x+28}-6}{3(x-2)}=\lim_{x\to 2}\left(\frac{g(x)}{3}+\frac{\sqrt{x^2+2x+28}-6}{3(x-2)}\right)$

$=\lim_{x\to 2}\left(\frac{g(x)}{3}+\frac{x^2+2x-8}{3(x-2)\left(\sqrt{x^2+2x+28}+6\right)}\right)=$

$=\lim_{x\to 2}\left(\frac{g(x)}{3}+\frac{(x+4)\cancel{(x-2)}}{3\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{x^2+2x+28}+6\right)}\right)=\frac{1}{2}+\frac{6}{36}=\frac{3}{6}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 2 με $f'(2)=\frac{1}{3}$.

72.α) Έστω $\frac{f(1-h)+3}{h}=g(h)$, $h\neq 0$ με $\lim_{h\to 0}g(h)=5$, τότε:

$f(1+h)=h\cdot g(h)-3$ οπότε $\lim_{h\to 0}f(1+h)=\lim_{h\to 0}\left(h\cdot g(h)-3\right)=-3=f(1)$

αφού η f είναι συνεχής στο $x_0=1$.

Είναι: $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)+3}{h}=5$.

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ με $f'(1)=5$.

β) Είναι $\lim_{x\to 1}\frac{2f(x)+x^2+x+4}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2f(x)+6+x^2+x-2}{x^2-1}=$

$\lim_{x\to 1}\frac{2\left(f(x)+3\right)+(x+2)(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{2\frac{f(x)+3}{x-1}+x+2}{x+1}=\frac{2f'(1)+1+2}{1+1}=\frac{13}{2}$.

73. Έστω $\frac{g(x^2+2)}{x\cdot \eta\mu 2x}=\varphi(x)$, $x\neq 0$ με $\lim_{x\to 0}\varphi(x)=5$.

Τότε $g(x^2+2)=x\cdot\eta\mu 2x\varphi(x)$.

Είναι $\lim_{x\to 0}g(x^2+2)=\lim_{x\to 0}\left[x\cdot\eta\mu 2x\varphi(x)\right]\Leftrightarrow\lim_{x\to 0}g(x^2+2)=0$.

Θέτουμε $h=x^2+2$. Όταν $x\to 0$ τότε $h\to 2$.

Επομένως $\lim_{x\to 0}g(x^2+2)=\lim_{h\to 2}g(h)=0=g(2)$ αφού η g είναι συνεχής στο $x_0=2$.

Για να είναι η g παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$, αρκεί να υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το όριο

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\frac{g(x)}{x-2}$. Θέτουμε $x = 2+h^2$, οπότε όταν $x \to 2$, $h \to 0$.

Τότε: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{g(x)}{x-2} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{g(2+h^2)}{2+h^2-2} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{h\cdot ημ2h\cdot φ(h)}{h^2} =$

$= \lim\limits_{h\to 0}\left[\frac{ημ2h}{h}\cdot φ(h)\right] = \lim\limits_{h\to 0}\left[2\frac{ημ2h}{2h}\cdot φ(h)\right] = 2\cdot 1\cdot 5 = 10$.

Οπότε η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$ με $g'(2) = 10$.

74. Η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 άρα:

- η f είναι συνεχής στο 1 οπότε $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$,
- $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) = 5$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2f(x)-f(1)\sqrt{x^2+3}}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{2f(x)-2f(1)+2f(1)-f(1)\sqrt{x^2+3}}{x-1} =$

$$= \lim_{x\to 1}\left[2\frac{f(x)-f(1)}{x-1} - f(1)\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}\right] =$$

$$\lim_{x\to 1}\left[2\frac{f(x)-f(1)}{x-1} - f(1)\frac{x^2+3-4}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}\right] =$$

$$\lim_{x\to 1}\left[2\frac{f(x)-f(1)}{x-1} - f(1)\frac{x^2-1}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 1}\left[2\frac{f(x)-f(1)}{x-1} - f(1)\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}\right] = 2f'(1) - \frac{1}{2}f(1) = 10 - \frac{1}{2}f(1)$$

75. Η f είναι παραγωγίσιμη στο h άρα: $\lim\limits_{x\to h}\frac{f(x)-f(h)}{x-h} = f'(h)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to h}\frac{f(x)\sqrt{x}-f(h)\sqrt{h}}{x-h} = \lim\limits_{x\to h}\frac{f(x)\sqrt{x}-f(h)\sqrt{x}+f(h)\sqrt{x}-f(h)\sqrt{h}}{x-h} =$

$$= \lim_{x\to h}\left(\sqrt{x}\,\frac{f(x)-f(h)}{x-h} + f(h)\frac{\sqrt{x}-\sqrt{h}}{x-h}\right) =$$

$$=\lim_{x\to h}\left(\sqrt{x}\,\frac{f(x)-f(h)}{x-h}+f(h)\frac{\cancel{x-h}}{\cancel{(x-h)}\left(\sqrt{x}+\sqrt{h}\right)}\right)=$$

$$=\sqrt{h}f'(h)+\frac{f(h)}{2\sqrt{h}}=\frac{2hf'(h)+f(h)}{2\sqrt{h}}.$$

76. Η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 άρα $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=\alpha$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(3x)-f(x)}{6x}=$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(3x)-f(0)+f(0)-f(x)}{6x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(3x)-f(0)}{6x}-\frac{f(x)-f(0)}{6x}\right)=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{f(3x)-f(0)}{3x}-\frac{1}{6}\cdot\frac{f(x)-f(0)}{x}\right)=\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{6}\alpha=\frac{\alpha}{3}.$$

αφού $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(3x)-f(0)}{3x}\underset{\substack{x\to 0,\ u\to 0\\ u\to 0}}{\overset{u=3x}{=}}\lim\limits_{u\to 0}\frac{f(u)-f(0)}{u}=\alpha$.

77. Η f είναι παραγωγίσιμη στο -2 άρα $\lim\limits_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=f'(-2)=\lambda$.

Θέτουμε $\frac{1-2x}{x}=u\Leftrightarrow\frac{1}{x}-2=u\Leftrightarrow\frac{1}{x}=u+2\Leftrightarrow x=\frac{1}{u+2}$.

Όταν $x\to+\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}u=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-2x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2\cancel{x}}{\cancel{x}}=-2$.

Επομένως $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(f\left(\frac{1-2x}{x}\right)-f(-2)\right)\right]=$

$$\lim_{u\to -2}\left[\frac{1}{u+2}\left(f(u)-f(-2)\right)\right]=\lim_{u\to -2}\frac{f(u)-f(-2)}{u+2}=f'(-2)=\lambda.$$

78. Για όλα τα ερωτήματα ισχύει για $\kappa\neq 0$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+kh)-f(x_0)}{h}\underset{u\to 0}{\overset{kh=u}{=}}\lim_{u\to 0}\frac{f(x_0+u)-f(x_0)}{\frac{u}{k}}=$$

$\lim\limits_{u\to 0}k\frac{f(x_0+u)-f(x_0)}{u}=kf'(x_0)$ αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

α) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h}=$

$$\lim_{h\to0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}\right)==f'(x_0)-f'(x_0)=0\ .$$

β) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0+2h)-2f(x_0+h)+f(x_0)}{h}=$

$$\lim_{h\to0}\left(\frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}-2\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)=2f'(x_0)-2f'(x_0)=0\ .$$

γ) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f^2(x_0+2h)-f^2(x_0+h)}{h}=$

$$\lim_{h\to0}\left[\frac{f(x_0+2h)-f(x_0+h)}{h}\big(f(x_0+2h)+f(x_0+h)\big)\right]=$$

$$=\lim_{h\to0}\left[\left(\frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}-\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)\big(f(x_0+2h)+f(x_0+h)\big)\right]=$$

$$=\big(2f'(x_0)-f'(x_0)\big)\big(f(x_0)+f(x_0)\big)=2f'(x_0)f(x_0)\ .$$

(Η f είναι συνεχής στο x_0 αφού είναι παραγωγίσιμη στο x_0 οπότε.

Επίσης $\lim\limits_{h\to0}f(x_0+2h)\underset{\substack{h\to0,\ u\to0\\ u\to0}}{\overset{u=2h}{=}}\lim\limits_{u\to0}f(x_0+u)=f(x_0)$).

δ) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{\eta\mu h}=$

$$\lim_{h\to0}\left[\frac{1}{\frac{\eta\mu h}{h}}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}\right)\right]=f'(x_0)+f'(x_0)=2f'(x_0)$$

ε) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0+\mu h)-f(x_0-\nu h)}{(\mu+\nu)h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0+\mu h)-f(x_0)+f(x_0)-f(x_0-\nu h)}{(\mu+\nu)h}=$

$$\lim_{h\to0}\left(\frac{f(x_0+\mu h)-f(x_0)}{(\mu+\nu)h}-\frac{f(x_0-\nu h)-f(x_0)}{(\mu+\nu)h}\right)=$$

$$\lim_{h\to0}\left[\frac{1}{\mu+\nu}\left(\frac{f(x_0+\mu h)-f(x_0)}{h}-\frac{f(x_0-\nu h)-f(x_0)}{h}\right)\right]=$$

$$\frac{1}{\mu+\nu}\cdot\big(\mu f'(x_0)+\nu f'(x_0)\big)=\frac{\cancel{\mu+\nu}}{\cancel{\mu+\nu}}\cdot f'(x_0)=f'(x_0)\ .$$

79. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ ισχύει:

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x^3)-3}{x-1}\overset{x^3=u\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{u}}{\underset{u\to 1}{=}}\lim_{u\to 1}\frac{f(u)-3}{\sqrt[3]{u}-1}=$$

$$\lim_{u\to 1}\frac{(f(u)-3)\left(\sqrt[3]{u^2}+\sqrt[3]{u}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{u}-1\right)\left(\sqrt[3]{u^2}+\sqrt[3]{u}+1\right)}\Leftrightarrow$$

$$f'(1)=\lim_{u\to 1}\left[\frac{f(u)-3}{u-1}\left(\sqrt[3]{u^2}+\sqrt[3]{u}+1\right)\right]=3f'(1)\Leftrightarrow 2f'(1)=0\Leftrightarrow f'(1)=0.$$

Είναι: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{xf(x)-3}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{xf(x)-3x+3x-3}{(x-1)(x^2+x+1)}=$

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{x(f(x)-3)}{x-1}\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{3}{x^2+x+1}\right]=$$

$$\lim_{x\to 1}\left[x\cdot\frac{f(x)-3}{x-1}\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{3}{x^2+x+1}\right]=1\cdot f'(1)\cdot\frac{1}{3}+1=1.$$

80. Θέτουμε $2\dfrac{f(x)-f'(x)}{x-1}=g(x)\overset{x\neq 1}{\Leftrightarrow} f'(x)=f(x)-\dfrac{1}{2}g(x)(x-1)$. Η f' είναι συνεχής στο 1 άρα $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}f'(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left(f(x)-\dfrac{1}{2}g(x)(x-1)\right)=f(1)=2$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)-f'(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-\frac{1}{2}g(x)(x-1)-2}{x-1}=$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{f(x)-2}{x-1}-\frac{1}{2}g(x)\right)=f'(1)-\frac{5}{2}=2-\frac{5}{2}=-\frac{1}{2}.$$

(Η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 άρα $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-2}{x-1}=f'(1)=2$).

Συναρτησιακές σχέσεις

81. Είναι $f(x+y)=f(x)-f(y)\ (1)$. Για $x=y=0$ είναι: $f(0)=f(0)-f(0)\Leftrightarrow f(0)=0$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ ισχύει: $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\Leftrightarrow f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\ (2)$. Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, αρκεί να υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$. Είναι: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \overset{(1)}{=} \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(h)-f(x_0)}{h} =$

$-\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)}{h} \overset{(2)}{=} -f'(0)\in\mathbb{R}$. Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=-f'(0)$.

82. Για $x=y=0$ είναι $f(0)=f(0)+f(0)\Leftrightarrow f(0)=0$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ ισχύει: $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=5$. Για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0)\sigma\upsilon\nu h+\sigma\upsilon\nu x_0 f(h)-f(x_0)}{h} =$

$\lim\limits_{h\to 0}\left(f(x_0)\dfrac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}+\sigma\upsilon\nu x_0\dfrac{f(h)}{h}\right) = f(x_0)\cdot 0+\sigma\upsilon\nu x_0\cdot 5=5\sigma\upsilon\nu x_0$ άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=5\sigma\upsilon\nu x$.

83. Είναι $f(xy)=yf(x)+xf(y)$ (1)

Από τη σχέση (1) για $x=y=1$ είναι $f(1)=f(1)+f(1)\Leftrightarrow f(1)=0$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ ισχύει: $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

Για κάθε $x_0\in\mathbb{R}^*$ ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \underset{\substack{x\to x_0,\,h\to 1\\ h\to 1}}{\overset{h=\frac{x}{x_0}}{=}} \lim\frac{f(x_0h)-f(x_0)}{x_0h-x_0} \overset{(1)}{=} \lim_{h\to 1}\frac{hf(x_0)+x_0f(h)-f(x_0)}{x_0(h-1)} =$$

$$=\lim_{h\to 1}\left(f(x_0)\frac{\cancel{h-1}}{x_0\cancel{(h-1)}}+x_0\frac{f(h)}{h-1}\right)=\frac{f(x_0)}{x_0}+x_0f'(1).$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$.

84.α) Αρκεί $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ ή $\lim\limits_{h\to 0}f(x_0+h)=f(x_0)$ για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$.

Για $x=x_0$ και $y=h$ είναι: $f(x_0)-3h^2\le f(x_0+h)\le f(x_0)+2h^2$ (1)

Είναι $\lim\limits_{h\to 0}\left(f(x_0)-3h^2\right)=f(x_0)$ και $\lim\limits_{h\to 0}\left(f(x_0)+2h^2\right)=f(x_0)$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{h\to 0}f(x_0+h)=f(x_0)$ για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$, άρα η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

β) Από την (1) για $h>0$ έχουμε : $-3h^2 \le f(x_0+h)-f(x_0) \le 2h^2 \Leftrightarrow$

$-3h \le \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \le 2h$. Είναι $\lim\limits_{h\to 0^+}(-3h)=0$ και $\lim\limits_{h\to 0^+}(2h)=0$, οπότε

από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=0$. (2). Αν $h<0$

η (1) γίνεται: $-3h \ge \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \ge 2h \Leftrightarrow 2h \le \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \le -3h$.

Είναι $\lim\limits_{h\to 0^-}(2h)=0$ και $\lim\limits_{h\to 0^-}(-3h)=0$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής έ-

χουμε $\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=0$ (3).

Από τις (2), (3) προκύπτει ότι $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=0$ άρα η f είναι παρα-

γωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=0$.

Σύνθετες ασκήσεις

85.α) Αν $x<0$ τότε $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} e^{\lambda x}=0$ και $f(x)=\dfrac{4x^2+(\alpha x+3\beta)\cdot 0}{0+2}=2x^2$.

Αν $x=0$ τότε $f(0)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{4\cdot 0^2+(\alpha\cdot 0+3\beta)e^{\lambda\cdot 0}}{e^{\lambda\cdot 0}+2}=\dfrac{3\beta}{3}=\beta$. Αν $x>0$ τότε

$\lim\limits_{\lambda\to+\infty} e^{\lambda x}=+\infty$ και $f(x)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{4\dfrac{x^2}{e^{\lambda x}}+\alpha x+3\beta}{1+\dfrac{2}{e^{\lambda x}}}=\dfrac{4\cdot 0+\alpha x+3\beta}{1+0}=\alpha x+3\beta$.

β) Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ πρέπει:

• Να είναι συνεχής στο $x_0=0$ οπότε $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0) \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to 0^-} 2x^2=\lim\limits_{x\to 0^+}(\alpha x+3\beta)=\beta \Leftrightarrow 0=3\beta=\beta$ άρα $\beta=0$.

• $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ (1).

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}2x=0$ και

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\alpha x}{x}=\alpha$ οπότε από τη σχέση (1) $\alpha=0$.

86.α) Είναι $\left|f(x)-(x-1)\sigma\upsilon\nu(x-1)\right| \le (x-1)^2$ (1) . Από τη σχέση (1) για $x=1$

έχουμε: $\left|f(1)-0\sigma\upsilon\nu 0\right| \le 0 \Leftrightarrow \left|f(1)\right| \le 0 \Leftrightarrow f(1)=0$.

β) Από την (1) έχουμε $\left|f(x)-(x-1)συν(x-1)\right| \le |x-1|^2$. Για $x \ne 1$ έχουμε:

$$\frac{\left|f(x)-(x-1)συν(x-1)\right|}{|x-1|} \le \frac{|x-1|^2}{|x-1|} \Leftrightarrow \left|\frac{f(x)-(x-1)συν(x-1)}{x-1}\right| \le |x-1| \Leftrightarrow$$

$$\left|\frac{f(x)}{x-1}-συν(x-1)\right| \le |x-1| \Leftrightarrow -|x-1| \le \frac{f(x)}{x-1}-συν(x-1) \le |x-1| \Leftrightarrow$$

$συν(x-1)-|x-1| \le \dfrac{f(x)}{x-1} \le συν(x-1)+|x-1|$. Όμως

$\lim\limits_{x\to 1}\left[συν(x-1)-|x-1|\right] = συν0 = 1$ και $\lim\limits_{x\to 1}\left[συν(x-1)+|x-1|\right] = συν0 = 1$,

οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1} = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = 1$.

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 με $f'(1)=1$.

γ) Είναι $L = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(3x-2)-f(x)}{f(2x-1)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{f(3x-2)}{x-1}-\dfrac{f(x)}{x-1}}{\dfrac{f(2x-1)}{x-1}} = \dfrac{3-1}{2} = 1$ αφού

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(3x-2)}{x-1} \underset{\substack{x\to 1,\\ u\to 1}}{\overset{u=3x-2}{=}} \lim_{u\to 1}\frac{f(u)}{\frac{u+2}{3}-1} = \lim_{u\to 1}\frac{f(u)}{\frac{u-1}{3}} = 3\lim_{u\to 1}\frac{f(u)}{u-1} = 3f'(1) = 3 \text{ και}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(2x-1)}{x-1} \underset{\substack{x\to 1,\\ ω\to 1}}{\overset{ω=2x-1}{=}} \lim_{ω\to 1}\frac{f(ω)}{\frac{ω+1}{2}-1} = \lim_{ω\to 1}\frac{f(ω)}{\frac{ω-1}{2}} = 2\lim_{ω\to 1}\frac{f(ω)}{ω-1} = 2f'(1) = 2.$$

Άρα, $L = \dfrac{3-1}{2} = 1$.

87. α) Είναι $f'(1) > 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)}{x-1} > 0$ οπότε υπάρχει $α > 1$ το οποίο βρίσκεται πολύ κοντά στο 1, τέτοιο, ώστε $\dfrac{f(α)}{α-1} > 0 \overset{α>1}{\Leftrightarrow} f(α) > 0$.

Είναι $f'(2) > 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)}{x-2} > 0$ οπότε υπάρχει $1 < β < 2$ το οποίο βρίσκεται πολύ κοντά στο 2, τέτοιο, ώστε $\dfrac{f(β)}{β-2} > 0 \overset{β<2}{\Leftrightarrow} f(β) < 0$. Επομένως $f(α)f(β) < 0$

Η f είναι συνεχής στο $[α,β]$, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_0 \in (α,β)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.

β) Επειδή το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της f στο (α,β), είναι $f(x)\neq 0$ σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha,x_0]$, $[x_0,\beta]$ και επειδή η f είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο στα διαστήματα αυτά. Είναι $f(\alpha)>0$ οπότε $f(x)>0$ για κάθε $x\in[\alpha,x_0)$ και $f(\beta)<0$ οπότε $f(x)<0$ για κάθε $x\in(x_0,\beta]$.

88.α) Είναι $f'(2)>0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}>0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}>0$ οπότε $\dfrac{f(x)}{x-2}>0$ κοντά στο 2, άρα $f(x)(x-2)>0$ κοντά στο 2.

β) Αφού $f(x)(x-2)>0$ κοντά στο 2, τότε υπάρχει $\theta\in(0,2)$ τέτοιο ώστε $f(\theta)(\theta-2)>0$. Όμως $\theta<2$ οπότε $f(\theta)<0$. Επίσης $f(0)>0$, άρα $f(0)f(\theta)<0$. Η f είναι συνεχής στο $[0,\theta]$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_0\in(0,\theta)\subseteq(0,2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.

89.α) Από τη σχέση $f^3(x)+2x^2f(x)=x^4+x^2+1 \quad (1)$

- Για $x=1$ έχουμε: $f^3(1)+2f(1)=3 \Leftrightarrow f^3(1)+2f(1)-3=0 \Leftrightarrow$

$$\left(f(1)-1\right)\left(\underbrace{f^2(1)+f(1)+3}_{\substack{\neq 0\\ \text{αφού } \Delta=-11}}\right)=0 \Leftrightarrow f(1)-1=0 \Leftrightarrow f(1)=1.$$

- Για $x=0$ έχουμε $f^3(0)=1 \Leftrightarrow f(0)=1$.

β) Είναι $f^3(x)+2x^2f(x)=x^4+x^2+1 \Leftrightarrow f(x)\left(f^2(x)+2x^2\right)=x^4+x^2+1$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $x^4+x^2+1>0$ άρα $f(x)\left(f^2(x)+2x^2\right)>0$, οπότε $f(x)\neq 0$ στο $\mathbb{R}$. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Όμως $f(1)=1>0$ άρα $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ οπότε $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-1}{x-1}$

Επίσης η f είναι συνεχής στο $x_0=1$, άρα $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)=1$.

Από την (1) έχουμε $f^3(x)-1+2x^2f(x)-2x^2=x^4-x^2 \Leftrightarrow$

$\left(f(x)-1\right)\left(f^2(x)+f(x)+1\right)+2x^2\left(f(x)-1\right)=x^2(x-1)(x+1)$.

Για $x\neq 1$ είναι: $\dfrac{f(x)-1}{x-1}\cdot\left(f^2(x)+f(x)+1\right)+2x^2\dfrac{f(x)-1}{x-1}=x^2(x+1)$ άρα

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{f(x)-1}{x-1}\cdot\left(f^2(x)+f(x)+1\right)+2x^2\frac{f(x)-1}{x-1}\right]=\lim_{x\to 1}\left[x^2(x+1)\right]\Leftrightarrow$$

$3f'(1)+2f'(1)=2 \Leftrightarrow 5f'(1)=2 \Leftrightarrow f'(1)=\dfrac{2}{5}$.

δ) $f^3(x)+2x^2f(x)=x^4+x^2+1 \Leftrightarrow f^3(x)-1=x^4+x^2-2x^2f(x) \Leftrightarrow$

$(f(x)-1)(f^2(x)+f(x)+1)=x^4+x^2-2x^2f(x) \Leftrightarrow$

$$f(x)-f(0)=\frac{x^4+x^2-2x^2f(x)}{\underbrace{f^2(x)+f(x)+1}_{\neq 0}} \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{\cancel{x}\left(x^3+x-2xf(x)\right)}{\cancel{x}\left(f^2(x)+f(x)+1\right)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{x^3+x-2xf(x)}{f^2(x)+f(x)+1}.$$

(Αν θέσουμε $f(x)=\omega$ στην παράσταση $f^2(x)+f(x)+1$ προκύπτει το τριώνυμο $\omega^2+\omega+1$, το οποίο έχει $\Delta=-3<0$.
Άρα $\omega^2+\omega+1\neq 0 \Leftrightarrow f^2(x)+f(x)+1\neq 0$).

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+x-2xf(x)}{f^2(x)+f(x)+1}=0$, άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0)=0$.

90.α) Είναι $x^2\le f(x)\le 4x^2 \quad (1)$. Από τη σχέση (1):

- Για $x=0$ είναι: $0\le f(0)\le 0 \Leftrightarrow f(0)=0$.
- Για $x>0$ είναι: $\dfrac{x^2}{x}\le\dfrac{f(x)}{x}\le\dfrac{4x^2}{x} \Leftrightarrow x\le\dfrac{f(x)}{x}\le 4x$. Επειδή

$\lim\limits_{x\to 0^+}x=\lim\limits_{x\to 0^+}4x=0$ από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=0 \quad (2)$

Αν $x<0$ τότε: $\dfrac{x^2}{x}\ge\dfrac{f(x)}{x}\ge\dfrac{4x^2}{x} \Leftrightarrow 4x\le\dfrac{f(x)}{x}\le x$. Επειδή

$\lim\limits_{x\to 0^-}x=\lim\limits_{x\to 0^-}4x=0$ από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)}{x}=0 \quad (3)$

Από (2),(3) έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$ οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με παράγωγο $f'(0)=$ άρα η C_f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη στο $x_0=0$.

β) Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Για $x=-1$ είναι $1\le f(-1)\le 4$ άρα $f(-1)>0>f(0)$ που είναι άτοπο. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα τότε για $x=1$ είναι $1\le f(1)\le 4$ άρα $f(1)>0>f(0)$ που είναι άτοπο.

Άρα η f δεν είναι γνησίως μονότονη.

γ) Είναι:

i. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x-1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x-1)}{(x-1)(x+1)}\overset{\substack{x-1=u\Leftrightarrow\\ x=u+1}}{\underset{\substack{x\to 1\Rightarrow\\ u\to 0}}{=}}\lim\limits_{u\to 0}\left(\dfrac{f(u)}{u}\cdot\dfrac{1}{u+2}\right)=0\cdot\dfrac{1}{2}=0$.

ii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{f(x)}{x}}{\dfrac{\eta\mu x}{x}}=\dfrac{f'(0)}{1}=0$.

iii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^2(x)}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)}{x}\cdot\dfrac{f(x)}{x+1}\right)=f'(0)f(0)=0$.

δ) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)-f(x_0-h)+f(x_0)}{h}=$

$\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}\right)=f'(x_0)-(-f'(x_0))=2f'(x_0)$

αφού $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}\overset{-h=u}{\underset{u\to 0}{=}}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(x_0+u)-f(x_0)}{-u}=-f'(x_0)$.

ε) Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ από τη σχέση $x^2\le f(x)\le 4x^2$ προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, οπότε υπάρχει πολύ μεγάλος θετικός αριθμός α με $f(\alpha)>1821$.
Άρα $f(0)\ne f(\alpha)$ και $f(0)<1821<f(\alpha)$.
Η f είναι συνεχής στο $[0,\alpha]$, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών οπότε υπάρχει $x_1\in(0,\alpha)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1)=1821$.

στ) Έστω $\varphi(x)=f^2(x)-f(x)-1+x,\ x\in[0,x_1]$. Η φ είναι συνεχής στο $[0,x_1]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Είναι $\varphi(0)=f^2(0)-f(0)-1=-1<0$ και $\varphi(x_1)=f^2(x_1)-f(x_1)-1+x_1=1821^2-1821-1+x_1=1821(1821-1)+x_1-1=$ $1821\cdot 1820+x_1-1>0$ αφού $1821\cdot 1820>1$ και $x_1>0$ οπότε $\varphi(0)\varphi(x_1)<0$.
Άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος του Θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $\rho\in(0,x_1)$ τέτοιο, ώστε $\varphi(\rho)=0\Leftrightarrow f^2(\rho)-f(\rho)=1-\rho$.

ζ) Επειδή η h είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ ισχύει ότι

$h'(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{h(x)-h(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{h(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{h(x)}{x}$.

Για $x>0$ είναι $h(x)>f(x)\Leftrightarrow\dfrac{h(x)}{x}>\dfrac{f(x)}{x}$ οπότε

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{h(x)}{x}\ge\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=0\Leftrightarrow h'(0)\ge 0$ (3)

Για $x<0$ είναι $h(x)>f(x)\Leftrightarrow \frac{h(x)}{x}<\frac{f(x)}{x}$ οπότε

$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{h(x)}{x}\le \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}=0\Leftrightarrow h'(0)\le 0\ (4)$. Από (3),(4)$\Rightarrow h'(0)=0$.

η) Είναι $g(0)=\eta\mu f(0)-0=0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu f(x)-x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\cdot\frac{f(x)}{x}-1\right)=1\cdot 0-1=-1$

αφού $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\underset{\substack{x\to 0\Rightarrow\\ u\to 0}}{\overset{f(x)=u}{=}}\lim\limits_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=1$.

θ) Γνωρίζουμε ότι $|\eta\mu x|\le|x|$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$.

Επειδή $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $|\eta\mu f(x)|\le f(x)\Leftrightarrow$

$-f(x)\le\eta\mu f(x)\le f(x)$ οπότε $\eta\mu f(x)-f(x)\le 0$. Όμως $\eta\mu f(x)-f(x)\ge 0$

οπότε $\eta\mu f(x)-f(x)=0\Leftrightarrow f(x)=0\Leftrightarrow x=0$ γιατί για κάθε $x\ne 0$ είναι

$f(x)\ge x^2>0$.

91.α) Για κάθε $x<0$ είναι $-f(x)\le x<0\Leftrightarrow f(x)>0$ και για κάθε $x>0$ είναι

$f(x)\ge x>0$, άρα $f(x)>0$ για κάθε $x\ne 0$ ή $-f(x)\le x\le f(x)\Leftrightarrow|x|\le f(x)$.

Για $x\ne 0$ ισχύει $|x|>0$ οπότε $f(x)>0$ για κάθε $x\ne 0$.

β) Επειδή $f(x)>0$ για κάθε $x\ne 0$ και $f(0)=0$, είναι $f(x)\ge 0=f(0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η f έχει ελάχιστο το 0 για x = 0.

γ) Έστω α < 0, β > 0 τότε $f(\alpha)>0$ και $f(\beta)>0$ αφού $f(x)>0$ για κάθε $x\ne 0$

- Αν η f ήταν γνησίως αύξουσα τότε $f(\alpha)<0$ που είναι άτοπο.
- Αν η f ήταν γνησίως φθίνουσα, τότε $f(\beta)<0$ που είναι άτοπο.

Άρα η f δεν είναι γνησίως μονότονη.

δ) Έστω ότι η f είναι περιττή, τότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(-x)=-f(x)$.

Αν στη σχέση $f(x)\ge x$ αντικαταστήσουμε όπου x το – x, προκύπτει

$f(-x)\ge -x\Leftrightarrow -f(x)\ge -x\Leftrightarrow f(x)\le x$. Όμως $f(x)\ge x$, άρα $f(x)=x,\ x\in\mathbb{R}$

που είναι άτοπο γιατί τότε η σχέση $-f(x)\le x$ γίνεται

$-x\le x\Leftrightarrow 2x\ge 0\Leftrightarrow x\ge 0$ που δεν ισχύει.

2ος τρόπος: Έστω ότι η f είναι περιττή, τότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(-x)=-f(x)$. Αν στη σχέση $f(x)\ge 0$ αντικαταστήσουμε όπου x το – x, προκύπτει $f(-x)\ge 0\Leftrightarrow -f(x)\ge 0\Leftrightarrow f(x)\le 0$ οπότε $f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άτοπο.

ε) Έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x = 0, τότε

$$f'(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}\Leftrightarrow f'(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}.$$

- Για x < 0 είναι $-f(x)\le x \Leftrightarrow -\frac{f(x)}{x}\ge\frac{x}{x}\Leftrightarrow\frac{f(x)}{x}\le -1$ οπότε

$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}\le -1\Leftrightarrow f'(0)\le -1\ (1)$.

- Για x > 0 είναι $f(x)\ge x\Leftrightarrow\frac{f(x)}{x}\ge\frac{x}{x}\Leftrightarrow\frac{f(x)-f(0)}{x}\ge 1$ οπότε

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}\le -1\Leftrightarrow f'(0)\ge 1\ (2)$. Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει άτοπο, οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x = 0.

στ) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)\ge x$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

Επειδή η f είναι συνεχής, $f(x)\ge 0=f(0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, η f έχει σύνολο τιμών το $[0,+\infty)$.

92.α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)}{x}$, $x\ne 0$ με $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=2$.

Για κάθε $x\ne 0$ έχουμε $g(x)=\frac{f(x)}{x}\Leftrightarrow f(x)=xg(x)$.

Άρα $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(xg(x))=0=f(0)$ αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε και στο 0. Άρα $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$.

Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0)=2$.

β) Η g είναι συνεχής στο $(-1,+\infty)$ οπότε είναι συνεχής στο 2 άρα $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=g(2)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f^2(x)\,\eta\mu(\eta\mu x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left[f(x)\cdot\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{\eta\mu(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right]=0$

αφού $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\overset{\eta\mu x=u}{\underset{u\to 0}{=}}\lim\limits_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=1$ και

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1$. Άρα είναι $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0\Leftrightarrow g(0)=0\Leftrightarrow\alpha=0$.

γ) Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f^2(x)\,\eta\mu(\eta\mu x)}{x^3}=$

$= \lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{\eta\mu(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right]=4$. Άρα η g είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $g'(0)=4$.

δ) Είναι $2f(x)\le 2h(x)\le g(x)$ (1). Από τη σχέση (1) έχουμε:

- Για $x=0$: $2f(0)\le 2h(0)\le g(0)\Leftrightarrow 0\le 2h(0)\le 0\Leftrightarrow h(0)=0$.
- Για κάθε $-1<x<0$:

$$2f(x)\le 2h(x)\le g(x)\Leftrightarrow f(x)\le h(x)\le\frac{g(x)}{2}\Leftrightarrow\frac{f(x)}{x}\ge\frac{h(x)}{x}\ge\frac{g(x)}{2x}\Leftrightarrow$$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\ge\frac{h(x)-h(0)}{x-0}\ge\frac{1}{2}\cdot\frac{g(x)-g(0)}{x-0}.$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=2$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\right)=\frac{1}{2}g'(0)=2$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=2$.

- Για κάθε $0<x<1$ είναι

$$2f(x)\le 2h(x)\le g(x)\Leftrightarrow f(x)\le h(x)\le\frac{g(x)}{2}\Leftrightarrow\frac{f(x)}{x}\le\frac{h(x)}{x}\le\frac{g(x)}{2x}\Leftrightarrow$$

$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\le\frac{h(x)-h(0)}{x-0}\le\frac{1}{2}\cdot\frac{g(x)-g(0)}{x-0}$. Είναι

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=2$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\right)=\frac{1}{2}g'(0)=2$ οπότε από κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=2$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=2\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 0}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=0$.

Άρα η h είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $h'(0)=2$.

ε) i. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(2x)+g\left(\frac{x}{2}\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{f(2x)}{x}+\frac{g\left(\frac{x}{2}\right)}{x}\right)=6$ γιατί

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(2x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}2\cdot\frac{f(2x)}{2x}\underset{u\to 0}{\overset{2x=u}{=}}\lim\limits_{u\to 0}\left(2\frac{f(u)}{u}\right)=2f'(0)=4$ και

$$\lim_{x\to 0}\frac{g\left(\frac{x}{2}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{g\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right]\overset{\frac{x}{2}=u}{\underset{u\to 0}{=}}\lim_{u\to 0}\left(\frac{1}{2}\frac{g(u)}{u}\right)=\frac{1}{2}g'(0)=2.$$

ii. Είναι $\lim_{x\to 0}\frac{|xf(x)|+g(\eta\mu x)\cdot\eta\mu x}{x^2-x^2\sigma\upsilon\nu^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{|xf(x)|+g(\eta\mu x)\cdot\eta\mu x}{x^2\left(1-\sigma\upsilon\nu^2 x\right)}=$

$\lim_{x\to 0}\frac{|xf(x)|+g(\eta\mu x)\cdot\eta\mu x}{x^2\eta\mu^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x||f(x)|+g(\eta\mu x)\cdot\eta\mu x}{|x|^2\eta\mu^2 x}=$

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{|f(x)|}{|x|\eta\mu^2 x}+\frac{g(\eta\mu x)}{|x|^2\eta\mu x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\left|\frac{f(x)}{x}\right|\frac{1}{\eta\mu^2 x}+\frac{g(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\cdot\frac{1}{|x|^2}\right)=$

$2\cdot(+\infty)+4\cdot(+\infty)=+\infty$ αφού

- $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=f'(0)=2$,
- $\lim_{x\to 0}\left(\eta\mu^2 x\right)=0$ και $\eta\mu^2 x>0$ κοντά στο μηδέν άρα $\lim_{x\to 0}\frac{1}{\eta\mu^2 x}=+\infty$,
- $\lim_{x\to 0}\frac{g(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\overset{\eta\mu x=u}{\underset{u\to 0}{=}}\lim_{u\to 0}\frac{g(u)}{u}=g'(0)=4$ και
- $\lim_{x\to 0}|x|^2=0$, $|x|^2>0$ για κάθε $x\neq 0$ άρα $\lim_{x\to 0}\frac{1}{|x|^2}=+\infty$.

Τράπεζα θεμάτων ΙΕΠ

24756. α) Είναι $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$, άρα $f'(0)=2$.

β) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο x = 0 είναι και συνεχής σε αυτό άρα $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$.

γ) Είναι $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\eta\mu x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x}}{\frac{\eta\mu x}{x}}=\frac{2}{1}=2$.

24757. α) Επειδή η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0,1)$ σχηματίζει με τον xx' γωνία 45° είναι $f'(0)=\varepsilon\varphi 45^\circ=1$.

β) Η εφαπτομένη (ε) της C_f έχει εξίσωση:

ε: $y-f(0)=f'(0)x\Leftrightarrow y-1=x\Leftrightarrow y=x+1$.

γ) Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=1$.

25234. α) Είναι: $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2}{x-1}\underset{\substack{x\to 1^-\Rightarrow \\ u\to 0^-}}{\overset{x-1=u}{=}}\lim\limits_{u\to 0^-}\dfrac{2}{u}=-\infty$.

β) Η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων άρα $f(0)=0$ οπότε

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$.

γ) Είναι: $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\left[g(x)\dfrac{1}{f(x)}\right]=-\dfrac{1}{2}(-\infty)=+\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x\to 0^-}g(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=0$ και

$f(x)<0$ για κάθε $x\in(\alpha,0)$.

25762. α) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-x^2+x\right)=0=f(0)$, $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\eta\mu x=0$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$ η f είναι συνεχής στο $x_o=0$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x^2+x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\cancel{x}(-x+1)}{\cancel{x}}=1$ και

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1$. Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=1$,

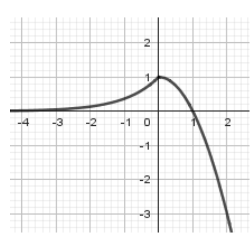
η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=0$ με $f'(0)=1$.

γ) Η εφαπτομένη (ε) της C_f έχει εξίσωση: ε: $y-f(0)=f'(0)x\Leftrightarrow y=x$.

26712. α) Στο σχήμα βλέπουμε ότι το σημείο (2, -1) ανήκει στη γραφική παράσταση της f΄, επομένως η κλίση της συνάρτησης f στο $x_o=2$ είναι το $f'(2)=-1$

β) (ε): $y-f(2)=f'(2)(x-2)\Leftrightarrow y+\dfrac{29}{9}=-x+2\Leftrightarrow y=-x-\dfrac{11}{9}$.

γ) Αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον άξονα x΄x, ισχύει ότι $\varepsilon\varphi\omega=f'(2)=-1\Leftrightarrow\omega=135^\circ$.



33632. α) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}e^x=1=f(0)$ και

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-x^2+1\right)=1$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=f(0)$ η f είναι συνεχής στο $x_o=0$. Η γραφική παράσταση της f αποτελείται από το κομμάτι της γραφικής παράστασης της $y=e^x$ για $x\le 0$ και από το κομμάτι της παραβολής $y=-x^2+1$ για x > 0.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^x-1}{x}=1$, γιατί αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$g(x)=e^x,\ x\in\mathbb{R}$, είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=g'(0)$ και

$g'(x)=e^x,\ g'(0)=e^0=1$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-x^2-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}=0$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\neq\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=0$, οπότε δεν ορίζεται η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης στο σημείο $A(0,\ f(0))$.

36840. α) Οι τετμημένες των σημείων της C_f δημιουργούν το σύνολο [2, 7], οπότε $D_f=[2,7]$. Όμοια $D_h=[5,7]$.

β) i. Είναι $\lim\limits_{x\to 6}f(x)=0$ και $f(x)>0$ κοντά στο 6, άρα $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$.

ii. Είναι $\lim\limits_{x\to 6}h(x)=0$, $h(x)<0$ για κάθε $x\in(5,6)$, $h(x)>0$ για κάθε $x\in(6,7)$, άρα $\lim\limits_{x\to 6^-}\dfrac{1}{h(x)}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 6^+}\dfrac{1}{h(x)}=+\infty$, οπότε δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{1}{h(x)}$.

iii. $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{f(x)}{x-6}=\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{f(x)-f(6)}{x-6}=f'(6)=0$, επειδή η C_f εφάπτεται του άξονα x΄x στο σημείο Α.

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό ή Λάθος»

1. Λ	**2.** Σ	**3.** Σ	**4.** Λ	**5.** Λ	**6.** Λ	**7.** Σ	**8.** Λ	**9.** Σ	**10.** Λ
11. Λ	**12.** Σ	**13.** Λ	**14.** Λ	**15.** Σ	**16.** Σ	**17.** Σ	**18.** Λ		

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Στη σχέση $4x\le f(x)\le x^2+4$ (1) για $x=2$ προκύπτει $8\le f(2)\le 8\Leftrightarrow f(2)=8$. Επίσης, από την (1) έχουμε

$4x-8\le f(x)-8\le x^2-4\Leftrightarrow 4(x-2)\le f(x)-f(2)\le(x-2)(x+2)$ (2)

Για $x>2$ από τη σχέση (2) έχουμε $4\le\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}\le x+2$ και από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=4$ (3). Για $x<2$ από τη σχέση (2) έχουμε $4\ge\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}\ge x+2$ και από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=4$ (4) Άρα από (3),(4) θα είναι $f'(2)=4$. **Σωστή απάντηση Γ.**

2. Στη σχέση $|f(2x)-g(6x)|\le x^2$ (1) για $x=0$ προκύπτει

$|f(0)-g(0)|\le0\Leftrightarrow f(0)=g(0)$. Επίσης στην (1) θέτουμε όπου x το $\dfrac{x}{2}$ και η σχέση γίνεται $|f(x)-g(3x)|\le\dfrac{x^2}{4}\Leftrightarrow|f(x)-g(3x)|\le\dfrac{|x|^2}{4}$ για $x\ne0$ είναι

$$\frac{|f(x)-g(3x)|}{|x|}\le\frac{|x|}{4}\Leftrightarrow\left|\frac{f(x)-g(3x)}{x}\right|\le\frac{|x|}{4}\Leftrightarrow-\frac{|x|}{4}\le\frac{f(x)-g(3x)}{x}\le\frac{|x|}{4}\Leftrightarrow$$

$$-\frac{|x|}{4}\le\left(\frac{f(x)-f(0)}{x}-\frac{g(3x)-g(0)}{x}\right)\le\frac{|x|}{4}\Leftrightarrow$$

$$\frac{g(3x)-g(0)}{x}-\frac{|x|}{4}\le\frac{f(x)-f(0)}{x}\le\frac{g(3x)-g(0)}{x}+\frac{|x|}{4}\quad(2)$$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(3x)-g(0)}{x}\overset{3x=u}{=}\lim\limits_{u\to0}\dfrac{g(u)-g(0)}{\frac{u}{3}}=3g'(0)=9$, οπότε από τη σχέση (2) και το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=9\Leftrightarrow f'(0)=9$.

Σωστή απάντηση Β.

3. $$\lim_{x\to2}\frac{f(x^3-5)-3}{x^2-x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x^3-5)-f(3)}{x^2-x-2}=\lim_{x\to2}\frac{\dfrac{f(x^3-5)-f(3)}{(x^3-5)-3}}{\dfrac{x^2-x-2}{x^3-8}}=\frac{-1}{\frac{1}{4}}=-4$$

Γιατί $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x^3-5)-f(3)}{(x^3-5)-3}\underset{y\to3}{\overset{x^3-5=y}{=}}\lim\limits_{y\to3}\dfrac{f(y)-f(3)}{y-3}=f'(3)=-1$ και

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-x-2}{x^3-8}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\lim_{x\to2}\frac{x+1}{x^2+2x+4}=\frac{1}{4}.$$

Σωστή απάντηση Γ.

4. Είναι $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ και

$g'(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}$. Επίσης, $f(x)\le g(x)+x^2 \Leftrightarrow$

$f(x)-1\le g(x)+x^2-1 \Leftrightarrow f(x)-\big(f(1)-g(1)\big)\le g(x)+(x-1)(x+1)$

$\Leftrightarrow f(x)-f(1)\le g(x)-g(1)+(x-1)(x+1)$ (1)

Για $x>1$ διαιρώντας στην (1) με $x-1>0$ είναι

$\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\le\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}+(x+1)$ άρα

$\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\right)\le\lim\limits_{x\to 1^+}\left[\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}+(x+1)\right]\Leftrightarrow f'(1)\le g'(1)+2$ (2)

Για $x<1$ διαιρώντας στην (1) με $x-1<0$ είναι

$\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\ge\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}+(x+1)$ άρα

$\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\right)\ge\lim\limits_{x\to 1^-}\left[\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}+(x+1)\right]\Leftrightarrow f'(1)\ge g'(1)+2$ (3)

Από (2),(3) $f'(1)-g'(1)=2$. **Σωστή απάντηση Γ.**

5. Αφού η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ τότε $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$, από τη σχέση (1) $\left|xf(x)-\eta\mu^2 2x\right|\le x^4 \Leftrightarrow -x^4\le xf(x)-\eta\mu^2 2x\le x^4$ (2) και διαιρώντας με $x>0$ έχουμε

$-x^3\le f(x)-\dfrac{\eta\mu^2 2x}{x}\le x^3 \Leftrightarrow -x^3+\dfrac{\eta\mu^2 2x}{x}\le f(x)\le x^3+\dfrac{\eta\mu^2 2x}{x}$ (3)

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu^2 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\eta\mu 2x\cdot 2\cdot\dfrac{\eta\mu 2x}{2x}\right]=0\cdot 2\cdot 1=0$, οπότε στη σχέση (3) και από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$.

Από τη σχέση (2) διαιρώντας με $x^2>0$ προκύπτει

$-x^2\le\dfrac{f(x)}{x}-\dfrac{\eta\mu^2 2x}{x^2}\le x^2 \Leftrightarrow -x^2+\dfrac{\eta\mu^2 2x}{x^2}\le\dfrac{f(x)}{x}\le x^2+\dfrac{\eta\mu^2 2x}{x^2}$ (4)

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu^2 2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left[4\cdot\dfrac{\eta\mu^2 2x}{4x^2}\right]=4\cdot 1=4$, οπότε στη σχέση (4) και από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=4$.

Σωστή απάντηση Α.

17 Παράγωγος συνάρτηση – Κανόνες παραγώγισης

Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων

7. α4 β1 γ2 δ3

8. Η f είναι παραγωγίσιμη:

α) στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=4x^3$. Άρα $f'(2)=32$.

β) στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Άρα $f'\left(\dfrac{1}{9}\right)=\dfrac{3}{2}$.

γ) στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x$, $f'(\pi)=-1$.

δ) στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=-\eta\mu x$. Άρα $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{1}{2}$.

ε) στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=e^x$. Άρα $f'(\ln 3)=3$.

στ) στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο $f'(x)=\dfrac{1}{x}$. Άρα $f'(2)=\dfrac{1}{2}$.

9. α)

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-\infty,0)$ με παράγωγο $f'(x)=2x$.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,+\infty)$ με παράγωγο $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x$.
- Στο $x_0=0$ είναι:

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}=0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1$ άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

β)

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-\infty,0)$ με παράγωγο $f'(x)=2x$.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,+\infty)$ με παράγωγο $f'(x)=3x^2$.
- Στο $x_0=0$ είναι: $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}=0$,

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{x}}=0$ άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0)=0$

γ)

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-\infty,1)$ με παράγωγο $f'(x)=3x^2$.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(1,+\infty)$ με παράγωγο $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

- Στο $x_0=1$ είναι: $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{\cancel{x-1}}=3$,

$\lim\limits_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{2}$,

άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

Κανόνες παραγώγισης

10.α) $f'(x)=6x^2-8x+3$ **β)** $f'(x)=\frac{1}{x}-e^x$ **γ)** $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$

δ) $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x-2\eta\mu x$ **ε)** $f'(x)=6x+4\eta\mu x+2$ **στ)** $f'(x)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}-\frac{1}{\eta\mu^2 x}$

η) $f'(x)=3e^x$ **θ)** $f'(x)=3e^x-4x-6$

11.α) $f'(x)=\frac{2}{x}-2x-\frac{1}{x^2}$ **β)** $f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{6}{x^3}$ **γ)** $f'(x)=-6x^{-3}+\frac{12}{x^4}$

δ) $f'(x)=\frac{2}{\sigma\upsilon\nu^2 x}+\frac{4}{x^2}$ **ε)** $f'(x)=2x+\frac{1}{2\sqrt{x}}$

12.α) $f'(x)=2x\ln x+x^2\cdot\frac{1}{x}=2x\ln x+x$ **β)** $f'(x)=\eta\mu\omega\left(3x^2e^x+x^3e^x\right)$

γ) $f'(x)=t\left(e^x\eta\mu x+e^x\sigma\upsilon\nu x\right)$ **δ)** $f'(x)=(6x-1)\sigma\upsilon\nu x-\left(3x^2-x\right)\eta\mu x$

ε) $f'(x)=\frac{3\ln x}{2\sqrt{x}}+\frac{3\sqrt{x}}{x}=\frac{3\ln x}{2\sqrt{x}}+\frac{3}{\sqrt{x}}$

στ) $f'(x)=3x^2e^x\eta\mu x+x^3e^x\eta\mu x+x^3e^x\sigma\upsilon\nu x$

ζ) $f'(x)=2\eta\mu x+2x\sigma\upsilon\nu x-16x^3\left(x^2+4x\right)-4\left(x^4-2\right)(2x+4)$

η) $f'(x)=10x\eta\mu x+5x^2\sigma\upsilon\nu x-9x^2\sigma\upsilon\nu x+3x^3\eta\mu x$

13. $f'(1)=\lambda_{A\Gamma}=\frac{6}{2}=3,\ g'(1)=\lambda_{EH}=-\frac{4}{2}=-2,\ f(1)=1,\ g(1)=2$,

α) $(f\cdot g)'(1)=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)=6-2=4$.

β) $\left(\frac{f}{g}\right)'(1)=\frac{f'(1)g(1)-f(1)g'(1)}{g^2(1)}=\frac{6+2}{4}=2$.

γ) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)+g(x)-f(-1)-g(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}+\dfrac{g(x)-g(-1)}{x+1}\right)=$

$f'(-1)+g'(-1)=\lambda_{ZA}+\lambda_{ZE}=-\dfrac{2}{2}+\dfrac{4}{2}=1$.

14. α) $f'(x)=\dfrac{2x(x+1)-(x^2-2)}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+2x+2}{(x+1)^2}$.

β) $f'(x)=\dfrac{x+2-(x-1)}{(x+2)^2}=\dfrac{3}{(x+2)^2}$ **γ)** $f'(x)=\dfrac{2(x^2+1)-4x^2}{(x^2+1)^2}=\dfrac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$.

δ) $f'(x)=\dfrac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^2}$ **ε)** $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

στ) $f'(x)=2\eta\mu t\cdot\dfrac{x^2e^x-2xe^x}{x^4}=2\eta\mu t e^x\cdot\dfrac{x-2}{x^3}$.

ζ) $f'(x)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x(\eta\mu x-2)-(\eta\mu x+2)\sigma\upsilon\nu x}{(\eta\mu x-2)^2}=\dfrac{-4\sigma\upsilon\nu x}{(\eta\mu x-2)^2}$.

η) $f'(x)=3\dfrac{\frac{1}{x}\cdot\sqrt{x}-\ln x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=3\dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x}=\dfrac{3(2-\ln x)}{2x\sqrt{x}}$.

θ) $f'(x)=\dfrac{(x\eta\mu x)'(x^2+3x)-x\eta\mu x(2x+3)}{(x^2+3x)^2}=$

$\dfrac{(\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x)(x^2+3x)-x\eta\mu x(2x+3)}{(x^2+3x)^2}$.

15.α) $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\cancel{x}+1-\cancel{x}}{(x+1)^2}=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{(x+1)^2}$, $f'(4)=-\dfrac{1}{16}-\dfrac{1}{25}=-\dfrac{41}{400}$.

β) $f'(x)=\dfrac{1}{x}-2x+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $f'(1)=1-2+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}$.

16.α) Είναι $f'(x)=\begin{cases}3x^2+1 & ,\ x<0\\ 2x+1 & ,\ x>0\end{cases}$. Στο $x_0=0$, έχουμε:

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^3+x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\cancel{x}(x^2+1)}{\cancel{x}}=1$ και

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2+x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cancel{x}(x+1)}{\cancel{x}}=1$, άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0)=1$.

Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=\begin{cases}3x^2+1\ , & x\le 0\\ 2x+1\ , & x>0\end{cases}$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(-\infty,0),(0,+\infty)$ με παράγωγο

$f'(x)=\begin{cases}2x-1\ , & x<0\\ \sigma\upsilon\nu x\ , & x>0\end{cases}$.

Στο $x_0=0$, έχουμε: $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2-x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\cancel{x}(x-1)}{\cancel{x}}=-1$ και

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1$ άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

γ) Στα διαστήματα $(-\infty,1),(1,+\infty)$ με παράγωγο $f'(x)=\begin{cases}6x-1\ , & x<1\\ 3x^2+2\ , & x>1\end{cases}$.

Στο $x_0=1$, έχουμε: $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{3x^2-x-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\cancel{(x-1)}(3x+2)}{\cancel{x-1}}=5$

και $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^3+2x-3}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+3)}{\cancel{x-1}}=5$ άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 με $f'(1)=5$. Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο και $f'(x)=\begin{cases}6x-1\ , & x\le 1\\ 3x^2+2\ , & x>1\end{cases}$.

δ) Για $x\neq 0$ η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο:

$f'(x)=3x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}+x^3\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=3x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}-x\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}$, $x\neq 0$.

Στο $x_0=0$, έχουμε: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}$.

Είναι $\left|x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}\right|=x^2\left|\eta\mu\dfrac{1}{x}\right|\le x^2 \Leftrightarrow -x^2\le x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}\le x^2$.

Όμως $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0=\lim\limits_{x\to 0}(-x^2)$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε

$\lim\limits_{x\to 0}x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}=0$.

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2\eta\mu\frac{1}{x}-x\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0 & , x=0\end{cases}.$$

17.α) Είναι: $f(x)=\begin{cases}x^2 & , x\leq 0 \text{ ή } x\geq 1\\ -x^2+x & , 0<x<1\end{cases}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(-\infty,0),(0,1),(1,+\infty)$ με παράγωγο:

$$f'(x)=\begin{cases}2x & , x<0 \text{ ή } x>1\\ -2x+2 & , 0<x<1\end{cases}.$$

Στο $x_0=0$, έχουμε: $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}=0$,

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\cancel{x}(-x+2)}{\cancel{x}}=2$, οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$. Στο $x_0=1$, έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}=2,$$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{-x^2+2x-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)^{\cancel{2}}}{\cancel{x-1}}=0$ οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

β) $f(x)=\begin{cases}x^2-x+3, & x<3\\ x^2+x-3, & x\geq 3\end{cases}$. $f'(x)=\begin{cases}2x-1, & x<3\\ 2x+1, & x>3\end{cases}$. Στο $x_0=3$, έχουμε:

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-x+3-9}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-x-6}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{\cancel{(x-3)}(x+2)}{\cancel{x-3}}=5,$$

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2+x-3-9}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2+x-12}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{\cancel{(x-3)}(x+4)}{\cancel{x-3}}=7$$

οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=3$.

γ) $f(x)=\begin{cases}x^2-4 & , x\leq -2 \text{ ή } x\geq 2\\ -x^2+4 & , -2<x<2\end{cases}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(-\infty,-2),(-2,2),(2,+\infty)$ με παράγωγο

$f'(x)=\begin{cases}2x & , x<-2 \text{ ή } x>2\\ -2x & , -2<x<2\end{cases}$. Στο $x_0=2$, έχουμε:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-x^2+4}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}=-4,$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}=4$$, οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=2$. Στο $x_0=-2$, έχουμε:

$$\lim_{x\to -2^-}\frac{f(x)-f(-2)}{x-2}=\lim_{x\to -2^-}\frac{x^2-4}{x+2}=\lim_{x\to -2^-}\frac{\cancel{(x+2)}(x-2)}{\cancel{x+2}}=-4,$$

$$\lim_{x\to -2^+}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-x^2+4}{x+2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{-\cancel{(x+2)}(x-2)}{\cancel{x+2}}=4$$, οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=-2$.

18.α) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=20x^3-18x^2+2x-1$ και δεύτερη παράγωγο $f''(x)=60x^2-36x+2$.

β) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x$ και δεύτερη παράγωγο $f''(x)=\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x=2\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x$.

γ) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$f'(x)=\frac{e^x-xe^x}{\left(e^x\right)^2}=\frac{1-x}{e^x},\ f''(x)=\frac{-e^x-(1-x)e^x}{\left(e^x\right)^2}=\frac{x-2}{e^x}.$$

δ) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με παράγωγο

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{\cancel{x}}\cancel{x}-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$ και δεύτερη παράγωγο

$$f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}x^2-(1-\ln x)2x}{x^4}=\frac{\cancel{x}(2\ln x-3)}{x^{\cancel{4}3}}=\frac{2\ln x-3}{x^3}.$$

19. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με:

$$f'(x)=\left(x^3\ln x+1\right)'=\left(x^3\right)'\ln x+x^3(\ln x)'=3x^2\ln x+x^3\cdot\frac{1}{x}=3x^2\ln x+x^2.$$

Είναι: $xf'(x)-3f(x)=x\left(3x^2\ln x+x^2\right)-3\left(x^3\ln x+1\right)=$

$3x^3\ln x+x^3-3x^3\ln x-3=x^3-3$.

Αυξημένης δυσκολίας

20. Η συνάρτηση f δύο φορές είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=2xe^x+x^2e^x=(2x+x^2)e^x$ και δεύτερη παράγωγο

$$f''(x)=(2+2x)e^x+(2x+x^2)e^x=e^x(x^2+4x+2)$$

$$\alpha f''(x)-\beta f'(x)+\gamma f(x)=2e^x \Leftrightarrow$$

$$\alpha \cancel{e^x}(x^2+4x+2)-\beta(2x+x^2)\cancel{e^x}+\gamma x^2\cancel{e^x}=2\cancel{e^x} \Leftrightarrow$$

$$\alpha x^2+4\alpha x+2\alpha-2\beta x-\beta x^2+\gamma x^2-2=0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha-\beta+\gamma)x^2+(4\alpha-2\beta)x+2\alpha-2=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha-\beta+\gamma=0\\ 4\alpha-2\beta=0\\ 2\alpha-2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\gamma=1\\ \beta=2\\ \alpha=1\end{cases}.$$

21. Οι C_f, C_g διέρχονται από την αρχή των αξόνων άρα $f(0)=0=g(0)$.

Έστω ότι οι f,g είναι παραγωγίσιμες.

Τότε: $\left(f(x)g(x)\right)'=\left(x^3-2\eta\mu x\right)' \Leftrightarrow f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=3x^2-2\sigma\upsilon\nu x$.

Για $x=0$: $f'(0)g(0)+f(0)g'(0)=-2 \Leftrightarrow 0=-2$ που είναι άτοπο.

Άρα οι συναρτήσεις f,g δεν είναι παραγωγίσιμες.

22. Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$\varphi'(x)=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$. Είναι $\varphi'(1)=0 \Leftrightarrow f'(1)g(1)-f(1)g'(1)=0 \Leftrightarrow$

$$f'(1)g(1)=f(1)g'(1) \Leftrightarrow \frac{f'(1)}{g'(1)}=\frac{f(1)}{g(1)} \Leftrightarrow \frac{f'(1)}{g'(1)}=\varphi(1).$$

23. Είναι: $f(x)=\begin{cases}-(\alpha x+\beta)(\gamma x+\delta) & ,\ x<-\dfrac{\delta}{\gamma}\\ (\alpha x+\beta)(\gamma x+\delta) & ,\ x\ge-\dfrac{\delta}{\gamma}\end{cases}$.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to-\frac{\delta}{\gamma}^-}\frac{f(x)-f\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right)}{x+\frac{\delta}{\gamma}}=\lim_{x\to-\frac{\delta}{\gamma}^-}\frac{-(\alpha x+\beta)\cancel{(\gamma x+\delta)}}{\frac{\cancel{\gamma x+\delta}}{\gamma}}=-\gamma\left(-\frac{\alpha\delta}{\gamma}+\beta\right)=\alpha\delta-\beta\gamma,$$

$$\lim_{x\to -\frac{\delta}{\gamma}^+}\frac{f(x)-f\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right)}{x+\frac{\delta}{\gamma}}=\lim_{x\to -\frac{\delta}{\gamma}^+}\frac{(\alpha x+\beta)\cancel{(\gamma x+\delta)}}{\frac{\cancel{\gamma x+\delta}}{\gamma}}=\gamma\left(-\frac{\alpha\delta}{\gamma}+\beta\right)=-\alpha\delta+\beta\gamma .$$

Για $x\neq -\frac{\delta}{\gamma}$ η f είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, αν και μόνο αν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=-\frac{\delta}{\gamma}$

δηλαδή όταν $\alpha\delta-\beta\gamma=-\alpha\delta+\beta\gamma \Leftrightarrow \alpha\delta=\beta\gamma \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha}=\frac{\delta}{\gamma}$.

24. Έστω $P(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$. Τότε: $P(0)=2\Leftrightarrow \gamma=2$,

$P(1)=0\Leftrightarrow \alpha+\beta+2=0\Leftrightarrow \alpha+\beta=-2$.

Η συνάρτηση P είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$P'(x)=\left(\alpha x^2+\beta x+\gamma\right)'=2\alpha x+\beta$ άρα $P'(1)=-1\Leftrightarrow 2\alpha+\beta=-1$.

Είναι: $\begin{cases}\alpha+\beta=-2\\ 2\alpha+\beta=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=-2-\alpha\\ 2\alpha-2-\alpha=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=-3\\ \alpha=1\end{cases}$. Οπότε $P(x)=x^2-3x+2$.

25. Έστω $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0$ βαθμού $\nu\in\mathbb{N}^*$. Είναι

$P'(x)=\nu\alpha_\nu x^{\nu-1}+(\nu-1)\alpha_{\nu-1}x^{\nu-2}+\cdots+2\alpha_2x+\alpha_1$ άρα θα είναι βαθμού $\nu-1$.

Έστω $P(x)=a_0$ τότε θα είναι το σταθερό ή το μηδενικό πολυώνυμο οπότε θα είναι μηδενικού βαθμού ή δεν θα ορίζεται βαθμός.

Τότε $P'(x)=0$ το οποίο δεν έχει βαθμό. Επομένως ο ισχυρισμός είναι αληθής αν είναι πολυώνυμο τουλάχιστον 1ου βαθμού ενώ είναι ψευδής αν είναι σταθερό ή μηδενικό πολυώνυμο.

26. Έστω $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta, \alpha\neq 0$.

Η συνάρτηση P είναι τρείς φορές παραγωγίσιμη με παράγωγο

$P'(x)=3\alpha x^2+2\beta x+\gamma$, δεύτερη παράγωγο $P''(x)=6\alpha x+2\beta$ και τρίτη παράγωγο $P^{(3)}(x)=6\alpha$.

Είναι $P(0)+xP'(0)+\frac{x^2}{2}P''(0)+\frac{x^3}{6}P^{(3)}(0)=\delta+x\gamma+\frac{x^2}{2}\cdot 2\beta+\frac{x^3}{6}\cdot 6\alpha=$

$\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta=P(x)$.

27. Επειδή τα ρ_1,ρ_2,ρ_3 είναι ρίζες του $P(x)$, τα $x-\rho_1$, $x-\rho_2$, $x-\rho_3$ θα είναι παράγοντές του. Δηλαδή $P(x)=(x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)$.

Είναι $P'(x)=(x-\rho_2)(x-\rho_3)+(x-\rho_1)(x-\rho_3)+(x-\rho_1)(x-\rho_2)$ και

$P'(\rho_1)=(\rho_1-\rho_2)(\rho_1-\rho_3)$, $P'(\rho_2)=(\rho_2-\rho_1)(\rho_2-\rho_3)$ και

$P'(\rho_3)=(\rho_3-\rho_1)(\rho_3-\rho_2)$.

Άρα $\dfrac{\rho_1}{P'(\rho_1)}+\dfrac{\rho_2}{P'(\rho_2)}+\dfrac{\rho_3}{P'(\rho_3)}=$

$$\frac{\rho_1}{(\rho_1-\rho_2)(\rho_1-\rho_3)}+\frac{\rho_2}{(\rho_2-\rho_1)(\rho_2-\rho_3)}+\frac{\rho_3}{(\rho_3-\rho_1)(\rho_3-\rho_2)}\Leftrightarrow$$

$$\frac{\rho_1}{P'(\rho_1)}+\frac{\rho_2}{P'(\rho_2)}+\frac{\rho_3}{P'(\rho_3)}=\frac{\rho_1}{(\rho_1-\rho_2)(\rho_1-\rho_3)}-\frac{\rho_2}{(\rho_1-\rho_2)(\rho_2-\rho_3)}$$

$$+\frac{\rho_3}{(\rho_1-\rho_3)(\rho_2-\rho_3)}\Leftrightarrow$$

$$\frac{\rho_1}{P'(\rho_1)}+\frac{\rho_2}{P'(\rho_2)}+\frac{\rho_3}{P'(\rho_3)}=\frac{\rho_1(\rho_2-\rho_3)-\rho_2(\rho_1-\rho_3)+\rho_3(\rho_1-\rho_2)}{(\rho_1-\rho_2)(\rho_1-\rho_3)(\rho_2-\rho_3)}\Leftrightarrow$$

$$\frac{\rho_1}{P'(\rho_1)}+\frac{\rho_2}{P'(\rho_2)}+\frac{\rho_3}{P'(\rho_3)}=\frac{\rho_1\rho_2-\rho_1\rho_3-\rho_2\rho_1+\rho_2\rho_3+\rho_3\rho_1-\rho_3\rho_2}{(\rho_1-\rho_2)(\rho_1-\rho_3)(\rho_2-\rho_3)}=0.$$

28. Είναι $\left[P'(x)\right]^2=8P(x)+1$ (1). Έστω ότι το $P(x)$ είναι:

- σταθερό πολυώνυμο. Αν $P(x)=a, a\in\mathbb{R}$.

$0=8\alpha+1\Leftrightarrow 8\alpha=-1\Leftrightarrow \alpha=-\dfrac{1}{8}$ οπότε $P(x)=-\dfrac{1}{8}$.

- μηδενικό πολυώνυμο. Τότε από τη σχέση (1) έχουμε $0=0+1\Leftrightarrow 0=1$ άτοπο.
- ν -οστού βαθμού. Τότε ο $P'(x)$ είναι $(\nu-1)$ βαθμού και το $\left(P'(x)\right)^2$ είναι

$2(\nu-1)$ βαθμού. Για να ισχύει η σχέση $\left[P'(x)\right]^2=8P(x)+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, πρέπει τα πολυώνυμα $\left[P'(x)\right]^2$ και $8P(x)+1$ να είναι του ίδιου βαθμού, δηλαδή: $2(\nu-1)=\nu\Leftrightarrow 2\nu-2=\nu\Leftrightarrow \nu=2$. Άρα το $P(x)$ είναι $2^{ου}$ βαθμού.

Έστω $P(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$. Τότε $P'(x)=2\alpha x+\beta$.

Είναι $\left[P'(x)\right]^2=8P(x)+1\Leftrightarrow (2\alpha x+\beta)^2=8\left(\alpha x^2+\beta x+\gamma\right)+1\Leftrightarrow$

$4\alpha^2x^2+4\alpha\beta x+\beta^2=8\alpha x^2+8\beta x+8\gamma+1$ (1).

Για να ισχύει η (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$, πρέπει: $\begin{cases} 4\alpha^2 = 8\alpha \\ 4\alpha\beta = 8\beta \\ \beta^2 = 8\gamma + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta \in \mathbb{R} \\ \gamma = \dfrac{\beta^2 - 1}{8} \end{cases}$.

Επίσης $P'(0) = 1 \Leftrightarrow \beta = 1$. Άρα $\gamma = \dfrac{1^2 - 1}{8} = 0$.

Επομένως $P(x) = 2x^2 + x$, $\beta \in \mathbb{R}$.

29.Έστω ότι το $P(x)$ είναι ν-οστού βαθμού. Τότε το $P'(x)$ θα είναι $(\nu - 1)$ βαθμού και το $\left[P'(x)\right]^2$ θα είναι $(2\nu - 2)$ βαθμού. Οπότε για να ισχύει η ισότητα $4P(x) = \left[P'(x)\right]^2$ πρέπει $\nu = 2\nu - 2 \Leftrightarrow \nu = 2$. Άρα το πολυώνυμο είναι 2ου βαθμού. Έστω $P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$. Τότε $P'(x) = 2\alpha x + \beta$.

$4P(x) = \left[P'(x)\right]^2 \Leftrightarrow 4\alpha x^2 + 4\beta x + 4\gamma = (2\alpha x + \beta)^2 \Leftrightarrow$

$$4\alpha x^2 + 4\beta x + 4\gamma = 4\alpha^2 x^2 + 4\alpha\beta x + \beta^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{4}\cancel{\alpha} = \cancel{4}\alpha^{\cancel{2}} \\ 4\beta = 4\alpha\beta \\ 4\gamma = \beta^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \alpha \\ 4\beta = 4\beta \\ \gamma = \dfrac{\beta^2}{4} \end{cases}.$$

Επίσης $P(1) = 0 \Leftrightarrow a + \beta + \gamma = 0 \Leftrightarrow 1 + \beta + \dfrac{\beta^2}{4} = 0 \Leftrightarrow$

$1 + \beta + \dfrac{\beta^2}{4} = 0 \Leftrightarrow \beta^2 + 4\beta + 4 = 0 \Leftrightarrow (\beta + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \beta + 2 = 0 \Leftrightarrow \beta = -2$.

Άρα $\gamma = \dfrac{(-2)^2}{4} = \dfrac{4}{4} = 1$.

Άρα $P(x) = x^2 - 2x + 1$.

30.Αν η g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε

$h'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ (1)

Αν $f(x_0) = 0$ τότε από τη σχέση (1) έχουμε $h'(x_0) = f'(x_0)g(x_0)$ άτοπο.

Αν $f(x_0) \neq 0$ τότε $g'(x_0) = \dfrac{h'(x_0) - f'(x_0)g(x_0)}{f(x_0)}$.

Άρα πρέπει $f(x_0) \neq 0$ ώστε η g να είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

Σύνθετες ασκήσεις

31.α) Έστω $f(x)=(x-\rho)^2\,\Pi(x)$ (1)
Η f είναι παραγωγίσιμη σαν πολυωνυμική με παράγωγο
$f'(x)=2(x-\rho)\Pi(x)+(x-\rho)^2\,\Pi'(x)$ (2)
Για $x=\rho$ στις σχέσεις (1) και (2) έχουμε: $f(\rho)=(\rho-\rho)^2\,\Pi(\rho)=0$ και
$f'(\rho)=2(\rho-\rho)\Pi(\rho)+(\rho-\rho)^2\,\Pi'(\rho)=0$.
Αντίστροφα: Αν $f(\rho)=0$, τότε το x- ρ θα είναι παράγοντας του πολυωνύμου οπότε θα υπάρχει πολυώνυμο Q(x) τέτοιο ώστε $f(x)=(x-\rho)Q(x)$ (3)
Παραγωγίζοντας τη σχέση (3) έχουμε $f'(x)=Q(x)+(x-\rho)Q'(x)$.
Είναι $f'(\rho)=0\Leftrightarrow Q(\rho)+(\rho-\rho)Q'(\rho)=0\Leftrightarrow Q(\rho)=0$, οπότε το x- ρ θα είναι παράγοντας του πολυωνύμου Q(x) οπότε θα υπάρχει πολυώνυμο Π(x) τέτοιο ώστε $Q(x)=(x-\rho)\Pi(x)$ (4)
Από (3), (4) συνεπάγεται ότι $f(x)=(x-\rho)^2\,\Pi(x)$.
β) Έστω $P(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ τότε $P'(x)=2\alpha x+\beta$.
Είναι $P'(x)=0\Leftrightarrow 2\alpha x+\beta=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$.
Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha\neq 0$, $\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ έχει διπλή ρίζα αν και μόνον αν ο αριθμός $\rho=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$ (που είναι η μοναδική ρίζα της $P'(x)=0$) είναι ταυτόχρονα και ρίζα της $P(x)=0$ δηλαδή $P\left(-\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)=0\Leftrightarrow \alpha\left(-\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\beta\left(-\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)+\gamma=0\Leftrightarrow$

$$\frac{\cancel{\alpha}\beta^2}{4\alpha^{\cancel{2}}}-\frac{\beta^2}{2\alpha}+\gamma=0\Leftrightarrow\frac{\beta^2}{4\alpha}-\frac{\beta^2}{2\alpha}+\gamma=0\Leftrightarrow\frac{\beta^2-2\beta^2+4\alpha\gamma}{4\alpha}=0\Leftrightarrow\frac{-\beta^2+4\alpha\gamma}{4\alpha}=0\Leftrightarrow$$

$-\beta^2+4\alpha\gamma=0\Leftrightarrow\beta^2-4\alpha\gamma=0\Leftrightarrow\Delta=0$.
γ) Σύμφωνα με το α) ερώτημα, αρκεί να δείξουμε ότι $g(-1)=g'(-1)=0$.
Πράγματι $g(-1)=(-1)^{2\nu}-\nu(-1)^2+\nu-1=1-\nu+\nu-1=0$.
Επίσης η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $g'(x)=2\nu x^{2\nu-1}-2\nu x$.
Είναι $g'(-1)=2\nu(-1)^{2\nu-1}-2\nu(-1)=-2\nu+2\nu=0$.
Άρα το $(x+1)^2$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου g(x).
δ) Για να είναι το $(x-1)^2$ παράγοντας του $h(x)=\alpha x^{2\nu}+\beta x^{\nu-1}+4$, πρέπει

$h(1)=h'(1)=0$. Είναι $h'(x)=2\nu\alpha x^{2\nu-1}+\beta(\nu-1)x^{\nu-2}$. Οπότε:

$$\begin{cases} h(1)=\alpha+\beta+4=0 \\ h'(1)=2\alpha\nu+\beta(\nu-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-4-\alpha \\ 2\alpha\nu+(\nu-1)(-4-\alpha)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \beta=-4-\alpha \\ \alpha\nu+\alpha=4\nu-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-4-\alpha \\ (\nu+1)\alpha=4\nu-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-4-\dfrac{4\nu-4}{\nu+1} \\ \alpha=\dfrac{4\nu-4}{\nu+1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \beta=\dfrac{-4\nu-4-4\nu+4}{\nu+1} \\ \alpha=\dfrac{4\nu-4}{\nu+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-\dfrac{8\nu}{\nu+1} \\ \alpha=\dfrac{4\nu-4}{\nu+1} \end{cases}.$$

32.α) Είναι: $P(x)=\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)$. Η συνάρτηση P είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $P'(x)=\alpha(x-\rho_1)+\alpha(x-\rho_2)$. Επομένως

$$\frac{P'(x)}{P(x)}=\frac{\alpha(x-\rho_1)+\alpha(x-\rho_2)}{\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)}=\frac{\alpha(x-\rho_1)}{\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)}+\frac{\alpha(x-\rho_2)}{\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)}=$$
$$\frac{1}{x-\rho_1}+\frac{1}{x-\rho_2}.$$

β) Αν $P'(\rho_1)=0$ τότε $\alpha(\rho_1-\rho_2)=0 \overset{\alpha\neq 0}{\Leftrightarrow} \rho_1-\rho_2=0 \Leftrightarrow \rho_1=\rho_2$ άτοπο.

γ) Η συνάρτηση P είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με δεύτερη παράγωγο $P''(x)=2\alpha$. Επομένως $P''(x)P(x)<\left[P'(x)\right]^2 \Leftrightarrow$

$2\alpha\left(\alpha x^2+\beta x+\gamma\right)<(2\alpha x+\beta)^2 \Leftrightarrow 2\alpha^2x^2+2\alpha\beta x+2\alpha\gamma<4\alpha^2x^2+4\alpha\beta x+\beta^2 \Leftrightarrow$

$2\alpha^2x^2+2\alpha\beta x+\beta^2-2\alpha\gamma>0$ που ισχύει αφού

$\Delta=4\alpha^2\beta^2-8\alpha^2\left(\beta^2-2\alpha\gamma\right)=4\alpha^2\beta^2-8\alpha^2\beta^2+16\alpha^3\gamma \Leftrightarrow$

$\Delta=-4\alpha^2\beta^2+16\alpha^3\gamma \Leftrightarrow \Delta=-4\alpha^2\left(\beta^2-4\alpha\gamma\right)<0$.

(Το τριώνυμο P(x) έχει δύο ρίζες άνισες άρα έχει θετική διακρίνουσα οπότε $\beta^2-4\alpha\gamma>0$).

δ) Είναι $\dfrac{\rho_1}{P'(\rho_1)}+\dfrac{\rho_2}{P'(\rho_2)}=\dfrac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \dfrac{\rho_1}{\alpha(\rho_1-\rho_2)}+\dfrac{\rho_2}{\alpha(\rho_2-\rho_1)}=\dfrac{1}{\alpha} \Leftrightarrow$

$$\frac{\rho_1}{\alpha(\rho_1-\rho_2)}-\frac{\rho_2}{\alpha(\rho_1-\rho_2)}=\frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{\cancel{\rho_1-\rho_2}}{\alpha\cancel{(\rho_1-\rho_2)}}=\frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\alpha} \text{ ισχύει.}$$

33. Είναι $f(x+y)=f(x)f(y)$ (1)

α) Θέτουμε $x=y=0$ στη σχέση (1) οπότε $f^2(0)=1 \overset{f(0)\neq 0}{\Leftrightarrow} f(0)=1$.

β) Η f είναι συνεχής στο 0 επομένως $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=1$.

Για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$ είναι $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)\overset{(1)}{=}\lim\limits_{h\to 0}\left[f(x_0)f(h)\right]=f(x_0)\cdot 1=f(x_0)$.

Άρα η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

γ) Ισχύει $f'(0)=1\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=1\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$.

Για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$ είναι $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0)f(h)-f(x_0)}{h}=$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0)(f(h)-1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\left(f(x_0)\cdot\dfrac{f(h)-1}{h}\right)=f(x_0)\cdot 1=f(x_0)$.

Άρα f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

34.α) Θα αποδείξουμε ότι: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=0$ για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$. Είναι $f^3(x)+f(x)=x$ (1). Για $x=x_0$ είναι: $f^3(x_0)+f(x_0)=x_0$ (2)

Με αφαίρεση κατά μέλη των (1), (2) προκύπτει:

$f^3(x)-f^3(x_0)+f(x)-f(x_0)=x-x_0\Leftrightarrow$

$(f(x)-f(x_0))(f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+1)=x-x_0$ (3)

Αν θέσουμε $f(x)=\omega$ στην παράσταση $f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)$ προκύπτει το τριώνυμο $\omega^2+f(x_0)\cdot\omega+f^2(x_0)$, το οποίο έχει διακρίνουσα

$\Delta=f^2(x_0)-4f^2(x_0)=-3f^2(x_0)\le 0$ άρα $\omega^2+f(x_0)\cdot\omega+f^2(x_0)\ge 0\Leftrightarrow$

$f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)\ge 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε

$f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+1\ge 1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Από τη σχέση έχουμε:

$f(x)-f(x_0)=\dfrac{x-x_0}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+1}$ οπότε

$|f(x)-f(x_0)|=\dfrac{|x-x_0|}{|f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+1|}$ (4)

Για $x\neq x_0$ είναι $f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+1\ge 1\Leftrightarrow$

$\dfrac{1}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+1}\le 1\Leftrightarrow$

$$\underbrace{\frac{|x-x_0|}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+1}}_{>0} \le |x-x_0| \Leftrightarrow$$

$$\frac{|x-x_0|}{|f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+1|} \le |x-x_0| \overset{(4)}{\Leftrightarrow} |f(x)| \le |x-x_0| \overset{(4)}{\Leftrightarrow}$$

$$-|x-x_0| \le f(x)-f(x_0) \le |x-x_0| .$$

Όμως $\lim\limits_{x\to x_0}|x-x_0|=0$ και $\lim\limits_{x\to x_0}\left(-|x-x_0|\right)=0$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)=0$, άρα η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

β) Για $x \ne x_0$ είναι $f(x)-f(x_0)=\dfrac{x-x_0}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+1} \Leftrightarrow$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{1}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+1}.$$

Επομένως $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+1} \Leftrightarrow$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{1}{3f^2(x_0)+1} \Leftrightarrow f'(x_0)=\frac{1}{3f^2(x_0)+1} .$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=\dfrac{1}{3f^2(x)+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

γ) Για $x>0$ έχουμε: $f^3(x)+f(x)=x \Leftrightarrow f(x)\left(f^2(x)+1\right)=x \Leftrightarrow$

$$f(x)=\frac{x}{f^2(x)+1} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x^3}=\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{f^2(x)+1} .$$

Είναι $f^2(x)+1\ge 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{f^2(x)+1}\le 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x^2}\cdot\dfrac{1}{f^2(x)+1}\le\dfrac{1}{x^2} \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x^3}\le\dfrac{1}{x^2}$.

Άρα $\left|\dfrac{f(x)}{x^3}\right|=\dfrac{1}{x^2}\cdot\dfrac{1}{f^2(x)+1}\le\dfrac{1}{x^2} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{x^2}\le\dfrac{f(x)}{x^3}\le\dfrac{1}{x^2}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=0$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^3}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x^3}=0$.

δ) Για κάθε $x\ne 0$ είναι $\dfrac{f^3(x)}{x^3}+\dfrac{f(x)}{x^3}=\dfrac{1}{x^2} \Leftrightarrow \left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^3=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{f(x)}{x^3}$ οπότε

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^3 = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{f(x)}{x^3}\right)=0$. Επειδή $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{1}{f^2(x)+1}>0$, είναι

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^3}=0$. Όμοια $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

ε) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}\cdot\dfrac{1}{x}\right)=0\cdot 0=0$ και όμοια $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$.

ζ) Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι $f^3(x_1)+f(x_1)<f^3(x_2)+f(x_2)$ (5)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=x^3+x,\ x\in\mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ (6) τότε $x_1^3<x_2^3$ (7)

Με πρόθεση των σχέσεων (6) και (7) έχουμε $x_1^3+x_1<x_2^3+x_2\Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2)$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Από τη σχέση (5), έχουμε: $g(f(x_1))<g(f(x_2))\overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x_1)<f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)$. Αν $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=k\in\mathbb{R}$ τότε

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f^3(x)+f(x)\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\Leftrightarrow k^3+k=-\infty$ αδύνατο.

Αν $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f^3(x)+f(x)\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\Leftrightarrow+\infty=-\infty$ αδύνατο, άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

Όμοια $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, οπότε $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

η) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε είναι 1-1 άρα η f αντιστρέφεται. Θέτουμε $f(x)=y$ με $y\in\mathbb{R}$ στη σχέση (1) οπότε

έχουμε $y^3+y=x$, άρα $f^{-1}(y)=y^3+y,\ y\in\mathbb{R}$, άρα $f^{-1}(x)=x^3+x,\ x\in\mathbb{R}$.

θ) Από τη σχέση (1) για $x=2$ είναι $f^3(2)+f(2)=2\Leftrightarrow f^3(2)+f(2)-2=0\Leftrightarrow$

$(f(2)-1)(f^2(2)+f(2)+2)=0\Leftrightarrow(f(2)=1)$ ή $(f^2(2)+f(2)+2=0$ αδύνατη.

(Αν θέσουμε $f(2)=\beta$ προκύπτει το τριώνυμο $\beta^2+\beta+2$ με διακρίνουσα

Δ=-7<0). Επίσης $f'(2)=\dfrac{1}{3f^2(2)+1}=\dfrac{1}{4}$. Η εφαπτομένη της C_f στο Α είναι η

ε: $y-f(2)=f'(2)(x-2)\Leftrightarrow y-1=\dfrac{1}{4}(x-2)\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2}$.

ι) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{f(2\eta\mu x)-1}{2x-\pi}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\dfrac{f(2\eta\mu x)-1}{2\eta\mu x-2}\cdot\dfrac{2\eta\mu x-2}{2x-\pi}\right]=$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{f(2\eta\mu x)-1}{2\eta\mu x-2}\cdot\frac{\cancel{2}(\eta\mu x-1)}{\cancel{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}\right]=\frac{1}{4}\cdot 0=0.$$

(Είναι $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(2\eta\mu x)-1}{2\eta\mu x-2}\underset{\substack{x\to\frac{\pi}{2},\\ u\to 2}}{\overset{u=2\eta\mu x}{=}}\lim\limits_{u\to 2}\frac{f(u)-f(2)}{u-2}=f'(2)=\frac{1}{4}$,

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\eta\mu x-1}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-1}{\frac{\pi}{2}-x}\right)\underset{\substack{x\to\frac{\pi}{2},\\ \theta\to 0}}{\overset{\theta=\frac{\pi}{2}-x}{=}}\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu\theta-1}{\theta}=0$).

κ) Αρκεί η εξίσωση $f^{-1}(x)=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\Leftrightarrow x^3+x=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\Leftrightarrow$

$4x^3+4x=x+2=0\Leftrightarrow 4x^3+3x-2=0$ να έχει ακριβώς μια ρίζα.

Έστω $\varphi(x)=4x^3+3x-2,\ x\in\mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι $x_1^3<x_2^3\Leftrightarrow 4x_1^3<4x_2^3$ (4) και

$3x_1<3x_2\Leftrightarrow 3x_1-2<3x_2-2$ (5).

Με πρόσθεση των σχέσεων (1) και (2) έχουμε

$4x_1^3+3x_1-2<4x_2^3+3x_2-2\Leftrightarrow\varphi(x_1)<\varphi(x_2)$ άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα

στο $\mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι $\varphi(0)=-2<0,\ \ \varphi(1)=5>0$, δηλαδή $\varphi(0)\varphi(1)<0$.

Η φ είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος οπότε υπάρχει $\rho\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $\varphi(\rho)=0\Leftrightarrow\ f^{-1}(\rho)=\frac{1}{4}\rho+\frac{1}{2}$.

Επειδή η φ είναι γνησίως αύξουσα, το ρ είναι μοναδικό. Άρα $\alpha=0$.

Τράπεζα θεμάτων

26630. α) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}e^x=1$, $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sigma\upsilon\nu x=1$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$, η f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

β) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{x}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=e^x,\ x\in\mathbb{R}$.

Είναι $\varphi'(x)=e^x,\ x\in\mathbb{R}$ και

$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}=\varphi'(0)=1$,

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\neq\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

γ) Είναι $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}=0$. Για x > 0 είναι $f'(x)=-\eta\mu x$ και $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$.

Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση $y-f\left(\frac{\pi}{2}\right)=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow y=-x+\frac{\pi}{2}$

27315. α) $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}=4$,

$\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\alpha x^2-4\right)=4\alpha-4$.

β) Η f είναι συνεχής στο $x_0=2$ όταν $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=f(2)\Leftrightarrow$

$4\alpha-4=4\Leftrightarrow 4\alpha=8\Leftrightarrow\alpha=2$.

γ) Για α = 2 είναι $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}=x+2, & \alpha\nu\ \ x<2\\ 2x^2-4, & \alpha\nu\ \ x\geq 2\end{cases}$.

Για x < 2 είναι $f'(x)=1$ και για x > 2 είναι $f'(x)=4x$. Στο x = 2 έχουμε:

$\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x+2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{\cancel{x-2}}{\cancel{x-2}}=1$,

$\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{2x^2-4-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{2\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}=8$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\neq\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x = 2.

31743. α) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)=\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x$, $f'(0)=0$ και $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\eta\mu\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}=1$.

β) Είναι $\varphi(0)=f'(0)-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}<0$ αι $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{3}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}>0$.

γ) Η φ είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Επειδή $\varphi(0)\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $\varphi(x) = 0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό ή Λάθος»

1. Λ	**2.** Λ	**3.** Σ	**4.** Λ	**5.** Λ	**6.** Λ	**7.** Σ	**8.** Λ	**9.** Λ	**10.** Λ
11. Σ	**12.** Λ	**13.** Λ	**14.** Σ	**15.** Λ	**16.** Σ	**17.** Λ	**18.** Σ	**19.** Σ	**20.** Σ
21. Λ	**22.** Λ	**23.** Λ	**24.** Λ	**25.** Σ	**26.** Λ				

18 Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

Παράγωγοι σύνθετης συνάρτησης

13. Είναι:

α) $f'(x)=5(3x-1)^4\cdot(3x-1)'=15(3x-1)^4$.

β) $f'(x)=4(4x^3-3x^2)^3\cdot(4x^3-3x^2)'=4(4x^3-3x^2)^3\cdot(12x^2-6x)$.

γ) $f'(x)=10(x^2-3x+5)^9\cdot(x^2-3x+5)'=10(x^2-3x+5)^9\cdot(2x-3)$.

δ) $f'(x)=5(x^2-3x)^4\cdot(x^2-3x)'=5(x^2-3x)^4\cdot(2x-3)$.

ε) $f'(x)=\left[3(x^2-2)^{-3}\right]'=-9(x^2-2)^{-4}\cdot(x^2-2)'=\dfrac{-18x}{(x^2-2)^4}$.

στ) $f'(x)=\left[2(x^2+x+1)^{-4}\right]'=-8(x^2+x+1)^{-5}\cdot(x^2+x+1)'=\dfrac{-8(2x+1)}{(x^2+x+1)^5}$.

14. Είναι:

α) $f'(x)=3ημ^2x\cdot(ημx)'=3ημ^2x\cdot συνx$.

β) $f'(x)=συνx^3\cdot(x^3)'=3x^2\cdot συνx^3$.

γ) $f'(x)=5ημ^4x\cdot(ημx)'=5ημ^4x\cdot συνx$.

δ) $f'(x)=συνx^5\cdot(x^5)'=5x^4\cdot συνx^5$.

ε) $f'(x)=3συν^2x\cdot(συνx)'=-3ημx\cdot συν^2x$.

στ) $f'(x)=-ημx^3\cdot(x^3)'=-3x^2\cdot ημx^3$.

ζ) $f'(x)=συν(2x+1)\cdot(2x+1)'=2συν(2x+1)$.

η) $f'(x)=-ημ(ημx)\cdot(ημx)'=-ημ(ημx)\cdot συνx$.

θ) $f'(x)=συν(συνx)\cdot(συνx)'=-ημx\cdot συν(συνx)$.

ι) $f'(x)=συν(e^x)(e^x)'=e^xσυν(e^x)$.

κ) $f'(x)=2εφx(εφx)'=\dfrac{2εφx}{συν^2x}=\dfrac{2ημx}{συν^3x}$. **λ)** $f'(x)=\dfrac{1}{συν^2x^2}(x^2)'=\dfrac{2x}{συν^2x^2}$.

15. Είναι: **α)** $f'(x)=\dfrac{(x^2+x+1)'}{2\sqrt{x^2+x+1}}=\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$.

β) $f'(x)=\dfrac{(3+\eta\mu x)'}{2\sqrt{3+\eta\mu x}}=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{2\sqrt{3+\eta\mu x}}$.

γ) $f'(x)=\dfrac{(x+1-\eta\mu x)'}{2\sqrt{x+1-\eta\mu x}}=\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{2\sqrt{x+1-\eta\mu x}}$.

δ) $f'(x)=e^{3x}(3x)'=3e^{3x}$.

ε) $f'(x)=e^{-x^2}\left(-x^2\right)'=-2xe^{-x^2}$.

στ) $f'(x)=\left[\ln(x+1)^{\frac{1}{2}}\right]'=\left(\dfrac{1}{2}\ln(x+1)\right)'=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x+1}(x+1)'=\dfrac{1}{2(x+1)}$.

ζ) $f'(x)=\dfrac{1}{2x+3}(2x+3)'=\dfrac{2}{2x+3}$.

η) $f'(x)=\dfrac{1}{3x}(3x)'=\dfrac{3}{3x}=\dfrac{1}{x}$.

θ) $f'(x)=3\cdot\left(\ln^2 x\right)'=6\ln x\cdot(\ln x)'=\dfrac{6\ln x}{x}$.

16. Είναι:

α) $f'(x)=2\eta\mu\left(x^2+3x+4\right)\left[\eta\mu\left(x^2+3x+4\right)\right]'\Leftrightarrow$

$f'(x)=2\eta\mu\left(x^2+3x+4\right)\sigma\upsilon\nu\left(x^2+3x+4\right)\left(x^2+3x+4\right)'\Leftrightarrow$

$f'(x)=2\eta\mu\left(x^2+3x+4\right)\sigma\upsilon\nu\left(x^2+3x+4\right)(2x+3)$.

β) $f'(x)=2\eta\mu\left(x^2-5x\right)\left[\eta\mu\left(x^2-5x\right)\right]'\Leftrightarrow$

$f'(x)=2\eta\mu\left(x^2-5x\right)\sigma\upsilon\nu\left(x^2-5x\right)\left(x^2-5x\right)'=$

$=2\eta\mu\left(x^2-5x\right)\sigma\upsilon\nu\left(x^2-5x\right)(2x-5)$.

γ) $f'(x)=4\sigma\upsilon\nu^3\left(x^3-3x^2\right)\left(\sigma\upsilon\nu\left(x^3-3x^2\right)\right)'\Leftrightarrow$

$f'(x)=-4\sigma\upsilon\nu^3\left(x^3-3x^2\right)\eta\mu\left(x^3-3x^2\right)\left(x^3-3x^2\right)'\Leftrightarrow$

$f'(x)=-4\sigma\upsilon\nu^3\left(x^3-3x^2\right)\eta\mu\left(x^3-3x^2\right)\left(3x^2-6x\right)$.

δ) $f'(x)=3\sigma\upsilon\nu^2\left(x^3+\pi\right)\left(\sigma\upsilon\nu\left(x^3+\pi\right)\right)'\Leftrightarrow$

$f'(x)=-3\sigma\upsilon\nu^2\left(x^3+\pi\right)\eta\mu\left(x^3+\pi\right)\left(x^3+\pi\right)'=-9x^2\sigma\upsilon\nu^2\left(x^3+\pi\right)\eta\mu\left(x^3+\pi\right)$.

ε) $f'(x)=2\ln\left(x^3-3x^2\right)\left[\ln\left(x^3-3x^2\right)\right]' \Leftrightarrow$

$f'(x)=2\ln\left(x^3-3x^2\right)\dfrac{1}{x^3-3x^2}\left(x^3-3x^2\right)'=\dfrac{2\left(3x^2-6x\right)\ln\left(x^3-3x^2\right)}{x^3-3x^2} \Leftrightarrow$

$f'(x)=\dfrac{6\cancel{x}(x-2)\ln\left(x^3-3x^2\right)}{x^{\cancel{3}2}-3x^{\cancel{2}}} \Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{6(x-2)\ln\left(x^3-3x^2\right)}{x^2-3x}.$

στ) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{\eta\mu^2x+1}}\left(\eta\mu^2x+1\right)'=\dfrac{\cancel{2}\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{\cancel{2}\sqrt{\eta\mu^2x+1}} \Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{\sqrt{\eta\mu^2x+1}}.$

ζ) $f'(x)=\dfrac{\left(1+\sigma\upsilon\nu(3x+2)\right)'}{2\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu(3x+2)}}=\dfrac{-\eta\mu(3x+2)(3x+2)'}{2\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu(3x+2)}}=\dfrac{-3\eta\mu(3x+2)}{2\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu(3x+2)}}.$

η) $f'(x)=\dfrac{\left(3\eta\mu^2 4x+2\right)'}{2\sqrt{3\eta\mu^2 4x+2}}=\dfrac{6\eta\mu 4x\left(\eta\mu 4x\right)'}{2\sqrt{3\eta\mu^2 4x+2}}=\dfrac{6\eta\mu 4x\sigma\upsilon\nu 4x(4x)'}{2\sqrt{3\eta\mu^2 4x+2}}=$

$\dfrac{12\eta\mu 4x\sigma\upsilon\nu 4x}{\sqrt{3\eta\mu^2 4x+2}}.$

θ) $f'(x)=3^{x^2}\cdot\ln 3\cdot\left(x^2\right)'=2x\cdot 3^{x^2}\cdot\ln 3.$

ι) $f'(x)=2^{x^2-5x}\cdot\ln 2\cdot\left(x^2-5x\right)'=2^{x^2-5x}\cdot\ln 2\cdot(2x-5).$

17. α) $f'(x)=\left(e^{3x}\right)'\eta\mu 2x+e^{3x}\left(\eta\mu 2x\right)'=3e^{3x}\eta\mu 2x+2e^{3x}\sigma\upsilon\nu 2x.$

β) $f'(x)=3\left(e^{-x}\right)'\ln 2x+3e^{-x}\left(\ln 2x\right)'=-3e^{-x}\ln 2x+\dfrac{3e^{-x}}{x}.$

γ) $f'(x)=3\left(x^2+1\right)^2\left(x^2+1\right)'\eta\mu 2x+\left(x^2+1\right)^3\sigma\upsilon\nu 2x(2x)'=$

$6x\left(x^2+1\right)^2\eta\mu 2x+2\left(x^2+1\right)^3\sigma\upsilon\nu 2x.$

δ) $f'(x)=6\eta\mu 3x\sigma\upsilon\nu 3x\sigma\upsilon\nu^3 2x-6\eta\mu^2 3x\sigma\upsilon\nu^2 2x\eta\mu 2x.$

ε) $f'(x)=\dfrac{3e^{3x}\cdot\left(x^2-3x\right)^{\cancel{2}}-e^{3x}\cdot 2\cdot\cancel{\left(x^2-3x\right)}\cdot(2x-3)}{\left(x^2-3x\right)^{\cancel{4}3}}=$

$\dfrac{3e^{3x}\left(x^2-3x\right)-2e^{3x}(2x-3)}{\left(x^2-3x\right)^3}.$

στ) $f'(x)=\dfrac{4\eta\mu 2x\cdot\sigma\upsilon\nu 2x\cdot\ln 4x-\dfrac{\eta\mu^2 2x}{x}}{\ln^2 4x}=\dfrac{4x\eta\mu 2x\cdot\sigma\upsilon\nu 2x\cdot\ln 4x-\eta\mu^2 2x}{x\cdot\ln^2 4x}$.

18. α) $f(x)=x^x=e^{\ln x^x}=e^{x\ln x}$,

$f'(x)=\left(e^{x\ln x}\right)'=e^{x\ln x}\cdot(x\ln x)'=x^x\cdot\left(\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}\right)=x^x\cdot(\ln x+1)$.

β) $f(x)=e^{x\ln(\ln x)}$,

$f'(x)=e^{x\ln(\ln x)}\left(\ln(\ln x)+\cancel{x}\dfrac{1}{\ln x}\dfrac{1}{\cancel{x}}\right)=(\ln x)^x\left(\ln(\ln x)+\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

γ) $f(x)=x^{\ln x}=e^{\ln x^{\ln x}}=e^{\ln^2 x}$,

$f'(x)=\left(e^{\ln^2 x}\right)'=e^{\ln^2 x}\cdot\left(\ln^2 x\right)'=x^{\ln x}\cdot 2\ln x\cdot(\ln x)'=\dfrac{2x^{\ln x}\cdot\ln x}{x}$.

δ) $f(x)=\left(\dfrac{2}{x}\right)^x=e^{\ln\left(\frac{2}{x}\right)^x}=e^{x\ln\frac{2}{x}}=e^{x(\ln 2-\ln x)}$,

$f'(x)=\left(e^{x(\ln 2-\ln x)}\right)'=e^{x(\ln 2-\ln x)}\cdot\left(x(\ln 2-\ln x)\right)'=\left(\dfrac{2}{x}\right)^x\cdot\left(\ln 2-\ln x-x\cdot\dfrac{1}{x}\right)\Leftrightarrow$

$f'(x)=\left(\dfrac{2}{x}\right)^x\cdot\left(\ln\dfrac{2}{x}-1\right)$.

ε) $f(x)=\left(x^2+1\right)^{x^4}=e^{\ln\left(x^2+1\right)^{x^4}}=e^{x^4\cdot\ln\left(x^2+1\right)}$,

$f'(x)=\left[e^{x^4\cdot\ln\left(x^2+1\right)}\right]'=e^{x^4\cdot\ln\left(x^2+1\right)}\cdot\left[x^4\cdot\ln\left(x^2+1\right)\right]'\Leftrightarrow$

$f'(x)=\left(x^2+1\right)^{x^4}\cdot\left[4x^3\cdot\ln\left(x^2+1\right)+x^4\cdot\dfrac{1}{x^2+1}\left(x^2+1\right)'\right]\Leftrightarrow$

$f'(x)=\left(x^2+1\right)^{x^4}\left[4x^3\ln\left(x^2+1\right)+\dfrac{2x^5}{x^2+1}\right]$.

στ) $f(x)=e^{x\ln(\eta\mu x)}$,

$f'(x)=e^{x\ln(\eta\mu x)}\left(\ln(\eta\mu x)+x\cdot\dfrac{1}{\eta\mu x}\sigma\upsilon\nu x\right)=(\eta\mu x)^x\left(\ln(\eta\mu x)+x\sigma\varphi x\right)$.

ζ) $f(x)=t^t+e^{x^2\ln x}$, $f'(x)=e^{x^2\ln x}\cdot\left(2x\ln x+x^{\cancel{2}}\dfrac{1}{\cancel{x}}\right)=x^{x^2+1}\cdot(2\ln x+1)$.

η) $f(x)=e^{x\ln x}2^{x^2}$, $f'(x)=e^{x\ln x}\cdot(\ln x+1)\cdot 2^{x^2}+e^{x\ln x}\cdot 2^{x^2}\cdot 2x\cdot\ln 2 \Leftrightarrow$

$f'(x)=x^x\cdot 2^{x^2}(\ln x+1+2x\cdot\ln 2)$.

19. α) $f(x)=x^2\cdot x^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{5}{2}}$, $x\geq 0$.

Για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)=\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}=\frac{5}{2}x\sqrt{x}$.

Στο $x_0=0$, έχουμε: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^{\cancel{2}}\sqrt{x}}{\cancel{x}}=0$.

β) $f(x)=\begin{cases} x^{\frac{2}{5}} & , x>0 \\ 0 & , x=0 \\ (-x)^{\frac{2}{5}} & , x<0 \end{cases}$. Για $x>0$ είναι $f'(x)=\frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}}=\frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$ και για

$x<0$ είναι $f'(x)=-\frac{2}{5}(-x)^{-\frac{3}{5}}=-\frac{2}{5\sqrt[5]{-x^3}}$. Στο $x_0=0$, έχουμε:

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^{\frac{2}{5}}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}=+\infty$, οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

γ) $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}=|x-1|^{\frac{2}{3}}=\begin{cases} (x-1)^{\frac{2}{3}} & , x>1 \\ 0 & , x=1 \\ (-x+1)^{\frac{2}{3}} & , x<1 \end{cases}$.

• Αν $x>1$, είναι: $f'(x)=\left[(x-1)^{\frac{2}{3}}\right]'=\frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}$.

• Αν $x<1$, είναι: $f'(x)=\left[(-x+1)^{\frac{2}{3}}\right]'=-\frac{2}{3}(-x+1)^{-\frac{1}{3}}=-\frac{2}{3\sqrt[3]{-x+1}}$.

Στο $x_0=1$ έχουμε: $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{(-x+1)^{\frac{2}{3}}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{(-x+1)^{\frac{2}{3}}}{-(-x+1)}=$

$-\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{(-x+1)^{\frac{1}{3}}}=-\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{\sqrt[3]{-x+1}}=-\infty$.

Οπότε η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

Άρα: $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x-1}} & ,\ x>1\\ -\dfrac{2}{3\sqrt[3]{-x+1}} & ,\ x<1\end{cases}$.

δ) $f(x)=\begin{cases}x^{\frac{9}{5}} & ,\ x>0\\ 0 & ,\ x=0\\ (-x)^{\frac{9}{5}} & ,\ x<0\end{cases}$.

Αν $x<0$ τότε $f'(x)=\left((-x)^{\frac{9}{5}}\right)'=-\frac{9}{5}(-x)^{\frac{4}{5}}=-\frac{9}{5}\sqrt[5]{x^4}$.

Για $x>0$ είναι $f'(x)=\frac{9}{5}\cdot x^{\frac{4}{5}}=\frac{9}{5}\cdot\sqrt[5]{x^4}$.

Στο $x_0=0$, έχουμε: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cancel{x}\sqrt[5]{x^4}}{\cancel{x}}=0$.

ε) $f(x)=\begin{cases}(x^2-1)^{\frac{2}{3}} & ,\ x\le -1 \text{ ή } x\ge 1\\ (-x^2+1)^{\frac{2}{3}} & ,\ -1<x<1\end{cases}$.

Για $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ είναι: $f'(x)=\frac{2}{3}(x^2-1)^{-\frac{1}{3}}\cdot 2x=\dfrac{4x}{2\sqrt[3]{x^2-1}}$.

Για $x\in(-1,1)$ είναι: $f'(x)=-\frac{2}{3}(-x^2+1)^{-\frac{1}{3}}\cdot 2x=-\dfrac{4x}{2\sqrt[3]{-x^2+1}}$.

Στο $x_0=-1$ έχουμε:

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1^-}\frac{(x^2-1)^{\frac{2}{3}}}{x+1}=\lim_{x\to -1^-}-\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)^2}}{\sqrt[3]{\left[-(x+1)^3\right]}}=$$

$$\lim_{x\to -1^-}\sqrt[3]{\frac{(x-1)^2\ \cancel{(x+1)^2}}{-(x+1)^{\cancel{3}}}}=\lim_{x\to -1^+}\sqrt[3]{\frac{(x-1)^2}{-(x+1)}}=\lim_{x\to -1^+}\left(\sqrt[3]{(x-1)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{-x-1}}\right)=+\infty,$$

άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=-1$.

Στο $x_0=1$ έχουμε: $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{(x^2-1)^{\frac{2}{3}}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)^2}}{\sqrt[3]{(x-1)^3}}=$

$$\lim_{x\to 1^+}\sqrt[3]{\frac{(x+1)^2\cancel{(x-1)^2}}{(x-1)^{\cancel{3}}}}=\lim_{x\to 1^+}\left[\sqrt[3]{(x+1)}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\right]=+\infty,$$

άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

στ) $f(x)=\begin{cases}2x-x^{\frac{5}{3}} & ,\ x>0\\ 0 & ,x=0\\ 2x-(-x)^{\frac{5}{3}} & ,\ x<0\end{cases}$.

Αν $x<0$ τότε $f'(x)=\left(2x-(-x)^{\frac{5}{3}}\right)'=2+\frac{5}{3}(-x)^{\frac{2}{3}}=2+\frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$.

Για $x>0$ είναι $f'(x)=\left(2x-x^{\frac{5}{3}}\right)'=2-\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}=2-\frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$.

Στο $x_0=0$ έχουμε: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cancel{x}-\cancel{x}\sqrt[3]{x^2}}{\cancel{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(2-\sqrt[3]{x^2}\right)=2$.

ζ) $f'(x)=\left(x^{\frac{3}{2}}\right)'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$ για $x>0$.

Στο $x_0=0$ έχουμε: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cancel{x}\sqrt{x}}{\cancel{x}}=0$.

η) $f'(x)=\left(\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{3}}-1\right)'=\frac{1}{3}\left(x^2+1\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2x=\frac{2x}{3\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)^2}}$.

θ) $f'(x)=\left((x+1)^{\frac{1}{3}}-1\right)'=\frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$ για $x>-1$.

Στο $x_0=-1$ έχουμε: $\lim\limits_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{x+1}}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{\cancel{\sqrt[3]{x+1}}}{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^{\cancel{3}2}}=+\infty$,

δηλαδή η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=-1$.

20. Είναι:

α) $g'(x)=2f(x)\cdot f'(x)+f'\left(x^2\right)\cdot 2x$ οπότε $g'(1)=2f(1)f'(1)+2f'(1)=6$.

β) $g'(x)=f'\left(f(x)\right)\cdot f'(x)+f'\left(f\left(f(x)\right)\right)\cdot\left(f\left(f(x)\right)\right)'\Leftrightarrow$

$g'(x)=f'\left(f(x)\right)\cdot f'(x)+f'\left(f\left(f(x)\right)\right)\cdot f'\left(f(x)\right)\cdot f'(x)$ οπότε

$$g'(1)=f'(f(1))\cdot f'(1)+f'(f(f(1)))\cdot f'(f(1))\cdot f'(1)=f'(2)+f'(f(2))f'(2)\Leftrightarrow$$
$$g'(1)=2+f'(2)f'(2)=2+4=6.$$

γ) $g'(x)=e^{f(x)}f'(x)+\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ οπότε $g'(1)=e^{f(1)}f'(1)+\dfrac{f'(1)}{f(1)}=e^2+\dfrac{1}{2}$.

δ) $g'(x)=\dfrac{\left(f(\ln f(x))\right)'}{2\sqrt{f(\ln f(x))}}=\dfrac{f'(\ln f(x))\cdot(\ln f(x))'}{2\sqrt{f(\ln f(x))}}=\dfrac{f'(\ln f(x))\cdot\dfrac{f'(x)}{f(x)}}{2\sqrt{f(\ln f(x))}}$ οπότε

$$g'(1)=\frac{f'(\ln f(1))\cdot\dfrac{f'(1)}{f(1)}}{2\sqrt{f(\ln f(1))}}=\frac{f'(\ln 2)\cdot\dfrac{1}{2}}{2\sqrt{f(\ln 2)}}=\frac{\dfrac{1}{2}}{2}=\frac{1}{4}.$$

21. Είναι $f'(x)=2, g'(x)=3$. Για τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων έχουμε:

$A_{f\circ g}=\{x\in A_g/g(x)\in A_f\}=\{x\in\mathbb{R}/3x\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}=A_{(f\circ g)'}$,

$A_{f'\circ g}=\{x\in A_g\,/\,g(x)\in A_{f'}\}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,3x\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$,

$A_{f'\circ g'}=\{x\in A_{g'}\,/\,g'(x)\in A_{f'}\}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,3\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$.

Για τους τύπους τους:

- $f(g(x))=2\cdot 3x-1=6x-1$, • $f'(g(x))=2$, • $f'(g'(x))=2$ και
- $\left[f(g(x))\right]'=(6x-1)'=6$.

22. Είναι:

α) $D_{f\circ f}=\mathbb{R},\ f(f(x))=\eta\mu(\eta\mu x)$.

β) $D_{f'\circ f}=\mathbb{R},\ f'(x)=\sigma\upsilon\nu x,\ f'(f(x))=\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x)$.

γ) $D_{(f\circ f)'}=\mathbb{R},\ \left[f(f(x))\right]'=f'(f(x))f'(x)=\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x)\sigma\upsilon\nu x$.

23. Είναι: $f'(x)=\kappa(x-\rho_1)^{\kappa-1}(x-\rho_2)^{\lambda}+\lambda(x-\rho_1)^{\kappa}(x-\rho_2)^{\lambda-1}$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{\kappa\cancel{(x-\rho_1)^{\kappa-1}}\,\cancel{(x-\rho_2)^{\lambda}}}{(x-\rho_1)^{\cancel{\kappa}}\,\cancel{(x-\rho_2)^{\lambda}}}+\frac{\lambda\cancel{(x-\rho_1)^{\kappa}}\,\cancel{(x-\rho_2)^{\lambda-1}}}{\cancel{(x-\rho_1)^{\kappa}}\,(x-\rho_2)^{\cancel{\lambda}}}\Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{\kappa}{x-\rho_1}+\frac{\lambda}{x-\rho_2}.$$

24. Είναι: $\left(f(x^3+2x)\right)'=\left[(x^2+1)^2\right]'\Leftrightarrow f'(x^3+2x)\cdot(3x^2+2)=2(x^2+1)\cdot 2x$.

Για $x=1$, είναι $5f'(3)=2\cdot 2\cdot 2 \Leftrightarrow 5f'(3)=8 \Leftrightarrow f'(3)=\frac{8}{5}$.

25. Είναι: $\left(f(\ln x)\right)'=\left(\ln^2 x+1\right)' \Leftrightarrow \cancel{\frac{1}{x}}f'(\ln x)=2\ln x\cancel{\frac{1}{x}}$.

Για $x=1$, είναι $f'(0)=0$.

26. Είναι: $\left(f\left(x^2+3x+1\right)\right)'=\left(e^x-4\eta\mu x\right)' \Leftrightarrow$

$f'\left(x^2+3x+1\right)(2x+3)=e^x-4\sigma\upsilon\nu x$.

Για $x=0$ είναι: $3f'(1)=1-4 \Leftrightarrow 3f'(1)=3 \Leftrightarrow f'(1)=-1$.

27. Είναι: $\left(f\left(x^3+x\right)\right)'=\left(\left(x^3-6x+2\right)^4\right)' \Leftrightarrow$

$f'\left(x^3+x\right)\left(3x^2+1\right)=4\left(x^3-6x+2\right)^3\left(3x^2-6\right)$.

Για $x=1$ είναι $4f'(2)=4(-3)^3(-3) \Leftrightarrow 4f'(2)=324 \Leftrightarrow f'(2)=81$.

28. Για $x=0$ είναι: $f^5(0)+f(0)=0 \Leftrightarrow f(0)\left(\underbrace{f^4(0)+1}_{\neq 0}\right)=0 \Leftrightarrow f(0)=0$.

Με παραγώγιση κατά μέλη της σχέσης που μας δίνεται έχουμε:

$5f^4(x)f'(x)-2xf(-x)+x^2f'(-x)+f'(x)=5\sigma\upsilon\nu 5x$.

Για $x=0$ είναι: $5f^4(0)f'(0)+f'(0)=5 \Leftrightarrow f'(0)=5$.

Αυξημένης δυσκολίας

29. Έστω $\frac{f(x)-x}{x-1}=h(x),\ x\neq 1 \Leftrightarrow f(x)=(x-1)h(x)+x$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left[(x-1)h(x)+x\right]=1=f(1)$ αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε και στο 1.

$f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)h(x)+x-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\left(h(x)+1\right)=3$.

Είναι $g(x)=f\left(x^2-2x+2\right)+f^4(x)$ οπότε $g(1)=f(1)+f^4(1)=2$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση και άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο $g'(x)=f'\left(x^2-2x+2\right)(2x-2)+4f^3(x)f'(x)$, οπότε $g'(1)=4f^3(1)f'(1)=12$. Άρα $g'(1)=6\cdot 2=6g(1)$.

30. Είναι $f\left(x^3\right)=6x^4+1$ (1). Παραγωγίζουμε τη σχέση (1) κατά μέλη οπότε $\left(f\left(x^3\right)\right)'=\left(6x^4+1\right)' \Leftrightarrow 3x^2f'\left(x^3\right)=24x^3$.

Για $x=1$ έχουμε $3f'(1)=24 \Leftrightarrow f'(1)=8$. Επίσης

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\underset{u\to0}{\overset{x=u^3}{=}}\lim_{u\to0}\frac{f\left(u^3\right)-f(0)}{u^3}=\lim_{u\to0}\frac{6u^4+\cancel{1}-\cancel{1}}{u^3}=\lim_{u\to0}\frac{6u^{\cancel{4}}}{\cancel{u^3}}=0.$$

31. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο:

$$f'(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}+xe^{-\frac{x^2}{2}}\cdot(-x)=e^{-\frac{x^2}{2}}-x^2e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Για $x\neq0$ έχουμε $f'(x)=xe^{-\frac{x^2}{2}}\left(\frac{1}{x}-x\right)=\left(\frac{1}{x}-x\right)f(x)$.

32. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο:

$f'(x)=3e^{g(3x)}g'(3x)=3f(x)g'(3x)$. $f(x)=e^{g(3x)}\neq0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Για $x=0$ είναι $f'(0)=3f(0)g'(0)\overset{f(0)=e^{g(0)}\neq0}{\Leftrightarrow}\frac{f'(0)}{f(0)}=3g'(0)$.

33. Είναι $\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{e^x}$ (1). Η σχέση (1) αποτελείται από παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Με παραγώγιση της σχέσης (1) κατά μέλη έχουμε:

$$\left(\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{g(x)}\right)'=\left(\frac{1}{e^x}\right)'\Leftrightarrow-\frac{f'(x)}{f^2(x)}+\frac{g'(x)}{g^2(x)}=-\frac{1}{e^x}\Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(x)}{f^2(x)}-\frac{g'(x)}{g^2(x)}=\frac{1}{e^x}\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f^2(x)}-\frac{g'(x)}{g^2(x)}=\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{g(x)}\Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(x)}{f^2(x)}-\frac{1}{f(x)}=\frac{g'(x)}{g^2(x)}-\frac{1}{g(x)}\Leftrightarrow\frac{f'(x)-f(x)}{f^2(x)}=\frac{g'(x)-g(x)}{g^2(x)}.$$

34. α) Θέτουμε $f(x)=e^x$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=e^x$ οπότε $f'(0)=1$.

Είναι $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=1$.

β) Θέτουμε $f(x)=e^{2x}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=2e^{2x}$ οπότε $f'(1)=2e^2$.

Είναι $\lim_{x\to1}\frac{e^{2x}-e^2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=2e^2$.

γ) Θέτουμε $f(x)=\ln x, x>0$.Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ οπότε $f'(1)=1$. Είναι $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=\lim\limits_{x\to e}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=1$.

δ) Θέτουμε $f(x)=\ln x, x>0$.Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ οπότε $f'(e)=\dfrac{1}{e}$. Είναι $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}=\lim\limits_{x\to e}\dfrac{f(x)-f(e)}{x-e}=f'(e)=\dfrac{1}{e}$.

ε) Θέτουμε $\varphi(x)=\ln^4 x, x>0$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο $\varphi'(x)=\dfrac{4\ln^3 x}{x}$ οπότε $\varphi'(e)=\dfrac{4}{e}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln^4 x-1}{x-e}=\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln^4 x-\ln^4 e}{x-e}=\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\varphi(x)-\varphi(e)}{x-e}=\varphi'(e)$.

στ) Θέτουμε $f(x)=e^x+\ln x,\ x>0$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο $f'(x)=e^x+\dfrac{1}{x}$ οπότε $f'(1)=e+1$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x+\ln x-e}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=e+1$.

ζ) Θέτουμε $f(x)=\text{συν}x$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$f'(x)=-\text{ημ}x$ οπότε $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Είναι: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\text{συν}x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{x-\dfrac{\pi}{4}}=f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

η) Θέτουμε $h(x)=\text{ημ}^2x$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$h'(x)=2\text{ημ}x\text{συν}x$ οπότε $h'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=2\text{ημ}\dfrac{\pi}{3}\text{συν}\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Είναι: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{4\text{ημ}^2x-3}{3x-\pi}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{4\left(\text{ημ}^2x-\dfrac{3}{4}\right)}{3\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\left[\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{f(x)-h\left(\dfrac{\pi}{3}\right)}{x-\dfrac{\pi}{3}}\right]=\dfrac{4}{3}f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{4\text{ημ}^2x-3}{3x-\pi}=\dfrac{4}{3}\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

θ) Θέτουμε $g(x)=e^{e^x}$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$g'(x)=e^{e^x}e^x$ οπότε $g'(0)=e$. Είναι: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{e^x}-e}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=g'(0)=e$.

35. Η σχέση $f(2-x)=f(x-2)$ (1) αποτελείται από παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Με παραγώγιση κατά μέλη της σχέσης (1) έχουμε

$(f(2-x))'=(f(x-2))' \Leftrightarrow -f'(2-x)=f'(x-2)$.

Για $x=2$, έχουμε: $-f'(0)=f'(0) \Leftrightarrow 2f'(0)=0 \Leftrightarrow f'(0)=0$.

Άρα το $x_0=0$ είναι ρίζα της εξίσωσης $f'(x)=0$.

36. α) Είναι $f(x)=\begin{cases} x^{\frac{\mu}{\nu}} & , x>0 \\ 0 & , x=0 \\ (-x)^{\frac{\mu}{\nu}} & , x<0 \end{cases}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt[\nu]{x^\mu}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt[\nu]{x^\mu}}{\sqrt[\nu]{x^\nu}}=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[\nu]{x^{\mu-\nu}}=0, \text{αν}\, \mu>\nu \\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt[\nu]{x^{\nu-\mu}}}=+\infty, \text{αν}\, \mu<\nu \\ 1 \quad , \text{αν}\, \mu=\nu \end{cases}$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt[\nu]{x^\mu}}{x}=\dfrac{\sqrt[\nu]{(-x)^\mu}}{-\sqrt[\nu]{(-x)^\nu}}=$

$-\sqrt[\nu]{(-x)^{\mu-\nu}}=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-}\left(-\sqrt[\nu]{(-x)^{\mu-\nu}}\right)=0, \text{αν}\, \mu>\nu \\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{-\sqrt[\nu]{(-x)^{\nu-\mu}}}=-\infty, \text{αν}\, \mu<\nu \\ -1 \quad , \text{αν}\, \mu=\nu \end{cases}$.

- Αν $\mu>\nu$ τότε $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)}{x}=0=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}$ οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στο 0.
- Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο μηδέν τότε $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)}{x}$, το οποίο ισχύει όταν $\mu>\nu$.

β) Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Αν $\mu\neq\nu$ τότε $f(x)=\sqrt[\nu]{x^\mu}=\begin{cases} (-x)^{\frac{\mu}{\nu}} & , x<0 \\ 0 & , x=0 \\ x^{\frac{\mu}{\nu}} & , x>0 \end{cases}$.

Για $x>0$: Η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$f'(x)=\left(\sqrt[\nu]{x^{\mu}}\right)'=\left(x^{\frac{\mu}{\nu}}\right)'=\frac{\mu}{\nu}x^{\frac{\mu-\nu}{\nu}}=\frac{\mu}{\nu}\sqrt[\nu]{x^{\mu-\nu}}.$$

Για $x<0$: Η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$f'(x)=\left(\sqrt[\nu]{(-x)^{\mu}}\right)'=\left((-x)^{\frac{\mu}{\nu}}\right)'=-\frac{\mu}{\nu}(-x)^{\frac{\mu-\nu}{\nu}}=-\frac{\mu}{\nu}\sqrt[\nu]{(-x)^{\mu-\nu}}.$$

Άρα $f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{\mu}{\nu}\sqrt[\nu]{(-x)^{\mu-\nu}} & ,\ x<0\\ 0 & ,\ x=0\\ \dfrac{\mu}{\nu}\sqrt[\nu]{x^{\mu-\nu}} & ,\ x>0\end{cases}.$

- Αν $\mu=\nu$ $x>0$ τότε $f(x)=\sqrt[\nu]{x^{\mu}}=\sqrt[\nu]{x^{\nu}}=|x|=\begin{cases}-x\ ,\ x\le 0\\ x\ ,\ x>0\end{cases}.$

Για $x>0$: Η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x)=(x)'=1$.

Για $x<0$: Η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x)=(-x)'=-1$.

Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{x}=1,\ \lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-x}{x}=-1$ οπότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο μηδέν.

Επομένως $f'(x)=\begin{cases}-1\ ,\ x<0\\ 1\ ,\ x>0\end{cases}.$

Παράγωγος και γραφική παράσταση

37. α) Είναι $f'(1)=\lambda_{\varepsilon}=\varepsilon\varphi135^{o}=-\varepsilon\varphi45^{o}=-1\Leftrightarrow f'(1)=-1$.

Στο τρίγωνο ΑΒΚ είναι $\varepsilon\varphi K\hat{B}A=\dfrac{AK}{BK}\Leftrightarrow\varepsilon\varphi45^{o}=\dfrac{AK}{3}\Leftrightarrow1=\dfrac{AK}{3}\Leftrightarrow AK=3$,

άρα $f(1)=3$.

$2^{ος}$ τρόπος

Η ευθεία (ε) έχει εξίσωση $y-0=\lambda_{\varepsilon}(x-4)\Leftrightarrow y=-(x-4)\Leftrightarrow y=-x+4.$

Το σημείο $A(1,f(1))$ ανήκει στην (ε) άρα: $f(1)=-1+4=3.$

β) Είναι $g(x)=-3x^2-2x+5$, οπότε $g'(x)=-6x-2$ άρα $g'(3)=-20$.

Επίσης $(g\circ f)'(x)=g'(f(x))f'(x)$.

Άρα $(g\circ f)'(1)=g'(f(1))\cdot f'(1)=g'(3)\cdot(-1)=(-20)\cdot(-1)=20$.

38. α) Το Α έχει συντεταγμένες (-1,1), ανήκει στη C_f άρα $f(-1)=1$.

- Η ε_1 έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\varepsilon_1}=\dfrac{1-0}{-1-0}=-1$, διέρχεται από την αρχή

των αξόνων άρα έχει εξίσωση $y=-x$.

Η (ε_1) εφάπτεται της C_f στο Α οπότε $f'(-1)=\lambda_\varepsilon=-1$.

- Η ε_2 έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\varepsilon_2}=\dfrac{2-0}{0-2}=-1$ οπότε έχει εξίσωση

$y-0=-(x-2)\Leftrightarrow y=-x+2$. Η ($\varepsilon_2$) εφάπτεται της C_f στο Β οπότε $f'(1)=\lambda_{\varepsilon_2}=-1$. Το σημείο $B(1,1)$ ανήκει στη C_f (ε) άρα $f(1)=1$.

Είναι $(f\circ f)'(-1)=f'(f(-1))f'(-1)=-f'(1)=1$,

$g(f(-1))=g(1)=(-2)^4=16$.

Επίσης $g'(x)=4(x^2-2)^3\cdot 2x=8x(x^2-2)^3$ οπότε

$(g\circ f)'(-1)=g'(f(-1))f'(-1)=-g'(1)=-8(-1)^3=8$.

β) Είναι $(g+f)'(-1)=g'(-1)+f'(-1)=8-1=7$

$(g\cdot f)'(-1)=g'(-1)f(-1)+g(-1)f'(-1)=8\cdot 1+16\cdot(-1)=-8$

$$\left(\frac{g}{f}\right)'(-1)=\frac{g'(-1)f(-1)-g(-1)f'(-1)}{f^2(-1)}=\frac{8\cdot 1-16\cdot(-1)}{1}=24.$$

39. α) Η ε έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=\dfrac{1-0}{2-1}=1$ και εξίσωση

$\varepsilon: y-0=x-1\Leftrightarrow y=x-1$.

β) Οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτομένη την (ε) στο σημείο Α άρα $f'(2)=g'(2)=\lambda=1$.

γ) Οι C_f, C_g έχουν κοινό σημείο το Α άρα $f(2)=1=g(2)$.

δ) Είναι $(g\cdot f)'(2)=g'(2)f(2)+g(2)f'(2)=1\cdot 1+1\cdot 1=2$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(2)=\frac{f'(2)g(2)-f(2)g'(2)}{g^2(2)}=0.$$

Παράγωγος ανώτερης τάξης - αντίστροφης συνάρτησης

40. α) i. Επειδή η f είναι περιττή, ισχύει $f(-x)=-f(x)$ (1), $x\in\mathbb{R}$.

Παραγωγίζοντας τη σχέση (1) κατά μέλη, προκύπτει: $\left(f(-x)\right)' = \left(-f(x)\right)' \Leftrightarrow$

$f'(-x)(-x)' = -f'(x) \Leftrightarrow \; -f'(-x) = -f'(x) \Leftrightarrow f'(-x) = f'(x)$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$ άρα η f' είναι άρτια.

ii. Επειδή η f είναι άρτια, ισχύει: $f(-x) = f(x)$ (2), $x \in \mathbb{R}$.

Παραγωγίζοντας τη σχέση (2) κατά μέλη προκύπτει:

$\left(f(-x)\right)' = f'(x) \Leftrightarrow f'(-x)(-x)' = f'(x) \Leftrightarrow$

$-f'(-x) = f'(x) \Leftrightarrow f'(-x) = -f'(x)$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$ άρα η f' είναι περιττή.

β) Από το ερώτημα α)ii η f' είναι περιττή. Με συνεχείς παραγωγίσεις κατά μέλη των σχέσεων που προκύπτουν αποδεικνύεται ότι η f'' είναι άρτια και η $f^{(3)}$ περιττή.

γ) Επειδή η f είναι περιοδική με περίοδο Τ, ισχύει ότι τα $x+T, x-T \in \mathbb{R}$ και επίσης ότι $f(x+T) = f(x-T) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο Α, οι συναρτήσεις $f(x+T)$, $f(x-T)$ είναι παραγωγίσιμες ως συνθέσεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, και ορίζονται στο $\mathbb{R}$ επομένως

$\left[f(x+T)\right]' = \left[f(x-T)\right]' = f'(x) \Leftrightarrow f'(x+T) = f'(x-T) = f'(x)$, $x \in A$,

οπότε η f' είναι περιοδική με περίοδο Τ.

41. Είναι $f(x\ln x) = e^x + 1$ (1). Με παραγώγιση κατά μέλη της σχέσης (1) προκύπτει $f'(x\ln x)(\ln x + 1) = e^x$ (2). Για $x = 1$ είναι $f'(0) = e$.

Με παραγώγιση κατά μέλη της σχέσης (2) προκύπτει

$$f''(x\ln x)(\ln x + 1)^2 + f'(x\ln x)\frac{1}{x} = e^x.$$

Για $x = 1$ είναι $f''(0) + f'(0) = e \Leftrightarrow f''(0) = 0$.

42. α) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x) = 2xe^{x^2}$ και δεύτερη παράγωγο $f''(x) = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} = 2e^{x^2}\left(1 + 2x^2\right)$.

Άρα $f''(x) - 2xf'(x) - 2f(x) = 2e^{x^2}\left(1 + 2x^2\right) - 4x^2e^{x^2} - 2e^{x^2} \Leftrightarrow$

$f''(x) - 2xf'(x) - 2f(x) = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} - 4x^2e^{x^2} - 2e^{x^2} \Leftrightarrow$

$f''(x) - 2xf'(x) - 2f(x) = 0$.

β) Είναι $2f''(x)+9f'(x)\le 0 \Leftrightarrow 4e^{x^2}\left(1+2x^2\right)+18xe^{x^2}\le 0 \overset{e^{x^2}>0}{\Leftrightarrow}$

$2+4x^2+9x\le 0 \Leftrightarrow 4x^2+9x+2\le 0 \Leftrightarrow x\in\left[-2,-\frac{1}{4}\right]$.

43. Η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $g'(x)=f'\left(3x^2-2x+3\right)(6x-2)$ και δεύτερη παράγωγο

$g''(x)=f''\left(3x^2-2x+3\right)(6x-2)^2+6f'\left(3x^2-2x+3\right)$.

Άρα $g''(1)=f''(4)\cdot 16+6f'(4)=32+12 \Leftrightarrow g''(1)=44$.

Αυξημένης δυσκολίας

44. α) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο:

$$f'(x)=\frac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)'}{2\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}}=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{2f(x)}=\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{2f(x)\sqrt{1+x^2}}\Leftrightarrow$$

$$f'(x)=\frac{f^{\cancel{2}}(x)}{2\cancel{f(x)}\sqrt{1+x^2}}\Leftrightarrow 2f'(x)\sqrt{1+x^2}=f(x).$$

β) Με παραγώγιση κατά μέλη της σχέσης του ερωτήματος α) έχουμε:

$$2f''(x)\sqrt{1+x^2}+2f'(x)\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=f'(x)\Leftrightarrow$$

$$2f''(x)\left(1+x^2\right)+2xf'(x)=f'(x)\sqrt{1+x^2}\Leftrightarrow$$

$$4f''(x)\left(1+x^2\right)+4xf'(x)=2f'(x)\sqrt{1+x^2}=f(x).$$

45. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με παράγωγο $f'(x)=\left(e^{\alpha x}\right)'=\alpha\cdot e^{\alpha x}$ και δεύτερη παράγωγο $f''(x)=\left(\alpha\cdot e^{\alpha x}\right)'=\alpha^2\cdot e^{\alpha x}$.

Είναι: $f''(x)+2f'(x)=3f(x)\Leftrightarrow \alpha^2\cdot e^{\alpha x}+2\alpha\cdot e^{\alpha x}=3e^{\alpha x}\Leftrightarrow$

$e^{\alpha x}\left(\alpha^2+2\alpha\right)=3e^{\alpha x}\Leftrightarrow \alpha^2+2\alpha=3\Leftrightarrow \alpha^2+2\alpha-3=0\Leftrightarrow(\alpha=-3)$ ή $(\alpha=1)$.

46. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με παράγωγο $f'(x)=-\alpha\eta\mu x+2\beta\sigma\upsilon\nu 2x$ και δεύτερη παράγωγο $f''(x)=-\alpha\sigma\upsilon\nu x-4\beta\eta\mu 2x$.

Επομένως: $f(0)=4\Leftrightarrow \alpha+\gamma=4 \quad (1)$, $f'(0)=4\Leftrightarrow 2\beta=4\Leftrightarrow \beta=2$ και $f''(0)=4\Leftrightarrow -\alpha=4\Leftrightarrow \alpha=-4$.

Από τη σχέση (1) έχουμε $-4+\gamma=4\Leftrightarrow \gamma=8$.

47. α) Έστω $g(x)=\ln x$, $x>0$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο $g'(x)=\frac{1}{x}$. Άρα $g'(e)=\frac{1}{e}=\lim\limits_{x\to e^-}\frac{g(x)-g(e)}{x-e}=\lim\limits_{x\to e^+}\frac{g(x)-g(e)}{x-e}$.

Τότε $\lim\limits_{x\to e^+}\frac{f(x)-f(e)}{x-e}=\lim\limits_{x\to e^+}\frac{\ln x-\ln e}{x-e}=\lim\limits_{x\to e^+}\frac{g(x)-g(e)}{x-e}=g'(e)=\frac{1}{e}$.

Έστω $h(x)=e^{\frac{x}{e}-1}$, $x\in\mathbb{R}$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $h'(x)=e^{\frac{x}{e}-1}\frac{1}{e}$.

Επομένως $h'(e)=\frac{1}{e}=\lim\limits_{x\to e^-}\frac{h(x)-h(e)}{x-e}=\lim\limits_{x\to e^-}\frac{e^{\frac{x}{e}-1}-1}{x-e}=\lim\limits_{x\to e^-}\frac{f(x)-f(e)}{x-e}$.

Άρα $f'(e)=\frac{1}{e}$ οπότε $f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & ,\ x\ge e\\ e^{\frac{x}{e}-2} & ,\ x<e\end{cases}$.

β) Έστω $\varphi(x)=\frac{1}{x}, x>0$. Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο $\varphi'(x)=-\frac{1}{x^2}$. Επομένως $\varphi'(e)=-\frac{1}{e^2}$.

Άρα $\lim\limits_{x\to e^+}\frac{f'(x)-f'(e)}{x-e}=\lim\limits_{x\to e^+}\frac{\varphi(x)-\varphi(e)}{x-e}=\varphi'(e)=-\frac{1}{e^2}$.

Έστω $t(x)=e^{\frac{x}{e}-2}, x\in\mathbb{R}$. Η t είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $t'(x)=e^{\frac{x}{e}-2}\frac{1}{e}=e^{\frac{x}{e}-3}$. Επομένως $t'(e)=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$.

Άρα $\lim\limits_{x\to e^-}\frac{f'(x)-f'(e)}{x-e}=\lim\limits_{x\to e^-}\frac{t(x)-t(e)}{x-e}=t'(e)=\frac{1}{e^2}$.

Επομένως δεν υπάρχει το $f''(e)$.

48. α) Για $x\ne 0$ η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$f'(x)=3x^2\eta\mu\frac{1}{x}+x^3\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=3x^2\eta\mu\frac{1}{x}-x\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}$.

Στο $x=0$ είναι: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3\eta\mu\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x^2\eta\mu\frac{1}{x}=0$.

(Είναι $-1\le\eta\mu\frac{1}{x}\le 1\overset{x\ne 0}{\Leftrightarrow}-x^2\le x^2\eta\mu\frac{1}{x}\le x^2$.

Όμως $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0 = \lim\limits_{x\to 0}\left(-x^2\right)$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x\to 0} x^2 ημ\frac{1}{x} = 0$.) Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = 0$.

Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2ημ\frac{1}{x} - xσυν\frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0 \qquad\qquad\qquad\quad , x = 0 \end{cases}.$$

β) Είναι $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(3x^2ημ\frac{1}{x} - xσυν\frac{1}{x}\right) = 0 = f'(0)$.

(Είναι $\left|xσυν\frac{1}{x}\right| \leq |x| \Leftrightarrow -|x| \leq xσυν\frac{1}{x} \leq |x|$. Όμως $\lim\limits_{x\to 0}|x| = 0 = \lim\limits_{x\to 0}\left(-|x|\right)$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x\to 0} xσυν\frac{1}{x} = 0$.)

49. Είναι: $f(ημx) = ημ^2x - συνx$ (1). Με παραγώγιση κατά μέλη της σχέσης (1) έχουμε: $f'(ημx)συνx = 2ημxσυνx + ημx = ημx(2συνx + 1)$ (2).

Από τη σχέση (2) για $x = \frac{\pi}{6}$ είναι

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} = \frac{1}{\cancel{2}}\left(\cancel{2}\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} + 1\right) \Leftrightarrow f'\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{3} = \left(\sqrt{3}+1\right) \Leftrightarrow f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3+\sqrt{3}}{3}.$$

Με παραγώγιση κατά μέλη της σχέσης (1) έχουμε

$$f''(ημx)συν^2x - f'(ημx)ημx = συνx(2συνx + 1) - 2ημ^2x =$$

$2συν^2x + συνx - 2ημ^2x$ (3). Από τη σχέση (3) για $x = \frac{\pi}{6}$ είναι

$$f''\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - f'\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} - 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$f''\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{3}{4} - \frac{3+\sqrt{3}}{6} = \frac{2+\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow f''\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{3}{4} = \frac{9+4\sqrt{3}}{6} \Leftrightarrow f''\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{18+8\sqrt{3}}{9}.$$

Επομένως $3f''\left(\frac{1}{2}\right) - 2f'\left(\frac{1}{2}\right) = \cancel{3}\,\frac{18+8\sqrt{3}}{\cancel{9}^{\,3}} - 2\frac{3+\sqrt{3}}{3} =$

$$\frac{18+8\sqrt{3}-6-2\sqrt{3}}{3} = \frac{12+6\sqrt{3}}{3} = 4+2\sqrt{3}.$$

50. Η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ και δεύτερη παράγωγο $g''(x)=\dfrac{f''(x)f(x)-f'(x)f'(x)}{f^2(x)}$.

Είναι $g''(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{f''(x)f(x)-f'(x)f'(x)}{\underset{>0}{f^2(x)}}>0 \Leftrightarrow f''(x)f(x)-\left(f'(x)\right)^2 \Leftrightarrow$

$f(x)f''(x)>\left(f'(x)\right)^2$.

51. α) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$ είναι:
$f^5(x_1)=f^5(x_2)(1)$, $3f(x_1)=3f(x_2)(2)$. Με πρόσθεση των σχέσεων (1) και (2) έχουμε: $f^5(x_1)+3f(x_1)=f^5(x_2)+3f(x_2) \Leftrightarrow x_1-2=x_2-2 \Leftrightarrow x_1=x_2$
άρα η f είναι $1-1$ οπότε αντιστρέφεται.

β) Είναι $A_{f^{-1}}=f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$. Θέτουμε $f(x)=y \Leftrightarrow$
$y^5+3y=x-2 \Leftrightarrow x=y^5+3y+2$, άρα $f^{-1}(y)=y^5+3y+2$, $y\in\mathbb{R}$, οπότε
$f^{-1}(x)=x^5+3x+2$, $x\in\mathbb{R}$.

Επομένως $\left(f^{-1}(x)\right)'=5x^4+3$ άρα $\left(f^{-1}\right)'(1)=5+3=8$.

52. α) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, άρα είναι $1-1$ οπότε ορίζεται η αντίστροφή της.

β) Είναι: $f^{-1}(f(x))=x$ (1). Παραγωγίζουμε κατά μέλη τη σχέση (1) οπότε:

$\left(f^{-1}(f(x))\right)'=(x)' \Leftrightarrow \left(f^{-1}\right)'(f(x))f'(x)=1$. Επειδή $f'(x)=(\text{συν}x)'=-\text{ημ}x$,

έχουμε: $\left(f^{-1}\right)'(\text{συν}x)(-\text{ημ}x)=1 \overset{\substack{\text{ημ}x\neq 0\\ \text{στο}\left(0,\frac{\pi}{2}\right)}}{\Leftrightarrow} \left(f^{-1}\right)'(\text{συν}x)=-\dfrac{1}{\text{ημ}x}$ (1).

Έστω $\text{συν}x=y$. Στο $x\in(0,\pi)$ είναι $\text{ημ}x>0$ άρα
$\text{ημ}^2x+\text{συν}^2x=1 \Leftrightarrow \text{ημ}^2x=1-\text{συν}^2x \Leftrightarrow \text{ημ}x=\sqrt{1-\text{συν}^2x}=\sqrt{1-y^2}$ με
$y\in(-1,1)$. Από την (1) έχουμε $\left(f^{-1}\right)'(y)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$, άρα:

$\left(f^{-1}\right)'(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x\in(-1,1)$.

53. α) Γνωρίζουμε ότι $\text{εφ}x \nearrow \left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, οπότε η f είναι $1-1$ άρα αντιστρέφεται.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ με παράγωγο $f'(x)=\frac{1}{συν^2x}$.

Είναι: $f^{-1}(f(x))=x$ (1). Παραγωγίζουμε κατά μέλη τη σχέση (1) οπότε:

$$\left(f^{-1}(f(x))\right)'=(x)'\Leftrightarrow\left(f^{-1}\right)'(f(x))\cdot f'(x)=1\Leftrightarrow\left(f^{-1}\right)'(εφx)\cdot\frac{1}{συν^2x}=1\Leftrightarrow$$

$$\left(f^{-1}\right)'(εφx)\cdot\frac{ημ^2x+συν^2x}{συν^2x}=1\Leftrightarrow\left(f^{-1}\right)'(εφx)\cdot\left(εφ^2x+1\right)=1\Leftrightarrow$$

$\left(f^{-1}\right)'(εφx)=\frac{1}{εφ^2x+1}(2)$. Αν θέσουμε $εφx=u>0$ στη σχέση (2) έχουμε

$\left(f^{-1}\right)'(u)=\frac{1}{u^2+1}$, $u>0$, άρα $\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{x^2+1}$, $x>0$.

54. α) Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ (1) ισχύει $e^{x_1}<e^{x_2}$ (2)
Με πρόσθεση των σχέσεων (1) και (2) έχουμε:
$e^{x_1}+x_1<e^{x_2}+x_2\Leftrightarrow e^{x_1}+x_1+2<e^{x_2}+x_2+2\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ επομένως αντιστρέφεται.

β) Είναι: $f^{-1}(f(x))=x$ (3). Παραγωγίζουμε κατά μέλη τη σχέση (3) οπότε:

$\left(f^{-1}(f(x))\right)'=(x)'\Leftrightarrow\left(f^{-1}\right)'(f(x))\cdot f'(x)=1\ (4)$. Είναι $f(0)=3$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=e^x+1$ οπότε $f'(0)=2$.

Από τη σχέση (4) για $x=0$ έχουμε: $\left(f^{-1}\right)'(3)\cdot 2=1\Leftrightarrow\left(f^{-1}\right)'(3)=\frac{1}{2}$.

55. α) Είναι: $f^{-1}(f(x))=x$ (1)

Παραγωγίζουμε κατά μέλη τη σχέση (1) οπότε:

$\left(f^{-1}(f(x))\right)'=(x)'\Leftrightarrow\left(f^{-1}\right)'(f(x))f'(x)=1\Leftrightarrow\left(f^{-1}\right)'(f(x))=x^2+1$ (2).

Αν θέσουμε $f(x)=u\Leftrightarrow x=f^{-1}(u)$ τότε από τη σχέση (2) έχουμε

$\left(f^{-1}\right)'(u)=\left(f^{-1}(u)\right)^2+1$. Άρα $\left(f^{-1}\right)'(x)=\left(f^{-1}(x)\right)^2+1, x\in\mathbb{R}$ (3)

Επομένως η συνάρτηση $\left(f^{-1}\right)'$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ σαν άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο

$\left(f^{-1}\right)''(x)=2f^{-1}(x)\cdot\left(f^{-1}\right)'(x)$ οπότε η f^{-1} είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με δεύτερη παράγωγο την $\left(f^{-1}\right)''(x)=2f^{-1}(x)\cdot\left(f^{-1}\right)'(x)$.

β) Είναι $\left(f^{-1}\right)''(x)=2f^{-1}(x)\cdot\left(f^{-1}\right)'(x)\overset{(3)}{\Leftrightarrow}$

$\left(f^{-1}\right)''(x)=2f^{-1}(x)\left(\left(f^{-1}(x)\right)^2+1\right),\ x\in\mathbb{R}$.

56. α) Είναι: $f^{-1}\left(f(x)\right)=x\quad(1)$

Παραγωγίζουμε κατά μέλη τη σχέση (1) οπότε:

$\left(f^{-1}\left(f(x)\right)\right)'=(x)'\Leftrightarrow\left(f^{-1}\right)'\left(f(x)\right)f'(x)=1\Leftrightarrow\left(f^{-1}\right)'\left(f(x)\right)=e^{-x^2}\quad(2)$

Αν θέσουμε $f(x)=u\Leftrightarrow x=f^{-1}(u)$ τότε από τη σχέση (2) έχουμε

$\left(f^{-1}\right)'(u)=e^{-\left(f^{-1}(u)\right)^2},u\in\mathbb{R}$. Άρα $\left(f^{-1}\right)'(x)=e^{-\left(f^{-1}(x)\right)^2},x\in\mathbb{R}\quad(3)$

Επομένως η συνάρτηση $\left(f^{-1}\right)'$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ σαν άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο

$\left(f^{-1}\right)''(x)=-2f^{-1}(x)\cdot\left(f^{-1}\right)'(x)\cdot e^{-\left(f^{-1}(x)\right)^2}$ οπότε η f^{-1} είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με δεύτερη παράγωγο

$\left(f^{-1}\right)''(x)=-2f^{-1}(x)\cdot\left(f^{-1}\right)'(x)\cdot e^{-\left(f^{-1}(x)\right)^2}$.

β) Είναι $\left(f^{-1}\right)''(x)=-2f^{-1}(x)\cdot\left(f^{-1}\right)'(x)\cdot e^{-\left(f^{-1}(x)\right)^2}\overset{(3)}{\Leftrightarrow}$

$\left(f^{-1}\right)''(x)=-2f^{-1}(x)e^{-2\left(f^{-1}(x)\right)^2}$.

57. α) Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι $x_1^{2023}<x_2^{2023}$ (1), $x_1^{2021}<x_2^{2021}$ (2). Με πρόσθεση των σχέσεων (1) και (2) έχουμε:

$x_1^{2023}+x_1^{2021}<x_2^{2023}+x_2^{2021}\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$ άρα $f\nearrow\mathbb{R}$, οπότε 1-1 άρα αντιστρέφεται.

β) Έστω ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο μηδέν. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=2023x^{2022}+2021x^{2020}$.

Είναι $f^{-1}\left(f(x)\right)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν η f^{-1} ήταν παραγωγίσιμη στο 0, τότε η συνάρτηση $f^{-1}\circ f$ είναι παραγωγίσιμη στο 0 οπότε από τη σχέση (3) έχουμε

$\left(f^{-1}\right)'\left(f(0)\right)\cdot f'(0)=1\Leftrightarrow\left(f^{-1}\right)'(0)\cdot f'(0)=1\Leftrightarrow0=1$ πράγμα άτοπο.

2ος τρόπος

Αν η f^{-1} ήταν παραγωγίσιμη στο 0 τότε $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(0)}{x}\in\mathbb{R}$ και θα ήταν συνεχής στο 0. Όμως $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f^{-1}(x)}{x}\underset{\substack{x\to 0,\\ u\to 0}}{\overset{u=f^{-1}(x)}{=}}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{u}{f(u)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{u}{u^{2021}+u^{2023}}=\lim\limits_{u\to 0}\frac{u}{u^{2021}\left(1+u^2\right)}=\lim\limits_{u\to 0}\frac{1}{u^{2020}\left(1+u^2\right)}=$

$\lim\limits_{u\to 0}\left(\frac{1}{1+u^2}\cdot\frac{1}{u^{2020}}\right)=+\infty$ άτοπο. Άρα f^{-1} δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Συναρτησιακές σχέσεις

58. Είναι $f(x+y)=f(x)-f(y)$ (1)

Με παραγώγιση της σχέσης (1) ως προς x, y έχουμε αντίστοιχα:

$f'(x+y)=f'(x)$ (2) και $f'(x+y)=-f'(y)$ (3)

Από τις σχέσεις (2),(3) έχουμε $f'(x)=-f'(y)\Leftrightarrow f'(x)+f'(y)=0$.

59. Είναι $f(xy)=f(x)+f(y)$ (1)

Με παραγώγιση της σχέσης (1) ως προς x, y έχουμε αντίστοιχα:

$f'(xy)y=f'(x)\Leftrightarrow f'(xy)=\frac{f'(x)}{y}$ (2) και

$f'(xy)x=f'(y)\Leftrightarrow f'(xy)=\frac{f'(y)}{x}$ (3)

Από τις σχέσεις (2),(3) έχουμε $\frac{f'(x)}{y}=\frac{f'(y)}{x}\Leftrightarrow xf'(x)-yf'(y)=0$.

60. Είναι $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$ (1). Με παραγώγιση της σχέσης (1) ως προς x, y έχουμε αντίστοιχα: $f'(x+y)=f'(x)+y$ (2) και $f'(x+y)=f'(y)+x$ (3). Από τις σχέσεις (2),(3) έχουμε

$f'(x)+y=f'(y)+x\Leftrightarrow f'(y)-f'(x)=y-x\overset{y-x\neq 0}{\Leftrightarrow}$

$\frac{f'(y)-f'(x)}{y-x}=1\Leftrightarrow \lambda_{AB}=1\Leftrightarrow εφω=1$, άρα $ω=45^\circ$.

61. Είναι $f(x+y)=e^{-y}f(x)+e^{-x}f(y)$ (1)

Με παραγώγιση της σχέσης (1) ως προς x, y έχουμε αντίστοιχα:

$f'(x+y)=e^{-y}f'(x)-e^{-x}f(y)$ (2) και $f'(x+y)=-e^{-y}f(x)+e^{-x}f'(y)$ (3)

Από τις σχέσεις (2),(3) έχουμε:

$e^{-y}f'(x)-e^{-x}f(y)=-e^{-y}f(x)+e^{-x}f'(y)\Leftrightarrow$

$e^{-y}f'(x)+e^{-y}f(x)=e^{-x}f'(y)+e^{-x}f(y)\Leftrightarrow$

$e^{-y}\left(f'(x)+f(x)\right)=e^{-x}\left(f'(y)+f(y)\right)$.

Σύνθετες ασκήσεις

62. α) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=2-2x$ και δεύτερη παράγωγο $f''(x)=-2$.

Επομένως για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$(1-x)f''(x)+f'(x)=(1-x)(-2)+2-2x=-2+2x+2-2x=0$.

β) Είναι $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$, $x\in\mathbb{R}$. Η P είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $P'(x)=3\alpha x^2+2\beta x+\gamma$, δεύτερη παράγωγο

$P''(x)=6\alpha x+2\beta$ και τρίτη παράγωγο $P^{(3)}(x)=6\alpha$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Έχουμε: • $P^{(3)}(x)=f^{(3)}(x)\Leftrightarrow 6\alpha=0\Leftrightarrow\alpha=0$, • $P(0)=1\Leftrightarrow\delta=1$,

• $P'(1)=10\Leftrightarrow 3\alpha+2\beta+\gamma=10\Leftrightarrow 2\beta+\gamma=10$ (1),

• $P''(4)=3\Leftrightarrow 24\alpha+\beta=3\Leftrightarrow\beta=3$.

Από την (1) έχουμε $6+\gamma=10\Leftrightarrow\gamma=4$.

Άρα $P(x)=3x^2+4x+1$, $x\in\mathbb{R}$ οπότε είναι πολυώνυμο 2ου βαθμού.

γ) Είναι $g(-1)=1-\lambda+1=2-\lambda$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $g'(x)=2x+\lambda$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(h-1)-2+\lambda}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(-1+h)-g(-1)}{h}=g'(-1)=-2+\lambda$.

Όμως $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(h-1)-2+\lambda}{h}=f(0)\Leftrightarrow -2+\lambda=0\Leftrightarrow\lambda=2$.

Για $\lambda=2$ είναι $g(x)=x^2+2x+1=(x+1)^2$, $x\in\mathbb{R}$.

δ) Είναι $D_f=D_g=\mathbb{R}$. Πρέπει $g(x)\neq 0\Leftrightarrow (x+1)^2\neq 0\Leftrightarrow x+1\neq 0\Leftrightarrow x\neq -1$.

Άρα η συνάρτηση $R=\dfrac{f}{g}$ έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$.

Είναι $R(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{2x-x^2}{(x+1)^2}$, $x\neq -1$.

ε) Είναι $h\left(x^3+5x\right)=R\left(x\right)\Leftrightarrow h\left(x^3+5x\right)=\dfrac{2x-x^2}{\left(x+1\right)^2}$ (*) για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Η σχέση (*) αποτελείται από παραγωγίσιμες συναρτήσεις οπότε με παραγώγιση της κατά μέλη έχουμε: $\left[h\left(x^3+5x\right)\right]'=\left(\dfrac{2x-x^2}{\left(x+1\right)^2}\right)'\Leftrightarrow$

$$h'\left(x^3+5x\right)\cdot\left(x^3+5x\right)'=\frac{\left(2x-x^2\right)'\cdot\left(x+1\right)^2-\left(2x-x^2\right)\cdot\left[\left(x+1\right)^2\right]'}{\left(x+1\right)^4}\Leftrightarrow$$

$$h'\left(x^3+5x\right)\cdot\left(3x^2+5\right)=\frac{\left(2-2x\right)\cdot\left(x+1\right)^2-\left(2x-x^2\right)\cdot 2\left(x+1\right)\cdot\left(x+1\right)'}{\left(x+1\right)^4}\Leftrightarrow$$

$$h'\left(x^3+5x\right)\cdot\left(3x^2+5\right)=\frac{\left(2-2x\right)\cdot\left(x+1\right)^{\cancel{2}}-\left(2x-x^2\right)\cdot 2\cancel{\left(x+1\right)}}{\left(x+1\right)^{\cancel{4}\,3}}\Leftrightarrow$$

$$h'\left(x^3+5x\right)\cdot\left(3x^2+5\right)=\frac{\left(2-2x\right)\cdot\left(x+1\right)-\left(2x-x^2\right)\cdot 2}{\left(x+1\right)^3}.$$

Για $x=1$ είναι $h'\left(6\right)\cdot 8=\dfrac{\left(2-2\right)\cdot\left(1+1\right)^2-\left(2-1\right)\cdot 2\left(1+1\right)}{\left(1+1\right)^4}\Leftrightarrow$

$$h'\left(6\right)\cdot 8=\frac{-4}{16}\Leftrightarrow h'\left(6\right)\cdot 8=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow h'\left(6\right)=-\frac{1}{32}.$$

63. Είναι $f\left(x^3+x\right)=2f\left(x+1\right)+2x$ (1)

α) Από τη σχέση (1) για $x=1$ είναι

$f\left(1^3+1\right)=2f\left(1+1\right)+2\Leftrightarrow f\left(2\right)=2f\left(2\right)+2\Leftrightarrow f\left(2\right)=-2$.

β) Παραγωγίζοντας τη σχέση (1) κατά μέλη, προκύπτει:

$\left(f\left(x^3+x\right)\right)'=\left(2f\left(x+1\right)+2x\right)'\Leftrightarrow\ f'\left(x^3+x\right)\left(3x^2+1\right)=2f'\left(x+1\right)+2$ (2)

Από τη σχέση (1) για $x=1$ είναι:

$f'\left(2\right)\cdot 4=2f'\left(2\right)+2\Leftrightarrow 2f'\left(2\right)=2\Leftrightarrow f'\left(2\right)=1$.

γ) Έστω $h\left(x\right)=xf\left(x\right)$, $x\in\mathbb{R}$. Τότε $h\left(2\right)=2f\left(2\right)=-4$ και

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{xf\left(x\right)+4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{h\left(x\right)-h\left(2\right)}{x-2}=h'\left(2\right)$. Είναι

$h'\left(x\right)=\left(xf\left(x\right)\right)'=f\left(x\right)+xf'\left(x\right)$, άρα $h'\left(2\right)=f\left(2\right)+2f'\left(2\right)=-2+2=0$.

δ) Έστω ότι υπάρχει παραγωγίσιμη συνάρτηση f που να ικανοποιεί τη σχέση: $f^3\left(x^2+1\right)=3f^3\left(x+1\right)+16x \quad (2),\ x\in\mathbb{R}$. Με παραγώγιση της σχέσης (2) κατά μέλη έχουμε $\left(f^3\left(x^2+1\right)\right)'=\left(3f^3\left(x+1\right)\right)'+\left(16x\right)' \Leftrightarrow$

$3f^2\left(x^2+1\right)f'\left(x^2+1\right)\left(x^2+1\right)'=9f^2\left(x+1\right)f'\left(x+1\right)\left(x+1\right)'+16 \Leftrightarrow$

$6xf^2\left(x^2+1\right)f'\left(x^2+1\right)=9f^2\left(x+1\right)f'\left(x+1\right)+16 \quad (3)$

Από τη σχέση (3) για $x=1$, είναι $6f^2\left(2\right)f'\left(2\right)=9f^2\left(2\right)f'\left(2\right)+16 \Leftrightarrow$

$6\cdot\left(-2\right)^2\cdot 1=9\cdot\left(-2\right)^2\cdot 1+16 \Leftrightarrow 24=36+16 \Leftrightarrow 24=52$ που είναι αδύνατο.

64. α) Έστω $f\left(x\right)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με $\alpha\neq 0$. Αν η f έχει πραγματικές ρίζες, τότε $\Delta\geq 0 \Leftrightarrow \beta^2-4\alpha\gamma\geq 0 \ (1)$. Η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'\left(x\right)=2\alpha x+\beta$ και δεύτερη παράγωγο $f''\left(x\right)=2\alpha$.

Επομένως $\left[f'\left(x\right)\right]^2-2f\left(x\right)f''\left(x\right)=\left(2\alpha x+\beta\right)^2-2\cdot 2\alpha\left(\alpha x^2+\beta x+\gamma\right)=$

$4\alpha^2x^2+4\alpha\beta x+\beta^2-4\alpha^2x^2-4\alpha\beta x-4\alpha\gamma\overset{(1)}{=}\beta^2-4\alpha\gamma\geq 0$.

β) Έστω $f\left(x\right)$ πολυώνυμο 3ου βαθμού. Επειδή η f είναι 3ου βαθμού, έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα ρ και γράφεται $f\left(x\right)=\left(x-\rho\right)\Pi\left(x\right)$, όπου $\Pi\left(x\right)$ πολυώνυμο 2ου βαθμού με πραγματικές ρίζες.

Από α) ερώτημα θα ισχύει: $\left(\Pi'\left(x\right)\right)^2-2\Pi\left(x\right)\Pi''\left(x\right)\geq 0$.

Επειδή $f\left(x\right)=\left(x-\rho\right)\Pi\left(x\right)$ έχουμε $f'\left(x\right)=\Pi\left(x\right)+\left(x-\rho\right)\Pi'\left(x\right)$ και $f''\left(x\right)=\Pi'\left(x\right)+\Pi'\left(x\right)+\left(x-\rho\right)\Pi''\left(x\right)=2\Pi'\left(x\right)+\left(x-\rho\right)\Pi''\left(x\right)$.

Οπότε, για την παράσταση $A=2\left[f'\left(x\right)\right]^2-3f\left(x\right)f''\left(x\right)$ έχουμε:

$2A=4\left[f'\left(x\right)\right]^2-6f\left(x\right)f''\left(x\right)=$

$4\left[\Pi\left(x\right)+\left(x-\rho\right)\Pi'\left(x\right)\right]^2-6\left(x-\rho\right)\Pi\left(x\right)\left[2\Pi'\left(x\right)+\left(x-\rho\right)\Pi''\left(x\right)\right]=$

$4\Pi^2\left(x\right)+4\left(x-\rho\right)^2\left(\Pi'\left(x\right)\right)^2+8\Pi\left(x\right)\Pi'\left(x\right)\left(x-\rho\right)-12\left(x-\rho\right)\Pi\left(x\right)\Pi'\left(x\right)$

$-6\left(x-\rho\right)^2\Pi\left(x\right)\Pi''\left(x\right)=4\Pi^2\left(x\right)+\left(x-\rho\right)^2\left(\Pi'\left(x\right)\right)^2+$

$3\left(x-\rho\right)^2\left(\Pi'\left(x\right)\right)^2-4\left(x-\rho\right)\Pi\left(x\right)\Pi'\left(x\right)-6\left(x-\rho\right)^2\Pi\left(x\right)\Pi''\left(x\right)=$

$3\left(x-\rho\right)^2\left[\left(\Pi'\left(x\right)\right)^2-2\Pi\left(x\right)\Pi''\left(x\right)\right]+\left[2\Pi\left(x\right)-\left(x-\rho\right)\Pi'\left(x\right)\right]^2\geq 0$.

γ) Έστω $f(x)=x^3-x+\kappa$.

Η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x)=3x^2-1$ και δεύτερη παράγωγο $f''(x)=6x$. Επειδή το πολυώνυμο έχει τρεις πραγματικές ρίζες με βάση το (β) ερώτημα θα είναι: $2\left(f'(x)\right)^2-3f(x)f''(x)\geq 0 \Leftrightarrow$

$$2\left(3x^2-1\right)^2-3\cdot 6x\left(x^3-x+\kappa\right)\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$2\left(9x^4-6x^2+1\right)-18x\left(x^3-x+\kappa\right)\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$18x^4-12x^2+2-18x^4+18x^2-18\kappa x\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 6x^2-18\kappa x+2\geq 0 \Leftrightarrow 3x^2-9\kappa x+1\geq 0.$$

Για να είναι όμως $3x^2-9\kappa x+1\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, θα πρέπει:

$$\Delta\leq 0 \Leftrightarrow 81\kappa^2-12\leq 0 \Leftrightarrow \kappa^2\leq\frac{4}{27} \Leftrightarrow |\kappa|\leq\frac{2}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow |\kappa|\leq\frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

65. α) i. Για κάθε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $f(x_1)=f(x_2)$ είναι

$f\left(f(x_1)\right)=f\left(f(x_2)\right)\overset{x_1,x_2\geq 0}{\Leftrightarrow} x_1^4=x_2^4 \Leftrightarrow x_1=x_2$, άρα η f είναι $1-1$.

ii. Αν θέσουμε στη σχέση $f\left(f(x)\right)=x^4$ (*), όπου x το $f(x)$, έχουμε

$$f\left(f\left(f(x)\right)\right)=f^4(x) \Leftrightarrow f\left(x^4\right)=f^4(x) \quad (1)$$

β) i. Αν η f ήταν γνησίως φθίνουσα, τότε για κάθε $x>0$ θα ήταν $f(x)<f(0)=0$ το οποίο είναι άτοπο οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Από τη σχέση (1) για $x=1$ έχουμε $f(1)=f^4(1)\overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow} f^3(1)=1 \Leftrightarrow f(1)=1$.

Με παραγώγιση κατά μέλη της σχέσης (*) έχουμε

$$\left[f\left(f(x)\right)\right]'=\left(x^4\right)' \Leftrightarrow f'\left(f(x)\right)f'(x)=4x^3 \quad (2)$$

Από τη σχέση (2) για $x=1$ είναι $\left[f'(1)\right]^2=4$.

iii. Η f είναι γνησίως αύξουσα οπότε:

Αν $f(x)>x$ για κάθε $x\in[0,1]$, τότε $f\left(f(x)\right)>f(x) \Leftrightarrow x^4>f(x)>x \Leftrightarrow$

$x^4-x>0 \Leftrightarrow x\left(x^3-1\right)>0 \Leftrightarrow x<0$ ή $x>1$ που είναι άτοπο.

66. α) Για $x\neq 0$ είναι $f'(x)=\dfrac{2\pi x^2\sigma\upsilon\nu\left(\pi x^2\right)-\eta\mu\left(\pi x^2\right)}{x^2}$.

Στο $x_0=0$ είναι:

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu(\pi x^2)}{x^2}=\lim_{x\to0}\left(\pi\cdot\frac{\eta\mu(\pi x^2)}{\pi x^2}\right)\underset{\substack{x\to0,\\ u\to0}}{\overset{u=\pi x^2}{=}}\lim_{u\to0}\pi\frac{\eta\mu u}{u}=\pi\ .$$

Άρα $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2\pi x^2\sigma\upsilon\nu(\pi x^2)-\eta\mu(\pi x^2)}{x^2}, & x\neq0\\ \pi, & x=0\end{cases}$.

β) i. Είναι $\left|f(x)\right|=\left|\dfrac{\eta\mu(\pi x^2)}{x}\right|\le\dfrac{1}{|x|}\overset{x>0}{\Leftrightarrow}-\dfrac{1}{x}\le f(x)\le\dfrac{1}{x}$.

Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=0=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

ii. Είναι $f'(x)=2\pi\sigma\upsilon\nu(\pi x^2)-\dfrac{\eta\mu(\pi x^2)}{x^2}$ οπότε

$\dfrac{f'(x)}{x}=\dfrac{2\pi\sigma\upsilon\nu(\pi x^2)}{x}-\dfrac{\eta\mu(\pi x^2)}{x^3}$.

Όμως $\left|\dfrac{2\pi\sigma\upsilon\nu(\pi x^2)}{x}\right|\le\left|\dfrac{2\pi}{x}\right|\Leftrightarrow-\left|\dfrac{2\pi}{x}\right|\le\dfrac{2\pi\sigma\upsilon\nu(\pi x^2)}{x}\le\left|\dfrac{2\pi}{x}\right|$,

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left|\dfrac{2\pi}{x}\right|=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\left|\dfrac{2\pi}{x}\right|\right)=0$ άρα από το κριτήριο παρεμβολής είναι

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2\pi\sigma\upsilon\nu(\pi x^2)}{x}=0$. Όμοια $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\eta\mu(\pi x^2)}{x^3}=0$, άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f'(x)}{x}=0$

γ) Είναι $\lim\limits_{x\to0}f'(x)=\pi=f'(0)$, άρα f' συνεχή στο $x_0=0$.

67. α) Είναι $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\eta\mu\frac{1}{x}+\alpha x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left(x\eta\mu\dfrac{1}{x}+\alpha\right)=\alpha\in\mathbb{R}$.

($\left|x\eta\mu\dfrac{1}{x}\right|\le|x|\Leftrightarrow-|x|\le x\eta\mu\dfrac{1}{x}\le|x|$. Όμως $\lim\limits_{x\to0}(-|x|)=0=\lim\limits_{x\to0}|x|$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to0}x\eta\mu\dfrac{1}{x}=0$).

Άρα $f'(0)=\alpha$ οπότε $f'(x)=\begin{cases}2x\eta\mu\dfrac{1}{x}-\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}+\alpha & ,x\neq0\\ \alpha & ,x=0\end{cases}$.

β) Είναι $f'\left(\frac{1}{2\pi}\right)=-1+\alpha<0$, $f'\left(\frac{1}{\pi}\right)=1+\alpha>0$ αφού $|\alpha|<1\Leftrightarrow -1<\alpha<1$

οπότε η f' αλλάζει πρόσημο στο $\left(\frac{1}{2\pi},\frac{1}{\pi}\right)$.

68. α) Για $x\neq 0$ είναι

$$\frac{f^3(x)}{x^3}+\frac{\cancel{x^2}f(x)}{x^{\cancel{3}}}=\frac{4x^{\cancel{4}}}{\cancel{x^3}}+\frac{2\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}}\Leftrightarrow\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3+\frac{f(x)}{x}=4x+2 \text{ οπότε}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3+\frac{f(x)}{x}\right)=\lim_{x\to 0}(4x+2)\Leftrightarrow \lambda^3+\lambda=2\Leftrightarrow \lambda^3+\lambda-2=0\Leftrightarrow$$

$(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+2)=0\Leftrightarrow(\lambda=1)$ ή $(\lambda^2+\lambda+2=0$ αδύνατη $(\Delta<0))$.

β) Για $x=0$ είναι $f^3(0)+0^2\cdot f(0)=4\cdot 0^4+2\cdot 0^3\Leftrightarrow f^3(0)=0\Leftrightarrow f(0)=0$.

Επομένως $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$.

γ) i. Για $x=-1$ είναι $f^3(-1)+f(-1)=4-2\Leftrightarrow f^3(-1)+f(-1)-2=0\Leftrightarrow$

$(f(-1)-1)(f^2(-1)+f(-1)+2)=0\Leftrightarrow(f(-1)=1)$ ή $(f^2(-1)+f(-1)+2=0$

αδύνατη). Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οι συναρτήσεις $f^3(x)$, $x^2f(x)$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση και γινόμενο αντίστοιχα παραγωγίσιμων συναρτήσεων, η συνάρτηση $4x^4+2x^3$ είναι παραγωγίσιμη, έχουμε:

$$\left(f^3(x)+x^2f(x)\right)'=\left(4x^4+2x^3\right)'\Leftrightarrow$$

$3f^2(x)f'(x)+2xf(x)+x^2f'(x)=16x^3+6x^2$. Για $x=-1$ είναι:

$$3f^2(-1)f'(-1)+2(-1)f(-1)+(-1)^2f'(-1)=16(-1)^3+6(-1)^2\Leftrightarrow$$

$$3f'(-1)-2+f'(-1)=-10\Leftrightarrow 4f'(-1)=-8\Leftrightarrow f'(-1)=-2.$$

ii. Είναι $f'(-1)=-2\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to -1^+}\frac{f(x)-1}{x+1}=-2<0$, οπότε υπάρχει $\alpha>-1$ ο οποίος βρίσκεται πολύ κοντά στο – 1 τέτοιος ώστε $\frac{f(\alpha)-1}{\alpha+1}<0$.

Όμως $\alpha>-1\Leftrightarrow \alpha+1>0$ οπότε $f(\alpha)-1<0$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$ οπότε $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=1$ άρα υπάρχει $\beta<0$, ο οποίος είναι πολύ κοντά στο 0, τέτοιος ώστε $\frac{f(\beta)}{\beta}>0$. Επομένως $f(\beta)<0$ αφού $\beta<0$.

Έστω $g(x)=f^2(x)-f(x),\ x\in[\alpha,\beta]$.

Είναι $g(\alpha)=f^2(\alpha)-f(\alpha)=f(\alpha)\big(f(\alpha)-1\big)$.

Είναι $f^3(\alpha)+\alpha^2 f(\alpha)=4\alpha^4+2\alpha^3 \Leftrightarrow f(\alpha)\big(f^2(\alpha)+\alpha^2\big)=2\alpha^3(2\alpha+1)$ (1)

Επειδή ο α είναι πολύ κοντά στο –1, είναι $\alpha<0,\ 2\alpha+1<0$ και επειδή $f^2(\alpha)+\alpha^2>0$, από την (1) προκύπτει ότι $f(\alpha)>0$ οπότε $g(\alpha)=f(\alpha)\big(f(\alpha)-1\big)<0$. Είναι $g(\beta)=f^2(\beta)-f(\beta)=f(\beta)\big(f(\beta)-1\big)>0$ αφού $f(\beta)<0$, οπότε $g(\alpha)g(\beta)<0$, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano, επομένως η εξίσωση $g(x)=0\Leftrightarrow f^2(x)=f(x)$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (α,β) οπότε και στο $(-1,0)$.

2ος τρόπος: Έστω $g(x)=f^2(x)-f(x),\ x\in(0,1)$

$$f^3\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}f\left(-\frac{1}{2}\right)=0\Leftrightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right)\underbrace{\left(f^2\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\right)}_{\neq 0}=0\Leftrightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right)=0\Leftrightarrow$$

$g\left(-\frac{1}{2}\right)=0$.

69. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ οπότε:

- Θα είναι συνεχής στο 0, δηλαδή $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$,
- $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$.

α) Επειδή η g είναι συνεχής στο $x_0=0$, ισχύει ότι

$$\lim_{x\to 0^-}g(x)=\lim_{x\to 0^+}g(x)=g(0)\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to 0^-}\big(f^2(x)-f(x)\big)=\lim_{x\to 0^+}\big(f(x)-1\big)=g(0)\Leftrightarrow f^2(0)-f(0)=f(0)-1\Leftrightarrow$$

$$f^2(0)-2f(0)+1=0\Leftrightarrow \big(f(0)-1\big)^2=0\Leftrightarrow f(0)=1.$$

β) Είναι

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f^2(x)-f(x)-0}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)\cdot\big(f(x)-1\big)}{x}=$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left[f(x)\cdot\frac{f(x)-f(0)}{x}\right]=1\cdot f'(0)=f'(0) \text{ και}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-1-0}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0).$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}$ η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $g'(0)=f'(0)$.

γ) Είναι $f'(0)>0\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}>0\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-1}{x}>0$ άρα υπάρχει $\alpha<0$ με α πολύ κοντά στο 0 τέτοιο, ώστε $\dfrac{f(\alpha)-1}{\alpha}>0$.

Όμως $\alpha<0$ οπότε $f(\alpha)-1<0\Leftrightarrow f(\alpha)<1$.

Είναι $f'(0)>0\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-1}{x}>0$ άρα υπάρχει $\beta>0$ με β πολύ κοντά στο 0 τέτοιο, ώστε $\dfrac{f(\beta)-1}{\beta}>0$ οπότε $f(\beta)-1>0\Leftrightarrow f(\beta)>1$ αφού $\beta>0$.

δ) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_1=k$ οπότε:

- Θα είναι συνεχής στο k, δηλαδή $\lim\limits_{x\to k}f(x)=f(k)$.
- $f'(k)=\lim\limits_{x\to k}\dfrac{f(x)-f(k)}{x-k}$.

i. Έστω: $h(x)=\dfrac{f(x)-f(k)}{x-k}$, $x\neq k$ με $\lim\limits_{x\to k}h(x)=f'(k)$, τότε:

$f(x)=h(x)(x-k)+f(k)$.

Επομένως $\lim\limits_{x\to k}\dfrac{xf(k)-kf(x)}{x-k}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{xf(k)-k\left[h(x)(x-k)+f(k)\right]}{x-k}=$

$\lim\limits_{x\to k}\dfrac{xf(k)-kh(x)(x-k)-kf(k)}{x-k}=\lim\limits_{x\to k}\dfrac{f(k)(x-k)-kh(x)(x-k)}{x-k}=$

$\lim\limits_{x\to k}\dfrac{\cancel{(x-k)}\left[f(k)-kh(x)\right]}{\cancel{x-k}}=f(k)-kf'(k)$.

ii. Είναι $\lim\limits_{x\to k}\dfrac{e^xf(x)-e^kf(k)}{x-k}=\lim\limits_{x\to k}\dfrac{e^xf(x)-e^xf(k)+e^xf(k)-e^kf(k)}{x-k}=$

$\lim\limits_{x\to k}\dfrac{e^x\left(f(x)-f(k)\right)+f(k)\left(e^x-e^k\right)}{x-k}=\lim\limits_{x\to k}\left[e^x\dfrac{f(x)-f(k)}{x-k}+f(k)\dfrac{e^x-e^k}{x-k}\right]\quad(1)$

Έστω $h(x)=e^x$, $x\in\mathbb{R}$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $h'(x)=e^x$ οπότε $h'(k)=e^k\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to k}\dfrac{e^x-e^k}{x-k}=e^k$.

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\lim_{x\to k}\frac{e^x f(x)-e^k f(k)}{x-k}=e^k f'(k)+e^k f(k)=e^k\left(f(k)+f'(k)\right).$$

ε) i. Έστω $\frac{1+x}{x}=u$, $x\neq 0$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}u=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$. Τότε:

$1+x=ux\Leftrightarrow 1=ux-x\Leftrightarrow x(u-1)=1\Leftrightarrow x=\frac{1}{u-1}$, $u\neq 1$. Οπότε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(f\left(\frac{1+x}{x}\right)-f(1)\right)\right]=\lim_{u\to 1}\left[\frac{1}{u-1}\left(f(u)-f(1)\right)\right]=$$

$\lim\limits_{u\to 1}\frac{f(u)-f(1)}{u-1}=f'(1)=2$. Επίσης $f'(1)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=2$.

Επομένως $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1+x)-f(1-x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1+x)-f(1)-f(1-x)+f(1)}{x}=$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{f(1+x)-f(1)}{x}-\frac{f(1-x)-f(1)}{x}\right)=2f'(1)=4$ αφού

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1-x)-f(1)}{x}\overset{x=-h}{=}\lim_{x\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{-h}=-\lim_{x\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=-f'(1)=-2$$

ii. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-\cancel{1}-f(1)+\cancel{1}}{x-1}=f'(1)=2$.

70. Είναι $\ln f(x)+f(x)=x$ (*)

α) 1ος τρόπος (άτοπο)

Έστω ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1)\geq f(x_2)$ (1), τότε $\ln f(x_1)\geq \ln f(x_2)$ (2). Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) έχουμε: $\ln f(x_1)+f(x_1)\geq \ln f(x_2)+f(x_2)\Leftrightarrow x_1\geq x_2$ άτοπο.

Άρα για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι $f(x_1)<f(x_2)$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

2ος τρόπος

Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι $\ln f(x_1)+f(x_1)<\ln f(x_2)+f(x_2)$ (3)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\ln x+x,\ x>0$. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ (4) είναι $\ln x_1<\ln x_2$ (5)

Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (4) και (5) έχουμε:

$\ln x_1+x_1<\ln x_2+x_2\Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2)$, οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Από την (3) έχουμε: $g\left(f\left(x_1\right)\right)<g\left(f\left(x_2\right)\right)\overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow}f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Από την (*) για $x=1$ είναι $\ln f(1)+f(1)=1\Leftrightarrow g\left(f(1)\right)=g(1)\overset{g\ 1-1}{\Leftrightarrow}f(1)=1$.

γ) Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)$.

• Έστω ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=k\in(0,+\infty)$ τότε

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln f(x)+f(x)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\Leftrightarrow \ln k+k=+\infty$ άτοπο.

Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln f(x)+f(x)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\Leftrightarrow -\infty+0=+\infty$ άτοπο, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. Επομένως $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=k\in(0,+\infty)$ ή $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$.

• Έστω ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=k\in(0,+\infty)$ τότε

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\ln f(x)+f(x)\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\Leftrightarrow \ln k+k=-\infty$ άτοπο.

Αν $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\ln f(x)+f(x)\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\Leftrightarrow -\infty+0=-\infty$ δεκτό.

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$. Άρα έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R})=(0,+\infty)$.

δ) Είναι $\ln f\left(f(x)\right)+f\left(f(x)\right)=x\Leftrightarrow g\left(f(x)\right)=g(x)\Leftrightarrow f(x)=x$.

Έστω $\rho\in\mathbb{R}$ ρίζα της (2), δηλαδή $f(\rho)=\rho$, τότε από την (*) για $x=\rho$ είναι:

$\ln f(\rho)+f(\rho)=\rho\Leftrightarrow \ln\rho+\cancel{\rho}=\cancel{\rho}\Leftrightarrow \ln\rho=0\Leftrightarrow\rho=1$, οπότε μοναδική λύση της εξίσωσης είναι η $x=1$.

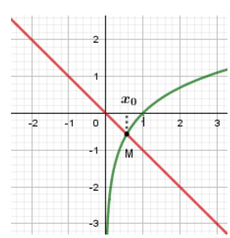
ε) Είναι $1<e\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(1)<f(e)\Leftrightarrow 1<f(e)$.

Επίσης είναι $g\left(f(e+1)\right)=e+1\Leftrightarrow g\left(f(e+1)\right)=g(e)\Leftrightarrow f(e+1)=e$.

Είναι $e<e+1\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(e)<f(e+1)=e$.

στ) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, είναι 1-1 οπότε αντιστρέφεται με $D_{f^{-1}}=f(\mathbb{R})=(0,+\infty)$. Θέτουμε $f(x)=y\Leftrightarrow \ln y+y=x$, άρα $f^{-1}(y)=\ln y+y,\ y>0$, οπότε $f^{-1}(x)=\ln x+x,\ x>0$.

ζ) $f^{-1}(x)=0\Leftrightarrow \ln x+x=0\Leftrightarrow \ln x=-x$, οπότε η ρίζα της εξίσωσης $f^{-1}(x)=0$ είναι η τετμημένη του κοινού σημείου των γραφικών παραστάσεων των $y=\ln x$ και $y=-x$. Παρατηρούμε στο σχήμα ότι το x_0 είναι κοντά στο 1/2, γι' αυτό τα διαστήματα στα οποία θα «ψάξουμε»



για το x_0 είναι τα $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ και $\left(\frac{1}{2},1\right)$.

Είναι $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=-\ln 2+\frac{1}{2}=\frac{1-2\ln 2}{2}=\frac{\ln e-\ln 4}{2}<0$ και $f^{-1}(1)=1$,

οπότε $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)f^{-1}(1)<0$.

Η f^{-1} είναι συνεχής ως άθροισμα βασικών συναρτήσεων άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε η εξίσωση $f^{-1}(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\left(\frac{1}{2},1\right)$. Επειδή η $f^{-1}=g$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της $f^{-1}(x)=0$, οπότε $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$.

η) $f(x)(f(x)-e)=-x \Leftrightarrow f^2(x)-ef(x)+x=0$.

Έστω $h(x)=f^2(x)-ef(x)+x,\ x\in[1,e]$.

Η h είναι συνεχής στο $[1,e]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

$h(1)=f^2(1)-ef(1)+1=1-e+1=2-e<0$, $h(e)=f^2(e)-ef(e)+e$.

Το τριώνυμο $f^2(e)-ef(e)+e$ έχει διακρίνουσα $\Delta=e^2-4e=e(e-4)<0$,

οπότε $h(e)=f^2(e)-ef(e)+e>0$. Άρα $h(1)h(e)<0$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα η εξίσωση $h(x)=0 \Leftrightarrow f^2(x)-ef(x)+x=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1,e)$.

θ) i. Θέτουμε $f(x)=y \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$. Επειδή $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$, είναι

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{f(x)-1}=\lim_{y\to 1}\frac{f^{-1}(y)-1}{y-1}=\lim_{y\to 1}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(1)}{y-1}=\left(f^{-1}\right)'(1).$$

Η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{x}+1$, οπότε

$\left(f^{-1}\right)'(1)=2$.

ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f^{-1}(x^2+2)-f^{-1}(x^2+1)\right]=$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\ln(x^2+2)+\cancel{x^2}+2-\ln(x^2+1)-\cancel{x^2}-1\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\frac{x^2+2}{x^2+1}+1\right]=1 \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}=1 \text{ και } \lim_{x\to+\infty}\ln\frac{x^2+2}{x^2+1}\underset{\substack{x\to+\infty\Rightarrow\\ u\to 1}}{\overset{\frac{x^2+2}{x^2+1}=u}{=}}\lim_{u\to 1}\ln u=0.$$

ι) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η συνάρτηση $\ln f(x)+f(x)$ είναι παραγωγίσιμη, οπότε με παραγώγιση της (*) έχουμε

$$\left(\ln f(x)+f(x)\right)'=(x)' \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}+f'(x)=1 \Leftrightarrow f'(x)+f(x)f'(x)=f(x) \Leftrightarrow$$

$f'(x)\left(1+f(x)\right)=f(x) \Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{f(x)}{1+f(x)}$ (Λ). Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με: $\left(f'(x)\right)'=\left(\dfrac{f(x)}{1+f(x)}\right)' \Leftrightarrow$

$$f''(x)=\frac{f'(x)\left(1+f(x)\right)-f(x)f'(x)}{\left(1+f(x)\right)^2}=\frac{f'(x)}{\left(1+f(x)\right)^2}\overset{(\Lambda)}{=}\frac{\frac{f(x)}{1+f(x)}}{\left(1+f(x)\right)^2}=\frac{f(x)}{\left(1+f(x)\right)^3}$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to+\infty}f''(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\left(1+f(x)\right)^3}\underset{\substack{x\to+\infty\Rightarrow\\ u\to+\infty}}{\overset{f(x)=u}{=}}\lim_{u\to+\infty}\frac{u}{(1+u)^3}=\lim_{u\to+\infty}\frac{u}{u^3+3u^2+3u+1}=$$

$$\lim_{u\to+\infty}\frac{\cancel{u}}{u^{\cancel{3}\,2}}=0\,.$$

Τράπεζα θεμάτων ΙΕΠ

23375. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x)=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)'}{\sqrt{x^2+1}-x}=\frac{\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}-1}{\sqrt{x^2+1}-x}=\frac{\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}-x}=\frac{-\cancel{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}}{\cancel{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}\sqrt{x^2+1}}\Leftrightarrow$$

$$f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,.$$

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)<0$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, άρα είναι 1-1 επομένως αντιστρέφεται. Είναι:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x\right)=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)\right]=+\infty \text{ άρα}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) \underset{\substack{x\to-\infty,\\ u\to+\infty}}{\overset{u=\sqrt{x^2+1}-x}{=}} \lim\limits_{u\to+\infty} \ln u = +\infty$. Επίσης

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}\right) = 0$$

άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) \underset{\substack{x\to+\infty,\\ k\to0^+}}{\overset{k=\sqrt{x^2+1}-x}{=}} \lim\limits_{k\to0^+} \ln k = -\infty$.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R}) = (-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$, οπότε η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

γ) $f^{-1}(x+f(x)) > x \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f\left(f^{-1}(x+f(x))\right) < f(x) \Leftrightarrow x+f(x) < f(x) \Leftrightarrow x<0$.

34437. α) Είναι $D_{f\circ g} = \{x\in D_g \,/\, g(x)\in D_f\} = \{x\in\mathbb{R} \,/\, e^{x+2}>0\} = \mathbb{R}$ και $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = \ln e^{x+2} + 2e^{x+2} = x+2+2e^{x+2}$.

β) Είναι $g'(x) = e^{x+2}$, $x\in\mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι $x_1+2<x_2+2 \Leftrightarrow$ $e^{x_1+2} < e^{x_2+2} \Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2) \Leftrightarrow g\nearrow\mathbb{R} \Rightarrow g$ 1-1.

γ) Για κάθε $x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}$ είναι $g(x)=y \Leftrightarrow e^{x+2}=y$ και για $y>0$ είναι $x+2=\ln y \Leftrightarrow x=\ln y-2$, άρα $f^{-1}(y)=\ln y-2,\ y>0$, οπότε $f^{-1}(x)=\ln x-2,\ x>0$.

Κριτήριο αξιολόγησης μέχρι και τους κανόνες παραγώγισης

Θέμα Α

Α1. Θεωρία **Α2.** Θεωρία **Α3.α)** **Ψ**

β) Η συνάρτηση $f(x)=|x|$ είναι συνεχής στο 0 αφού είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$ όμως δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

($\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(x)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x}{x}=-1$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(x)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}=1$.)

α) Σ **β)** Σ **γ)** Σ **δ)** Λ

Θέμα Β

Β1. Για x = 1 είναι $f(1)=1+2f(1)-3\Leftrightarrow -f(1)=-2\Leftrightarrow f(1)=2$, οπότε η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(1,2)$.

Β2. Είναι $f(x)=x+2\cdot 2-3=x+1$. Θέτουμε $f(x)=u\Leftrightarrow x+1=u\Leftrightarrow x=u-1$

Τότε $g(f(x))=x^3+3x(x+1)+3\Leftrightarrow g(u)=(u-1)^3+3(u-1)u+3\Leftrightarrow$

$g(u)=u^3-3u^2+3u-1+3u^2-3u+3=u^3+2,\ u\in\mathbb{R}$, άρα

$g(x)=x^3+2,\ x\in\mathbb{R}$.

Β3. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι

$x_1^3<x_2^3\Leftrightarrow x_1^3+2<x_2^3+2\Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2)$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται.

Θέτουμε $g(x)=y\Leftrightarrow x^3+2=y\Leftrightarrow x^3=y-2$.

Αν $y-2\ge 0\Leftrightarrow y\ge 2$ τότε $x=\sqrt[3]{y-2}$, ενώ αν $y<2$ τότε $x=-\sqrt[3]{2-y}$, άρα

$g^{-1}(y)=\begin{cases}\sqrt[3]{y-2}, & y\ge 2\\ -\sqrt[3]{2-y}, & y<2\end{cases}$ οπότε $g^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x-2}, & x\ge 2\\ -\sqrt[3]{2-x}, & x<2\end{cases}$.

Β4. Για κάθε $x>2$ είναι

$$\left(g^{-1}\right)'(x)=\left(\sqrt[3]{x-2}\right)'=\left((x-2)^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{3}(x-2)^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}},$$ οπότε

$$\left(g^{-1}\right)'(10)=\frac{1}{3\sqrt[3]{(10-2)^2}}=\frac{1}{12}.$$

Β5. Είναι $f(x)=x+1$, οπότε $f'(x)=1$ άρα $f'(g(x))=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Είναι $f(g(x))=g(x)+1=x^3+3$, οπότε $\left[f(g(x))\right]'=3x^2,\ x\in\mathbb{R}$.

Προφανώς $f'(g(x))\ne\left[f(g(x))\right]'$.

Θέμα Γ

Γ1. Έστω $0<x_1<x_2$ τότε $-x_1>-x_2 \Leftrightarrow 2-x_1>2-x_2$ (1) και

$\ln x_1<\ln x_2 \Leftrightarrow -\ln x_1>-\ln x_2$ (2)

Με πρόσθεση των σχέσεων (1),(2) έχουμε:

$2-x_1-\ln x_1<2-x_2-\ln x_2 \Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

Γ2. $x+\ln x>1 \Leftrightarrow -x-\ln x<-1 \Leftrightarrow 2-x-\ln x<1 \Leftrightarrow f(x)<f(1) \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} x>1$.

Γ3. α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cancel{2}-x-\ln x-\cancel{2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(-1-\ln x\cdot\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$.

β) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)+x-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cancel{2}-\cancel{x}-\ln x+\cancel{x}-\cancel{2}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\left(-\dfrac{\ln x}{x-1}\right)$.

Έστω η συνάρτηση $\varphi(x)=\ln x,\ x>0$. Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $\varphi'(x)=\dfrac{1}{x}$. Επομένως $\lim\limits_{x\to 1}\left(-\dfrac{\ln x}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left(-\dfrac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1}\right)=-\varphi'(1)=-\dfrac{1}{1}=-1$.

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f\left(x^2+2\right)-f(x+2)\right)=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2-x^2-2-\ln\left(x^2+2\right)-2+x+2+\ln(x+2)\right]=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^2+x+\ln\dfrac{x+2}{x^2+2}\right)=-\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^2+x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^2\right)=-\infty$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+2}{x^2+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{x+2}{x^2+2}\ \underset{\substack{x\to+\infty\Rightarrow\\ u\to 0^+}}{\overset{\frac{x+2}{x^2+2}=u}{=}}\ \lim\limits_{u\to 0^+}\ln u=-\infty$.

Γ4. Είναι $x_0+\ln x_0=2 \Leftrightarrow 0=2-x_0-\ln x_0 \Leftrightarrow f(x_0)=0$.

Όμως $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=2-0-(-\infty)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2-\infty-\infty=-\infty$. Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A=(0,+\infty)$ έχει σύνολο τιμών το $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\right)=\mathbb{R}$. Επειδή $0\in f(A)$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα, υπάρχει μοναδικό $x_0>0$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$.

Γ5. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$ οπότε αντιστρέφεται.

Ισχύει $f^{-1}(f(x))=x$ (1) . Με παραγώγιση της σχέσης (1) έχουμε:

$\left[f^{-1}(f(x))\right]'=(x)'\Rightarrow\left(f^{-1}\right)'(f(x))f'(x)=1\Leftrightarrow$

$\left(f^{-1}\right)'(2-x-\ln x)f'(x)=1$. Για $x=1$ είναι

$\left(f^{-1}\right)'(2-1-\ln 1)f'(1)=1 \Leftrightarrow \left(f^{-1}\right)'(1)(-2)=1 \Leftrightarrow \left(f^{-1}\right)'(1)=-\frac{1}{2}$.

Θέμα Δ

Δ1. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ θα είναι και συνεχής σε αυτό, δηλαδή $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$. Είναι $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}$.

Επειδή η g είναι συνεχής στο $x_0=0$, ισχύει ότι

$\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=g(0) \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\left(f^2(x)-f(x)\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(f(x)-1\right) \Leftrightarrow f^2(0)-f(0)=f(0)-1 \Leftrightarrow$

$f^2(0)-2f(0)+1=0 \Leftrightarrow \left(f(0)-1\right)^2=0 \Leftrightarrow f(0)=1$.

Δ2. $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f^2(x)-f(x)-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)\left(f(x)-1\right)}{x}=$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\left[f(x)\frac{f(x)-f(0)}{x}\right]=1\cdot f'(0)=f'(0)$ και

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-1-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x}$ η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $g'(0)=f'(0)$.

Δ3. Είναι $f'(0)>0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}>0$ άρα υπάρχει $\alpha<0$ με α πολύ κοντά στο 0 τέτοιο, ώστε $\frac{f(\alpha)-1}{\alpha}>0$ και επειδή $\alpha<0$, είναι

$f(\alpha)-1<0 \Leftrightarrow f(\alpha)<1$. Είναι $f'(0)>0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}>0$ άρα υπάρχει $\beta>0$ με β πολύ κοντά στο 0 τέτοιο, ώστε $\frac{f(\beta)-1}{\beta}>0$ και επειδή $\beta>0$, είναι

$f(\beta)-1>0 \Leftrightarrow f(\beta)>1$.

Δ4 i. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_1=k$ θα είναι και συνεχής σε αυτό, δηλαδή $\lim\limits_{x\to k} f(x)=f(k)$. Είναι $f'(k)=\lim\limits_{x\to k}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}$. Έστω:

$h(x)=\dfrac{f(x)-f(k)}{x-k}$, $x\neq k$ και $\lim\limits_{x\to k}h(x)=f'(k)$, τότε:

$f(x)=h(x)(x-k)+f(k)$ και

$$\lim_{x\to k}\frac{xf(k)-kf(x)}{x-k}=\lim_{x\to x_0}\frac{xf(k)-k\left[h(x)(x-k)+f(k)\right]}{x-k}=$$

$$\lim_{x\to k}\frac{xf(k)-kh(x)(x-k)-kf(k)}{x-k}=\lim_{x\to k}\frac{f(k)(x-k)-kh(x)(x-k)}{x-k}=$$

$$\lim_{x\to k}\frac{\cancel{(x-k)}\left[f(k)-kh(x)\right]}{\cancel{x-k}}=f(k)-kf'(k).$$

ii. $$\lim_{x\to k}\frac{e^xf(x)-e^kf(k)}{x-k}=\lim_{x\to k}\frac{e^xf(x)-e^xf(k)+e^xf(k)-e^kf(k)}{x-k}=$$

$$\lim_{x\to k}\frac{e^x\left(f(x)-f(k)\right)+f(k)\left(e^x-e^k\right)}{x-k}=\lim_{x\to k}\left[e^x\frac{f(x)-f(k)}{x-k}+f(k)\frac{e^x-e^k}{x-k}\right]\quad(1)$$

Έστω $h(x)=e^x$, $x\in\mathbb{R}$, είναι $h'(x)=e^x$ και $h'(k)=\lim\limits_{x\to k}\dfrac{e^x-e^k}{x-k}=e^k$, οπότε

η (1) γίνεται: $\lim\limits_{x\to k}\dfrac{e^xf(x)-e^kf(k)}{x-k}=e^kf'(k)+e^kf(k)=e^k\left(f(k)+f'(k)\right)$.

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό ή Λάθος»

1. Σ	**2.** Σ	**3.** Λ	**4.** Λ	**5.** Λ	**6.** Σ	**7.** Λ	**8.** Λ	**9.** Λ	**10.** Σ
11. Λ	**12.** Λ	**13.** Σ	**14.** Λ	**15.** Λ	**16.** Σ				

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. $$f'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Οπότε

$$\left[f(\varepsilon\varphi x)\right]'=f'(\varepsilon\varphi x)(\varepsilon\varphi x)'=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varphi^2x+1}}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x}=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x}}}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x}=|\sigma\upsilon\nu x|\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x}$$

Αφού $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ τότε $\left[f(\varepsilon\varphi x)\right]'=\sigma\upsilon\nu x\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x}=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$.

Σωστή απάντηση Α.

2. Είναι $f\left(f^{-1}(y)\right)=y$ για κάθε $y\in f(A)=\mathbb{R}$. Με το δεδομένο ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη προκύπτει ότι

$f'\left(f^{-1}(y)\right)\left(f^{-1}(y)\right)' = (y)' \Leftrightarrow f'\left(f^{-1}(y)\right)\left(f^{-1}\right)(y)' = 1$ (1). Είναι

$f(1) = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(0) = 1$ και $f'(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$, συνεπώς $f'\left(f^{-1}(0)\right) = f'(1) = 2$.

Άρα στην (1) για $y = 0$ είναι

$f'\left(f^{-1}(0)\right)\left(f^{-1}\right)'(0) = 1 \Leftrightarrow 2\left(f^{-1}\right)'(0) = 1 \Leftrightarrow \left(f^{-1}\right)'(0) = \dfrac{1}{2}$.

Σωστή απάντηση Β.

3. Για $y = \dfrac{\pi}{2}$ στη δοσμένη σχέση έχουμε $\left|f(x) - f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right| \le \left|ημx - ημ\dfrac{\pi}{2}\right|$. Για $x \in \mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$ διαιρώντας με $\left|x - \dfrac{\pi}{2}\right|$ έχουμε: $\left|\dfrac{f(x) - f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)}{x - \dfrac{\pi}{2}}\right| \le \left|\dfrac{ημx - ημ\dfrac{\pi}{2}}{x - \dfrac{\pi}{2}}\right| \Leftrightarrow$

$-\left|\dfrac{ημx - ημ\dfrac{\pi}{2}}{x - \dfrac{\pi}{2}}\right| \le \dfrac{f(x) - f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)}{x - \dfrac{\pi}{2}} \le \left|\dfrac{ημx - ημ\dfrac{\pi}{2}}{x - \dfrac{\pi}{2}}\right|$ (1). Έστω $g(x) = ημx$.

Η g είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $g'(x) = συνx$ οπότε

$g'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = συν\dfrac{\pi}{2} = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{g(x) - g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)}{x - \dfrac{\pi}{2}} = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{ημx - ημ\dfrac{\pi}{2}}{x - \dfrac{\pi}{2}} = 0$.

Είναι $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(-\left|\dfrac{ημx - ημ\dfrac{\pi}{2}}{x - \dfrac{\pi}{2}}\right|\right) = 0 = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left|\dfrac{ημx - ημ\dfrac{\pi}{2}}{x - \dfrac{\pi}{2}}\right|$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$. **Σωστή απάντηση Δ.**

4. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x) = -αe^{-αx}$ και δεύτερη παράγωγο $f''(x) = α^2 e^{-αx}$. Επομένως

$f''(x) + 3f'(x) = 4f(x) \Leftrightarrow α^2 e^{-αx} - 3αe^{-αx} = 4e^{-αx} \Leftrightarrow$

$α^2 - 3α - 4 = 0 \Leftrightarrow α = 4$ ή $α = -1$. **Σωστή απάντηση Δ.**

5. Γνωρίζουμε ότι $(g \circ f)'(x) = g'\left(f(x)\right) f'(x)$ οπότε

$(g \circ f)'(1) = g'\left(f(1)\right) f'(1) = g'(1) \cdot 4 = 3 \cdot 4 = 12$. **Σωστή απάντηση Β.**

19 Εξίσωση εφαπτομένης

Εφαπτομένη μέσω γραφικής παράστασης

15.α) Είναι $f(0)=1$ και $f'(0)=1$.
Η ε έχει εξίσωση: $y-f(0)=f'(0)x \Leftrightarrow y=x+1$.

β) Είναι $f'(0)=1 \Leftrightarrow$ εφΑΒΟ = εφ45° $\Leftrightarrow$ ΑΒΟ = 45° και επειδή το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ορθογώνιο, είναι και ισοσκελές.

Αυξημένης δυσκολίας

16.α) Έστω ότι η C_2 είναι η γραφική παράσταση της f και η C_1 της f΄. Η ευθεία ε: y=1 είναι εφαπτομένη της C_2 στο σημείο (0,1) οπότε ισχύει ότι $f'(0)=\lambda_\varepsilon=0$ άτοπο αφού το σημείο (0,1) ανήκει στη γραφική παράσταση της C_2 δηλαδή στη $C_{f'}$ άρα $f'(0)=-2$. Άρα η C_1 είναι γραφική παράσταση της f και η C_2 είναι η γραφική παράσταση της f'.

β) Στο σχήμα βλέπουμε ότι το σημείο (1,4) ανήκει στη C_2,άρα $f'(1)=4$. Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση: $y-f(1)=f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y=4x-4$.

γ) Από το σχήμα έχουμε ότι η f' είναι συνεχής, $f(-1)=-4, f'(-1)=4$ οπότε:

i. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h-1)+4}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=f'(-1)=4$.

ii. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)+xf'(x)-f'(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)+f'(x)(x-1)}{x-1}=$

$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}+f'(x)\right)=f'(1)+f'(1)=8$.

17.α) Έστω ότι η C_1 είναι η γραφική παράσταση της f και η C_2 της f΄.
Το Β είναι σημείο της C_2 οπότε $f'(0)=3$. Όμως η ε είναι εφαπτομένη της C_f στο Α άρα $f'(0)=\lambda_\varepsilon=\dfrac{1-0}{0+1}=1$ άτοπο. Άρα η C_2 είναι γραφική παράσταση της f και η C_1 είναι η γραφική παράσταση της f'.

β) Αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει η τυχαία εφαπτομένη στο σημείο (x,f(x)) με τον άξονα x΄x, τότε $f'(x)=$ εφω <0 που είναι άτοπο αφού η C_1 βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x.

γ) Από το σχήμα έχουμε ότι η f' είναι συνεχής $f'(0)=1$ οπότε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)f'(x)-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)f'(x)-f'(x)+f'(x)-1}{x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(f'(x)\frac{(f(x)-1)}{x}+\frac{f'(x)-1}{x}\right)=f'(0)\cdot f'(0)+f''(0)=1\cdot 1+1=2.$$

18.α) Παρατηρούμε ότι οι C_1, C_2 τέμνουν τον άξονα x΄x στα σημεία (-1,0), (0,0) και (1,0). Επομένως τα δύο πολυώνυμα έχουν ρίζες τους αριθμούς $-1,0,1$.
Όμως $P(x)=(x-\alpha)Q(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε
$P(x)=0\Leftrightarrow(x-\alpha)Q(x)=0\Leftrightarrow(x=\alpha)$ ή $\big(Q(x)=0\Leftrightarrow x=\alpha$ ή $x=1$ ή $x=1$ ή $x=0$). Η εξίσωση $P(x)=0$ έχει μοναδικές ρίζα τις -1,0,1 οπότε το α ισούται με μία από αυτές. Όμως $\alpha>0$ άρα $\alpha=1$.
Η ευθεία (ε) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon=\dfrac{0+2}{1-0}=2$ οπότε έχει εξίσωση
$y-0=\lambda_\varepsilon(x-1)\Leftrightarrow y=2x-2$.
β) Για $\alpha=1$ είναι $P(x)=(x-1)Q(x)$ (1)
Έστω ότι η C_1 παριστάνει το $P(x)$ και η C_2 το $Q(x)$.
Τότε θα είναι $P(1)=0$, $P'(1)=\lambda_\varepsilon=2$, $Q(1)=0$ και $Q'(1)=0$. Με παραγώγιση της σχέσης (1) κατά μέλη έχουμε $P'(x)=Q(x)+(x-1)Q'(x)$ (2)
Για $x=1$ από τη σχέση (2) έχουμε $P'(1)=Q(1)\Leftrightarrow Q(1)=2$ άτοπο.
Άρα η C_2 παριστάνει το $P(x)$ και η C_1 το $Q(x)$.
γ) Το $Q(x)$ έχει ρίζες τις -1,0,1 οπότε υπάρχει πολυώνυμο $\pi(x)$ τέτοιο ώστε
$Q(x)=x(x+1)(x-1)\pi(x)$ άρα
$P(x)=(x-1)Q(x)\Leftrightarrow P(x)=x(x+1)(x-1)^2\pi(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
19.α) Η h είναι παραγωγίσιμη ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο $h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ (3)
β) Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g διέρχονται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο Α οπότε $f(0)=g(0)=0$, $f(1)=g(1)=1$.
Από την (3) για $x=0$ είναι $h'(0)=f'(0)g(0)+f(0)g'(0)=0$.
Η ευθεία (ε) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon=\dfrac{1-0}{1-0}=1$, διέρχεται από την αρχή των αξόνων οπότε έχει εξίσωση $y=\lambda_\varepsilon x\Leftrightarrow y=x$. Άρα $f'(1)=g'(1)=1$.
Από την (3) για $x=1$ είναι $h'(1)=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)=2$.

γ) Είναι $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h(1+2h)-1}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h(1+2h)-h(1)}{h}\underset{u\to 0}{\overset{2h=u}{=}}$

$\lim\limits_{h\to 0}2\dfrac{h(1+u)-h(1)}{u}=2h'(1)=4$.

20.α) Έστω $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0,\alpha_\nu\neq 0$ με $\nu\in\mathbb{N}^*$ άρτιο. Από το σχήμα έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty}P(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}P(x)=+\infty$.

Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}P(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\alpha_\nu x^\nu\right)=\alpha_\nu\cdot(+\infty)$,

$\lim\limits_{x\to-\infty}P(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\alpha_\nu x^\nu\right)=\alpha_\nu\cdot(+\infty)$ αφού ν άρτιος.

- Αν $\alpha_\nu>0$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}P(x)=+\infty$ άτοπο.
- Αν $\alpha_\nu<0$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}P(x)=-\infty$ άτοπο.

Επομένως $\nu\in\mathbb{N}^*$ περιττός.
Η γραφική παράσταση του $P(x)$ εφάπτεται στον άξονα x΄x στην αρχή των αξόνων και στην ευθεία $y=-1$ στο $x_0=1$ οπότε

$P(0)=0,P(1)=-1,P'(0)=P'(1)=0$.

β) Είναι $P(0)=0\Leftrightarrow\alpha_0=0$.

γ) Είναι $P(x)=\alpha_3x^3+\alpha_2x^2+\alpha_1x$ και $P'(x)=3\alpha_3x^2+2\alpha_2x+\alpha_1$.

Όμως $P(1)=-1\Leftrightarrow\alpha_3+\alpha_2+\alpha_1=-1$ (1),

$P'(0)=0\Leftrightarrow\alpha_1=0$ (2) και

$P'(1)=0\Leftrightarrow 3\alpha_3+2\alpha_2+\alpha_1=0\overset{(2)}{\Leftrightarrow}3\alpha_3+2\alpha_2=0$ (3)

Άρα $\begin{cases}\alpha_3+\alpha_2=-1\\ 3\alpha_3+2\alpha_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3\alpha_3-3\alpha_2=3^{(+)}\\ 3\alpha_3+2\alpha_2=0\end{cases}\Rightarrow-\alpha_2=3\Leftrightarrow\alpha_2=-3$ οπότε

$\alpha_3-3=-1\Leftrightarrow\alpha_3=2$. Άρα $P(x)=2x^3-3x^2$.

δ) Η συνάρτηση Q είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $Q'(x)=3\kappa x^2+2\lambda x$.

Έχουμε το σύστημα $\begin{cases}Q(x)=P(x)\\ Q'(x)=P'(x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\kappa x^3+\lambda x^2=2x^3-3x^2\\ 3\kappa x^2+2\lambda x=6x^2-6x\end{cases}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}(\kappa-2)x^3+(\lambda+3)x^2=0\\ 3(\kappa-2)x^2+2(\lambda+3)x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2\left[(\kappa-2)x+(\lambda+3)x\right]=0\\ x\left[3(\kappa-2)x+2(\lambda+3)\right]=0\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\overset{\kappa\neq 2}{\Leftrightarrow}\begin{cases} x=0 \text{ ή } x=-\dfrac{\lambda+3}{\kappa-2} \\ x=0 \text{ ή } x=-\dfrac{2(\lambda+3)}{3(\kappa-2)} \end{cases} \Leftrightarrow \ (x=0) \text{ ή } (\begin{cases} x=0 \\ x=-\dfrac{2(\lambda+3)}{3(\kappa-2)} \end{cases} \Leftrightarrow x=0 \text{ και}$$

$$\lambda=-3) \text{ ή } (\begin{cases} x=-\dfrac{\lambda+3}{\kappa-2} \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=0 \text{ και } \lambda=-3) \text{ ή } (\begin{cases} x=-\dfrac{\lambda+3}{\kappa-2} \\ x=-\dfrac{2(\lambda+3)}{3(\kappa-2)} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{\lambda+3}{\cancel{\kappa-2}}=-\frac{2(\lambda+3)}{3(\cancel{\kappa-2})} \Leftrightarrow \lambda+3=2\lambda+6 \Leftrightarrow \lambda=-3 \text{ οπότε } x=0 .$$

Άρα σε κάθε περίπτωση μοναδική λύση του συστήματος είναι το $x=0$. Επομένως δέχονται μοναδική κοινή εφαπτομένη στο $x_0=0$. Η εξίσωση αυτής είναι $y-P(0)=P'(0)(x-0) \Leftrightarrow y=0$.

Εφαπτομένη σε γνωστό σημείο

21. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=2x-\dfrac{1}{x^2}$ οπότε $f'(1)=1$. Επίσης $f(1)=1+1=2$ οπότε η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση $\varepsilon: y-f(1)=f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y-2=x-1 \Leftrightarrow y=x+1$.

22. Είναι $f(x)=\left|6-2x^2\right|=\begin{cases} 6-2x^2, & -\sqrt{3}\le x\le\sqrt{3} \\ 2x^2-6, & x<-\sqrt{3} \text{ ή } x>\sqrt{3} \end{cases}$.

Για $x>\sqrt{3}$ είναι $f'(x)=4x$ οπότε $f'(2)=8$.

Επίσης $f(2)=2\cdot 2^2-6=2$, οπότε η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση $\varepsilon: y-f(2)=f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y-2=8(x-2) \Leftrightarrow y=8x-14$.

23. Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x+2x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}+2\right)=2$,

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2+2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cancel{x}(x+2)}{\cancel{x}}=2$, άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 2 με παράγωγο $f'(2)=2$. Επομένως η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση $\varepsilon: y-f(0)=f'(0)x \Leftrightarrow y-3=2x \Leftrightarrow y=2x+3$.

24. Αρκεί $f'(0)=g'(0)$. Οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με παραγώγους αντίστοιχα $f'(x)=e^x+1$, $g'(x)=2\sigma\upsilon\nu x$, άρα $f'(0)=2=g'(0)$.

25. Είναι $f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^3+\cancel{x^2}-5x-1=\cancel{x^2}-2x-3\Leftrightarrow x^3-3x+2=0\Leftrightarrow$ $(x-1)\left(x^2+x-2\right)=0\Leftrightarrow(x=1)$ ή $\left(x^2+x-2=0\Leftrightarrow(x=1)\text{ ή }(x=-2)\right)$.
Οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με παραγώγους αντίστοιχα $f'(x)=3x^2+2x-5$, $g'(x)=2x-2$ οπότε $f'(1)=0$, $f'(-2)=3$, $g'(1)=0$, $g'(-2)=-6$. Οι ζητούμενες εφαπτόμενες έχουν εξισώσεις:

- Στο $x=1$: $y=f(1)\Leftrightarrow y=-4$ και $y=g(1)\Leftrightarrow y=-4$.
- Στο $x=-2$ είναι

$y-f(-2)=f'(-2)(x+2)\Leftrightarrow y-5=3(x+2)\Leftrightarrow y=3x+11$ και
$y-g(-2)=g'(-2)(x+2)\Leftrightarrow y-5=-6(x+2)\Leftrightarrow y=-6x-7$.

26. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$, $x\in\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x)=\alpha$. Η εφαπτομένη της C_f στο τυχαίο σημείο $A\left(x_0,f(x_0)\right)$ είναι η $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y-\cancel{\alpha x_0}-\beta=\alpha x-\cancel{\alpha x_0}\Leftrightarrow y=\alpha x+\beta$.
Άρα η εφαπτομένη σε οποιοδήποτε σημείο (αφού το A είναι τυχαίο) θα ταυτίζεται με την συνάρτηση.

27.α) Για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει $x\neq 3$. Δηλαδή $A_f=\mathbb{R}-\{3\}$.
Για $y=0$ είναι $f(x)=0\Leftrightarrow \dfrac{x-6}{x-3}=0\Leftrightarrow x-6=0\Leftrightarrow x=6$ και για $x=0$ είναι $f(0)=\dfrac{0-6}{0-3}=2$. Επομένως η C_f τέμνει τους άξονες στα σημεία $A(6,0)$ και $B(0,2)$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη για $x\neq 3$ με παράγωγο
$$f'(x)=\frac{x-3-x+6}{(x-3)^2}=\frac{3}{(x-3)^2}.$$
Είναι $f'(6)=\dfrac{3}{(6-3)^2}=\dfrac{1}{3}$ και $f'(0)=\dfrac{3}{(0-3)^2}=\dfrac{1}{3}$ οπότε οι (ε_1),(ε_2) έχουν εξισώσεις αντίστοιχα $\varepsilon_1: y-f(6)=f'(6)(x-6)\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{3}x-2$ και
$\varepsilon_2: y-f(0)=f'(0)x\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{3}x+2$.

γ) Είναι $f'(0)=f'(6)\Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_1}=\lambda_{\varepsilon_2}$, οπότε οι εφαπτόμενες της C_f στα A και B είναι παράλληλες.

Αυξημένης δυσκολίας

28. Είναι $f(x)=x^{\frac{2}{x}}=e^{\ln x^{\frac{2}{x}}}=e^{\frac{2\ln x}{x}}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=e^{\frac{2\ln x}{x}}\cdot\left(\frac{2\ln x}{x}\right)'=2x^{\frac{2}{x}}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}$ οπότε $f'(1)=2$.

Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση

$\varepsilon: y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-1=2(x-1)\Leftrightarrow y=2x-1$.

Η ε τέμνει τους άξονες στα σημεία $A(0,-1)$ και $B\left(\frac{1}{2},0\right)$. Επομένως το τρίγωνο ΟΑΒ έχει εμβαδό $(OAB)=\frac{1}{2}(OA)(OB)=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

29.α) Είναι $f(x)=0\Leftrightarrow x^2-5x+6=0\Leftrightarrow x=2$ ή $x=3$, άρα $A(2,0)$, $B(3,0)$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=2x-5$, οπότε $f'(2)=-1$, $f'(3)=1$.

Η εφαπτομένη στο Α έχει εξίσωση $\varepsilon_1: y-f(2)=f'(2)(x-2)\Leftrightarrow y=-x+2$ και η εφαπτομένη στο Β έχει εξίσωση $\varepsilon_2: y-f(3)=f'(3)(x-3)\Leftrightarrow y=x-3$.

γ) Παρατηρούμε ότι $\lambda_1\cdot\lambda_2=f'(2)\cdot f'(3)=-1$ οπότε $\varepsilon_1\perp\varepsilon_2$.

Είναι $\varepsilon\varphi\omega_1=\lambda_1=-1\Leftrightarrow\omega_1=135^\circ$, $\varepsilon\varphi\omega_2=\lambda_2=1\Leftrightarrow\omega_2=45^\circ$.

Επομένως $\omega_1+\omega_2=180^\circ$.

30. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=\frac{1}{x}+1$, $x>0$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η f' είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε για κάθε $x_1,x_2>0$ με $x_1\neq x_2$ είναι $f'(x_1)\neq f'(x_2)$ οπότε δεν υπάρχουν δύο διαφορετικά σημεία στα οποία οι εφαπτόμενες να είναι παράλληλες.

31. Είναι $f(x+\sigma\upsilon\nu x)=e^x+e^{2x}$ (1). Με παραγώγιση της σχέσης (1) κατά μέλη έχουμε: $f'(x+\sigma\upsilon\nu x)(1-\eta\mu x)=e^x+2e^{2x}$ (2).

Από τις σχέσεις (1),(2) για $x=0$ έχουμε αντίστοιχα: $f(1)=1+1=2$, $f'(1)=1+2=3$ οπότε η εφαπτόμενη της C_f στο 1 έχει εξίσωση:

$\varepsilon: y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-2=3(x-1)\Leftrightarrow y=3x-1$.

Η ε τέμνει τους άξονες στα σημεία $A(0,-1)$ και $B\left(\frac{1}{3},0\right)$.

Επομένως το τρίγωνο ΟΑΒ έχει εμβαδό $(OAB)=\frac{1}{2}(OA)(OB)=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$.

32.α) Είναι $f^3(x)+xf(x)=x^2-5x+2$ (1). Από τη σχέση (1) για $x=1$ είναι:

$f^3(1)+f(1)=1^2-5\cdot 1+2 \Leftrightarrow f^3(1)+f(1)+2=0 \Leftrightarrow$

$(f(1)+1)\left(\underbrace{f^2(1)-f(1)+2}_{\neq 0 \text{ αφού } \Delta=-7<0}\right)=0 \Leftrightarrow f(1)=-1$.

Με παραγώγιση της σχέσης (1) κατά μέλη έχουμε:

$\left(f^3(x)+xf(x)\right)'=\left(x^2-5x+2\right)' \Leftrightarrow 3f^2(x)f'(x)+f(x)+xf'(x)=2x-5$ (2)

Από τη σχέση (2) για $x=1$ είναι

$3f^2(1)f'(1)+f(1)+f'(1)=2-5 \Leftrightarrow 3f'(1)-1+f'(1)=-3 \Leftrightarrow$

$4f'(1)=-2 \Leftrightarrow f'(1)=-\frac{1}{2}$.

β) Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο 1 είναι:

$y-f(1)=f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y+1=-\frac{1}{2}(x-1) \Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$.

33.α) Είναι $f(x+1)+2f\left(x^2+1\right)=x^3-2x^2-5$ (1). Από τη σχέση (1) για $x=0$

είναι $f(1)+2f(1)=-5 \Leftrightarrow 3f(1)=-5 \Leftrightarrow f(1)=-\frac{5}{3}$.

Με παραγώγιση της σχέσης (1) κατά μέλη έχουμε:

$\left(f(x+1)+2f\left(x^2+1\right)\right)'=\left(x^3-2x^2-5\right)' \Leftrightarrow$

$f'(x+1)+2f'\left(x^2+1\right)\cdot 2x=3x^2-4x$ (2)

Από τη σχέση (2) για $x=0$, έχουμε: $f'(1)=0$.

β) Από τις σχέσεις (1),(2) για $x=1$ έχουμε αντίστοιχα

$f(2)+2f(2)=-6 \Leftrightarrow 3f(2)=-6 \Leftrightarrow f(2)=-2$,

$f'(2)+4f'(2)=3-4 \Leftrightarrow 5 \Leftrightarrow f'(2)=-1 \Leftrightarrow f'(2)=-\frac{1}{5}$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο 2 είναι:

$\varepsilon: y-f(2)=f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y+2=-\frac{1}{5}(x-2) \Leftrightarrow y=-\frac{1}{5}x-\frac{8}{5}$.

34. Είναι $\left(x^4+x^2\right)f^2(x)+f(x)=\dfrac{2}{x^2+1}$ (1). Από τη σχέση (1) για $x=1$ έχουμε $2f^2(1)+f(1)=1 \Leftrightarrow 2f^2(1)+f(1)-1=0 \Leftrightarrow \left(f(1)=-1\right.$ απορρίπτεται) ή $\left(f(1)=\dfrac{1}{2}\right)$. Με παραγώγιση της σχέσης (1) κατά μέλη έχουμε:

$$\left[\left(x^4+x^2\right)f^2(x)+f(x)\right]'=\left(\frac{2}{x^2+1}\right)' \Leftrightarrow$$

$$\left(4x^3+2x\right)f^2(x)+\left(x^4+x^2\right)2f(x)f'(x)+f'(x)=-\frac{2}{\left(x^2+1\right)^2}\cdot 2x \quad (2)$$

Από τη σχέση (2) για $x=1$, έχουμε:

$$6f^2(1)+4f(1)f'(1)+f'(1)=-1 \Leftrightarrow \frac{3}{2}+2f'(1)+f'(1)=-1 \Leftrightarrow 3f'(1)=-\frac{5}{2} \Leftrightarrow$$

$f'(1)=-\dfrac{5}{6}$. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο 1 είναι:

η: $y-f(1)=f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y=-\dfrac{5}{6}x+\dfrac{4}{3}$.

35. Είναι $f(2+x)+f(2-x)=e^x-\text{συν}x$ (1). Με παραγώγιση της σχέσης (1) κατά μέλη έχουμε:

$$\left(f(2+x)+f(2-x)\right)'=\left(e^x-\text{συν}x\right)' \Rightarrow f'(2+x)-f'(2-x)=e^x+\text{ημ}x \quad (2)$$

Με παραγώγιση της σχέσης (2) κατά μέλη έχουμε:

$$\left(f'(2+x)-f'(2-x)\right)'=\left(e^x+\text{ημ}x\right)' \Leftrightarrow f''(2+x)+f''(2-x)=e^x+\text{συν}x \quad (3)$$

Από τη σχέση (2) για $x=0$ έχουμε::

$f''(2)+f''(2)=1+1 \Leftrightarrow 2f''(2)=2 \Leftrightarrow f''(2)=1 \Leftrightarrow$ $\text{εφ}\omega=1 \Leftrightarrow \omega=45°$, όπου ω είναι η ζητούμενη γωνία.

36.α) Έστω $g(x)=\dfrac{f(x)-\sqrt{x-1}}{x-2} \Leftrightarrow f(x)=g(x)(x-2)+\sqrt{x-1}$,

$x\in[1,2)\cup(2,+\infty)$. Είναι $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left(g(x)(x-2)+\sqrt{x-1}\right)=1=f(2)$

αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε και στο 2. Επομένως:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{g(x)(x-2)+\sqrt{x-1}-1}{x-2}=\lim_{x\to 2}\left(g(x)+\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}\right)=$$

$\lim\limits_{x\to 2}\left(g(x)+\dfrac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{x-1}+1\right)}\right)=3+\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{2}$ οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στο 2 με παράγωγο $f'(2)=\dfrac{7}{2}$.

β) Η εφαπτομένης ε της C_f στο 2 έχει εξίσωση:

$$\varepsilon: y-f(2)=f'(2)(x-2)\Leftrightarrow y-1=\frac{7}{2}(x-2)\Leftrightarrow y=\frac{7}{2}x-6.$$

37.α) Έστω $g(x)=\dfrac{\eta\mu x\cdot f(x)-x^5\cdot\eta\mu\frac{1}{x}}{x^7}$, $x\neq 0$. Τότε,

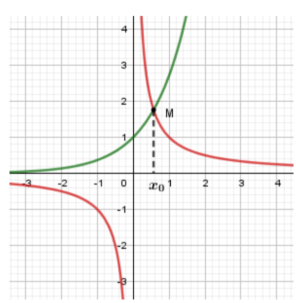
$$f(x)=\frac{x^7g(x)+x^5\eta\mu\frac{1}{x}}{\eta\mu x}=\frac{x^6g(x)+x^4\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{\eta\mu x}{x}},\ x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}.$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^6g(x)+x^4\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{\eta\mu x}{x}}=0=f(0)$ αφού η f είναι συνεχής στο 0.

(Είναι $\left|x^4\eta\mu\dfrac{1}{x}\right|\leq|x|^4\Leftrightarrow -|x|^4\leq x^4\eta\mu\dfrac{1}{x}\leq|x|^4$. Όμως $\lim\limits_{x\to 0}|x|^4=0=\lim\limits_{x\to 0}\left(|x|^4\right)$ οπότε ισχύει το κριτήριο παρεμβολής, άρα: $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^4\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)=0$). Επομένως η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^6g(x)+x^4\eta\mu\frac{1}{x}}{\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^5g(x)+x^3\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{\eta\mu x}{x}}=0$, άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με παράγωγο $f'(0)=0$.

38.α) Είναι $f(x)=0\Leftrightarrow xe^x=1$ (1). Αν $x=0$ η (1) είναι αδύνατη, οπότε για $x\neq 0$ είναι $(1)\Leftrightarrow e^x=\dfrac{1}{x}$. Το x_0 είναι η τετμημένη του μοναδικού κοινού σημείου των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $y=e^x$ και $y=\dfrac{1}{x}$.



β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x$
Η εφαπτομένη στο Μ είναι η ευθεία ε, η οποία έχει εξίσωση:
$y-\cancel{f(x_0)}^{0}=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow\ y=(x_0+1)e^{x_0}x-x_0(x_0+1)e^{x_0}$.
Είναι $f(x_0)=0\Leftrightarrow e^{x_0}=\dfrac{1}{x_0}$, οπότε η ε έχει εξίσωση: $y=\dfrac{x_0+1}{x_0}x-x_0-1$.

Για $y=0$ είναι $0=\dfrac{x_0+1}{x_0}x-x_0-1\Leftrightarrow\dfrac{\cancel{x_0+1}}{x_0}x=\cancel{x_0+1}\Leftrightarrow x=x_0$.
(Αν $x_0=-1$ τότε η ευθεία (ε) θα ήταν οριζόντια άτοπο γιατί δεν θα σχημάτιζε τρίγωνο με τους άξονες). Για $x=0$ είναι $y=-(x_0+1)$.
Άρα η ε τέμνει τους άξονες στα σημεία $A(x_0,0)$ και $B(0,-(x_0+1))$. Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ είναι: $E=\dfrac{1}{2}(OA)(OB)=\dfrac{1}{2}|x_0||x_0+1|$.
Είναι $f(0)=-1$, $f(1)=e-1$, δηλαδή $f(0)f(1)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής, η $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$.
Για $x<0$ είναι $e^x>0$ και $\dfrac{1}{x}<0$, οπότε η $e^x=\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow f(x)=0$ δεν έχει ρίζα στο $(-\infty,0)$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ οπότε το $x_0\in(0,1)$ είναι η μοναδική της ρίζα, οπότε
$E=\dfrac{1}{2}x_0(x_0+1)=\dfrac{1}{2}\left(x_0^2+x_0\right)$. Είναι $0<x_0<1$, $0<x_0^2<1$, οπότε και
$0<x_0^2+x_0<2\Leftrightarrow 0<\dfrac{1}{2}\left(x_0^2+x_0\right)<1\Leftrightarrow 0<E<1$.

39. Είναι $g(x_0)=f(x_0)-x_0$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $g'(x)=f'(x)-1$ οπότε $g'(x_0)=f'(x_0)-1$.

- Η εφαπτομένη της C_f στο $x=x_0$ είναι η ευθεία ε_1 με εξίσωση
$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y=xf'(x_0)+f(x_0)-x_0f'(x_0)$.
Για $x=0$ έχουμε: $y=f(x_0)-x_0f'(x_0)$ οπότε η ε_1 τέμνει τον $y'y$ στο $\Gamma(0,f(x_0)-x_0f'(x_0))$.
- Η εφαπτομένη της C_g στο $x=x_0$ είναι η ευθεία (ε₂), η οποία έχει εξίσωση
$\varepsilon_2:\ y-g(x_0)=g'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y=xg'(x_0)+g(x_0)-x_0g'(x_0)$.
Για $x=0$ είναι $y=g(x_0)-x_0g(x_0)\Leftrightarrow$
$y=f(x_0)-x_0-x_0(f'(x_0)-1)=f(x_0)-\cancel{x_0}-x_0f'(x_0)+\cancel{x_0}\Leftrightarrow$

$y=xf'(x_0)+f(x_0)-x_0f'(x_0)$. Επομένως η ε_2 τέμνει τον $y'y$ στο $\Gamma\left(0,f(x_0)-x_0f'(x_0)\right)$. Άρα οι εφαπτόμενες των f, g στα Α, Β διέρχονται από το σημείο Γ του άξονα y΄y.

40. Η γραφική παράσταση της g τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο $(x_0,0)$ οπότε $g(x_0)=0\Leftrightarrow\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}=0\Leftrightarrow f(x_0)=0$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ σαν πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο $g'(x)=\dfrac{\left(f'(x)\right)^2-f(x)f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2}$

οπότε $g'(x_0)=\dfrac{\left(f'(x_0)\right)^2-\cancelto{0}{f(x_0)}f''(x_0)}{\left(f'(x_0)\right)^2}=\dfrac{\left(f'(x_0)\right)^2}{\left(f'(x_0)\right)^2}=1$.

Άρα η εφαπτομένη (ε_1) της g στο x_0 έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon=-1$ και $g'(x_0)\lambda_\varepsilon=-1$ οπότε είναι κάθετη στην ευθεία (ε).

41.α) Οι εξισώσεις των εφαπτόμενων της C_f στα σημεία Μ και M' είναι αντίστοιχα: $\varepsilon_1:\ y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ και $\varepsilon_2:\ y-f(-x_0)=f'(-x_0)(x+x_0)$.

Αν η f είναι άρτια ισχύει: $f(-x)=f(x)$ (1) για κάθε $x\in[-\alpha,\alpha]$. Παραγωγίζοντας κατά μέλη, έχουμε:

$\left(f(-x)\right)'=f'(x)\Leftrightarrow -f'(-x)=f'(x)\Leftrightarrow f'(-x)=-f'(x)$ (2)

Από τις σχέσεις (1),(2) για $x=x_0$ έχουμε αντίστοιχα $f(-x_0)=f(x_0)$ (3), $f'(-x_0)=-f'(x_0)$ (4). Από τις σχέσεις (3),(4) έχουμε:

(ε_2): $y-f(x_0)=-f'(x_0)(x+x_0)\Leftrightarrow y=-f'(x_0)x-f'(x_0)x_0+f(x_0)$. Για να βρούμε το σημείο τομής των $\varepsilon_1,\varepsilon_2$, αρκεί να λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων τους. Είναι: $\begin{cases}y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)\\ y=-f'(x_0)x-f'(x_0)x_0+f(x_0)\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}-f'(x_0)x-\cancel{f'(x_0)x_0}+\cancel{f(x_0)}=f'(x_0)x-\cancel{f'(x_0)x_0}+\cancel{f(x_0)}\\ y=-f'(x_0)x-f'(x_0)x_0+f(x_0)\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}-2f'(x_0)x=0\\ y=-f'(x_0)x-f'(x_0)x_0+f(x_0)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=-f'(x_0)x_0+f(x_0)\end{cases}.$$

Οπότε το σημείο τομής των $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ είναι το $\left(0,-f'(x_0)x_0+f(x_0)\right)$, που ανήκει στον $y'y$.

β) Αν η f είναι περιττή ισχύει: $f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x\in[-\alpha,\alpha]$, οπότε:

$\left(f(-x)\right)'=-f'(x)\Leftrightarrow -f'(-x)=-f'(x)\Leftrightarrow f'(-x)=f'(x)$.

Άρα $f'(-x_0)=f'(x_0)$ οπότε οι ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ είναι παράλληλες.

Εξίσωση εφαπτομένης σε άγνωστο σημείο

42. Η είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=3x^2-2$.

Είναι $f'(x)=\varepsilon\varphi 45^\circ=1\Leftrightarrow 3x^2-2=1\Leftrightarrow 3x^2=3\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm 1$.

Οι εφαπτόμενες στα $x=1, x=-1$ έχουν εξισώσεις αντίστοιχα:

$\varepsilon_1: y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-3=x-1\Leftrightarrow y=x+2$ και

$\varepsilon_2: y-f(-1)=f'(-1)(x+1)\Leftrightarrow y-5=x+1\Leftrightarrow y=x+6$.

43. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$f'(x)=\frac{4x}{2\sqrt{x^2+9}}\Leftrightarrow f'(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+9}}.$$

Είναι $f'(x)=\lambda_\varepsilon=\dfrac{6}{5}\Leftrightarrow \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+9}}=\dfrac{6}{5}\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\dfrac{\cancel{4}x^2}{x^2+9}=\dfrac{\overset{9}{\cancel{36}}}{25}\Leftrightarrow 25x^2=9x^2+81\Leftrightarrow$

$16x^2=81\Leftrightarrow x^2=\dfrac{81}{16}\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{9}{4}$.

Επίσης $f\left(\dfrac{9}{4}\right)=2\sqrt{\dfrac{81}{16}+9}=2\sqrt{\dfrac{225}{16}}=\dfrac{15}{2}=f\left(-\dfrac{9}{4}\right)$.

Οι ζητούμενες εφαπτόμενες έχουν εξισώσεις αντίστοιχα:

$$y-f\left(\frac{9}{4}\right)=f'\left(\frac{9}{4}\right)\left(x-\frac{9}{4}\right)\Leftrightarrow y-\frac{15}{2}=\frac{6}{5}\left(x-\frac{9}{4}\right)\Leftrightarrow y=\frac{6}{5}x+\frac{24}{5},$$

$$y-f\left(-\frac{9}{4}\right)=f'\left(-\frac{9}{4}\right)\left(x+\frac{9}{4}\right)\Leftrightarrow y-\frac{15}{2}=\frac{6}{5}\left(x+\frac{9}{4}\right)\Leftrightarrow y=\frac{6}{5}x+\frac{51}{5}.$$

44. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=\dfrac{3}{x}-1$.

Είναι $f'(x)\lambda_\varepsilon=-1\Leftrightarrow\left(\dfrac{3}{x}-1\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-1\Leftrightarrow\dfrac{3}{x}-1=2\Leftrightarrow\dfrac{3}{x}=3\Leftrightarrow x=1$.

Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση:

$\varepsilon: y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y+1=2(x-1)\Leftrightarrow y=2x-3$.

45. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=3x^2$.

Έστω $M(x_0,f(x_0))$. Η εφαπτομένη της C_f στο M είναι η ευθεία

$\varepsilon: y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow y-x_0^3=3x_0^2(x-x_0) \Leftrightarrow y=3x_0^2x-2x_0^3$.

α) Πρέπει $\varepsilon // \delta \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon=\lambda_\delta \Leftrightarrow 3x_0^2=3 \Leftrightarrow x_0^2=1 \Leftrightarrow x_0=\pm 1$. Οι εφαπτόμενες στα $x=-1, x=1$ έχουν εξισώσεις αντίστοιχα: $\varepsilon_1: y=3x+2$ και $\varepsilon_2: y=3x-2$.

β) Πρέπει $\varepsilon \perp \eta \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon\lambda_\eta=-1 \Leftrightarrow 3x_0^2\left(-\frac{1}{12}\right)=-1 \Leftrightarrow -\frac{x_0^2}{4}=-1 \Leftrightarrow x_0^2=4 \Leftrightarrow$

$x_0=\pm 2$. Οι εφαπτόμενες στα $x=2, x=-2$ έχουν εξισώσεις αντίστοιχα:

$\varepsilon_1: y=3\cdot 2^2x-2\cdot 2^3 \Leftrightarrow y=12x-16$ και

$\varepsilon_2: y=3\cdot(-2)^2x-2\cdot(-2)^3 \Leftrightarrow y=12x+16$.

γ) Η ε διέρχεται από το Α όταν:

$-2=3x_0^2\cdot 0-2x_0^3 \Leftrightarrow -2x_0^3=-2 \Leftrightarrow x_0^3=1 \Leftrightarrow x_0=1$. Άρα $\varepsilon: y=3x-2$.

δ) Για $y=0$ είναι $0=3x_0^2x-2x_0^3 \Leftrightarrow x_0^2(3x-2x_0)=0 \Leftrightarrow (x_0=0)$ ή $\left(x=\frac{2x_0}{3}\right)$.

Αν $x_0=0$, τότε ε: $y=0$ άτοπο αφού τότε δεν σχηματίζεται τρίγωνο με τους άξονες. Άρα η ε τέμνει τον άξονα x΄x στο $B\left(\frac{2x_0}{3},0\right)$. Για x = 0 είναι $y=-2x_0^3$ οπότε η ε τέμνει τον άξονα y΄y στο $\Gamma(0,-2x_0^3)$.

Το ζητούμενο τρίγωνο είναι το ΟΒΓ και έχει εμβαδό:

$$E=\frac{1}{2}(OB)(O\Gamma)=\frac{1}{2}\left|\frac{2x_0}{3}\right|\left|-2x_0^3\right|=\frac{1}{2}\left|-\frac{4x_0^4}{3}\right|=\frac{1}{2}\cdot\frac{4x_0^4}{3}=\frac{2x_0^4}{3}.$$

Πρέπει $E=\frac{32}{3} \Leftrightarrow \frac{2x_0^4}{3}=\frac{32}{3} \Leftrightarrow x_0^4=16 \Leftrightarrow x_0=\pm 2$.

Άρα $\varepsilon_1: y=12x-16$ και $\varepsilon_2: y=12x+16$.

46. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο $f'(x)=3x^2$.

Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x\ln x+x=0 \Leftrightarrow x(2\ln x+1)=0 \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow}$

$2\ln x+1=0 \Leftrightarrow \ln x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$.

Άρα το μοναδικό σημείο της γραφικής παράστασης της f,στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα x΄x είναι το σημείο $\left(\frac{1}{\sqrt{e}},-\frac{1}{2e}\right)$.

Αυξημένης δυσκολίας

47. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=2x-k$.

Είναι $f'(x)=\lambda_\varepsilon \Leftrightarrow 2x-k=1 \Leftrightarrow x=\dfrac{k+1}{2}$.

Επίσης

$$f\left(\frac{k+1}{2}\right)=\left(\frac{k+1}{2}\right)^2-k\frac{k+1}{2}+3=\frac{k^2+\cancel{2k}+1-2k^2-\cancel{2k}+12}{4}=\frac{13-k^2}{4}.$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $x=\dfrac{k+1}{2}$ είναι:

$$y-f\left(\frac{k+1}{2}\right)=f'\left(\frac{k+1}{2}\right)\left(x-\frac{k+1}{2}\right)\Leftrightarrow$$

$$y-\frac{13-k^2}{4}=x-\frac{k+1}{2}\Leftrightarrow y-\frac{13-k^2}{4}=x+\frac{13-k^2-2k-2}{4}\Leftrightarrow$$

$$y=x+\frac{11-k^2-2k}{4}.$$

Επειδή η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $x-y-6=0 \Leftrightarrow y=x-6$, ισχύει ότι

$$\frac{11-k^2-2k}{4}=-6 \Leftrightarrow k^2+2k-35=0 \Leftrightarrow (k=5) \text{ ή } (k=-7).$$

- Αν $k=5$ τότε $x=\dfrac{5+1}{2}=3$, $f(3)=-3$ οπότε το σημείο επαφής είναι το $(3,-3)$, ενώ
- αν $k=-7$ τότε $x=\dfrac{-7+1}{2}=-3$, $f(-3)=-9$ οπότε το σημείο επαφής είναι το $(-3,-9)$.

48. Για $x\neq 1$ η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$f'(x)=\frac{2x(x-1)-(x^2-3)}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-x^2+3}{(x-1)^2}\Leftrightarrow f'(x)=\frac{x^2-2x+3}{(x-1)^2}.$$

Έστω $M(x_0,f(x_0))$. Η εφαπτομένη της C_f στο Μ είναι η ευθεία

$\varepsilon: y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$. Επειδή διέρχεται από το Α, ισχύει:

$$-\frac{3}{2}-f(x_0)=-x_0f'(x_0)\Leftrightarrow -\frac{3}{2}-\frac{x_0^2-3}{x_0-1}=-x_0\frac{x_0^2-2x_0+3}{(x_0-1)^2}\Leftrightarrow$$

$$-3(x_0-1)^2-2(x_0-1)(x_0^2-3)=-2x_0^2+4x_0^2-6x_0\Leftrightarrow$$

$-3\left(x_0^2-2x_0+1\right)-\cancel{2x_0^3}+6x_0+2x_0^2-6=-\cancel{2x_0^3}+4x_0^2-6x_0 \Leftrightarrow$

$-3x_0^2+6x_0-3+6x_0+2x_0^2-6-4x_0^2+6x_0=0 \Leftrightarrow$

$-5x_0^2+18x_0-9=0 \Leftrightarrow 5x_0^2-18x_0+9=0 \Leftrightarrow (x=3)$ ή $\left(x=\frac{3}{5}\right)$.

Άρα οι εφαπτόμενες στα $x=3, x=\frac{3}{5}$ έχουν εξισώσεις αντίστοιχα:

$y-f(3)=f'(3)(x-3) \Leftrightarrow y-3=\frac{3}{2}(x-3) \Leftrightarrow$

$2y-6=3x-9 \Leftrightarrow 3x-2y-3=0$ και

$y-f\left(\frac{3}{5}\right)=f'\left(\frac{3}{5}\right)\left(x-\frac{3}{5}\right) \Leftrightarrow y-\frac{33}{5}=\frac{27}{2}\left(x-\frac{3}{5}\right) \Leftrightarrow$

$y-\frac{33}{5}=\frac{27}{2}\left(x-\frac{3}{5}\right) \Leftrightarrow y=\frac{27}{2}x-\frac{81}{10}+\frac{31}{5} \Leftrightarrow y=\frac{27}{2}x-\frac{3}{2} \Leftrightarrow 27x-4y-3=0$.

49. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=3x^2$.

Έστω $M(x_0, f(x_0))$. Η εφαπτομένη της C_f στο M είναι η ευθεία

$\varepsilon: y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow y-x_0^3=3x_0^2(x-x_0) \Leftrightarrow$

$y=3x_0^2x-3x_0^3+x_0^3 \Leftrightarrow y=3x_0^2x-2x_0^3$.

Επειδή διέρχεται από το $(0,-2)$, ισχύει: $-2=-2x_0^3 \Leftrightarrow x_0=1$.

Η εφαπτομένη στο 1 είναι η ευθεία ε με εξίσωση: $y=3x-2$.

Για $x=0$ είναι $y=-2$ οπότε το σημείο τομής της με τον άξονα y΄y είναι το σημείο $A(0,-2)$.

Για $y=0$ είναι $3x-2=0 \Leftrightarrow 3x=2 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$ οπότε το σημείο τομής της με τον άξονα y΄y είναι το σημείο $B\left(\frac{2}{3},0\right)$.

Με εφαρμογή του πυθαγορείου θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΟΒ έχουμε: $(AB)^2=(OA)^2+(OB)^2=4+\frac{4}{9}=\frac{40}{9} \Leftrightarrow (AB)=\frac{2\sqrt{10}}{3}$.

50. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=2x$.

Έστω $M(x_0, f(x_0))$. Η εφαπτομένη της C_f στο M είναι η ευθεία

$\varepsilon: y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow y-x_0^2=2x_0(x-x_0) \Leftrightarrow$

$y=2x_0x-2x_0^2+x_0^2 \Leftrightarrow y=2x_0x-x_0^2$.

Επειδή διέρχεται από το σημείο P, είναι:
$\beta = 2x_0\alpha - x_0^2 \Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0\alpha + \beta = 0 \quad (1)$
Είναι $\Delta = 4\alpha^2 - 4\beta = 4\left(\alpha^2 - \beta\right) > 0$, οπότε η (1) έχει δύο άνισες ρίζες οπότε η C_f δέχεται δύο εφαπτόμενες που διέρχονται από το P.

51. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x) = 2\alpha x + \beta$.
Έστω $M\left(x_0, f(x_0)\right)$ σημείο της C_f. Η εφαπτομένη της C_f στο Μ έχει εξίσωση: $\varepsilon: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y = f'(x_0)x + f(x_0) - x_0 f'(x_0) \Leftrightarrow$
$y = (2\alpha x_0 + \beta)x + \alpha x_0^2 + \beta x_0 + \gamma - 2\alpha x_0^2 - \beta x_0 \Leftrightarrow y = (2\alpha x_0 + \beta)x - \alpha x_0^2 + \gamma$.
Για να διέρχεται η ε από το σημείο Α, πρέπει:
$\lambda = (2\alpha x_0 + \beta)\kappa - \alpha x_0^2 + \gamma \Leftrightarrow \alpha x_0^2 - 2\alpha\kappa x_0 + \lambda - \gamma - \kappa\beta = 0 \quad (1)$.
Για να υπάρχουν δύο εφαπτόμενες της C_f που διέρχονται από το Α, η (1) πρέπει να έχει δύο άνισες ρίζες, οπότε: $\Delta > 0 \Leftrightarrow 4\alpha^2\kappa^2 - 4\alpha(\lambda - \gamma - \kappa\beta) > 0 \overset{:4}{\Leftrightarrow}$
$\alpha^2\kappa^2 - \alpha\lambda + \alpha\gamma + \alpha\kappa\beta > 0$.

52. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x) = 2\lambda x$.
Έστω $K\left(x_0, f(x_0)\right)$. Η εφαπτομένη της C_f στο Μ είναι η ευθεία
$\varepsilon: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y + \lambda x_0^2 = 2\lambda x_0(x - x_0) - \lambda x_0^2 \Leftrightarrow$
$y = 2\lambda x_0 x - 2\lambda x_0^2 + \lambda x_0^2 \Leftrightarrow y = 2\lambda x_0 x - \lambda x_0^2$. Για να διέρχεται η ε από το Μ πρέπει $\beta = 2\lambda x_0\alpha - \lambda x_0^2 \Leftrightarrow \lambda x_0^2 - 2\lambda x_0\alpha + \beta = 0 \quad (1)$. Για να διέρχονται από το Μ δύο εφαπτομένες της C_f, πρέπει η (1) να έχει δύο άνισες ρίζες, το οποίο συμβαίνει όταν $\Delta > 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2\alpha^2 - 4\lambda\beta > 0 \Leftrightarrow \lambda\alpha^2 - \beta > 0 \Leftrightarrow \lambda\alpha^2 > \beta$.

53. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x) = 4x^3 - \lambda$.
Έστω $M\left(x_0, f(x_0)\right)$. Η εφαπτομένη της C_f στο Μ είναι η ευθεία
$\varepsilon: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - x_0^4 + \lambda x_0 - 3 = \left(4x_0^3 - \lambda\right)(x - x_0) \Leftrightarrow$
$y = \left(4x_0^3 - \lambda\right)\cdot x - 4x_0^4 + \cancel{\lambda x_0} + x_0^4 - \cancel{\lambda x_0} + 3 \Leftrightarrow y = \left(4x_0^3 - \lambda\right)\cdot x - 3x_0^4 + 3$.
Για να διέρχεται η ε από το Ο, πρέπει:
$0 = -3x_0^4 + 3 \Leftrightarrow 3x_0^4 = 3 \Leftrightarrow x_0^4 = 1 \Leftrightarrow x_0 = \pm 1$.
Για να είναι οι εφαπτόμενες στα σημεία αυτά κάθετες, πρέπει:
$f'(1)f'(-1) = -1 \Leftrightarrow (4 - \lambda)(-4 - \lambda) = -1 \Leftrightarrow \lambda^2 - 16 = -1 \Leftrightarrow \lambda^2 = 15 \Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{15}$

54. Για κάθε $x \neq 0$, η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$f'(x)=\left(\dfrac{\lambda}{125x^4}-1\right)'=-\dfrac{4\lambda}{125x^5}$. Έστω $M\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ σημείο της C_f.

Η εφαπτομένη της C_f στο M έχει εξίσωση $\varepsilon: y-f\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)$.

Για να διέρχεται η ε από την αρχή των αξόνων, πρέπει:

$$-f\left(x_0\right)=-x_0 f'\left(x_0\right) \Leftrightarrow \frac{\lambda}{125x_0^4}-1=\cancel{x_0}\,\frac{4\lambda}{125x_0^{\cancel{5}\,4}} \Leftrightarrow \frac{\lambda}{125x_0^4}+\frac{4\lambda}{125x_0^4}=1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\lambda}{25x_0^4}=1 \Leftrightarrow x_0^4=\frac{\lambda}{25} \Leftrightarrow x_0=\pm\sqrt[4]{\frac{\lambda}{25}}.$$

Επομένως, υπάρχουν δύο σημεία της C_f στα οποία οι εφαπτόμενες διέρχονται από την αρχή των αξόνων. Για να είναι αυτές οι εφαπτόμενες κάθετες, πρέπει:

$$f'\left(\sqrt[4]{\frac{\lambda}{25}}\right)f'\left(-\sqrt[4]{\frac{\lambda}{25}}\right)=-1 \Leftrightarrow \frac{-4\lambda}{125\left(\sqrt[4]{\frac{\lambda}{25}}\right)^5}\cdot\frac{-4\lambda}{125\left(-\sqrt[4]{\frac{\lambda}{25}}\right)^5}=-1 \Leftrightarrow$$

$$16\lambda^2=125^2\left(\sqrt[4]{\frac{\lambda}{25}}\right)^8\left(\sqrt[4]{\frac{\lambda}{25}}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$16\lambda^2=\left(5^3\right)^2\cdot\left(\frac{\lambda}{25}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{25}} \Leftrightarrow 16\cancel{\lambda^2}=5^6\cdot\frac{\cancel{\lambda^2}}{5^4}\cdot\frac{\sqrt{\lambda}}{5} \Leftrightarrow \sqrt{\lambda}=\frac{16}{5} \Leftrightarrow \lambda=\frac{256}{25}.$$

55.α) Αρκεί να υπάρχουν άπειρα $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ για τα οποία $f'\left(x_1\right)f'\left(x_2\right)=-1$ (1)

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=-2x$, οπότε από τη σχέση (1) έχουμε $-2x_1\left(-2x_2\right)=-1 \Leftrightarrow x_2=-\dfrac{1}{4x_1}$. Άρα για κάθε $x_1 \in \mathbb{R}$, οι εφαπτόμενες της C_f στα x_1 και $-\dfrac{1}{4x_1}$ είναι κάθετες.

β) i. Αν οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ήταν κάθετες, τότε

$$f'(\alpha)f'(-\alpha)=-1 \Leftrightarrow -2\alpha\cdot 2\alpha=-1 \Leftrightarrow \alpha^2=\frac{1}{4} \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} \alpha=\frac{1}{2}.$$

Είναι $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=4-\dfrac{1}{4}=\dfrac{15}{4}$, $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=4-\dfrac{1}{4}=\dfrac{15}{4}$,

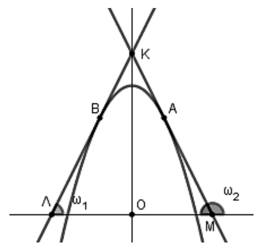
$f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=-2\cdot\dfrac{1}{2}=-1$ και $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=1$, άρα οι εξισώσεις των (ε_1),(ε_2) είναι αντίστοιχα:

$\varepsilon_1: y-f\left(\frac{1}{2}\right)=f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow y-\frac{15}{4}=-\left(x-\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow$

$y=-x+\frac{1}{2}+\frac{15}{4}\Leftrightarrow y=-x+\frac{17}{4}$ και

$\varepsilon_2: y-f\left(-\frac{1}{2}\right)=f'\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow y-\frac{15}{4}=x+\frac{1}{2}\Leftrightarrow$

$y=x+\frac{1}{2}+\frac{15}{4}\Leftrightarrow y=x+\frac{17}{4}$.



ii. Είναι $f'(-\alpha)=2\alpha=-f'(\alpha)\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega_2=-\varepsilon\varphi\omega_1\Leftrightarrow$

$\varepsilon\varphi\omega_2=\varepsilon\varphi(180°-\omega_1)\Leftrightarrow \omega_2=180°-\omega_1\Leftrightarrow$

$\omega_1+\omega_2=180°$.

iii. $\varepsilon_1: y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)\Leftrightarrow$

$y-4+\alpha^2=-2\alpha(x-\alpha)\Leftrightarrow$

$y=-2\alpha x+2\alpha^2-\alpha^2+4\Leftrightarrow y=-2\alpha x+\alpha^2+4$,

$\varepsilon_2: y-f(-\alpha)=f'(-\alpha)(x+\alpha)\Leftrightarrow y-4+\alpha^2=2\alpha(x+\alpha)\Leftrightarrow$

$y=2\alpha x+2\alpha^2-\alpha^2+4\Leftrightarrow y=2\alpha x+\alpha^2+4$.

Από το σύστημα των $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ προκύπτει ότι $K\left(0,\alpha^2+4\right)$.

Είναι $K\hat{M}O=180°-\omega_2=\omega_1$, οπότε το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισοσκελές.

56. Είναι $f'(x_0)=\varepsilon\varphi 45^o=1$, $g'(x_0)=\varepsilon\varphi 18^o$ και $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\varepsilon\varphi 72^o=\ \sigma\varphi 18^o$

Όμως $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}\Leftrightarrow$

$\sigma\varphi 18°=\frac{1\cdot g(x_0)-f(x_0)\varepsilon\varphi 18°}{g^2(x_0)}\Leftrightarrow \sigma\varphi 18°\cdot g^2(x_0)=g(x_0)-\varepsilon\varphi 18° f(x_0)\Leftrightarrow$

$\sigma\varphi 18°\cdot g^2(x_0)-g(x_0)+\varepsilon\varphi 18° f(x_0)=0.$

Θέτουμε $g(x_0)=\omega$ οπότε προκύπτει τριώνυμο, το οποίο έχει πραγματικές ρίζες άρα $\Delta\geq 0$ οπότε:

$1-4\sigma\varphi 18°\cdot\varepsilon\varphi 18° f(x_0)\geq 0\Leftrightarrow 1-4f(x_0)\geq 0\Leftrightarrow f(x_0)\leq\frac{1}{4}$.

Ευθεία που εφάπτεται - Κοινή εφαπτομένη

57.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=6x^2+6x-12$.

Είναι $f'(x)=24 \Leftrightarrow 6x^2+6x-12=24 \Leftrightarrow 6x^2+6x-36=0 \Leftrightarrow$

$x^2+x-6=0 \Leftrightarrow (x=-3)$ ή $(x=2)$.

Οι εφαπτόμενες της C_f στα $x_1=-3, x_2=2$ έχουν εξισώσεις αντίστοιχα

$y-f(-3)=f'(-3)(x+3) \Leftrightarrow y-6=24(x+3) \Leftrightarrow$

$y=24x+72-6 \Leftrightarrow y=24x+66$ και

$y-f(2)=f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y-1=24(x-2) \Leftrightarrow$

$y=24x-48+1 \Leftrightarrow y=24x-47$.

Άρα η ευθεία ε: $y=24x-47$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=10e^{10x}+14$.

Είναι $f'(x)=24 \Leftrightarrow 10e^{10x}+14=24 \Leftrightarrow 10e^{10x}=10 \Leftrightarrow e^{10x}=1 \Leftrightarrow x=0$.

Η εφαπτομένη της C_f στο $x=0$ έχει εξίσωση:

$y-f(0)=f'(0)x \Leftrightarrow y+47=24x \Leftrightarrow y=24x-47$.

Άρα η ευθεία ε: $y=24x-47$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f.

58. Η f είναι παραγωγίσιμη για $x \neq -1$ με παράγωγο

$f'(x)=\left(\dfrac{x}{x+1}\right)'=\left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)'=\dfrac{1}{(x+1)^2}$. Είναι $f(-2)=2$ και $f'(-2)=1$.

Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=-2$ είναι η ευθεία (ε) με εξίσωση:

$\varepsilon: y-f(-2)=f'(-2)(x-2) \Leftrightarrow y-2=x+2 \Leftrightarrow y=x+4$.

Για τα κοινά σημεία των ε, C_g έχουμε: $\begin{cases} y=x^2+5x+8 \\ y=x+4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x^2+5x+8=x+4 \\ y=x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4x+4=0 \\ y=x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)^2=0 \\ y=x+4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x+2=0 \\ y=x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases}$. Άρα κοινό σημείο των ε, C_g είναι το $A(-2,2)$.

Η g είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $g'(x)=2x+5$ οπότε $g'(-2)=1=\lambda_\varepsilon$

άρα η ε εφάπτεται της C_g στο A.

59. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=3x^2-12x+8$.

Είναι $f'(x)=\lambda_\varepsilon=-1 \Leftrightarrow 3x^2-12x+8=-1 \Leftrightarrow 3x^2-12x+9=0 \Leftrightarrow$

$x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow (x=1)$ ή $(x=3)$. Είναι $f(1)=3$, $f(3)=-3$.
Οι εφαπτόμενες στα 1,3 έχουν εξισώσεις αντίστοιχα:
$\varepsilon_1 : y-f(1)=f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y-3=-(x-1) \Leftrightarrow y=-x+4$ και
$\varepsilon_2 : y-f(3)=f'(3)(x-3) \Leftrightarrow y+3=-(x-3) \Leftrightarrow y=-x$.
Άρα η ευθεία $y=-x$ εφάπτεται της C_f στο σημείο της (3,-3).
Είναι $f(x)=-x \Leftrightarrow x^3-6x^2+8x=-x \Leftrightarrow x^3-6x^2+9x=0 \Leftrightarrow$
$x(x-3)^2=0 \Leftrightarrow (x=0)$ ή $(x=3)$.
Άρα η ευθεία $y=-x$ επανατέμνει τη C_f, στην αρχή των αξόνων $x=0$.

60. Η ευθεία ε εφάπτεται της C_f στο $(1,f(1))$ άρα: $f(1)=1+1=2$, $f'(1)=1$.
Είναι $g(0)=f(1)=2$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο
$g'(x)=f'(e^x+x)(e^x+1)$ οπότε $g'(0)=f'(1)\cdot 2=2$.
Επομένως η εφαπτομένη της C_g στο σημείο $(0,g(0))$ έχει εξίσωση
$\varepsilon : y-g(0)=g'(0)x \Leftrightarrow y=2x+2$.

61. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$f'(x)=\frac{1+\dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{\cancel{x+\sqrt{x^2+1}}}{\cancel{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\neq 0$$

, άρα ο άξονας $x'x$ δεν εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f.

62. Αρχικά, θα βρούμε το κοινό σημείο των C_f, C_g. Είναι: $f(x)=g(x) \Leftrightarrow$
$e^x\cdot \eta\mu x=\eta\mu x \Leftrightarrow e^x\cdot\eta\mu x-\eta\mu x=0 \Leftrightarrow \eta\mu x\cdot(e^x-1)=0 \Leftrightarrow$
$\begin{cases}\eta\mu x=0\\ e^x=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0, & (x\in(-\pi,\pi))\\ x=0\end{cases}$. Άρα $x=0$. Επειδή $f(0)=g(0)=0$, κοινό σημείο των C_f, C_g είναι το $O(0,0)$. Είναι: $f'(x)=e^x\cdot\eta\mu x+e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x$ οπότε $f'(0)=1$. Επίσης, $g'(x)=\sigma\upsilon\nu x$ οπότε $g'(0)=1$. Άρα η κοινή εφαπτομένη των C_f, C_g στο Ο έχει εξίσωση: $y-0=1\cdot(x-0) \Leftrightarrow y=x$.

63. Για $x\neq -1$ η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$f'(x)=\frac{\alpha(x+1)-(\alpha x-\beta)}{(x+1)^2}=\frac{\alpha x+\alpha-\alpha x+\beta}{(x+1)^2}\Leftrightarrow f'(x)=\frac{\alpha+\beta}{(x+1)^2}.$$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $g'(x)=3x^2-2\alpha x-2$.
Για να δέχονται οι C_f, C_g κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο, με τετμημένη $x_0=1$ πρέπει:

$$\begin{cases} f(1)=g(1) \\ f'(1)=g'(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\alpha-\beta}{2}=-\alpha+\beta-1 \\ \dfrac{\alpha+\beta}{4}=1-2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha-\beta=-2\alpha+2\beta-2 \\ \alpha+\beta=4-8\alpha \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3\alpha-3\beta=-2 \\ 9\alpha+\beta=4 \quad |\cdot 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha-3\beta=-2 \\ 27\alpha+3\beta=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha-3\beta=-2 \\ 30\alpha=10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 1-3\beta=-2 \\ \alpha=\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\beta=-3 \\ \alpha=\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=1 \\ \alpha=\dfrac{1}{3} \end{cases}.$$

64.1ος τρόπος: Είναι $f(x)=g(x) \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{2}=\dfrac{x^2+x-1}{2x} \Leftrightarrow x^3=x^2+x-1 \Leftrightarrow$
$x^3-x^2-(x-1)=0 \Leftrightarrow x^2(x-1)-(x-1)=0 \Leftrightarrow$
$(x^2-1)(x-1)=0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1)^2=0 \Leftrightarrow (x+1=0 \Leftrightarrow x=-1)$ ή
$\left((x-1)^2=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1\right)$. Είναι $f(1)=\dfrac{1}{2}=g(1)$, $f(-1)=\dfrac{1}{2}=g(-1)$.
Οι συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες στα $\mathbb{R}, \mathbb{R}^*$ αντίστοιχα με παραγώγους

$$f'(x)=x \text{ και } g'(x)=\frac{(2x+1)\cdot 2x-2(x^2+x-1)}{4x^2}=\frac{4x^2+2x-2x^2-2x+2}{4x^2} \Leftrightarrow$$

$$g'(x)=\frac{2x^2+2}{4x^2} \Leftrightarrow g'(x)=\frac{x^2+1}{2x^2}.$$

Άρα $f'(1)=1=g'(1), f'(-1)=-1, g'(-1)=1$ οπότε $f'(-1)\cdot g'(-1)=-1$.
Επομένως οι εφαπτόμενες των C_f, C_g στο -1 είναι κάθετες και έχουν κοινή εφαπτομένη στο 1.
2ος τρόπος: Αρκεί να υπάρχει $x_0 \neq 0 : f(x_0)=g(x_0)$ και $f'(x_0)=g'(x_0)$.
Οι συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες στα $\mathbb{R}, \mathbb{R}^*$ αντίστοιχα με παραγώγους

$$f'(x)=x \text{ και } g'(x)=\frac{(2x+1)\cdot 2x-2(x^2+x-1)}{4x^2}=\frac{4x^2+2x-2x^2-2x+2}{4x^2} \Leftrightarrow$$

$$g'(x)=\frac{2x^2+2}{4x^2} \Leftrightarrow g'(x)=\frac{x^2+1}{2x^2}.$$

Είναι: $f'(x_0)=g'(x_0)\Leftrightarrow x_0=\dfrac{x_0^{\,2}+1}{2x_0^{\,2}}\Leftrightarrow 2x_0^3-x_0^2-1=0\Leftrightarrow$

$(x_0-1)\left(\underbrace{2x_0^2+x+1}_{\substack{\neq 0 \text{ αφού} \\ \Delta=-7<0}}\right)=0\Leftrightarrow x_0-1=0\Leftrightarrow x_0=1$. Επίσης $f(1)=\dfrac{1}{2}=g(1)$.

Επομένως, οι C_f, C_g, εφάπτονται στο σημείο $\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$.

Αρκεί να υπάρχει $x_1\neq 0: f'(x_1)g'(x_1)=-1\Leftrightarrow x_1\dfrac{x_1^{\,2}+1}{2x_1^{\,2}}=-1\Leftrightarrow x_1=-1$.

$f(-1)=\dfrac{1}{2}=g(-1)$.

Άρα, οι εφαπτομένες των C_f, C_g στο $\left(-1,\ \dfrac{1}{2}\right)$ είναι κάθετες.

65. Επειδή το A ανήκει στη C_f είναι $f(-2)=4\Leftrightarrow 4-2\alpha+\beta=4\Leftrightarrow\beta=2\alpha$ (1)

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=2x+\alpha$.

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(-2,4)$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45^{o} οπότε $f'(-2)=\text{εφ}45^\circ=1\Leftrightarrow 2(-2)+\alpha=1\Leftrightarrow\alpha=5$.

Για α=5 από τη σχέση (1) έχουμε $\beta=2\cdot 5=10$.

66. Επειδή το A ανήκει στη C_f και στην ε, ισχύει:

$f(1)=2\Leftrightarrow\alpha-3+\beta=2\Leftrightarrow\alpha+\beta=5\quad(1)$ και $2=\beta+\gamma\quad(2)$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=2\alpha x-3$.

Η ε, εφάπτεται της C_f στο A άρα $f'(1)=\beta\Leftrightarrow 2\alpha-3=\beta\quad(3)$

Από τη σχέση (1) μέσω της (3) έχουμε $\alpha+2\alpha-3=5\Leftrightarrow 3\alpha=8\Leftrightarrow\alpha=\dfrac{8}{3}$.

Από τις σχέσεις (3),(2) έχουμε αντίστοιχα $\dfrac{16}{3}-3=\beta\Leftrightarrow\beta=\dfrac{7}{3}$ και

$2=\dfrac{7}{3}+\gamma\Leftrightarrow\gamma=-\dfrac{1}{3}$.

67. Το σημείο A ανήκει στη C_f και στην ευθεία οπότε:

$f(2)=5\Leftrightarrow 4\alpha+2\beta+\gamma=5\quad(1)$ και $5=2\alpha+\beta\quad(2)$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=2\alpha x+\beta$.

Η ε, εφάπτεται της C_f στο Α άρα $f'(2)=\alpha \Leftrightarrow 4\alpha+\beta=\alpha \Leftrightarrow \beta=-3\alpha$ (3)

Από τη σχέση (2) μέσω της σχέσης (3) έχουμε $5=2\alpha-3\alpha \Leftrightarrow \alpha=-5$.

Τότε από τη σχέση (3) έχουμε $\beta=-3(-5)=15$ και από τη σχέση (1):

$-20+30+\gamma=5 \Leftrightarrow \gamma=-5$.

68. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $g'(x)=3\alpha x^2+2\beta x+\gamma$.

Για να εφάπτεται στις ευθείες ε_1 και ε_2 η γραφική παράσταση της συνάρτησης g στα σημεία Α και Β πρέπει:

$$\begin{cases} g(-1)=0 \\ g'(-1)=\lambda_{\varepsilon_1}=8 \\ g(2)=-12 \\ g'(-2)=\lambda_{\varepsilon_2}=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha+\beta-\gamma+\delta=0 & (1) \\ 3\alpha-2\beta+\gamma=8 & (2) \\ 8\alpha+4\beta+2\gamma+\delta=-12 & (3) \\ 12\alpha+4\beta+\gamma=-7 & (4) \end{cases}$$

Από την $(1) \Leftrightarrow \delta=\alpha-\beta+\gamma$ (5). Η (3) με βάση την (5) γίνεται:

$8\alpha+4\beta+2\gamma+\alpha-\beta+\gamma=-12 \Leftrightarrow 9\alpha+3\beta+3\gamma=-12 \Leftrightarrow$

$3\alpha+\beta+\gamma=-4 \Leftrightarrow 3\alpha+\beta=-4-\gamma$ (6). Άρα, η (4) με βάση την (6) γίνεται:

$4(3\alpha+\beta)+\gamma=-7 \Leftrightarrow 4(-4-\gamma)+\gamma=-7 \Leftrightarrow$

$-16-4\gamma+\gamma=-7 \Leftrightarrow -3\gamma=9 \Leftrightarrow \gamma=-3$.

Οπότε, από την (2) και την (6) έχουμε:

$$\begin{cases} 3\alpha-2\beta=11 \\ 3\alpha+\beta=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\beta=12 \\ 3\alpha+\beta=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-4 \\ 3\alpha-4=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-4 \\ 3\alpha=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-4 \\ \alpha=1 \end{cases}.$$

Από την (5) έχουμε $\delta=1+4-3 \Leftrightarrow \delta=2$.

Άρα, $\alpha=1$, $\beta=-4$, $\gamma=-3$, $\delta=2$.

69. Η ευθεία $y=x+1$ είναι εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $x_0=2$ οπότε:

• Η f είναι παραγωγίσιμη στο 2 επομένως και συνεχής στο 2 άρα

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2) \Leftrightarrow 2\alpha+\beta=4+2\gamma+\delta=3$,

$$f'(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}.$$

Όμως $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{\alpha x+\beta-(2\alpha+\beta)}{x-2}=\alpha$,

$\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2+\gamma x+\delta-(4+2\gamma+\delta)}{x-2}=4+\gamma$ άρα

$f'(2)=\alpha=\gamma+4$.

- $f'(2)=\lambda_\varepsilon=1$, άρα $\alpha=1$ και $4+\gamma=1\Leftrightarrow\gamma=-3$.

Τότε $2+\beta=3\Leftrightarrow\beta=1$ και $4-6+\delta=3\Leftrightarrow\delta=5$.

70. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=\alpha^x\cdot\ln\alpha$.

Έστω (ε): $y=x$ και $M(x_0,y_0)$ το σημείο επαφής της με τη C_f.

Τότε $y_0=x_0=f(x_0)=\alpha^{x_0}$ (1)

Επίσης $f'(x_0)=\lambda_\varepsilon=1\Leftrightarrow\alpha^{x_0}\ln\alpha=1\Leftrightarrow x_0\ln\alpha=1\Leftrightarrow x_0=\dfrac{1}{\ln\alpha}$.

Τότε από τη σχέση (1) έχουμε

$$\frac{1}{\ln\alpha}=\alpha^{\frac{1}{\ln\alpha}}\Leftrightarrow\ln\frac{1}{\ln\alpha}=\ln\alpha^{\frac{1}{\ln\alpha}}\Leftrightarrow-\ln(\ln\alpha)=1\Leftrightarrow$$

$$\ln(\ln\alpha)=-1\Leftrightarrow\ln\alpha=e^{-1}\Leftrightarrow\alpha=e^{\frac{1}{e}}.$$

Αυξημένης δυσκολίας

71. Το $A(x_0,y_0)$ είναι κοινό σημείο των f και g, οπότε ισχύει $f(x_0)=g(x_0)$.
Για να δέχονται οι C_f,C_g κοινή εφαπτομένη στο A, αρκεί να δείξουμε ότι $f'(x_0)=g'(x_0)$. Στη σχέση $g(x)=f(x)h'(x)\Leftrightarrow h'(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$ (1), αν θέσουμε $x=x_0$, έχουμε: $h'(x_0)=\dfrac{g(x_0)}{f(x_0)}=\dfrac{f(x_0)}{f(x_0)}\Leftrightarrow h'(x_0)=1$. Οπότε, η σχέση $[h(x)]^2+[h'(x)]^2=1$ (2) για $x=x_0$ γίνεται: $[h(x_0)]^2+[h'(x_0)]^2=1\Leftrightarrow$ $[h(x_0)]^2+1=1\Leftrightarrow h(x_0)=0$ (3). Παραγωγίζουμε την (2) κατά μέλη και έχουμε: $2h(x)h'(x)+2h'(x)h''(x)=0$ οπότε για $x=x_0$ έχουμε

$$2h(x_0)h'(x_0)+2h'(x_0)h''(x_0)=0\overset{(3)}{\Leftrightarrow}2h'(x_0)h''(x_0)=0$$, όμως $h'(x_0)=1$, οπότε $2h''(x_0)=0\Leftrightarrow h''(x_0)=0$.

Από την (1) έχουμε $h''(x)=\dfrac{g'(x)f(x)-f'(x)g(x)}{f^2(x)}$, οπότε:

$$h''(x_0)=0\Leftrightarrow\frac{g'(x_0)f(x_0)-f'(x_0)g(x_0)}{f^2(x_0)}=0\Leftrightarrow$$

$$g'(x_0)f(x_0)-f'(x_0)g(x_0)=0\overset{f(x_0)=g(x_0)}{\Leftrightarrow}$$

$g'(x_0)f(x_0)-f'(x_0)f(x_0)=0 \Leftrightarrow \underbrace{f(x_0)}_{\neq 0}\left[g'(x_0)-f'(x_0)\right]=0 \Leftrightarrow$

$g'(x_0)-f'(x_0)=0 \Leftrightarrow g'(x_0)=f'(x_0)$.

72. Για $x \neq -2$, η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x)=\dfrac{x^2+4x+8}{(x+2)^2}$ οπότε

$f'(0)=\dfrac{8}{4}=2$. Επίσης η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$g'(x)=2x-4$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(0,f(0))$ είναι η ευθεία ε με εξίσωση $y-f(0)=f'(0)x \Leftrightarrow y=2x-4$.

Πρέπει $g'(x)=f'(0)=2 \Leftrightarrow 2x-4=2 \Leftrightarrow x=3$. Η εφαπτομένη της C_g στο 3, είναι η ε': $y-g(3)=g'(3)(x-3) \Leftrightarrow y-\lambda+3=2x-6 \Leftrightarrow y=2x+\lambda-9$.

Για να εφάπτεται η ε της C_g, πρέπει οι ε,ε' να ταυτίζονται.

Αυτό ισχύει όταν $\lambda-9=-4 \Leftrightarrow \lambda=5$.

73. Έστω $\varepsilon: y=\lambda x+k$ η ευθεία. Επειδή τα σημεία $(0,f(0))$ και $(1,f(1))$ ανήκουν στην ε, είναι: $f(0)=k \Leftrightarrow k=-2$ και

$f(1)=\lambda+k \Leftrightarrow \alpha+\beta-1=\lambda-2 \Leftrightarrow \alpha=\lambda-1-\beta \quad (1)$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=4x^3+3\alpha x^2+2\beta x$.

Η ε εφάπτεται στη C_f στα 0,1 οπότε $f'(0)=\lambda \Leftrightarrow \lambda=0$ και

$f'(1)=\lambda=0 \Leftrightarrow 4+3\alpha+2\beta=0 \Leftrightarrow 3\alpha+2\beta=-4 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$3(-1-\beta)+2\beta=-4 \Leftrightarrow -3-3\beta+2\beta=-4 \Leftrightarrow \beta=1$.

Από τη σχέση (1) για λ=0 και β=1 έχουμε $\alpha=-2$.

74. Οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με παραγώγους αντίστοιχα $f'(x)=2x+1$ και $g'(x)=2x-2$.

Έστω (ε) κοινή εφαπτομένη των συναρτήσεων f, g και $A(x_0,f(x_0))$, $B(x_1,g(x_1))$ τα σημεία επαφής της με τις C_f, C_g.

Τότε έχει εξίσωση αντίστοιχα:

- $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow y=f'(x_0)x-x_0f'(x_0)+f(x_0) \Leftrightarrow$

$y=(2x_0+1)x-x_0(2x_0+1)+\left(x_0^2+x_0\right) \Leftrightarrow$

$y=(2x_0+1)x-2x_0^2-x_0+x_0^2+x_0 \Leftrightarrow y=(2x_0+1)x-x_0^2 \quad (1)$ και

- $y = g'(x_1)x - x_1 g'(x_1) + g(x_1) \Leftrightarrow$

$y = (2x_1 - 2)x - x_1(2x_1 - 2) + x_1^2 - 2x_1 + 3 \Leftrightarrow y = (2x_1 - 2)x - x_1^2 + 3 \quad (2)$

Οι εξισώσεις (1), (2)είναι εξισώσεις οπότε:

$$\begin{cases} 2x_0 + 1 = 2x_1 - 2 \\ -x_0^2 = -x_1^2 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = x_1 - \dfrac{3}{2} \\ \left(x_1 - \dfrac{3}{2}\right)^2 = x_1^2 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_0 = x_1 - \dfrac{3}{2} \\ \cancel{x_1^2} - 3x_1 + \dfrac{9}{4} = \cancel{x_1^2} - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = x_1 - \dfrac{3}{2} \\ -12x_1 + 21 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = x_1 - \dfrac{3}{2} \\ -12x_1 = -21 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\begin{cases} x_0 = x_1 - \dfrac{3}{2} \\ -12x_1 = -21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{1}{4} \\ x_1 = \dfrac{7}{4} \end{cases}$. Οπότε οι C_f, C_g δέχονται κοινή εφαπτόμενη στα σημεία $A\left(\dfrac{1}{4}, f\left(\dfrac{1}{4}\right)\right)$ και $B\left(\dfrac{7}{4}, g\left(\dfrac{7}{4}\right)\right)$ την ευθεία: $y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{16}$.

75.α) Έστω $h(x) = 27e^{-x} - 512(x+1)^3$, $x \in [-1, 0]$.

Είναι $h(-1) = 27e > 0$, $h(0) = 27 - 512 = -485 < 0$ οπότε $h(-1)h(0) < 0$.

Η h είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων στο $[0,1]$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θ.Bolzano οπότε υπάρχει $x_0 \in (-1, 0)$ τέτοιο, ώστε $h(x_0) = 0$

β) Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_1, f(x_1))$ είναι η ευθεία

$\varepsilon_1 : y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \Leftrightarrow y - e^{-x_1} = -e^{-x_1}(x - x_1) \Leftrightarrow$

$y = -e^{-x_1}x + e^{-x_1}(x_1 + 1)$.

Η εφαπτομένη της C_g στο σημείο $A(x_2, g(x_2))$ είναι η ευθεία

$\varepsilon_1 : y - g(x_2) = g'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow y + 2x_2^4 = -8x_2^3(x - x_2) \Leftrightarrow$

$y = -8x_2^3 x + 6x_2^4$. Οι C_f, C_g δέχονται κοινή εφαπτομένη όταν υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ για τα οποία οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ να ταυτίζονται και αυτό συμβαίνει όταν:

$$\begin{cases} -e^{-x_1} = -8x_2^3 \\ e^{-x_1}(x_1 + 1) = 6x_2^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{-x_1} = 8x_2^3 > 0 \\ e^{-x_1}(x_1 + 1) = 6x_2^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{-x_1} = 8x_2^3 > 0 \\ 8\cancel{x_2^3}(x_1 + 1) = 6x_2^{\cancel{4}} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} e^{-x_1} = 8x_2^3 > 0 \\ 8x_1 + 8 = 6x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{-x_1} = 8x_2^3 > 0 \\ 4x_1 + 4 = 3x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{-x_1} = 8x_2^3 > 0 \quad (1) \\ \dfrac{4x_1 + 4}{3} = x_2 \quad (2) \end{cases}.$$

Είναι $8x_2^3 > 0 \Leftrightarrow x_2 > 0 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \dfrac{4}{3}(x_1+1) > 0 \Leftrightarrow x_1 + 1 > 0 \Leftrightarrow x_1 > -1$.

Η σχέση (1) γίνεται: $e^{-x_1} = 8\left[\dfrac{4}{3}(x_1+1)\right]^3 \Leftrightarrow e^{-x_1} = 8\dfrac{64}{27}(x_1+1)^3 \Leftrightarrow$

$27e^{-x_1} - 512(x_1+1)^3 = 0 \Leftrightarrow h(x_1) = 0$ που ισχύει.

76. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_1, f(x_1))$ είναι η ευθεία $\varepsilon_1 : y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \Leftrightarrow y - e^{-x_1} = -e^{-x_1}(x - x_1) \Leftrightarrow$ $y = -e^{-x_1}x + e^{-x_1}(x_1 + 1)$. Η εφαπτομένη της C_g στο σημείο $A(x_2, g(x_2))$ είναι η ευθεία $\varepsilon_2 : y - g(x_2) = g'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow y + x_2^2 = -2x_2(x - x_2) \Leftrightarrow$ $y = -2x_2x + x_2^2$. Οι C_f, C_g δέχονται κοινή εφαπτομένη όταν υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ για τα οποία οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ να ταυτίζονται και αυτό συμβαίνει όταν:

$$\begin{cases} -e^{-x_1} = -2x_2 \\ e^{-x_1}(x_1+1) = x_2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{e^{-x_1}}{2} = x_2 > 0 \quad (1) \\ e^{-x_1}(x_1+1) = x_2^2 \end{cases} \Rightarrow e^{-x_1}(x_1+1) = \left(\dfrac{e^{-x_1}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\cancel{e^{-x_1}}(x_1+1) = \dfrac{\left(e^{-x_1}\right)^{\cancel{2}}}{4} \Leftrightarrow 4x_1 + 4 - e^{-x_1} = 0 \quad (2)$$

Αρκεί να υπάρχει μοναδικό $x_1 \in \mathbb{R}$ που να επαληθεύει τη (2)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = 4x + 4 - e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι

$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(4x + 4 - e^{-x}\right) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(4x + 4 - e^{-x}\right) = +\infty$,

οπότε η h έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$. Επειδή το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της h, υπάρχει $x_1 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $h(x_1) = 0$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η h είναι γνησίως αύξουσα, οπότε το x_1 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $h(x) = 0$.

77. Οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με παραγώγους αντίστοιχα $f'(x) = -8x + \lambda$ και $g'(x) = 2x + \lambda$. Έστω A το κοινό τους σημείο. Αν x_0 η τετμημένη του πρέπει: $\begin{cases} f'(x_0) = g'(x_0) \\ f(x_0) = g(x_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8x_0 + \lambda = 2x_0 \\ -4x_0^2 + \lambda x_0 - 2 = x_0^2 + \lambda - 7 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 10x_0 = \lambda \\ 5x_0^2 - \lambda x_0 + \lambda - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{\lambda}{10} \\ \cancel{5}\dfrac{\lambda^2}{\underset{\cancel{100}}{\cancel{20}}} - \dfrac{\lambda^2}{10} + \lambda - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{\lambda}{10} \\ \dfrac{\lambda^2 - 2\lambda^2 + 20\lambda - 100}{20} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{\lambda}{10} \\ -\lambda^2 + 20\lambda - 100 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{\lambda}{10} \\ -(\lambda - 10)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{\lambda}{10} \\ (\lambda - 10)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{\lambda}{10} \\ \lambda - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ \lambda = 10 \end{cases}.$$

Τότε η κοινή εφαπτομένη είναι: $y - 4 = 2(x - 1) \Leftrightarrow y = 2x - 2 + 4 \Leftrightarrow y = 2x + 2$.

78. Οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με παραγώγους αντίστοιχα $f'(x) = 2x - 2$ και $g'(x) = 2x - 4$.

Έστω $A(x_0, f(x_0)), B(x_1, g(x_1))$ τα σημεία επαφής της (ε) με τις C_f, C_g.

Τότε: $f'(x_0) = g'(x_1) = k \Leftrightarrow 2x_0 - 2 = 2x_1 - 4 = k \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0 - 2 = k \\ 2x_1 - 4 = k \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 2x_0 = k + 2 \\ 2x_1 = k + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{k+2}{2} \\ x_1 = \dfrac{k+4}{2} \end{cases}$. Επίσης τα σημεία

$\left(\dfrac{k+2}{2}, f\left(\dfrac{k+2}{2}\right)\right), \left(\dfrac{k+4}{2}, g\left(\dfrac{k+4}{2}\right)\right)$ ανήκουν στην (ε) οπότε

$$\begin{cases} f\left(\dfrac{k+2}{2}\right) = 2k \cdot \dfrac{k+2}{2} + k - 1 \\ g\left(\dfrac{k+4}{2}\right) = 2k \cdot \dfrac{k+4}{2} + k - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{k+2}{2}\right)^2 - \cancel{2} \cdot \dfrac{k+2}{\cancel{2}} = \cancel{2}k \cdot \dfrac{k+2}{\cancel{2}} + k - 1 \\ \left(\dfrac{k+4}{2}\right)^2 - \overset{2}{\cancel{4}} \cdot \dfrac{k+4}{\cancel{2}} + \lambda = \cancel{2}k \cdot \dfrac{k+4}{\cancel{2}} + k - 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{(k+2)^2}{4} - k - 2 = k^2 + 2k + k - 1 \\ \dfrac{(k+4)^2}{4} - 2k - 8 + \lambda = k^2 + 4k + k - 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{k^2+4k+4}{4}-k-2=k^2+2k+k-1 \\ \dfrac{k^2+8k+16}{4}-2k-8+\lambda=k^2+4k+k-1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} k^2+4k+4-4k-8=4k^2+8k+4k-4 \\ k^2+8k+16-8k-32+4\lambda=4k^2+16k+4k-4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3k^2+12k=0 \\ 3k^2+20k+12-4\lambda=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3k(k+4)=0 \\ 3k^2+20k+12-4\lambda=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{cases} k=0 \\ 12-4\lambda=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=0 \\ 4\lambda=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=0 \\ \lambda=3 \end{cases}\right) \text{ ή}$$

$$\left(\begin{cases} k+4=0 \\ 3k^2+20k+12-4\lambda=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=-4 \\ -20-4\lambda=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=-4 \\ -4\lambda=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=-4 \\ \lambda=-5 \end{cases}\right).$$

79. Είναι $f(2)=g(2)=0$.

Είναι $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\frac{g(x)}{g'(x)}}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{g(x)}{g'(x)(x-2)}=$

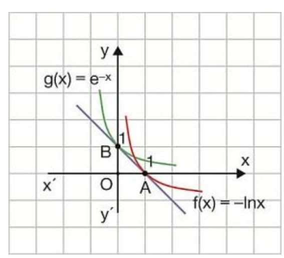
$\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{g'(x)}\cdot\dfrac{g(x)}{x-2}\right)=\dfrac{1}{g'(2)}\cdot g'(2)=1$ αφού η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και στο 2. Επομένως η εφαπτομένη της C_f στο A έχει εξίσωση:

$\varepsilon: y-f(2)=f'(2)(x-2)\Leftrightarrow y=x-2$.

80. Είναι $f(x)=0\Leftrightarrow -\ln x=0\Leftrightarrow \ln x=0 \Leftrightarrow x=1$ οπότε η C_f τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $A(1,0)$.

Επίσης, $g(0)=e^o=1$, άρα η C_g τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $B(0,1)$. Οπότε $\lambda_{AB}=-1$ άρα η ευθεία AB έχει εξίσωση:

$AB: y-0=-1(x-1)\Leftrightarrow AB: y=-x+1$.



Επίσης οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο $(0,+\infty),\mathbb{R}$ αντίστοιχα με παραγώγους, $f'(x)=-\dfrac{1}{x}$ και $g'(x)=-e^{-x}$. Η εφαπτομένη της C_f στο $A(0,1)$ είναι $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-0=-1(x-1) \Leftrightarrow y=-x+1$, που είναι η ευθεία AB.

Η εφαπτομένη της C_g στο $B(0,1)$ είναι: $y-g(0)=g'(0)(x-0)\Leftrightarrow$

$y-1=-1(x-0)\Leftrightarrow y=-x+1$.

Άρα η ευθεία $AB: y=-x+1$ είναι κοινή εφαπτομένη των C_f, C_g.

81. Είναι $f(0)=-1$.

Για κάθε $x\neq -2$ η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x)=\dfrac{x^2+4x+2}{(x+2)^2}$

οπότε $f'(0)=\dfrac{1}{2}$. Η εφαπτομένη της C_f στο M έχει εξίσωση:

$\varepsilon: y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{2}x-1$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $g'(x)=2x-1$.

Για να εφάπτεται η ε της C_g, πρέπει να υπάρχει σημείο $A(x_1, g(x_1))$, τέτοιο ώστε $g'(x_1)=\lambda_\varepsilon=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 2x_1-1=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x_1=\dfrac{3}{4}$. Άρα $A\left(\dfrac{3}{4}, g\left(\dfrac{3}{4}\right)\right)$. Επειδή το σημείο A ανήκει στην ε, ισχύει $g\left(\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}-1\Leftrightarrow\left(\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{3}{4}+\lambda=\dfrac{3}{8}-1\Leftrightarrow$

$\dfrac{9}{16}-\dfrac{3}{4}+\lambda=-\dfrac{5}{8}\Leftrightarrow\dfrac{-3}{16}+\lambda=-\dfrac{5}{8}\Leftrightarrow -3+16\lambda=-10\Leftrightarrow 16\lambda=-7\Leftrightarrow$

$\lambda=-\dfrac{7}{16}$.

82. Έστω (x_0, y_0) ένα από τα κοινά σημεία των C_f, C_g, τότε

$f(x_0)=g(x_0)=y_0\neq 0$. Για $x=x_0$ η δεύτερη συνθήκη γίνεται

$g(x_0)=f(x_0)h(x_0)\Leftrightarrow y_0=y_0h(x_0)\Leftrightarrow h(x_0)=1$.

Για $x=x_0$ η τρίτη συνθήκη γίνεται

$h^2(x_0)=1-\left[h'(x_0)\right]^2\Leftrightarrow 1=1-\left[h'(x_0)\right]^2\Leftrightarrow$

$\left[h'(x_0)\right]^2=0\Leftrightarrow h'(x_0)=0$.

Είναι $g'(x)=f'(x)h(x)+f(x)h'(x)$ οπότε για $x=x_0$:

$g'(x_0)=f'(x_0)h(x_0)+f(x_0)h'(x_0)\Leftrightarrow g'(x_0)=f'(x_0)$.

Η τελευταία ισότητα σημαίνει ότι οι κλίσεις των εφαπτομένων των γραφικών παραστάσεων των f και g στα κοινά τους σημεία είναι ίσες. Άρα, οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν κοινή εφαπτομένη σε κάθε ένα από τα κοινά τους σημεία.

83. Αφού οι C_f, $C_{f^{-1}}$ έχουν κοινή εφαπτομένη στο x_0, οι f, f^{-1} είναι παραγωγίσιμες στο x_0 με $f(x_0)=f^{-1}(x_0)=x_0$ και $\left(f^{-1}\right)'(x_0)=f'(x_0)$.
Είναι $f^{-1}(f(x))=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα

$\left(f^{-1}\right)'(f(x_0))\cdot f'(x_0)=1 \Leftrightarrow \left(f^{-1}\right)'(x_0)\cdot f'(x_0)=1 \Leftrightarrow$

$\left[f'(x_0)\right]^2=1 \Leftrightarrow f'(x_0)=\pm1$. Αν $f'(x_0)=-1$ τότε η (ε) έχει εξίσωση

$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow y-x_0=-x+x_0 \Leftrightarrow y=-x+2x_0$.

Αν $f'(x_0)=1$ τότε η (ε) έχει εξίσωση

$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow y-x_0=x-x_0 \Leftrightarrow y=x$.

84. Έστω ότι η ε_1 εφάπτεται στην C_f στο $A(x_1,f(x_1))$ και η ε_2 εφάπτεται στην C_f στο $B(x_2,f(x_2))$. Τότε είναι $(\varepsilon_1): y=\alpha x+\beta$ και $(\varepsilon_2): y=\gamma x+\delta$ με $\alpha\gamma<0 \Leftrightarrow f'(x_1)\cdot f'(x_2)<0$.
Η f' είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=0$ άρα θα δέχεται η C_f οριζόντια εφαπτομένη στο $\Gamma(x_0,f(x_0))$.

Σύνθετες ασκήσεις

85.α) Η f ορίζεται όταν: $x^2+x\ge0 \Leftrightarrow x(x+1)\ge0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1]\cup[0,+\infty)$.
Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $D_f=(-\infty,-1]\cup[0,+\infty)$.
Για κάθε $x\in(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$ η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$f'(x)=\left(\sqrt{x^2+x}\right)'=\frac{\left(x^2+x\right)'}{2\sqrt{x^2+x}}=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}.$$

Είναι $\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{\sqrt{x^2+x}}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{\sqrt{x(x+1)}}{-(-x-1)}=$

$$=\lim_{x\to-1^-}\frac{\sqrt{-x}\,\cancel{\sqrt{-x-1}}}{-\sqrt{-x-1}^{\cancel{2}}}=\lim_{x\to-1^-}\left(-\sqrt{-x}\cdot\frac{1}{-\sqrt{-x-1}}\right)=-\infty,$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x(x+1)}}{x}=$$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\cancel{\sqrt{x}}\,\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}^{\cancel{2}}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\sqrt{x+1}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) = +\infty$ οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στα $-1, 0$. Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο $A=(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$.

Για κάθε $x\in A$ η f' είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση και πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f''(x) = \dfrac{(2x+1)'\,2\sqrt{x^2+x}-(2x+1)\left(2\sqrt{x^2+x}\right)'}{4\sqrt{x^2+x}^2} =$

$$= \frac{4\sqrt{x^2+x}-(2x+1)\cdot\cancel{2}\cdot\dfrac{2x+1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+x}}}{4\left(x^2+x\right)} = \frac{4\sqrt{x^2+x}-\dfrac{(2x+1)^2}{\sqrt{x^2+x}}}{4\left(x^2+x\right)} =$$

$$\frac{\dfrac{4\sqrt{x^2+x}^2-(2x+1)^2}{\sqrt{x^2+x}}}{4\left(x^2+x\right)} = \frac{4\left(x^2+x\right)-(2x+1)^2}{4\left(x^2+x\right)\sqrt{x^2+x}} =$$

$$\frac{4x^2+4x-4x^2-4x-1}{4\left(x^2+x\right)\sqrt{x^2+x}} = -\frac{1}{4\left(x^2+x\right)\sqrt{x^2+x}}.$$

β) Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε_1) στο $x_0=1$ είναι:

$(\varepsilon_1): y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-\sqrt{2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}x-\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\Leftrightarrow y=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}x+\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

γ) Είναι $(\varepsilon_1): y=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}x+\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Για $x=0: y=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ άρα τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο $A\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

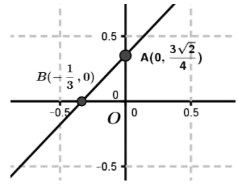
Για $y=0: 0=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}x+\dfrac{\sqrt{2}}{4}\Leftrightarrow\dfrac{3\sqrt{2}}{4}x=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\Leftrightarrow$

$3\sqrt{2}\,x=-\sqrt{2}\Leftrightarrow x=-\dfrac{\cancel{\sqrt{2}}}{3\cancel{\sqrt{2}}}\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{3}$ άρα τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο $B\left(-\dfrac{1}{3},0\right)$.

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν Ε είναι του τριγώνου ΟΑΒ:

$$E=\frac{1}{2}OA\cdot OB=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\left|-\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{2}}{24}.$$

δ) Έστω σημείο $M\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ στο οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.



Είναι $f'\left(x_0\right)=0 \Leftrightarrow \dfrac{2x_0+1}{2\sqrt{x_0^{\,2}+x_0}}=0 \Leftrightarrow$

$2x_0+1=0 \Leftrightarrow x_0=-\dfrac{1}{2}$ απορρίπτεται αφού δεν στο πεδίο ορισμού της f.

Άρα δεν υπάρχει σημείο $M\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ στο οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f να είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

86.α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)-\sqrt{x}}{x-1} \Leftrightarrow f(x)=g(x)(x-1)+\sqrt{x}$, $x \geq 0$, $x \neq 1$. Είναι $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left(g(x)(x-1)+\sqrt{x}\right)=1=f(1)$ αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε και στο 1.

Επίσης $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x)(x-1)+\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\left(g(x)+\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}\right)=$

$\lim\limits_{x\to 1}\left(g(x)+\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}\right)=3$, άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 με παράγωγο $f'(1)=3$.

β) Η εφαπτομένη της C_f έχει εξίσωση

$\varepsilon: y-f(1)=f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y-1=3(x-1) \Leftrightarrow \ y=3x-3+1 \Leftrightarrow y=3x-2$.

γ) Για $x=1$ στη σχέση $f(x)=f(x+3)$ είναι $f(4)=f(1)=1$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x+3)-1}{x-1} \underset{u\to 4}{\overset{x+3=u}{=}} \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(u)-1}{u-4} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(u)-1}{u-4}=3$

οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στο 4 με παράγωγο $f'(4)=3$.

δ) Έστω $h(x)=f(x+3)+2xf'(1)f(x)-20=f(x)+6xf(x)-20$

$h(1)=f(1)+6f(1)-20=-13<0$, $h(4)=f(4)+24f(4)-20=5>0$.

Η h είναι συνεχής στο $[1,4]$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $\xi \in (1,4)$ τέτοιο, ώστε

$h(\xi)=0 \Leftrightarrow f(\xi+3)+2\xi f'(1)f(\xi)=20$.

ε) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $g'(x)=2x-1$.

Αν $\left(x_1, g\left(x_1\right)\right)$ το σημείο επαφής της εφαπτομένης (ε) με τη C_g τότε

$g'\left(x_1\right)=f'(1)=3 \Leftrightarrow 2x_1-1=3 \Leftrightarrow 2x_1=4 \Leftrightarrow x_1=2$.

Το σημείο $(2,g(2))$ ανήκει στην (ε) οπότε

$g(2)=3\lambda-2 \Leftrightarrow 2+\lambda=3\lambda-2 \Leftrightarrow 2\lambda=4 \Leftrightarrow \lambda=2$.

87.α) Από τη σχέση $f(x)g(x)=1$ συμπεραίνουμε ότι $g(x)\neq 0$, άρα

$f(x)=\dfrac{1}{g(x)}$. Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, η f είναι παραγωγίσιμη

στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=-\dfrac{g'(x)}{g^2(x)}$.

β) i. Είναι $f'(k)=-\dfrac{g'(k)}{g^2(k)}=-\dfrac{-g(k)}{g^2(k)}=\dfrac{1}{g(k)}$, άρα

$f'(k)g'(k)=\dfrac{1}{g(k)}\left(-g(k)\right)=-1$ οπότε οι ευθείες (ε_1),(ε_2) είναι κάθετες.

ii. Η ευθεία (ε_1) έχει εξίσωση

$\varepsilon_1:\ y-f(k)=f'(k)(x-k) \Leftrightarrow y=f'(k)\cdot x-kf'(k)+f(k)$.

Για $y=0$ έχουμε: $x=\dfrac{kf'(k)-f(k)}{f'(k)}$, άρα $M\left(\dfrac{kf'(k)-f(k)}{f'(k)},0\right)$.

Επίσης η ευθεία (ε_2)έχει εξίσωση ε_2 :

$y-g(k)=g'(k)(x-k) \Leftrightarrow y=g'(k)\cdot x-kg'(k)+g(k)$.

Για $y=0$ είναι: $x=\dfrac{kg'(k)-g(k)}{g'(k)}$, άρα $N\left(\dfrac{kg'(k)-g(k)}{g'(k)},0\right)$.

Επομένως: $(MN)=\left|\dfrac{kf'(k)-f(k)}{f'(k)}-\dfrac{kg'(k)-g(k)}{g'(k)}\right|=\left|k-\dfrac{f(k)}{f'(k)}-k+\dfrac{g(k)}{g'(k)}\right|=$

$\left|-\dfrac{\frac{1}{g(k)}}{\frac{1}{g(k)}}+\dfrac{g(k)}{-g(k)}\right|=2$ άρα σταθερό.

88.α) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$g(x)=\dfrac{(x-3)f(x)+\eta\mu\left(x^2-9\right)}{\sqrt{x+1}-2} \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{g(x)\left(\sqrt{x+1}-2\right)-\eta\mu\left(x^2-9\right)}{x-3}$,

$x\in(-1,3)\cup(3,+\infty)$ οπότε $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{g(x)\left(\sqrt{x+1}-2\right)-\eta\mu\left(x^2-9\right)}{x-3}=$

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{g(x)\cancel{(x-3)}}{\left(\sqrt{x+1}+2\right)\cancel{(x-3)}}-(x+3)\frac{\eta\mu\left[(x-3)(x+3)\right]}{(x-3)(x+3)}\right)=-1-6=-7\ .$$

(Είναι $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\eta\mu(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+3)}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1$).

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο 3 οπότε $f(3)=-7$.

β) Η f είναι συνεχής, $f(x)\neq 0$ στο $\mathbb{R}$ άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Επειδή $f(3)=-7$ είναι $f(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Έστω

$h(x)=(x-3)f(x)+(x-1)f(x)-2(x-3)(x-1)$, $x\in[1,3]$.

Είναι $h(1)=-2f(1)>0$, $h(3)=2f(3)=-14<0$ οπότε $h(1)h(3)<0$.

Η h είναι συνεχής στο $[1,3]$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $\xi\in(1,3)$ τέτοιο, ώστε $h(\xi)=0\Leftrightarrow$

$$(\xi-3)f(\xi)+(\xi-1)f(\xi)-2(\xi-3)(\xi-1)=0\Leftrightarrow \frac{1}{\xi-1}+\frac{1}{\xi-3}=\frac{2}{f(\xi)}\ .$$

γ) Είναι $f^2(x)+3f\left(x^2\right)=4$ (1). Για $x=1$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$f^2(1)+3f(1)-4=0\Leftrightarrow\left(f(1)=-4\right)$ ή $\left(f(1)=1\right)$ που απορρίπτεται.

δ) Με παραγώγιση της σχέσης (1) κατά μέλη έχουμε

$\left(f^2(x)+3f\left(x^2\right)\right)'=(4)'\Leftrightarrow 2f(x)f'(x)+6xf'\left(x^2\right)=0$ οπότε για $x=1$ είναι

$-8f'(1)+6f'(1)=0\Leftrightarrow -2f'(1)=0\Leftrightarrow f'(1)=0$.

Άρα η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο 1 έχει εξίσωση $y=-4$.

89.α) Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ έχει δύο ρίζες, άρα ισχύουν οι σχέσεις $x_1+x_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}$ και $x_1x_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=2\alpha x+\beta$.

Για $x=x_1, x=x_2$ αντίστοιχα έχουμε $f'(x_1)=2\alpha x_1+\beta$ και $f'(x_2)=2\alpha x_2+\beta$

Οι εφαπτόμενες στα $x_{1,}x_2$ τέμνονται κάθετα άρα

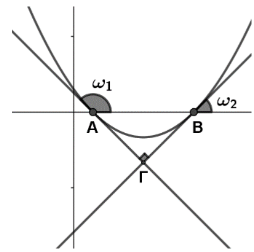
$f'(x_1)f'(x_2)=-1\Leftrightarrow(2\alpha x_1+\beta)(2\alpha x_2+\beta)=-1\Leftrightarrow$

$$4\alpha^2x_1x_2+2\alpha\beta x_1+2\alpha\beta x_2+\beta^2=-1\Leftrightarrow 4\alpha^{\cancel{2}}\frac{\gamma}{\cancel{\alpha}}+2\alpha\beta(x_1+x_2)+\beta^2=-1\Leftrightarrow$$

$$4\alpha\gamma+2\alpha\beta\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)+\beta^2=-1\Leftrightarrow 4\alpha\gamma-2\beta^2+\beta^2=-1\Leftrightarrow\beta^2-4\alpha\gamma=1\ .$$

β) $x_2 - x_1 = \dfrac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} - \dfrac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{2\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha}$.

γ) Είναι $f'(x_2) = 2\alpha x_2 + \beta = 2\alpha\left(x_1 + \dfrac{1}{\alpha}\right) + \beta \Leftrightarrow$



$f'(x_2) = 2\alpha x_1 + 2 + \beta = f'(x_1) + 2$.

Άρα $f'(x_2) = f'(x_1) + 2 \Leftrightarrow$

$f'(x_2) - f'(x_1) = 2 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega_2 - \varepsilon\varphi\omega_1 = 2 \Leftrightarrow$

$\varepsilon\varphi\omega_2 - \varepsilon\varphi\omega_1 = 2 \quad (1)$

Οι εφαπτόμενες στα σημεία Α και Β τέμνονται κάθετα

άρα $f'(x_1)f'(x_2) = -1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega_1 \cdot \varepsilon\varphi\omega_2 = -1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega_1 = -\dfrac{1}{\varepsilon\varphi\omega_2} \quad (2)$

Από τη σχέση (1) μέσω της (2) έχουμε: $\varepsilon\varphi\omega_2 - \dfrac{1}{\varepsilon\varphi\omega_2} = 2 \Leftrightarrow$

$\varepsilon\varphi^2\omega_2 - 2\varepsilon\varphi\omega_2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (\varepsilon\varphi\omega_2 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega_2 = 1 \Leftrightarrow \omega_2 = 45^\circ$.

Άρα το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

δ) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε ότι

$(\text{ΑΓ})^2 + (\text{ΓΒ})^2 = (\text{ΑΒ})^2 \Leftrightarrow 2(\text{ΑΓ})^2 = (x_2 - x_1)^2 = \dfrac{1}{\alpha^2} \Leftrightarrow (\text{ΑΓ})^2 = \dfrac{1}{2\alpha^2}$ οπότε

το τρίγωνο ΑΒΓ έχει εμβαδόν $(\text{ΑΒΓ}) = \dfrac{1}{2}(\text{ΑΓ})^2 = \dfrac{1}{4\alpha^2}$ τ.μ..

90.α) Για κάθε x_1, x_2 με $0 < x_1 < x_2$ ισχύουν $-x_1 > -x_2 \Leftrightarrow 2 - x_1 > 2 - x_2 \ (1)$ και $\ln x_1 < \ln x_2 \Leftrightarrow -\ln x_1 > -\ln x_2 \ (2)$. Με πρόσθεση των σχέσεων (1) και (2) έχουμε $2 - x_1 - \ln x_1 > 2 - x_2 - \ln x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

β) Είναι $x + \ln x > 1 \Leftrightarrow -x - \ln x < -1 \Leftrightarrow 2 - x - \ln x < 1 \Leftrightarrow f(x) < f(1) \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} x > 1$.

γ) Είναι:

i. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - 2}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cancel{2} - x - \ln x - \cancel{2}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(-1 - \ln x \cdot \dfrac{1}{x}\right) = +\infty$.

ii. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x) + x - 2}{x - 1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cancel{2} - \cancel{x} - \ln x + \cancel{x} - \cancel{2}}{x - 1} = \lim\limits_{x\to 1}\left(-\dfrac{\ln x}{x - 1}\right)$.

Έστω η συνάρτηση $\varphi(x) = \ln x,\ x > 0$. Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $\varphi'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 1}\left(-\dfrac{\ln x}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left(-\dfrac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1}\right)=-\varphi'(1)=-\dfrac{1}{1}=-1$.

iii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f\left(x^2+2\right)-f(x+2)\right)=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2-x^2-2-\ln\left(x^2+2\right)-2+x+2+\ln(x+2)\right]=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^2+x+\ln\dfrac{x+2}{x^2+2}\right)=-\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^2+x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^2\right)=-\infty$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+2}{x^2+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{x+2}{x^2+2}\overset{\frac{x+2}{x^2+2}=u}{\underset{\substack{x\to+\infty\Rightarrow\\ u\to 0^+}}{=}}\lim\limits_{u\to 0^+}\ln u=-\infty$.

δ) Είναι $x_0+\ln x_0=2\Leftrightarrow 0=2-x_0-\ln x_0\Leftrightarrow f(x_0)=0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=2-0-(-\infty)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2-\infty-\infty=-\infty$.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A=(0,+\infty)$ έχει σύνολο τιμών το $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\right)=\mathbb{R}$. Επειδή $0\in f(A)$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα, υπάρχει μοναδικό $x_0>0$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$.

ε) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=-1-\dfrac{1}{x}=-\dfrac{x+1}{x}$.

Η ε, έχει εξίσωση: $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y=-\dfrac{x_0+1}{x_0}(x-x_0)\Leftrightarrow$

$y=-\dfrac{x_0+1}{x_0}x+x_0+1$. Για $x=0$ είναι $y=x_0+1$.

Η ε τέμνει τους άξονες στα σημεία $M(x_0,0)$ και $B(0,x_0+1)$.

Το τρίγωνο ΟΜΒ που σχηματίζει η ε με τους άξονες έχει εμβαδό

$E=\dfrac{1}{2}(OM)(OB)=\dfrac{1}{2}x_0(x_0+1)$.

1ος τρόπος: Παρατηρούμε ότι για να δείξουμε ότι $E<1$ αρκεί να βρούμε τις τιμές του $x_0>0$. Είναι $f(1)=1$ και $f(2)=\cancel{2}-\cancel{2}-\ln 2<0$.

Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ σαν πράξεις συνεχών συναρτήσεων άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_1\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $f(x_1)=0$. Όμως το x_0 είναι μοναδική λύση της εξίσωσης $f(x)=0$ άρα το x_1 ταυτίζεται με το x_0. Επομένως $1<x_0<2(3)\Leftrightarrow 2<x_0+1<3\quad(4)$

Με πολλαπλασιασμό των σχέσεων (3) και (4) έχουμε

$2<x_0(x_0+1)<6 \Leftrightarrow 1<\frac{1}{2}x_0(x_0+1)<3 \Leftrightarrow 1<E<3$.

2ος τρόπος

Αρκεί $1<E<3 \Leftrightarrow 1<\frac{x_0^2+x_0}{2}<3 \Leftrightarrow 2<x_0^2+x_0<6$ (*)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $a(x)=x^2+x, x>0$. Έστω $0<x_1<x_2$ (Λ) τότε $x_1^2<x_2^2$ (Μ). Με πρόσθεση των (Λ) και (Μ) έχουμε: $a(x_1)<a(x_2)$ άρα η a είναι γνησίως αύξουσα.

Από την (*) έχουμε $2<a(x_0)<6 \Leftrightarrow a(1)<a(x_0)<a(2) \Leftrightarrow 1<x_0<2$.

Επομένως πρέπει $1<x_0<2 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(1)>f(x_0)>f(2) \Leftrightarrow 1>0>-\ln 2$ ισχύει.

στ) Είναι $f(1)=1$ και $f'(1)=-2$. Η εφαπτομένη της C_f στο $x_1=1$ είναι η ευθεία η: $y-f(1)=f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y-1=-2x+2 \Leftrightarrow y=-2x+3$.

Αρχικά θα αναζητήσουμε σημείο $K(x_2,h(x_2))$ για το οποίο να ισχύει

$h'(x_2)=\lambda_\eta=-2$. Είναι $h'(x)=-2x+4$, οπότε

$h'(x_2)=-2 \Leftrightarrow -2x_2+4=-2 \Leftrightarrow 2x_2=-6 \Leftrightarrow x_2=3$.

Η εφαπτομένη της C_h στο $x_2=3$ έχει εξίσωση

$y-h(3)=h'(3)(x-3) \Leftrightarrow y+3=-2x+6 \Leftrightarrow y=-2x+3$ άρα ταυτίζεται με την (η).

91.α) Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,g τέμνονται στο σημείο A άρα $f(1)=g(1)=1$. Επειδή οι f, g είναι παραγωγίσιμες στο $x_0=1$ ισχύει ότι:

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-1}{h}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1} \text{ και}$$

$$g'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(1+h)-1}{h}=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-1}{x-1}. \text{ Είναι:}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)g(1+h)-f(1+h)-g(1+h)+h^2+1}{h^2}=0 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(1+h)g(1+h)-f(1+h)-g(1+h)+1}{h^2}+\frac{h^2}{h^2}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(1+h)\big(g(1+h)-1\big)-\big(g(1+h)-1\big)}{h^2}+1\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{\left(g(1+h)-1\right)\left(f(1+h)-1\right)}{h^2}+1\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{g(1+h)-1}{h}\cdot\frac{f(1+h)-1}{h}+1\right)=0\Leftrightarrow f'(1)g'(1)+1=0\Leftrightarrow f'(1)g'(1)=-1\Leftrightarrow$$

$\lambda_1\lambda_2=-1$, όπου λ_1,λ_2 οι συντελεστές διεύθυνσης των εφαπτομένων των C_f,C_g στο σημείο Α.

Άρα οι C_f,C_g δέχονται εφαπτόμενες κάθετες στο Α.

β) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{xg(x)-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{xg(x)-x+x-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x\left(g(x)-1\right)}{x-1}+1\right)=g'(1)+1$.

γ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^xf(x)-e}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^xf(x)-e^x+e^x-e}{x-1}=$

$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{e^x\left(f(x)-1\right)}{x-1}+\dfrac{e^x-e}{x-1}\right)=ef'(1)+e$ γιατί αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$\varphi(x)=e^x$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με $\varphi'(x)=e^x$, είναι

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1}=\varphi'(1)=e$.

δ) i. Είναι $f'(1)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^2+2h+\cancel{1}-\cancel{1}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cancel{h}(h+2)}{\cancel{h}}=2$,

οπότε η εφαπτομένη της C_f στο Α είναι η ευθεία

$\varepsilon_1: y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-1=2x-2\Leftrightarrow y=2x-1$.

Είναι $f'(1)g'(1)=-1\Leftrightarrow 2g'(1)=-1\Leftrightarrow g'(1)=-\dfrac{1}{2}$. Η εφαπτομένη της C_g στο Α είναι η ευθεία $\varepsilon_2: y-g(1)=g'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-1=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$

ii. Είναι $f(1+h)=h^2+2h+1=(h+1)^2$ οπότε αν θέσουμε $1+h=x$ τότε $f(x)=x^2,\ x\in\mathbb{R}$.

iii. Είναι $g(1)=1\Leftrightarrow \kappa+\lambda=1$ (1). Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με $g'(x)=-\dfrac{\kappa}{x^2}$. Είναι $g'(1)=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow -\kappa=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \kappa=\dfrac{1}{2}$ οπότε από τη σχέση (1) έχουμε $\dfrac{1}{2}+\lambda=1\Leftrightarrow \lambda=\dfrac{1}{2}$.

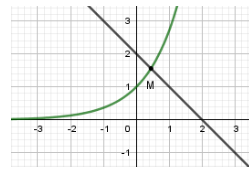
iv. Έστω $K\left(x_1,f(x_1)\right)$. Η εφαπτομένη της C_f στο Κ είναι η ευθεία

$\varepsilon: y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1) \Leftrightarrow y=2x_1x-2x_1^2+x_1^2 \Leftrightarrow y=2x_1x-x_1^2$.

Επειδή διέρχεται από το Μ, είναι: $\beta=2x_1\alpha-x_1^2 \Leftrightarrow x_1^2-2x_1\alpha+\beta=0 \quad (1)$

Είναι $\Delta=4\alpha^2-4\beta=4\left(\alpha^2-\beta\right)>0$, οπότε η (1) έχει δύο ρίζες και η C_f δέχεται δύο εφαπτόμενες που διέρχονται από το Μ.

92.α) Είναι $f(x)=0 \Leftrightarrow e^x+x-2=0 \Leftrightarrow e^x=2-x$.



Οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $y=e^x$ και $y=2-x$.
Σχεδιάζοντας στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των $y=e^x$ και $y=2-x$, διαπιστώνουμε ότι έχουν ένα κοινό σημείο, οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μία ρίζα.

β) Για κάθε $x_1,x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι: $e^{x1}<e^{x2}$ (1)και $x_1-2<x_2-2$ (2)
Με πρόσθεση των σχέσεων (1) και (2) έχουμε
$e^{x1}+x_1-2<e^{x2}+x_2-2 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Είναι $f\left(x+e^x-e-1\right)<-1 \Leftrightarrow f\left(x+e^x-e-1\right)<f(0) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}$

$x+e^x-e-1<0 \Leftrightarrow x+e^x-2<e-1 \Leftrightarrow f(x)<e-1 \Leftrightarrow f(x)<f(1) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} x<1$.

γ) $e^{x0}=2-x_0 \Leftrightarrow e^{x0}+x_0-2=0 \Leftrightarrow f(x_0)=0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x+x-2\right)=0-\infty-2=-\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x+x-2\right)=+\infty+\infty-2=+\infty$.
Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$. Το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της f και η f είναι γνησίως αύξουσα οπότε υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$.

δ) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=e^x+1$.

Είναι $f'(x_0)=e^{x0}+1$ και επειδή $e^{x0}=2-x_0>0$, είναι $x_0<2$ και $f'(x_0)=2-x_0+1=3-x_0$.

Η εφαπτομένη της C_f στο Μ είναι η ευθεία ε: $y-\cancel{f(x_0)}^{0}=f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow$

$y=(3-x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow y=(3-x_0)x-x_0(3-x_0)$. Για $y=0$ είναι

$0=(3-x_0)x-x_0(3-x_0) \Leftrightarrow (3-x_0 3-x_0)x=x_0(3-x_0) \underset{x_0<2}{\overset{3-x_0\neq 0}{\Leftrightarrow}} x=x_0$.

Για $x=0$ είναι $y=-x_0(3-x_0)$, οπότε η ε τέμνει τους άξονες στα σημεία $A(x_0,0)$ και $B(0,-x_0(3-x_0))$. Το τρίγωνο ΟΑΒ έχει εμβαδόν

$$E=\frac{1}{2}(OA)(OB)=\frac{1}{2}|x_0||-x_0(3-x_0)|=\frac{x_0^2}{2}|3-x_0|.$$

ε) Είναι $f(0)=-1$ και $f\left(\frac{1}{2}\right)=e^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}-2=\sqrt{e}-\frac{3}{2}$.

Είναι $f\left(\frac{1}{2}\right)>0\Leftrightarrow\sqrt{e}-\frac{3}{2}>0\Leftrightarrow\sqrt{e}>\frac{3}{2}\Leftrightarrow e>\frac{9}{4}=2,25$ που ισχύει, άρα $f(0)f\left(\frac{1}{2}\right)<0$.

Η f είναι συνεχής, στο $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

Όμως η f έχει μοναδική ρίζα το x_0, άρα $x_0\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$. Τότε

$E=\frac{x_0^2}{2}(3-x_0)$. Είναι $0<x_0<\frac{1}{2}\Leftrightarrow 0<x_0^2<\frac{1}{4}\Leftrightarrow 0<\frac{x_0^2}{2}<\frac{1}{8}$ (3) και

$$0<x_0<\frac{1}{2}\Leftrightarrow 0>-x_0>-\frac{1}{2}\Leftrightarrow 3-\frac{1}{2}<3-x_0<3\Leftrightarrow\frac{5}{2}<3-x_0<3 \quad (4)$$

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των (3),(4) προκύπτει ότι

$$0<\frac{x_0^2}{2}(3-x_0)<\frac{3}{8}\Rightarrow E<\frac{3}{8}.$$

στ) i. Για κάθε $x>x_0\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x)>f(x_0)=0$, οπότε

$$\lim_{x\to x_0^+}\ln f(x)\underset{\substack{x\to x_0^+\Rightarrow\\ u\to 0^+}}{\overset{f(x)=u}{=}}\lim_{u\to 0^+}\ln u=-\infty.$$ Ακόμη $$\lim_{x\to x_0^+}\frac{1}{x-x_0}\underset{\substack{x\to x_0^+\Rightarrow\\ u\to 0^+}}{\overset{x-x_0=u}{=}}\lim_{u\to 0^+}\frac{1}{u}=+\infty,$$

οπότε $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{\ln f(x)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\left[\ln f(x)\frac{1}{x-x_0}\right]=-\infty(+\infty)=-\infty$.

ii. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=e^x+1$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^x+x-e-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^x+x-2-e+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=e+1$.

iii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f^2(x)-3f(x)+5}{1-f^2(x)}\underset{\substack{x\to+\infty\Rightarrow\\ u\to+\infty}}{\overset{f(x)=u}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{u^2-3u+5}{1-u^2}=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{u^2}{-u^2}=-1$.

ζ) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, είναι και 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

Είναι $f(x)>x\Leftrightarrow e^x+x-2>x\Leftrightarrow e^x>2\Leftrightarrow x>\ln 2$.

Για $x>\ln 2$ η C_f βρίσκεται πάνω από την $y=x$ και λόγω συμμετρίας η $C_{f^{-1}}$ βρίσκεται κάτω από την $y=x$, άρα $f(x)>x>f^{-1}(x)$.

η) Επειδή $f(1)=e-1$ είναι $f^{-1}(e-1)=1$. Είναι $f^{-1}(f(x))=x \quad (5)$

Με παραγώγιση κατά μέλη της σχέσης (5) έχουμε

$\left[f^{-1}(f(x))\right]'=(x)'\Leftrightarrow\left(f^{-1}\right)'(f(x))f'(x)=1 \quad (6)$

Από τη σχέση (1) για $x=1$ έχουμε:

$\left(f^{-1}\right)'(e-1)(e+1)=1\Leftrightarrow\left(f^{-1}\right)'(e-1)=\dfrac{1}{e+1}$.

Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση: $y-f^{-1}(e-1)=\left(f^{-1}\right)'(e-1)(x-1)\Leftrightarrow$

$y-1=\dfrac{1}{e+1}(x-1)\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{e+1}x-\dfrac{1}{e+1}+1\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{e+1}x+\dfrac{e}{e+1}$.

θ) i. Είναι $A_{f^{-1}}=f(A)=\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $f^{-1}\left(A_{f^{-1}}\right)=A_f=\mathbb{R}$.

Για κάθε $y_1,y_2\in A_{f^{-1}}=\mathbb{R}$ υπάρχουν αντίστοιχα $x_1,x_2\in A_f=\mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$f(x_1)=y_1\Leftrightarrow f^{-1}(y_1)=x_1$ και $f(x_2)=y_2\Leftrightarrow f^{-1}(y_2)=x_2$.

Επομένως για κάθε $y_1,y_2\in A_{f^{-1}}=\mathbb{R}$ με

$y_1<y_2\Leftrightarrow f^{-1}(x_1)<f^{-1}(x_2)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f\left(f^{-1}(x_1)\right)<f\left(f^{-1}(x_2)\right)\Leftrightarrow$

$x_1<x_2\Leftrightarrow f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2)$ άρα η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Άρα έχει σύνολο τιμών το

$f^{-1}((-\infty,+\infty))=\left(\lim\limits_{x\to\infty}f^{-1}(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f^{-1}(x)\right)=(-\infty,+\infty)$ οπότε

$\lim\limits_{x\to-\infty}f^{-1}(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+-\infty}f^{-1}(x)=+\infty$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{f^{-1}(x)}}{x}\underset{\substack{x\to-\infty,\\ y\to-\infty}}{\overset{\substack{f^{-1}(x)=y\Leftrightarrow\\ f(y)=x}}{=}}\lim\limits_{y\to-\infty}\dfrac{e^y}{f(y)}=\lim\limits_{y\to-\infty}\left[e^y\dfrac{1}{f(y)}\right]=0\cdot 0=0$ γιατί

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{f(x)}\underset{\substack{x\to-\infty\Rightarrow\\ u\to-\infty}}{\overset{f(x)=u}{=}}\lim_{u\to-\infty}\frac{1}{u}=0.$$

ii. Είναι $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{f^{-1}(x)}\underset{\substack{x\to-1,\\ y\to0}}{\overset{\substack{f^{-1}(x)=y\Leftrightarrow\\ f(y)=x}}{=}}\lim_{y\to-1}\frac{f(y)+1}{y}=\lim_{y\to0}\frac{f(y)-f(0)}{y-0}=f'(0)=2$.

93.α) Είναι $\displaystyle 2x_0^2\ln x_0=2x_0^2+1\overset{:2x_0^2}{\Leftrightarrow}\ln x_0=1+\frac{1}{2x_0^2}\Leftrightarrow f(x_0)=0$.

Έχουμε $\displaystyle\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\ln x-\frac{1}{2x^2}-1\right)=-\infty-\infty-1=-\infty$ και

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln x-\frac{1}{2x^2}-1\right)=+\infty-0-1=+\infty.$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$. Το 0 βρίσκεται στο σύνολο τιμών της f, οπότε υπάρχει $x_0>0$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$.

Για κάθε $0<x_1<x_2$ είναι: $\ln x_1<\ln x_2$ (1), $x_1^2<x_2^2\Leftrightarrow 2x_1^2<2x_2^2\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{2x_1^2}>\frac{1}{2x_2^2}\Leftrightarrow-\frac{1}{2x_1^2}<-\frac{1}{2x_2^2}\Leftrightarrow-\frac{1}{2x_1^2}-1<-\frac{1}{2x_2^2}-1\ (2)$$

Από $(1)+(2)\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)\Leftrightarrow f\nearrow(0,+\infty)$, οπότε το x_0 είναι μοναδικό.

β) Η εφαπτομένη της C_g στο σημείο $A(\alpha,g(\alpha))$ είναι η ευθεία

$$\varepsilon_1: y-g(\alpha)=g'(\alpha)(x-\alpha)\Leftrightarrow y-\ln\alpha=\frac{1}{\alpha}(x-\alpha)\Leftrightarrow y=\frac{1}{\alpha}x+\ln\alpha-1.$$

Η εφαπτομένη της C_h στο σημείο $B(\beta,h(\beta))$ είναι η ευθεία

$$\varepsilon_1: y-h(\beta)=h'(\beta)(x-\beta)\Leftrightarrow y+\frac{1}{2}\beta^2=-\beta(x-\beta)\Leftrightarrow y=-\beta x+\frac{1}{2}\beta^2.$$

Οι C_h,C_g δέχονται κοινή εφαπτομένη όταν υπάρχουν $\alpha>0$ και $\beta\in\mathbb{R}$ για τα οποία οι ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ να ταυτίζονται και αυτό συμβαίνει όταν:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha}=-\beta\\ \ln\alpha-1=\dfrac{1}{2}\beta^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=-\dfrac{1}{\alpha}\\ \ln\alpha-1=\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{\alpha}\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=-\dfrac{1}{\alpha}\\ \ln\alpha-1=\dfrac{1}{2\alpha^2}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\beta=-\dfrac{1}{\alpha}\\ \ln\alpha-1-\dfrac{1}{2\alpha^2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=-\dfrac{1}{\alpha}\\ f(\alpha)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=-\dfrac{1}{\alpha}\\ f(\alpha)=f(x_0)\end{cases}\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}\begin{cases}\beta=-\dfrac{1}{\alpha}\\ \alpha=x_0\end{cases}.$$

Άρα δέχονται μοναδική εφαπτομένη την (ε) με εξίσωση: $y=\dfrac{1}{x_0}x+\ln x_0-1$.

γ) Αρκεί η εξίσωση $g(x)=h(x)\Leftrightarrow \ln x=-\dfrac{1}{2}x^2\Leftrightarrow \ln x+\dfrac{1}{2}x^2=0$ να έχει μοναδική ρίζα. Έστω $\varphi(x)=\ln x+\dfrac{1}{2}x^2,\ x>0$.

Για κάθε $0<x_1<x_2$ είναι: $\ln x_1<\ln x_2$ (3), $x_1^2<x_2^2\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}x_1^2<\dfrac{1}{2}x_2^2$ (4)

Με πρόσθεση των σχέσεων (3) και (4) έχουμε

$\ln x_1+\dfrac{1}{2}x_1^2<\ln x_2+\dfrac{1}{2}x_2^2\Leftrightarrow\varphi(x_1)<\varphi(x_2)\Leftrightarrow\varphi\nearrow(0,+\infty)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\ln x+\dfrac{1}{2}x^2\right)=-\infty+0=-\infty$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x+\dfrac{1}{2}x^2\right)=+\infty+\infty=+\infty$.

Επειδή η φ είναι συνεχής, έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

Το 0 βρίσκεται στο σύνολο τιμών της φ, οπότε υπάρχει $\rho>0$ τέτοιο, ώστε $\varphi(\rho)=0$. Το ρ είναι μοναδικό αφού η φ είναι γνησίως αύξουσα.

δ) Αρκεί να δείξουμε ότι $g'(\rho)h'(\rho)=-1$.

Είναι $g'(x)=\dfrac{1}{x}$ και $h'(x)=-x$, οπότε $g'(\rho)h'(\rho)=\dfrac{1}{\rho}(-\rho)=-1$ άρα οι εφαπτόμενες των C_g,C_h στο κοινό τους σημείο είναι κάθετες.

ε) Έστω $M(\kappa,\lambda)$ με $\lambda=\ln\kappa,\ \kappa>0$ σημείο της C_g. Η εφαπτομένη της C_h σε τυχαίο σημείο της $B(\beta,h(\beta))$ είναι η ευθεία

$\varepsilon_1: y-h(\beta)=h'(\beta)(x-\beta)\Leftrightarrow y+\dfrac{1}{2}\beta^2=-\beta(x-\beta)\Leftrightarrow y=-\beta x+\dfrac{1}{2}\beta^2$. Η ευθεία ε_1 διέρχεται από το Μ όταν $\lambda=-\beta\kappa+\dfrac{1}{2}\beta^2\Leftrightarrow\beta^2-2\beta\kappa-2\ln\kappa=0$ (5)

Για να υπάρχουν δύο εφαπτόμενες της C_h που διέρχονται από το Μ πρέπει η (5) να έχει Δ >0. Αν β_1,β_2 οι ρίζες της, τότε πρέπει

$h'(\beta_1)h'(\beta_2)=-1\Leftrightarrow-\beta_1(-\beta_2)=-1\Leftrightarrow\beta_1\beta_2=-1$.

Όμως το $\beta_1\beta_2$ είναι το γινόμενο ριζών της (5), οπότε $\beta_1\beta_2 = -\frac{2\ln\kappa}{1} = -2\ln\kappa$,

άρα $-2\ln\kappa = -1 \Leftrightarrow \ln\kappa = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \kappa = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$, τότε η (5) γίνεται

$\beta^2 - 2\beta\sqrt{e} + 1 = 0$ η οποία έχει $\Delta = \left(2\sqrt{e}\right)^2 - 4 = 4e - 4 > 0$.

94.α) Έστω $N\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ σημείο της C_f. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x) = x$. Η εφαπτομένη ε της C_f στο N έχει εξίσωση:

$y - f\left(x_0\right) = f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right) \Leftrightarrow y - \frac{1}{2}x_0^2 + 4 = x_0\left(x - x_0\right) \Leftrightarrow y = x_0 x - \frac{1}{2}x_0^2 - 4$.

Για να διέρχεται η ε από την αρχή των αξόνων, πρέπει:

$0 = x_0 \cdot 0 - \frac{1}{2}x_0^2 - 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x_0^2 = -4$ αδύνατο. Άρα η C_f δεν δέχεται εφαπτομένη που να διέρχεται από την αρχή O των αξόνων.

β) Είναι ε: $y = x_0 x - \frac{1}{2}x_0^2 - 4 \Leftrightarrow x_0 x - y - \frac{1}{2}x_0^2 - 4 = 0$. Η απόσταση του O από

την ε είναι: $d(0,\varepsilon) = \dfrac{\left|x_0 \cdot 0 - 0 - \frac{1}{2}x_0^2 - 4\right|}{\sqrt{x_0^2 + 1}} = \dfrac{\frac{x_0^2 + 8}{2}}{\sqrt{x_0^2 + 1}} = \dfrac{x_0^2 + 8}{2\sqrt{x_0^2 + 1}}$.

Πρέπει $d(0,\varepsilon) < 2 \Leftrightarrow \dfrac{x_0^2 + 8}{2\sqrt{x_0^2 + 1}} < 2 \Leftrightarrow x_0^2 + 8 < 4\sqrt{x_0^2 + 1} \Leftrightarrow$

$\left(x_0^2 + 8\right)^2 < \left(4\sqrt{x_0^2 + 1}\right)^2 \Leftrightarrow x_0^4 + \cancel{16x_0^2} + 64 < \cancel{16x_0^2} + 16 \Leftrightarrow x_0^4 < -48$ άτοπο.

γ) Η ε διέρχεται από το M, αν και μόνο αν

$\beta = x_0\alpha - \frac{1}{2}x_0^2 - 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x_0^2 - \alpha x_0 + \beta + 4 = 0 \Leftrightarrow x_0^2 - 2\alpha x_0 + 2\beta + 8 = 0 \quad (1)$

Η C_f δέχεται 2 εφαπτόμενες που διέρχονται από το M, αν και μόνο αν η (1) έχει 2 λύσεις ως προς x_0 και αυτό ισχύει όταν

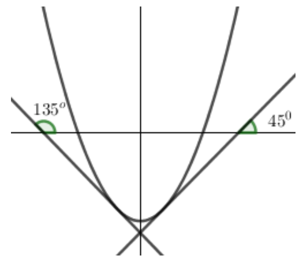
$\Delta > 0 \Leftrightarrow 4\alpha^2 - 4\left(2\beta + 8\right) > 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - \left(2\beta + 8\right) > 0 \Leftrightarrow \alpha^2 > 2\beta + 8$.

δ) Η ε έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = f'\left(x_0\right) = x_0$. Αν $M_1\left(x_1, f\left(x_1\right)\right)$ και $M_2\left(x_2, f\left(x_2\right)\right)$ είναι τα σημεία επαφής των ζητούμενων εφαπτομένων με τη C_f τότε $\lambda_1\lambda_2 = -1 \Leftrightarrow x_1x_2 = -1$. Όμως τα x_1, x_2 είναι ρίζες της (1), οπότε το γινόμενο των ριζών P της (1) είναι ίσο με – 1. Από τους τύπους Vieta είναι

$P = x_1x_2 = 2\beta + 8$, άρα $2\beta + 8 = -1 \Leftrightarrow 2\beta = -9 \Leftrightarrow \beta = -\frac{9}{2}$.

ε) Η ε σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο όταν η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα x΄x είναι 45° ή 135°, άρα $\left(f'(x_0)=\varepsilon\varphi 45^\circ \Leftrightarrow x_0=1\right)$ ή $\left(f'(x_0)=\varepsilon\varphi 135^\circ \Leftrightarrow x_0=-1\right)$.

Τότε ε: $y=x-\frac{1}{2}-4=x-\frac{9}{2}$ ή $y=-x-\frac{1}{2}-4=-x-\frac{9}{2}$.



στ) Αν α = 0 και β < -4 τότε η σχέση (1) γίνεται:

$x_0^2+2\beta+8=0 \Leftrightarrow x_0^2=-2(\beta+4) \Leftrightarrow$

$x_{0_{1,2}}=\pm\sqrt{-2(\beta+4)}$.

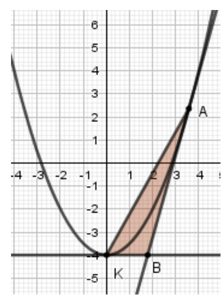
Αν ω_1,ω_2 οι γωνίες που σχηματίζουν οι δύο εφαπτόμενες με τον άξονα x΄x, τότε:

$f'(x_{0_1})=\sqrt{-2(\beta+4)} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega_1=\sqrt{-2(\beta+4)}$ και

$f'(x_{0_2})=-\sqrt{-2(\beta+4)} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega_2=-\sqrt{-2(\beta+4)} \Leftrightarrow$

$\varepsilon\varphi\omega_2=-\varepsilon\varphi\omega_1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega_2=\varepsilon\varphi(180^\circ-\omega_1)$ και επειδή $0^\circ \le \omega_1,\omega_2<180^\circ$, είναι

$\omega_2=180^\circ-\omega_1 \Leftrightarrow \omega_1+\omega_2=180^\circ$.

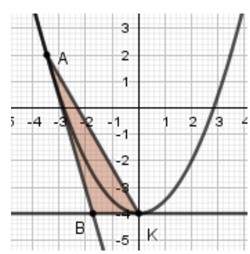


ζ) Η κορυφή Κ της παραβολής έχει συντεταγμένες (0,-4). Έστω $A(x_0,f(x_0))$ σημείο της C_f. Η εφαπτομένη της C_f στο Α είναι η ε. Για το σημείο Β έχουμε:

$$\begin{cases} y=x_0x-\frac{1}{2}x_0^2-4 \\ y=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{-4}=x_0x-\frac{1}{2}x_0^2\cancel{-4} \\ y=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{x_0}{2} \\ y=-4 \end{cases}$$

άρα το Β έχει συντεταγμένες $\left(\frac{x_0}{2},-4\right)$.

Αν $x_0>0$ τότε $\omega_1<90^\circ$ οπότε στο τρίγωνο ΚΒΑ είναι $B_{\varepsilon\xi}<90^\circ$ άρα $B>90^\circ$.



Αν $x_0<0$ τότε $\varepsilon\varphi\omega_2<0 \Leftrightarrow 90^\circ<\omega_2<180^\circ$ άρα $B>90^\circ$. Δηλαδή σε κάθε περίπτωση το τρίγωνο ΚΑΒ είναι αμβλυγώνιο, οπότε για να είναι ισοσκελές πρέπει $(BA)=(BK) \Leftrightarrow$

$$\sqrt{\left(x_0-\frac{x_0}{2}\right)^2+\left(f(x_0)+4\right)^2}=\left|\frac{x_0}{2}\right| \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\frac{x_0^2}{4}+\left(\frac{1}{2}x_0^2-\cancel{4}+\cancel{4}\right)^2}=\left|\frac{x_0}{2}\right| \Leftrightarrow$$

$\frac{\cancel{x_0^2}}{\cancel{4}}+\frac{x_0^4}{4}=\frac{\cancel{x_0^2}}{\cancel{4}} \Leftrightarrow x_0^4=0 \Leftrightarrow x_0=0$ απορρίπτεται γιατί τότε το Α ταυτίζεται με το Κ και δεν υπάρχει τρίγωνο. Επομένως το τρίγωνο ΚΑΒ δεν μπορεί να είναι ισοσκελές.

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό ή Λάθος»

1. Σ	**2.** Λ	**3.** Λ	**4.** Σ	**5.** Λ	**6.** Λ	**7.** Λ	**8.** Λ	**9.** Σ	**10.** Σ
11. Σ	**12.** Λ	**13.** Σ	**14.** Σ	**15.** Σ					

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Έστω $M(x_0,f(x_0))$ το σημείο επαφής, τότε η εξίσωση εφαπτομένης της C_f είναι $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ και επειδή διέρχεται από το σημείο $A\left(0,\frac{1}{2}\right)$ έχουμε $\frac{1}{2}-f(x_0)=f'(x_0)(-x_0) \Leftrightarrow \frac{1}{2}-\sqrt{x_0^2+1}=\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+1}}(-x_0) \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2}\sqrt{x_0^2+1}-\left(x_0^2+1\right)=-x_0^2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x_0^2+1}}{2}=1 \Leftrightarrow x_0^2+1=4 \Leftrightarrow$

$x_0^2=3 \Leftrightarrow x_0=\pm\sqrt{3}$. Για $x_0=\sqrt{3}$ είναι $f\left(\sqrt{3}\right)=2, f'\left(\sqrt{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ και η εξίσωση εφαπτομένης είναι $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}$. Για $x_0=-\sqrt{3}$ είναι

$f\left(-\sqrt{3}\right)=2, f'\left(-\sqrt{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ και η εξίσωση εφαπτομένης είναι $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}$.

Σωστή απάντηση Δ.

2. Έστω $h(x)=\frac{f(x)-\sqrt{x}}{x-1}$ με $\lim\limits_{x\to 1}h(x)=\frac{5}{2}$ τότε $f(x)=(x-1)h(x)+\sqrt{x}$ οπότε $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left[(x-1)h(x)+\sqrt{x}\right]=1$.

Αφού η f συνεχής θα είναι $f(1)=\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$. Επίσης,

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\overset{(1)}{=}\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)h(x)+\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\left[h(x)+\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right]=3$, άρα $f'(1)=3$.

Η εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f στο $x_0 = 1$ είναι
(ε): $y - 1 = 3(x - 1) \Leftrightarrow y = 3x - 2$.
Αν η ευθεία (ε) εφάπτεται στη C_g στο $M(x_1, g(x_1))$ τότε
$g'(x_1) = \lambda_\varepsilon = 3 \Leftrightarrow 2x_1 - 1 = 3 \Leftrightarrow x_1 = 2$.
Το σημείο $(2, g(2))$ ανήκει στην (ε) οπότε $g(2) = 4 \Leftrightarrow 2 + \lambda = 4 \Leftrightarrow \lambda = 2$.
Σωστή απάντηση Γ.

3. Η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} - x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x) = 2e^{2x} - 1$. Έστω $M(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής, τότε η εξίσωση εφαπτομένης της C_f είναι $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ και επειδή διέρχεται από το σημείο $O(0,0)$ έχουμε $0 - f(x_0) = f'(x_0)(-x_0) \Leftrightarrow x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0 \Leftrightarrow$
$x_0\left(2e^{2x_0} - 1\right) - \left(e^{2x_0} - x_0\right) = 0 \Leftrightarrow 2x_0 e^{2x_0} - x_0 - e^{2x_0} + x_0 = 0 \Leftrightarrow$
$e^{2x_0}(2x_0 - 1) = 0 \Leftrightarrow x_0 = \dfrac{1}{2}$. Όμως $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = e - \dfrac{1}{2}, f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2e - 1$ οπότε η εξίσωση εφαπτόμενης στο $x_0 = \dfrac{1}{2}$ είναι

$$y - f\left(\frac{1}{2}\right) = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y - \left(e - \frac{1}{2}\right) = (2e - 1)\left(x - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y = (2e - 1)x.$$

Σωστή απάντηση Β.

4. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x) = 3x^2 + 8x + \alpha$.
Αν η C_f εφάπτεται στον άξονα $x'x$ στο σημείο $M(x_0, 0)$ τότε

$$\begin{Bmatrix} f(x_0) = 0 \\ f'(x_0) = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x_0^3 + 4x_0^2 + \alpha x_0 - 18 = 0 \\ 3x_0^2 + 8x_0 + \alpha = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} x_0^3 + 4x_0^2 + x_0\left(-3x_0^2 - 8x_0\right) - 18 = 0 \\ \alpha = -3x_0^2 - 8x_0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} x_0^3 + 4x_0^2 - 3x_0^3 - 8x_0^2 - 18 = 0 \\ \alpha = -3x_0^2 - 8x_0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -2x_0^3 - 4x_0^2 - 18 = 0 \\ \alpha = -3x_0^2 - 8x_0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} x_0^3 + 2x_0^2 + 9 = 0 \\ \alpha = -3x_0^2 - 8x_0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} (x_0 + 3)\left(x_0^2 - x_0 + 3\right) = 0 \\ \alpha = -3x_0^2 - 8x_0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x_0 = -3 \\ \alpha = -3 \end{Bmatrix}.$$

Σωστή απάντηση Δ.

5. Πρέπει $\left\{\begin{array}{l} f(x_0)=g(x_0) \\ f'(x_0)=g'(x_0) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \ln x_0=\alpha x_0{}^2 \\ \dfrac{1}{x_0}=2\alpha x_0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$

$\left\{\begin{array}{l} \alpha x_0{}^2=\ln x_0 \\ \alpha x_0{}^2=\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \ln x_0=\dfrac{1}{2} \\ \alpha x_0{}^2=\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_0=\sqrt{e} \\ \alpha=\dfrac{1}{2e} \end{array}\right\}.$

Σωστή απάντηση Α.

1ο Κριτήριο αξιολόγησης μέχρι και εφαπτομένη καμπύλης

Θέμα Α

Α1. Θεωρία.

Α2. α) Ψ

β) Η συνάρτηση $f(x)=|x|$ είναι συνεχής στο 0 αφού είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$ όμως δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

($\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(x)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x}{x}=-1,\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(x)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}=1.$)

Α3. α) Λ **β)** Λ **γ)** Λ **δ)** Λ **Α4.** $f'=H, g'=G, h'=F$

Θέμα Β

Β1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 οπότε και συνεχής στο 1. Άρα

$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=f(1)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x}=\alpha+\beta+2\Leftrightarrow \alpha+\beta+2=1\Leftrightarrow \alpha+\beta=-1\Leftrightarrow$

$\beta=-1-\alpha$ (1). Η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 οπότε:

$$\lim_{x\to 1^-}f'(1)=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\Leftrightarrow f'(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\alpha x^2+\beta x+1}{x-1}\overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$f'(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{1-x}{x}}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\alpha x^2-x-\alpha x+1}{x-1}\Leftrightarrow$$

$$f'(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{-\cancel{(x-1)}}{x\cancel{(x-1)}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x(\alpha x-1)-(\alpha x-1)}{x-1}\Leftrightarrow$$

$$f'(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{-1}{x}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(\alpha x-1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}\Leftrightarrow f'(1)=-1=\alpha-1.$$

Άρα $\alpha=0$ οπότε από τη σχέση (1) είναι $\beta=-1$. Άρα $f(x)=\begin{cases}-x+2, x\ge 1\\ \dfrac{1}{x}, x<1\end{cases}$.

Β2. Είναι $g(x)=\begin{cases}x(-x+2)+x-1, x\ge 1\\ \cancel{x}e^{x-1}\dfrac{1}{\cancel{x}}, x<1\end{cases}\Leftrightarrow g(x)=\begin{cases}-x^2+2x+x-1, x\ge 1\\ e^{x-1}, x<1\end{cases}\Leftrightarrow$

$$g(x)=\begin{cases}-x^2+3x-1, x\ge 1\\ e^{x-1}, x<1\end{cases}.$$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{-x^2+3x-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{-\cancel{(x-1)}(x-2)}{\cancel{x-1}}=1$,

$\lim\limits_{x\to1^-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{e^{x-1}-1}{x-1}=h'(1)=1$. (Θέτουμε $h(x)=e^{x-1}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη με $h'(x)=e^{x-1}$). Άρα η g είναι παραγωγίσιμη στο 1 με $g'(1)=1$.

Β3. Από τα ερωτήματα **Β1**, **Β2** έχουμε $f'(1)\cdot g'(1)=-1\cdot1=-1$ άρα οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των f και g στο κοινό τους σημείο με τετμημένη 1 είναι κάθετες.

Β4. Έστω $A(x_0,g(x_0))$ το σημείο επαφής της ζητούμενης εφαπτομένης. Τότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι η

(ε): $y-g(x_0)=g'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y=g'(x_0)\cdot x+g(x_0)-x_0\cdot g'(x_0)$.

Η (ε) διέρχεται από την αρχή των αξόνων οπότε $g(x_0)-x_0\cdot g'(x_0)=0$.

Για $x_0<1$: Έχουμε $e^{x_0-1}-x_0\cdot e^{x_0-1}=0\Leftrightarrow e^{x_0-1}(1-x_0)=0\Leftrightarrow x_0=1$ απορρίπτεται.

Για $x_0>1$: Έχουμε $-x_0^2+3x_0-1-x_0\cdot(-2x_0+3)=0\Leftrightarrow$

$-x_0^2+3x_0-1+2x_0^2-3x_0=0\Leftrightarrow x_0^2-1=0\Leftrightarrow x_0^2=1\Leftrightarrow x_0=\pm1$ απορρίπτονται.

Για $x_0=1$ έχουμε (ε): $y-1=x-1\Leftrightarrow y=x$, η οποία είναι η εξίσωση της ζητούμενης εφαπτομένης.

Θέμα Γ

Γ1. α) Για $x=0$ είναι $f^3(0)=0\Leftrightarrow f(0)=0$. Είναι $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$.

Για $x\neq0$ είναι: $\frac{f^3(x)}{x^3}+\frac{3xf^2(x)}{x^3}+\frac{3x^2f(x)}{x^3}+\frac{x^2\eta\mu x}{x^3}=0\Leftrightarrow$

$\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3+3\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2+3\frac{f(x)}{x}+\frac{\eta\mu x}{x}=0$, οπότε

$\lim\limits_{x\to0}\left[\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3+3\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2+3\frac{f(x)}{x}+\frac{\eta\mu x}{x}\right]=0\Leftrightarrow$

$(f'(0))^3+3(f'(0))^2+3f'(0)+1=0\Leftrightarrow(f'(0)+1)^3=0\Leftrightarrow f'(0)=-1$.

Άρα η (ε) έχει εξίσωση ε: $y-f(0)=f'(0)x\Leftrightarrow y=-x$.

β) Πρέπει να υπάρχει $x\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $g'(x)=f'(0)=-1\Leftrightarrow -e^x=-1\Leftrightarrow$

$e^x=1\Leftrightarrow x=0$. Η εφαπτομένη της C_g στο $x=0$ έχει εξίσωση

$y-g(0)=g'(0)x\Leftrightarrow y=-x+\kappa-1$. Για να είναι η ε εφαπτομένη της C_g πρέπει $\kappa-1=0\Leftrightarrow\kappa=1$.

γ) Είναι $h(x)=\begin{cases} x^{\frac{4}{3}}, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ (-x)^{\frac{4}{3}}, & x<0 \end{cases}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με τύπο

$h'(x)=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}=\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$, στο $(-\infty,0)$ με τύπο $h'(x)=-\frac{4}{3}(-x)^{\frac{1}{3}}=-\frac{4}{3}\sqrt[3]{-x}$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-\frac{(-x)^{\frac{4}{3}}}{-x}\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-(-x)^{\frac{1}{3}}\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-\sqrt[3]{-x}\right)=0$,

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{h(x)-h(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^{\frac{4}{3}}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\frac{1}{3}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[3]{x}=0$ άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με παράγωγο $g'(0)=0$.

Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με $h'(x)=\begin{cases} \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -\frac{4}{3}\sqrt[3]{-x}, & x<0 \end{cases}$.

Για να υπάρχει εφαπτομένη παράλληλη στην (ε) αρκεί να υπάρχει $x\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f'(x)=-1$. Για $x\geq 0$ είναι $f'(x)\geq 0$ οπότε δεν υπάρχει εφαπτομένη παράλληλη στην (ε) στο $[0,+\infty)$.

Για $x<0$ είναι: $f'(x)=-1\Leftrightarrow -\frac{4}{3}\sqrt[3]{-x}=-1\Leftrightarrow \sqrt[3]{-x}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow x=-\frac{27}{64}$.

Άρα η εφαπτομένη της h στο $x=-\frac{27}{64}$ είναι παράλληλη στην ε και έχει εξίσωση:

$$y-f\left(-\frac{27}{64}\right)=f'\left(-\frac{27}{64}\right)\left(x+\frac{27}{64}\right)\Leftrightarrow y-\frac{81}{256}=-\left(x+\frac{27}{64}\right)\Leftrightarrow$$

$$y-\frac{81}{256}=-\left(x+\frac{27}{64}\right)\Leftrightarrow y=-x-\frac{27}{64}+\frac{81}{256}\Leftrightarrow y=-x+\frac{27}{256}.$$

Γ2. Για $x=\pi$ είναι $f^3(\pi)+3\pi f^2(\pi)+3\pi^2 f(\pi)+\pi^2\eta\mu\pi=0\Leftrightarrow$

$f(\pi)\left(f^2(\pi)+3\pi f(\pi)+3\pi^2\right)=0\Leftrightarrow \left(f(\pi)=0\right)$ ή $\left(f^3(\pi)+3\pi f^2(\pi)+3\pi^2=0\right.$ (1)

Αν θέσουμε $f(\pi)=\omega$ προκύπτει η δευτεροβάθμια εξίσωση $\omega^3+3\pi\omega^2+3\pi^2=0$, η οποία έχει διακρίνουσα $\Delta=-3\pi^2<0$ άρα δεν έχει πραγματικές ρίζες επομένως και η (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες).

Με παραγώγιση της αρχικής σχέσης κατά μέλη έχουμε:

$$\left[f^3(x)+3xf^2(x)+3x^2f(x)+x^2\eta\mu x\right]'=0\Leftrightarrow$$

$$3f^2(x)f'(x)+3f^2(x)+6xf(x)f'(x)+6xf(x)+3x^2f'(x)+2x\eta\mu x+x^2\sigma\upsilon\nu x=0 \quad (2)$$

Για $x=\pi$ από τη σχέση (2) έχουμε: $3\pi^2f'(\pi)-\pi^2=0\Leftrightarrow 3\pi^2f'(\pi)=\pi^2\Leftrightarrow f'(\pi)=\dfrac{1}{3}$.

Θέμα Δ

Δ1. Επειδή η f είναι άρτια, ισχύει ότι $f(-x)=f(x)$ (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Με παραγώγιση της σχέσης (1) κατά μέλη έχουμε: $\left(f(-x)\right)'=f'(x)\Leftrightarrow -f'(-x)=f'(x)\Leftrightarrow$

$f'(-x)=-f'(x)$ (2) για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η f' είναι περιττή.

Δ2. Αρκεί να δείξουμε ότι $f'(0)=0$. Από τη σχέση (2) για $x=0$ είναι

$f'(0)=-f'(0)\Leftrightarrow 2f'(0)=0\Leftrightarrow f'(0)=0$.

Δ3. Έστω $M(x_0,f(x_0))$ το σημείο επαφής της C_f με την ε_1. Τότε $f(x_0)=2x_0+1$ και $f'(x_0)=2$. Παρατηρούμε ότι η ε_2 έχει συντελεστή διεύθυνσης

$\lambda=-2=-f'(x_0)\overset{f'\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{\eta}}{=}f'(-x_0)$. Επίσης $f(-x_0)=f(x_0)=2x_0+1$ αφού η f είναι άρτια. Η εφαπτομένη της C_f στο $x=-x_0$ έχει εξίσωση:

$y-f(-x_0)=f'(-x_0)(x+x_0)\Leftrightarrow y-(2x_0+1)=-2(x+x_0)\Leftrightarrow$

$y=-2x-\cancel{2x_0}+\cancel{2x_0}+1\Leftrightarrow y=-2x+1$ οπότε ταυτίζεται με την ε_2, άρα η ε_2 είναι εφαπτομένη της C_f.

Δ4. Είναι $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)+(x^2-x)f(0)}{x^2}=2\Leftrightarrow\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)+x^2f(0)-xf(0)}{x^2}=2\Leftrightarrow$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{xf(x)-xf(0)}{x^2}+\frac{\cancel{x^2}f(0)}{\cancel{x^2}}\right)=2\Leftrightarrow\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cancel{x}\left(f(x)-f(0)\right)}{x^{\cancel{2}}}+f(0)\right)=2\Leftrightarrow$$

$f'(0)+f(0)=2\Leftrightarrow f(0)=2$.

Επομένως η C_f διέρχεται από το σημείο $A(0,2)$.

Δ5. Είναι:

α) $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-2}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(f(x)-2\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(f(x)-f(0)\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-1}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(f(x)-f(0)\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x+\cancel{1}-\cancel{1}}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}\left(\sqrt{x+1}+1\right)\right]=f'(0)\cdot 2=0.$$

β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(-x)-2}{\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2}{\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{f(x)-f(0)}{x}}{\dfrac{\eta\mu x}{x}}=\dfrac{f'(0)}{1}=\dfrac{0}{1}=0$.

Δ6. Γνωρίζουμε ότι $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Το ζητούμενο όριο γίνεται:

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+3h)-f(x)-3\left[f(x+2h)-f(x+h)\right]}{h}\right]=$$

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+3h)-f(x)}{h}-3\frac{f(x+2h)-f(x)-f(x+h)+f(x)}{h}\right]=$$

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+3h)-f(x)}{h}-3\left(\frac{f(x+2h)-f(x)}{h}-\frac{f(x+h)-f(x_0)}{h}\right)\right].$$

Για να υπολογίσουμε το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+3h)-f(x)}{h}$, θέτουμε $3h=\varphi$ οπότε $\varphi\to 0$ και

$h=\dfrac{\varphi}{3}$, άρα $\lim\limits_{\varphi\to 0}\dfrac{f(x+\varphi)-f(x)}{\dfrac{\varphi}{3}}=3\lim\limits_{\varphi\to 0}\dfrac{f(x+\varphi)-f(x)}{\varphi}=3f'(x)$, όμοια

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+2h)-f(x)}{h}=2f'(x)$.

Άρα, $\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(x+3h)-f(x)}{h}-3\left(\dfrac{f(x+2h)-f(x)}{h}-\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)\right]=$

$3f'(x)-3\left(2f'(x)-f'(x)\right)=3f'(x)-3f'(x)=0$.

Δ7. α) Είναι $xf(x)-2x\geq x^3\Leftrightarrow xf(x)\geq x^3+2x\quad(1)$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1), όπου x το –x, προκύπτει:

$-xf(-x)+2x\geq(-x)^3\Leftrightarrow -xf(x)\geq -x^3-2x\Leftrightarrow xf(x)\leq x^3+2x\quad(2)$

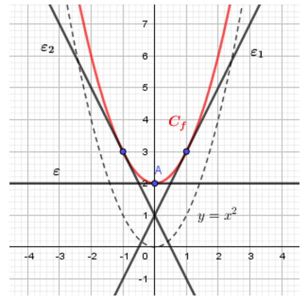
Από (1),(2) $\Rightarrow xf(x)=x^3+2x$ οπότε για $x\neq 0$ έχουμε: $f(x)=\dfrac{\cancel{x}\left(x^2+2\right)}{\cancel{x}}=x^2+2$.

Επομένως $f(x)=\begin{cases}x^2+2, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$, άρα $f(x)=x^2+2,\ x\in\mathbb{R}$.

β) Η γραφική παράσταση της f προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της $y = x^2$ κατά 2 μονάδες προς τα πάνω. Είναι $f'(x) = 2x$ οπότε:

$f'(x_0) = 2 \Leftrightarrow 2x_0 = 2 \Leftrightarrow x_0 = 1$, οπότε η ε_1 εφάπτεται της C_f στο $x_0 = 1$.

$f'(x_0) = -2 \Leftrightarrow 2x_0 = -2 \Leftrightarrow x_0 = -1$, οπότε η ε_2 εφάπτεται της C_f στο $-x_0 = -1$.



2ο Κριτήριο αξιολόγησης μέχρι και εφαπτομένη καμπύλης

Θέμα Α

Α1. Πράγματι, αν $y = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ και θέσουμε $u = \alpha \ln x$, τότε έχουμε $y = e^u$.

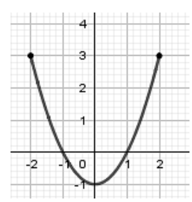
Επομένως, $y' = \left(e^u\right)' = e^u \cdot u' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$.

Α2. Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m. Δηλαδή, υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha,\beta]$ τέτοια, ώστε, αν $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$, να ισχύει $m \le f(x) \le M$, για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.

Α3. α) Ψευδής.

β) Έστω $f(x) = x^2 - 1,\ x \in [-2,2]$.

Η f είναι συνεχής στο $[-2,2]$, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες τις -1, 1 στο $(-2,2)$ όμως $f(-2) = 3,\ f(2) = 3$ και $f(-2)f(2) > 0$.



Α4. α) Ψευδής.

β) Αν θεωρήσουμε οποιαδήποτε σταθερή συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής συνάρτηση, έχει σύνολο τιμών μονοσύνολο και όχι διάστημα.

Α5. α) Λ **β)** Σ **γ)** Λ

Θέμα Β

Β1. Στο σχήμα παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$, οπότε

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{f(x)} \overset{f(x)=u}{\underset{u\to 0^+}{=}} \lim_{u\to 0^+}\frac{1}{u} = +\infty,\ \text{άρα}\ \lim_{x\to 0}\frac{x-1}{f(x)} = \lim_{x\to 0}\left[(x-1)\frac{1}{f(x)}\right] = -1\cdot(+\infty) = -\infty.$$

Β2. Στο σχήμα παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 1$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f^2(x)-3f(x)+2}{f^2(x)-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{(f(x)-1)}(f(x)-2)}{\cancel{(f(x)-1)}(f(x)+1)}=\frac{1-2}{1+1}=-\frac{1}{2}.$$

Β3. Στο σχήμα παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ οπότε

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{f^2(x)-f(x)}-f(x)\right)\underset{\substack{x\to+\infty,\\u\to+\infty}}{\overset{u=f(x)}{=}}\left(\sqrt{u^2-u}-u\right)=\lim_{u\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{u^2-u}-u\right)\left(\sqrt{u^2-u}+u\right)}{\sqrt{u^2-u}+u}=$$

$$=\lim_{u\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{u^2-u}\right)^2-u^2}{\sqrt{u^2\left(1-\frac{1}{u}\right)}+u}=\lim_{u\to+\infty}\frac{\cancel{u^2}-u-\cancel{u^2}}{u\cdot\sqrt{1-\frac{1}{u^2}}+u}=\lim_{u\to+\infty}\frac{-\cancel{u}}{\cancel{u}\left(\sqrt{1-\frac{1}{u^2}}+1\right)}=-\frac{1}{2}.$$

Β4. Στο σχήμα παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{x\to2}f(x)=1$, οπότε $\lim\limits_{x\to2}\left(f(x)-x\right)=1-2=-1<0$ άρα $f(x)-x<0$ για τιμές του x πολύ κοντά στο 2.

$$\lim_{x\to2}\frac{|f(x)-x|-x+1}{\sqrt{f(x)}-1}=\lim_{x\to2}\frac{\cancel{x}-f(x)-\cancel{x}+1}{\sqrt{f(x)}-1}=\lim_{x\to2}\frac{-(f(x)-1)\left(\sqrt{f(x)}+1\right)}{\left(\sqrt{f(x)}-1\right)\left(\sqrt{f(x)}+1\right)}=$$

$$\lim_{x\to2}\frac{-\cancel{(f(x)-1)}\left(\sqrt{f(x)}+1\right)}{\cancel{f(x)-1}}=-2.$$

Β5. Είναι $\left|e^{-f(-x)}\eta\mu\frac{1}{f(x)-1}\right|=e^{-f(-x)}\left|\eta\mu\frac{1}{f(x)-1}\right|\le e^{-f(-x)}\cdot1=e^{-f(-x)}\Leftrightarrow$

$-e^{-f(-x)}\le e^{-f(-x)}\eta\mu\frac{1}{f(x)-1}\le e^{-f(-x)}$. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-f(-x)}\underset{u\to+\infty}{\overset{f(-x)=u}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}e^{-u}=0=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-e^{-f(-x)}\right)$ γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty}f(-x)\underset{\omega\neq+\infty}{\overset{-x=\omega}{=}}\lim\limits_{\omega\to+\infty}f(\omega)=+\infty$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{-f(-x)}\eta\mu\frac{1}{f(x)-1}\right)=0$.

Β6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^{f(x)}+1\right)-f(x)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^{f(x)}+1\right)-\ln e^{f(x)}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{e^{f(x)}+1}{e^{f(x)}}=$

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+e^{-f(x)}\right)\underset{u\to0}{\overset{e^{f(x)}=u}{=}}\lim_{u\to0}\ln(1+u)=\ln1=0.$$

Θέμα Γ

Γ1. Έστω $x_0\in\mathbb{R}$ με $f(x_0)=0$, τότε για $x=x_0$ ισοδύναμα έχουμε:

$$\cancelto{0}{f^2(x_0)}+x_0^3\left(x_0^2-1\right)\cancelto{0}{f(x_0)}=x_0^8\Leftrightarrow x_0^8=0\Leftrightarrow x_0=0.$$

Δηλαδή η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική λύση την $x=0$, επομένως $f(x)\neq 0$ σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$. Επειδή $f(-1)=-1<0$, $-f(1)=-1\Leftrightarrow f(1)=1>0$ είναι $f(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)$ και $f(x)>0$ για κάθε $x>0$.

Γ2. Είναι $f^2(x)+x^3(x^2-1)f(x)=x^8 \Leftrightarrow f^2(x)+x^5f(x)-x^3f(x)-x^8=0\Leftrightarrow$

$f(x)\left(f(x)+x^5\right)-x^3\left(f(x)+x^5\right)=0\Leftrightarrow\left(f(x)+x^5\right)\left(f(x)-x^3\right)=0$.

Οπότε οι τιμές της f θα έχουν τη μορφή $f(x)=-x^5$ ή $f(x)=x^3$. Όμως

- αν υπάρχει $x_0<0$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=-x_0^5$ τότε $f(x_0)>0$ άτοπο αφού για κάθε $x\in(-\infty,0)$ $f(x)<0$
- αν υπάρχει $x_0>0$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=-x_0^5$ τότε $f(x_0)<0$ στο $(0,+\infty)$ που είναι άτοπο.

Άρα $f(x)=x^3, x\in\mathbb{R}$.

2ος τρόπος: $f^2(x)+x^3(x^2-1)f(x)=x^8\Leftrightarrow f^2(x)+\left(x^5-x^3\right)f(x)=x^8\Leftrightarrow$

$$f^2(x)+\left(x^5-x^3\right)f(x)+\frac{\left(x^5-x^3\right)^2}{4}=x^8+\frac{\left(x^5-x^3\right)^2}{4}\Leftrightarrow$$

$$\left(f(x)+\frac{x^5-x^3}{2}\right)^2=\frac{4x^8+x^{10}-2x^8+x^6}{4}\Leftrightarrow\left(f(x)+\frac{x^5-x^3}{2}\right)^2=\frac{x^{10}+2x^8+x^6}{4}\Leftrightarrow$$

$$\left(f(x)+\frac{x^5-x^3}{2}\right)^2=\frac{x^{10}+2x^8+x^6}{4}\Leftrightarrow$$

$$\left(f(x)+\frac{x^5-x^3}{2}\right)^2=\frac{\left(x^5+x^3\right)^2}{4}\Leftrightarrow\left|f(x)+\frac{x^5-x^3}{2}\right|=\frac{\left|x^5+x^3\right|}{2}\quad(1)$$

Έχουμε $x^5+x^3\geq 0\Leftrightarrow x^3\Big(\underbrace{x^2+1}_{>0}\Big)\geq 0\Leftrightarrow x\geq 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)+x^5-x^3$. Η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, είναι διάφορη του μηδενός στα διαστήματα $(-\infty,0),(0,+\infty)$ άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από αυτά τα διαστήματα.

Όμως $g(-1)=f(-1)=-1<0$, $g(1)=f(1)=1>0$ άρα η g είναι αρνητική στο $(-\infty,0)$ και θετική στο $(0,+\infty)$. Επομένως από τη σχέση (1):

- Για $x<0$ έχουμε: $|g(x)|=\dfrac{|x^5+x^3|}{2} \Leftrightarrow -g(x)=\dfrac{-x^5-x^3}{2} \Leftrightarrow g(x)=\dfrac{x^5+x^3}{2} \Leftrightarrow$

$f(x)+\dfrac{x^5-x^3}{2}=\dfrac{x^5+x^3}{2} \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{x^5+x^3}{2}-\dfrac{x^5-x^3}{2} \Leftrightarrow$

$f(x)=\dfrac{\cancel{x^5}+x^3-\cancel{x^5}+x^3}{2} \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{2x^3}{2}=x^3$.

- Για $x>0$ έχουμε: $|g(x)|=\dfrac{|x^5+x^3|}{2} \Leftrightarrow g(x)=\dfrac{x^5+x^3}{2} \Leftrightarrow$

$f(x)+\dfrac{x^5-x^3}{2}=\dfrac{x^5+x^3}{2} \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{x^5+x^3}{2}-\dfrac{x^5-x^3}{2} \Leftrightarrow$

$f(x)=\dfrac{\cancel{x^5}+x^3-\cancel{x^5}+x^3}{2} \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{2x^3}{2}=x^3$.

Άρα $f(x)=x^3, x\in\mathbb{R}$ (αφού $f(0)=0$).

Γ3. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι $x_1^3<x_2^3 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε η f αντιστρέφεται. Θέτουμε $f(x)=y \Leftrightarrow x^3=y$ (1)

Αν $y\geq 0$ η (1) γίνεται $x=\sqrt[3]{y}$, ενώ αν $x<0$ γίνεται $x=-\sqrt[3]{-y}$, άρα

$f^{-1}(y)=\begin{cases}-\sqrt[3]{-y}, & y<0\\ \sqrt[3]{y}, & y\geq 0\end{cases}$ οπότε $f^{-1}(x)=\begin{cases}-\sqrt[3]{-x}, & x<0\\ \sqrt[3]{x}, & x\geq 0\end{cases}$.

Γ4. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=3x^2$, η οποία είναι βασική συνάρτηση με σύνολο τιμών το $A=[0,+\infty)$, οπότε για κάθε $k>0$ υπάρχει $x_1\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f'(x_1)=k$.

Για κάθε $x>0$ η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη με $\left(f^{-1}\right)'(x)=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

Για κάθε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ είναι

$x_1^2<x_2^2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x_1^2}<\sqrt[3]{x_2^2} \Leftrightarrow 3\sqrt[3]{x_1^2}<3\sqrt[3]{x_2^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x_1^2}}>\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x_2^2}} \Leftrightarrow$

$\left(f^{-1}\right)'(x_1)>\left(f^{-1}\right)'(x_2) \Leftrightarrow \left(f^{-1}\right)' \searrow (0,+\infty)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(f^{-1}\right)'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f^{-1}\right)'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}=0$.

Άρα η $\left(f^{-1}\right)'$ έχει σύνολο τιμών το $A'=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f^{-1}\right)'(x),\lim\limits_{x\to 0^+}\left(f^{-1}\right)'(x)\right)=(0,+\infty)$

οπότε υπάρχει $x_2>0$ τέτοιο ώστε $\left(f^{-1}\right)'(x_2)=k$. Επειδή για κάθε $k>0$ υπάρχουν x_1,x_2 τέτοια ώστε $f'(x_1)=k=\left(f^{-1}\right)'(x_2)$ οι γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1} δέχονται άπειρες παράλληλες εφαπτόμενες.

Θέμα Δ

Δ1. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι $e^{x_1}<e^{x_2}$ (1) και

$2x_1<2x_2\Leftrightarrow 2x_1+1<2x_2+1$ (2)

Από $(1)+(2)\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)\Rightarrow f\nearrow\mathbb{R}\Rightarrow f$ $1-1$, οπότε η f αντιστρέφεται.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x+2x+1\right)=0-\infty+1=-\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x+2x+1\right)=+\infty+\infty+1=+\infty$.

Επειδή η f είναι συνεχής, έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, οπότε $D_{f^{-1}}=f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

Δ2. Είναι $(1+2\rho)e^{-\rho}+1=0\Leftrightarrow\dfrac{1+2\rho}{e^{\rho}}+1=0\Leftrightarrow 1+2\rho+e^{\rho}=0\Leftrightarrow f(\rho)=0$. Επειδή το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της f και η f είναι γνησίως αύξουσα, υπάρχει μοναδικό $\rho\in\mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει ότι $f(\rho)=0$.

Δ3. α) Από το β) ερώτημα έχουμε $1+2\rho+e^{\rho}=0\Leftrightarrow e^{\rho}=-1-2\rho$ με

$-1-2\rho>0\Leftrightarrow\rho<-\dfrac{1}{2}$. Είναι $f(-1)=e^{-1}-2+1=-1+\dfrac{1}{e}<0$ και

$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=e^{-\frac{1}{2}}-1+1=\dfrac{1}{\sqrt{e}}>0$ οπότε $f(-1)f\left(-\dfrac{1}{2}\right)<0$.

Η f είναι συνεχής στο $\left[-1,-\dfrac{1}{2}\right]$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right)$.

Όμως το ρ είναι η μοναδική ρίζα της f, άρα $\rho\in\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right)$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=e^x+2$. Η εφαπτομένη της C_f στο Α είναι η ευθεία ε: $y-0=f'(\rho)(x-\rho)\Leftrightarrow y=\left(e^{\rho}+2\right)x-\rho\left(e^{\rho}+2\right)$.

Για $x=0$ είναι $y=-\rho\left(e^{\rho}+2\right)$. Η ε τέμνει τους άξονες στο Α και στο $B\left(0,-\rho\left(e^{\rho}+2\right)\right)$. Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ είναι:

$E=\dfrac{1}{2}(OA)(OB)=\dfrac{1}{2}|\rho|\left|-\rho\left(e^{\rho}+2\right)\right|=\dfrac{\rho^2\left(e^{\rho}+2\right)}{2}$, οπότε

$E=\dfrac{\rho^2(-1-2\rho+2)}{2}=\dfrac{\rho^2(1-2\rho)}{2}$. Είναι $-1<\rho<-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 1>-\rho>\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \dfrac{1}{4}<\rho^2<1\ (3)$,

$-1<\rho<-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 2>-2\rho>1\Leftrightarrow 2<1-2\rho<3\ (4)$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις $(3),(4)$ προκύπτει ότι:

$$\frac{1}{2}<\rho^2(1-2\rho)<3\Leftrightarrow \frac{1}{4}<\frac{\rho^2(1-2\rho)}{2}<\frac{3}{2}\Leftrightarrow \frac{1}{4}<E<\frac{3}{2}$$

Δ4. Έστω $M(x_0,f(x_0))$ σημείο της C_f στο 1ο τεταρτημόριο. Τότε $x_0>0$.

Η εφαπτομένη ε΄ της C_f στο Μ έχει εξίσωση: $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

Η ε΄ διέρχεται από την αρχή των αξόνων όταν:

$$0-f(x_0)=f'(x_0)(0-x_0)\Leftrightarrow x_0f'(x_0)-f(x_0)=0$$

Η C_f δέχεται τουλάχιστον μία εφαπτομένη στο 1ο τεταρτημόριο που διέρχονται από την αρχή Ο των αξόνων, αν και μόνο αν η εξίσωση $xf'(x)-f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,+\infty)$.

Έστω $g(x)=xf'(x)-f(x)=x(e^x+2)-e^x-2x-1=xe^x+\cancel{2x}-e^x-\cancel{2x}-1\Leftrightarrow$

$g(x)=(x-1)e^x-1\ ,x\geq 0$.

Είναι $g(0)=-2$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}((x-1)e^x-1)=+\infty(+\infty)-1=+\infty$ άρα υπάρχει πολύ μεγάλος θετικός αριθμός α για τον οποίο είναι $g(\alpha)>0$.

Επομένως $g(0)g(\alpha)<0$.

Η g είναι συνεχής στο $[0,\alpha]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θ. Bolzano οπότε η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,\alpha)$.

20 Ρυθμός μεταβολής

Ρυθμός μεταβολής συγκεκριμένης συνάρτησης

9.α) Ο αρχικός πληθυσμός των μικροβίων είναι ίσος με

$P(0)=1000-\dfrac{500}{0+1}=500$.

β) Μετά από 9 ώρες έχουμε $P(9)=1000-\dfrac{500}{10}=950$ μικρόβια.

γ) Η συνάρτηση P είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $P'(t)=\dfrac{500}{(t+1)^2}$.

Άρα ο πληθυσμός των μικροβίων μεταβάλλεται με ρυθμό $P'(9)=\dfrac{500}{(9+1)^2}=5$ μικρόβια/ώρα.

10.Η συνάρτησηg είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty]$ με παράγωγο

$g'(x)=\left[M_0+M\left(1-e^{-\mu x}\right)\right]'=M\cdot\mu\cdot e^{-\mu x}$.

Είναι $g(x)=M_0+M\left(1-e^{-\mu x}\right)\Leftrightarrow M\left(1-e^{-\mu x}\right)=g(x)-M_0\Leftrightarrow$

$1-e^{-\mu x}=\dfrac{g(x)-M_0}{M}\Leftrightarrow e^{-\mu x}=1-\dfrac{g(x)-M_0}{M}=\dfrac{M-g(x)+M_0}{M}$.

Οπότε $g'(x)=M\cdot\mu\cdot\dfrac{M+M_0-g(x)}{M}=\mu\cdot\left(M+M_0-g(x)\right)$. Παρατηρούμε ότι $g(0)=M_0$. Άρα η σταθερά M_0 εκφράζει τις μονάδες του προϊόντος, που θα παραχθεί χωρίς τη χρήση λιπασμάτων.

Ρυθμός μεταβολής στην Οικονομία

11.Αν f η συνάρτηση κέρδους, τότε

$f(x)=-x^3+100x^2-2500x-150-\left(-5x^2+500x+100\right)=$

$f(x)=-x^3+100x^2-2500x-150+5x^2-500x-100\Leftrightarrow$

$f(x)=-x^3+105x^2-3000x-250, x\geq 0$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με παράγωγο

$f'(x)=-3x^2+210x-3000>0\Leftrightarrow x^2-70x+1000.$ Πρέπει

$f'(x)>0\Leftrightarrow -3x^2+210x-3000>0\Leftrightarrow x^2-70x+1000<0\Leftrightarrow 20<x<50$.

Άρα πρέπει να κατασκευαστούν περισσότερα από 20 τεμάχια και λιγότερα από 50 τεμάχια ώστε ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους να είναι θετικός.

12. Αν f η συνάρτηση κέρδους, τότε

$$f(x)=x^3-2x^2+3x+4-\left(7x^2+27x+8\right)=x^3-9x^2-24x-4.$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με παράγωγο

$$f'(x)=3x^2-18x-24>0 \Leftrightarrow x^2-6x-8>0 \Leftrightarrow x<3-\sqrt{17} \text{ ή } x>3+\sqrt{17}.$$

Επειδή το x είναι ο αριθμός των τεμαχίων, είναι φυσικός αριθμός, άρα

$x>3+\sqrt{17}$ οπότε και $x_{min}=8$.

Κίνηση σε καμπύλη

13. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=3x^2-12x$ και δεύτερη παράγωγο $f''(x)=6x-12$.

Είναι $f''(x)=6x-12>0 \Leftrightarrow x>2$

Επομένως τα ζητούμενα σημεία είναι τα σημεία $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ με $x_0>2$.

14. Είναι $y(t)=x(t)\ln x(t)$ οπότε

$$y'(t)=x'(t)\ln x(t)+\cancel{x(t)}\frac{x'(t)}{\cancel{x(t)}}=x'(t)\left(\ln x(t)+1\right).$$

Είναι $y'(t)=2x'(t) \Leftrightarrow \cancel{x'(t)}\left(\ln x(t)+1\right)=2\cancel{x'(t)} \Leftrightarrow$

$\ln x(t)+1=2 \Leftrightarrow \ln x(t)=1 \Leftrightarrow x(t)=e$.

Τότε $y(t)=e\ln e=e$, άρα η ζητούμενη θέση του σημείου είναι (e,e).

15. Έστω $M\left(x(t),y(t)\right)$. Τότε $y(t)=2x(t)-2$ και $x'(t)=2$.

α) Αν d(t) η απόσταση του M από την αρχή των αξόνων τότε

$$d=(OM)=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+(2x-2)^2} \Leftrightarrow d(x)=\sqrt{5x^2-8x+4}.$$

Η d είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$d'(x)=\frac{10x-8}{2\sqrt{5x^2-8x+4}}=\frac{5x-4}{\sqrt{5x^2-8x+4}}.$$

Επομένως $d(t)=(OM)=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}=\sqrt{x^2(t)+\left(2x(t)-2\right)^2} \Leftrightarrow$

$d(t)=\sqrt{5x^2(t)-8x(t)+4}$ οπότε, $d'(t)=\dfrac{5x(t)x'(t)-4x'(t)}{\sqrt{5x^2(t)-8x(t)+4}}$.

Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία $x(t_0)=3$ και $y(t_0)=4$ είναι

$d'(t_0)=\dfrac{5\cdot 3\cdot 2-4\cdot 2}{\sqrt{5\cdot 9-8\cdot 3+4}}=\dfrac{22}{5}\text{cm}/\sec$.

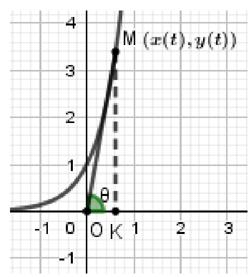
β) Αν Ε(t) το εμβαδόν του ορθογωνίου που σχηματίζεται από το σημείο Μ, τις προβολές του σημείου Μ στους άξονες και την αρχή των αξόνων τότε

$E(t)=x(t)y(t)=x(t)(2x(t)-2)=2x^2(t)-2x(t)$ οπότε

$E'(t)=4x(t)x'(t)-2x'(t)$. Τη χρονική στιγμή t_0 ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής είναι: $E'(t_0)=4\cdot 3\cdot 2-2\cdot 2=20\text{cm}/\sec$.

Αυξημένης δυσκολίας

16.α) Έστω $M(x(t),y(t))$ με $y(t)=e^{2x(t)}$. Επειδή το Μ απομακρύνεται από τον άξονα y΄y με ταχύτητα 0,5 m/sec, είναι $x'(t)=0,5$ m/sec. Έστω $t=t_0$ η χρονική στιγμή που το Μ διέρχεται από το $(1,e^2)$,τότε $x(t_0)=1$ και $y(t_0)=e^2$.Η ταχύτητα απομάκρυνσης του Μ από τον άξονα x΄x είναι $y'(t)=\left(e^{2x(t)}\right)'=2x'(t)e^{2x(t)}$ και τη χρονική στιγμή $t_0: y'(t_0)=2x'(t_0)e^{2x(t_0)}=2\cdot 0,5\cdot e^2=e^2$ cm/sec.



β) Έστω Κ η προβολή του Μ στον x΄x. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΜΟΚ είναι:

$$\varepsilon\varphi\theta=\frac{MK}{OK} \text{ άρα } \varepsilon\varphi\theta(t)=\frac{y(t)}{x(t)}=\frac{e^{2x(t)}}{x(t)}, \text{ οπότε: } (\varepsilon\varphi\theta(t))'=\left(\frac{e^{2x(t)}}{x(t)}\right)' \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}\theta'(t)=\frac{e^{2x(t)}2x'(t)x(t)-e^{2x(t)}x'(t)}{x^2(t)}$$ άρα τη χρονική στιγμή t_0 είναι:

$$\theta'(t_0)=\frac{e^{2x(t_0)}2x'(t_0)x(t_0)-e^{2x(t_0)}x'(t_0)}{x^2(t_0)}\sigma\upsilon\nu^2\theta(t_0).$$

Αν $(OM)=d(t)$, τη χρονική στιγμή t_0 είναι

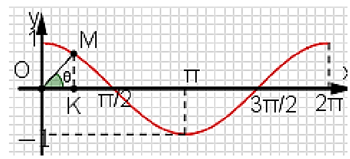
$d(t_0)=(OM)=\sqrt{1^2+\left(e^2\right)^2}=\sqrt{1+e^4}$,οπότε $\sigma\upsilon\nu\theta(t_0)=\dfrac{x(t_0)}{d(t_0)}=\dfrac{1}{\sqrt{1+e^4}}$ άρα

$$\theta'(t_0)=\frac{e^2\cdot 2\cdot 0,5\cdot 1-e^2\cdot 0,5}{1^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+e^4}}\right)^2=\frac{0,5e^2}{1+e^4}=\frac{e^2}{2(1+e^4)}\text{ rad/sec.}$$

γ) Είναι $d(t)=\sqrt{x^2(t)+\left(e^{2x(t)}\right)^2}=\sqrt{x^2(t)+e^{4x(t)}}$ οπότε

$$d'(t_0)=\frac{2x(t_0)x'(t_0)+e^{4x(t_0)}4x'(t_0)}{2\sqrt{x^2(t_0)+e^{4x(t_0)}}}=\cancel{2}\frac{1\cdot 0,5+e^4\cdot 2\cdot 0,5}{\cancel{2}\sqrt{1+e^4}}=\frac{2e^4+1}{2\sqrt{1+e^4}}\text{ cm/sec}$$

17.α) Έστω $M(x(t),y(t))$ με $y(t)=\text{συν}x(t)$. Επειδή το Μ απομακρύνεται από τον άξονα y΄y με ταχύτητα 0,5 m/sec, είναι $x'(t)=0,5$ m/sec.



Έστω $t=t_0$ η χρονική στιγμή που το Μ διέρχεται από το $\left(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2}\right)$, τότε

$x(t_0)=\frac{\pi}{3}$ και $y(t_0)=\frac{1}{2}$. Η ταχύτητα απομάκρυνσης του Μ από τον άξονα x΄x

είναι $y'(t)=\left(\text{συν}x(t)\right)'=-\text{ημ}x(t)\cdot x'(t)$ και τη χρονική στιγμή t_0:

$$y'(t_0)=-\text{ημ}x(t_0)\cdot x'(t_0)=-\text{ημ}\frac{\pi}{3}\cdot 0,5=-\frac{\sqrt{3}}{4}\text{ cm/sec.}$$

β) Έστω Κ η προβολή του Μ στον x΄x. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΜΟΚ είναι:

$$\text{εφ}\theta=\frac{MK}{OK}\text{ άρα }\text{εφ}\theta(t)=\frac{y(t)}{x(t)}=\frac{\text{συν}x(t)}{x(t)}\text{, οπότε }\left(\text{εφ}\theta(t)\right)'=\left(\frac{\text{συν}x(t)}{x(t)}\right)'\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\text{συν}^2\theta(t)}\theta'(t)=\frac{-\text{ημ}x(t)x'(t)x(t)-\text{συν}x(t)x'(t)}{x^2(t)}.$$

Αν $(OM)=d(t)$, τη χρονική στιγμή t_0 είναι

- $d(t_0)=(OM)=\sqrt{\left(\frac{\pi}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{4\pi^2+9}}{6}$, οπότε

$$\text{συν}\theta(t_0)=\frac{x(t_0)}{d(t_0)}=\frac{2\pi}{\sqrt{4\pi^2+9}}$$

- $\theta'(t_0)=\frac{-\text{ημ}x(t_0)x'(t_0)x(t_0)-\text{συν}x(t_0)x'(t_0)}{x^2(t_0)}\text{συν}^2\theta(t_0)\Leftrightarrow$

$$\theta'(t_0)=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0,5\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\cdot 0,5}{\left(\frac{\pi}{3}\right)^2}\left(\frac{2\pi}{\sqrt{4\pi^2+9}}\right)^2=-\frac{3\left(\pi\sqrt{3}+3\right)}{4\left(\pi^2+9\right)}\text{ rad/sec.}$$

γ) Είναι $d(t)=(OM)=\sqrt{x^2(t)+\sigma\upsilon\nu^2 x(t)}$ οπότε

$$d'(t_0)=\frac{\cancel{2}x(t_0)x'(t_0)-\cancel{2}\sigma\upsilon\nu x(t_0)\eta\mu x(t_0)x'(t_0)}{\cancel{2}\sqrt{x^2(t_0)+\sigma\upsilon\nu^2 x(t_0)}}\Leftrightarrow$$

$$d'(t_0)=\frac{x(t_0)\cdot x'(t_0)-\sigma\upsilon\nu x(t_0)\cdot\eta\mu x(t_0)\cdot x'(t_0)}{\sqrt{x^2(t_0)+\sigma\upsilon\nu^2 x(t_0)}}\Leftrightarrow$$

$$d'(t_0)=\frac{\frac{\pi}{3}\cdot 0,5-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0,5}{\sqrt{\frac{\pi^2}{9}+\frac{1}{4}}}\Leftrightarrow d'(t_0)=\frac{\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}}{\frac{\sqrt{4\pi^2+9}}{6}}\Leftrightarrow d'(t_0)=\frac{\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{\cancelto{4}{24}}}{\frac{\sqrt{4\pi^2+9}}{\cancel{6}}}\Leftrightarrow$$

$$=\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{4\sqrt{4\pi^2+9}}\ \text{cm/sec.}$$

18.α) Έστω $M(x(t),y(t))$ με $y(t)=25-x^2(t)$, $x(t)\in(0,5]$.

Είναι:

- $(OM)=\sqrt{97}\Leftrightarrow\sqrt{x^2(t_0)+y^2(t_0)}=\sqrt{97}\Leftrightarrow$

$$\sqrt{x^2(t_0)+\left(25-x^2(t_0)\right)^2}=\sqrt{97}\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x^2(t_0)+625-50x^2(t_0)+x^4(t_0)}=\sqrt{97}\Leftrightarrow$$

$$x^4(t_0)-49x^2(t_0)+625=97\Leftrightarrow$$

$$x^4(t_0)-49x^2(t_0)+528=0\Leftrightarrow$$

$$\left(x^2(t_0)-33\right)\left(x^2(t_0)-163\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{l}x^2(t_0)-33=0\Leftrightarrow x^2(t_0)=33\overset{x(t_0>0)}{\Leftrightarrow}\\ x(t_0)=\sqrt{33}\ \text{απορρίπτεται αφού}\ x(t_0)\le 5\end{array}\right)\ \text{ή}$$

$$\left(x^2(t_0)-16=0\Leftrightarrow x^2(t_0)=16\overset{x(t_0>0)}{\Leftrightarrow}x(t_0)=4\right).$$

Άρα $x(t_0)=4$ οπότε $y(t_0)=25-16=9$.

- $y'(t)=\left(25-x^2(t)\right)'=-2x(t)x'(t)$, άρα,

$$y'(t_0)=-2x(t_0)x'(t_0)=-2\cdot 4\cdot 2=-16\mu.\mu/\sec.$$

β) Είναι $\varepsilon\varphi\theta(t)=\dfrac{y(t)}{x(t)}$. Με παραγώγιση κατά μέλη έχουμε

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}\cdot\theta'(t)=\frac{y'(t)x(t)-y(t)x'(t)}{x^2(t)}\Leftrightarrow$$

$$\theta'(t)=\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)\cdot\frac{-2x^2(t)x'(t)-\left(25-x^2(t)\right)x'(t)}{x^2(t)}.$$

Για $t=t_0$ έχουμε:

- $\sigma\upsilon\nu\theta(t_0)=\dfrac{x(t_0)}{(OM)}=\dfrac{4}{\sqrt{97}}$, άρα
- $\theta'(t_0)=\sigma\upsilon\nu^2\theta(t_0)\cdot\dfrac{-2x^2(t_0)x'(t_0)-\left(25-x^2(t_0)\right)x'(t_0)}{x^2(t_0)}\Leftrightarrow$

$$\theta'(t_0)=\frac{\cancel{16}}{97}\cdot\frac{-2\cdot16\cdot2-(25-16)\cdot2}{\cancel{16}}=-\frac{82}{97}\text{ rad/sec}.$$

19. Έστω $M\big(x(t),y(t)\big)$ με $9x^2(t)+16y^2(t)=144$ (1), $x(t)>0,\ \ x'(t)=4$.
Με παραγώγιση της σχέσης (1) κατά μέλη έχουμε:

$$\left(9x^2(t)+16y^2(t)\right)'=(144)'\Leftrightarrow 18x(t)x'(t)+32y(t)y'(t)=0\ \ (2)$$

Τη χρονική στιγμή t_0 που το σημείο Μ βρίσκεται στη θέση που τέμνεται ή έλλειψη με την ευθεία $y=x$ είναι $x(t_0)=y(t_0)$.

Από τη σχέση (1) για $t=t_0$ έχουμε

$$9x^2(t_0)+16x^2(t_0)=144\Leftrightarrow 25x^2(t_0)=144\Leftrightarrow x^2(t_0)=\frac{144}{25}\overset{x(t_0)>0}{\Leftrightarrow}x(t_0)=\frac{12}{5}$$

Από τη σχέση (2) για $t=t_0$ έχουμε

$$18x(t_0)x'(t_0)+32y(t_0)y'(t_0)=0\Leftrightarrow 18\cdot\frac{\cancel{12}}{\cancel{5}}\cdot4+32\cdot\frac{\cancel{12}}{\cancel{5}}y'(t_0)=0\Leftrightarrow$$

$$72+32y'(t_0)=0\Leftrightarrow 32y'(t_0)=-72\Leftrightarrow y'(t_0)=-\frac{72}{32}\Leftrightarrow$$

$$y'(t)=-\frac{9}{4}\ \text{ μον.μ / sec}.$$

20.α) Έστω $M\big(x(t),y(t)\big)$ με $y(t)=\dfrac{1}{x(t)}$, $x(t)>0$ και $x'(t)=1$.

Είναι $y'(t)=-\dfrac{x'(t)}{x^2(t)}$. Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σημείο Μ διέρχεται από το σημείο Κ είναι $x(t_0)=2, y(t_0)=\dfrac{1}{2}$ οπότε

$y'(t_0)=-\dfrac{1}{4}\text{cm/sec}$.

β) i. Είναι $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$ και $f'(x(t))=-\dfrac{1}{x^2(t)}$.

ε: $y-\dfrac{1}{x(t)}=-\dfrac{1}{x^2(t)}(x-x(t))\Leftrightarrow y=-\dfrac{1}{x^2(t)}x+\dfrac{2}{x(t)}$.

Για $x=0$ είναι $y=\dfrac{2}{x(t)}$ άρα $A\left(0,\dfrac{2}{x(t)}\right)$ και για $y=0$ είναι

$x=2x(t)$ άρα $B(2x(t),0)$.

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E(t)=(OAB)=\dfrac{1}{2}\cdot 2x(t)\cdot\dfrac{2}{x(t)}=2$, άρα

$E'(t)=0$ οπότε $E'(t_0)=0$.

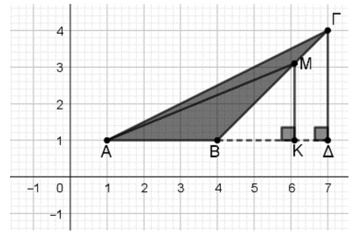
ii. Είναι $d(t)=(AB)=\sqrt{4x^2(t)+\dfrac{4}{x^2(t)}}=\dfrac{2\sqrt{x^4(t)+1}}{x(t)}$ οπότε

$$d'(t)=2\cdot\frac{\dfrac{\cancel{4}^{2}x^3(t)x'(t)}{\cancel{2}\sqrt{x^4(t)+1}}-\sqrt{x^4(t)+1}\cdot x'(t)}{x^2(t)}\Leftrightarrow$$

$$d'(t)=2\cdot\frac{2x^3(t)x'(t)-\left(x^4(t)+1\right)\cdot x'(t)}{x^2(t)\cdot\sqrt{x^4(t)+1}}.$$

Τη χρονική στιγμή t_0 έχουμε: $d'(t_0)=\cancel{2}\,\dfrac{16-17}{\cancel{4}^{\cancel{2}}\sqrt{17}}=-\dfrac{\sqrt{33}}{34}\text{cm/sec}$.

21.α) Έστω $M(x(t),y(t))$. Όταν το Μ κινείται στο τμήμα ΑΒ τότε η τεταγμένη του είναι $y(t)=1$ οπότε $y'(t)=0$. Όταν το Μ κινείται στο ΒΓ, του οποίου ο φορέας έχει εξίσωση $y-1=\dfrac{4-1}{7-4}(x-4)\Leftrightarrow y=x-3$ τότε $y(t)=x(t)-3$ οπότε ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του Μ είναι $y'(t)=x'(t)=1\text{cm/sec}$



β) Είναι

$$E(t)=\frac{1}{2}\cdot(AB)(MK)=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\left(y(t)-1\right)=$$

$$\frac{3}{2}\left(x(t)-4\right).$$

Είναι $E'(t)=\frac{3}{2}x'(t)=\frac{3}{2}cm/sec=E'(t_0)$,

όπου t_0 η χρονική στιγμή κατά την οποία διέρχεται από το σημείο Δ.

γ) i) Όταν το Μ κινείται στο τμήμα ΑΒ τότε

$d(t)=(AM)=x(t)-1$ οπότε $d'(t)=x'(t)=1cm/sec$.

Όταν το Μ κινείται στο ΒΓ, είναι

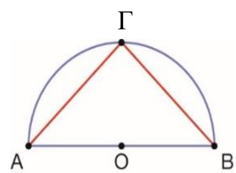
$$d(t)=\sqrt{\left(x(t)-1\right)^2+\left(y(t)-1\right)^2}=\sqrt{\left(x(t)-1\right)^2+\left(x(t)-3-1\right)^2}\Leftrightarrow$$

$$d(t)=\sqrt{\left(x(t)-1\right)^2+\left(x(t)-4\right)^2}=\sqrt{2x^2(t)-10x(t)+17}\text{ οπότε}$$

$$d'(t)=\frac{4x(t)x'(t)-10x'(t)}{2\sqrt{2x^2(t)-10x(t)+17}}=\frac{2x(t)x'(t)-50x'(t)}{\sqrt{2x^2(t)-10x(t)+17}}.$$

ii) Η ταχύτητα απομάκρυνσης του Μ από το Α όταν διέρχεται από το σημείο Δ

είναι ίση με $d'(t_0)=\dfrac{2\cdot 6\cdot 1-5\cdot 1}{\sqrt{2\cdot 36-10\cdot 6+17}}=\dfrac{7\sqrt{29}}{29}cm/sec$.



22. Έστω $A\Gamma=x$ και ρ η ακτίνα του ημικυκλίου.
Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$AB^2=AB^2+B\Gamma^2(1)\Leftrightarrow B\Gamma^2=AB^2-A\Gamma^2\Leftrightarrow$$

$$B\Gamma^2=4\rho^2-x^2\Leftrightarrow B\Gamma=\sqrt{4\rho^2-x^2}.$$

Επομένως $E=(AB\Gamma)=\frac{1}{2}(A\Gamma)(B\Gamma)=\dfrac{x\sqrt{4\rho^2-x^2}}{2}$ οπότε

$$E'(x)=\frac{\sqrt{4\rho^2-x^2}}{2}+\frac{x}{2}\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{4\rho^2-x^2}}=\frac{4\rho^2-x^2-x^2}{2\sqrt{4\rho^2-x^2}}\Leftrightarrow$$

$$E'(x)=\frac{4\rho^2-2x^2}{2\sqrt{4\rho^2-x^2}}=\frac{2\rho^2-x^2}{\sqrt{4\rho^2-x^2}}.$$

Όταν το Γ βρίσκεται στο μέσο του ημικυκλίου τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές οπότε το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ είναι ίσο με την ακτίνα ρ του ημικυκλίου. Τότε από τη σχέση (1) έχουμε

$$x^2+x^2=4\rho^2\Leftrightarrow 2x^2=4\rho^2\Leftrightarrow x^2=2\rho^2\Leftrightarrow x=\sqrt{2}\rho.$$

Επομένως ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ τη στιγμή που το Γ είναι στο μέσο του ημικυκλίου είναι ίσος με $E'\left(\rho\sqrt{2}\right)=\dfrac{2\rho^2-2\rho^2}{\sqrt{4\rho^2-2\rho^2}}=0$.

Ρυθμός μεταβολής σε διάφορα γεωμετρικά σχήματα

23. Έστω $x(t)$ η πλευρά του τετραγώνου.

Τότε το εμβαδόν του είναι ίσο με $E(t)=x^2(t)$ οπότε $E'(t)=2x(t)x'(t)$.

Τη χρονική στιγμή t_0 που το εμβαδόν είναι ίσο με 16 είναι

$E(t_0)=16 \Leftrightarrow x^2(t_0)=16 \Leftrightarrow x(t_0)=4$ οπότε ο ρυθμός μεταβολής του είναι ίσος με $E'(t_0)=2x(t_0)x'(t_0)=16cm^2/s$.

24. Έστω $x(t), y(t)$ οι πλευρές του ορθογωνίου, $\Pi(t)$ η περίμετρος του τότε:

$\Pi(t)=20 \Leftrightarrow 2x(t)+2y(t)=20 \Leftrightarrow x(t)+y(t)=10 \Leftrightarrow y(t)=10-x(t)$.

Επειδή το μήκος του ελαττώνεται με ρυθμό $0{,}5cm/s$, είναι $x'(t)=-0{,}5cm/sec$. Έστω t_0 η χρονική στιγμή που το μήκος του είναι 3cm, τότε $x(t_0)=3$ και $y(t_0)=7$. Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι

$E(t)=x(t)y(t)=x(t)\big(10-x(t)\big)=10x(t)-x^2(t)$.

Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού είναι: $E'(t)=10x'(t)-2x(t)x'(t)$ οπότε τη χρονική στιγμή t_0 είναι:

$E'(t_0)=10x'(t_0)-2x(t_0)x'(t_0)=10(-0{,}5)-2\cdot 3(-0{,}5)=-2cm^2/sec$.

25. Έστω $x(t), y(t)$ οι πλευρές του ορθογωνίου, $\Pi(t)$ η περίμετρος του τότε:

$\Pi(t)=2 \Leftrightarrow 2x(t)+2y(t)=2 \Leftrightarrow x(t)+y(t)=1 \Leftrightarrow y(t)=1-x(t)$.

Επειδή το μήκος του αυξάνεται με ρυθμό 1cm/sec, είναι $x'(t)=1cm/sec$.

Έστω t_0 η χρονική στιγμή που είναι τετράγωνο, τότε

$x(t_0)=y(t_0) \Leftrightarrow x(t_0)=1-x(t_0) \Leftrightarrow 2x(t_0)=1 \Leftrightarrow x(t_0)=0{,}5m$.

Είναι $E(t)=x(t)y(t)=x(t)\big(1-x(t)\big)=x(t)-x^2(t)$.

Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού είναι: $E'(t)=x'(t)-2x(t)x'(t)$ οπότε τη χρονική στιγμή t_0 είναι: $E'(t_0)=x'(t_0)-2x(t_0)x'(t_0)=1-2\cdot 0{,}5\cdot 1=0$.

26. Είναι $x(t)=t^2-2t+3$ οπότε $x'(t)=2t-2$.

- Το εμβαδόν του τετραγώνου είναι ίσο με $E(t)=x^2(t)$ οπότε $E'(t)=2x(t)x'(t)$. Τη χρονική στιγμή $t=3sec$ είναι:

$E'(3)=2x(3)x'(3)=2\left(3^2-2\cdot3+3\right)(2\cdot3-2)=48$.

- Η περίμετρος του τετραγώνου είναι ίση με

$\Pi(t)=4x(t)=4t^2-8t+12$ οπότε $\Pi'(t)=8t-8$ άρα $\Pi'(3)=16$.

27. Είναι $x(t)=t^2-2t+7, y(t)=3t+1$ οπότε $x'(t)=2t-2$ και $y'(t)=3$.

Το εμβαδόν του τετραγώνου είναι ίσο με $E(t)=x(t)\cdot y(t)$ οπότε $E'(t)=x'(t)y(t)+x(t)y'(t)$ (1). Τη χρονική στιγμή t_0 που γίνεται τετράγωνο δηλαδή οι διαστάσεις του είναι ίσες έχουμε

$x(t_0)=y(t_0)\Leftrightarrow t_0^2-2t_0+7=3t_0+1\Leftrightarrow t_0^2-5t_0+6=0\Leftrightarrow(t_0=2)$ ή $(t_0=3)$

Από τη σχέση (1) για $t_0=2$ έχουμε

$E'(2)=x'(2)y(2)+x(2)y'(2)=2\cdot7+7\cdot3=35$ και για $t_0=3$

$E'(3)=x'(3)y(3)+x(3)y'(3)=4\cdot10+10\cdot3=70$.

28. Αν $y(t)$ το πλάτος του ορθογωνίου, $\Pi(t)$ η περίμετρος του τότε

$\Pi(t)=20\Leftrightarrow 2y(t)+2x(t)=20\Leftrightarrow y(t)+x(t)=10\Leftrightarrow$

$y(t)=10-x(t)=10-t^2+4t$.

Το εμβαδόν του τετραγώνου είναι ίσο με

$E(t)=x(t)y(t)=\left(t^2-4t\right)\left(10-t^2+4t\right)=-t^4+8t^3-6t^2-40t$ οπότε

$E'(t)=-4t^3+24t^2-12t-40$ (1)

Το ορθογώνιο γίνεται τετράγωνο όταν οι διαστάσεις του είναι ίσες οπότε

$y(t)=x(t)\Leftrightarrow 10-x(t)=x(t)\Leftrightarrow 2x(t)=10\Leftrightarrow x(t)=5\Leftrightarrow$

$t^2-4t=5\Leftrightarrow t^2-4t-5=0\Leftrightarrow$ $(t=5)$ ή $(t=-1$ απορρίπτεται$)$.

Από τη σχέση (1) για $t_0=5$ έχουμε $E'(5)=0$.

29. α) Η χωρητικότητα της δεξαμενής είναι ίση με $V(0)=12000$.

β) Είναι $V'(t)=4500\left(2-\frac{t^2}{10}\right)^2\left(-\frac{t}{5}\right)$ οπότε $V'(1)=-3249\ \text{lt/h}$.

γ) Πρέπει $V(t)=0\Leftrightarrow 2-\frac{t^2}{10}=0\Leftrightarrow 20-t^2=0\Leftrightarrow$ $t^2=20\overset{t\geq0}{\Leftrightarrow}t=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$.

30. Η επιφάνεια της σφαίρας έχει τύπο $E(t)=4\pi r^2(t)=4\pi\left(3t^2+t\right)^2$ οπότε

$E'(t)=8\pi\left(3t^2+t\right)(6t+1)$. Τη χρονική στιγμή $t_0=2\sec$ είναι $E'(2)=1456\pi$.

Ο όγκος της σφαίρας έχει τύπο $V(t)=\frac{4}{3}\pi r^3(t)=\frac{4}{3}\pi\left(3t^2+t\right)^3$,

$V'(t)=4\pi\left(3t^2+t\right)^2(6t+1)$.

Τη χρονική στιγμή $t_0=2\sec$ είναι $V'(2)=4\pi\cdot 14^2\cdot 13=10192\pi$.

31.Αν $R(t)$ η ακτίνα της σφαίρας τότε η σφαίρα έχει τύπο $E(t)=4\pi R^2(t)$ οπότε $E'(t)=8\pi R(t)R'(t)$. Τη χρονική στιγμή t_0 είναι

$64=8\pi\cdot 4\cdot R'(t_0)\Leftrightarrow R'(t_0)=\frac{2}{\pi}$ cm/sec. Ο όγκος της σφαίρας έχει τύπο

$V(t)=\frac{4}{3}\pi R^3(t)$ οπότε $V'(t)=4\pi R^2(t)R'(t)$.

Τη χρονική στιγμή t_0 είναι $V'(t_0)=4\pi\cdot 16\frac{2}{\pi}=128\ \text{cm}^3/\text{s}$.

Αυξημένης δυσκολίας

32.Έστω $(OA)=x(t)$, $(OB)=y(t)$. Από το νόμο συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΟΒ έχουμε $(AB)^2=s^2(t)=(OA)^2+(OB)^2-2(OA)(OB)\sigma\upsilon\nu 120^\circ\Leftrightarrow$

$s(t)=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)+x(t)y(t)}$ οπότε

$$s'(t)=\frac{2x(t)x'(t)+2y(t)y'(t)+x'(t)y(t)+x(t)y'(t)}{2\sqrt{x^2(t)+y^2(t)+x(t)y(t)}}.$$

Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία

$x(t_0)=8\text{cm}, y(t_0)=6\text{cm}, x'(t_0)=20\text{km/h}, y'(t_0)=30\text{km/h}$ είναι

$$s'(t_0)=\frac{2\cdot 8\cdot 20+2\cdot 6\cdot 30+20\cdot 6+8\cdot 30}{2\sqrt{8^2+6^2+8\cdot 6}}=\frac{1040}{2\sqrt{148}}=\frac{260\sqrt{37}}{37}\ \text{Km/h}.$$

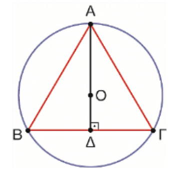
33.Έστω $x(t)$ η ακμή του κύβου τότε $x'(t)=2$.

Ο κύβος έχει επιφάνεια $E(t)=6x^2(t)$ οπότε $E'(t)=12x(t)x'(t)$.

Για $t=t_0$ είναι $x(t_0)=10$ και $E'(t_0)=12x(t_0)x'(t_0)=240\ \text{cm}^2/\text{sec}$.

Έστω ότι ο ρυθμός μεταβολής διπλασιάζεται τη χρονική στιγμή t_1.

Τότε $E'(t_1)=2E'(t_0)=480\Leftrightarrow 24x(t_1)=480\Leftrightarrow x(t_1)=20$ cm. Άρα διπλασιάζεται τη χρονική στιγμή που η ακμή του είναι ίση με 20cm.



34.α) Έστω ρ η ακτίνα του κύκλου.
Είναι $AB = B\Gamma = A\Gamma = \lambda_3 = \rho\sqrt{3}$. Το εμβαδόν του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΟΒ είναι ίσο με $E = \dfrac{\left(\rho\sqrt{3}\right)^2}{4} = \dfrac{3\rho^2\sqrt{3}}{4}$.

β) Ο κύκλος έχει εμβαδόν $E = \pi\rho^2 = 4\pi \Leftrightarrow \rho = 2$ cm.

γ) Είναι $E(t) = \dfrac{3\rho^2(t)\sqrt{3}}{4}$ οπότε $E'(t) = \dfrac{6\rho(t)\rho'(t)\sqrt{3}}{4}$.

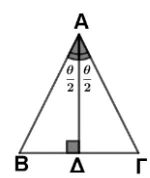
Για $t = t_0$ είναι $\rho(t_0) = 2$ και $E'(t_0) = \dfrac{6\cdot 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{4} = 9 \text{ cm}^2/\text{sec}$.

35. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, είναι: $\beta(0) = 4\text{cm}$, $\gamma(0) = 2\text{cm}$. Τη χρονική στιγμή t, η πλευρά β έχει αυξήσει το μήκος της κατά $2t$ cm και η πλευρά γ, κατά $2t$ cm. Άρα $\beta(t) = 4 + 2t$ και $\gamma(t) = 2 + 2t$. Το Εμβαδόν $E(t)$ του τριγώνου είναι: $E(t) = \dfrac{1}{2}\beta(t)\gamma(t)\eta\mu A = \dfrac{1}{2}\beta(t)\gamma(t)\eta\mu 150^\circ = \dfrac{1}{4}\beta(t)\gamma(t)$ με.

$$E'(t) = \frac{1}{4}\left(\beta'(t)\gamma(t) + \beta(t)\gamma'(t)\right).$$

Είναι $\beta(3) = 4 + 2\cdot 3 = 10$, $\gamma(3) = 2 + 2\cdot 3 = 8$, $\beta'(3) = 2$ και $\gamma'(3) = 2$.

Άρα $E'(3) = \dfrac{1}{4}\left(\beta'(3)\gamma(3) + \beta(3)\gamma'(3)\right) = 9\,\text{cm}^2/\text{s}$.



36. Έστω ΑΒΓ το ισοσκελές τρίγωνο με ΑΒ=ΑΓ και $A\Delta = u(t)$ το ύψος που αντιστοιχεί στη βάση του. Αν $\hat{A} = \theta(t)$ τότε $\varepsilon\varphi B\hat{A}\Delta = \dfrac{B\Delta}{A\Delta} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\dfrac{\theta(t)}{2} = \dfrac{4}{u(t)}$ (1)

Με παραγώγιση κατά μέλη της σχέσης (1) έχουμε:

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\dfrac{\theta(t)}{2}}\frac{\theta'(t)}{2} = \frac{-4u'(t)}{u^2(t)} \Leftrightarrow \theta'(t) = -\frac{8u'(t)\sigma\upsilon\nu^2\dfrac{\theta(t)}{2}}{u^2(t)}.$$

Τη χρονική στιγμή t_0 που είναι $(A\Delta) = u(t_0) = 3$, ισχύει από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ: $(AB)^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Leftrightarrow (AB) = 5$.

Τότε $\sigma\upsilon\nu\dfrac{\theta(t_0)}{2} = \dfrac{A\Delta}{AB} = \dfrac{3}{5}$ οπότε $\theta'(t_0) = \dfrac{-8\cdot 0,5\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}{3^2} = -0,16 \text{ rad/sec}$.

Ευθύγραμμη κίνηση

37. Η θέση του πλοίου που κινείται ανατολικά δίνεται από τη σχέση $x(t)=40t$ και αυτού που κινείται βόρεια $y(t)=30t$, t ο χρόνος σε ώρες. Αν s είναι η μεταξύ τους απόσταση, τότε $s^2(t)=x^2(t)+y^2(t)=2500t^2 \Leftrightarrow s(t)=50t$ οπότε $s'(t)=50$ μίλια/h.

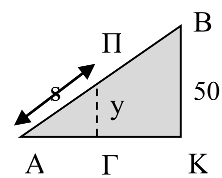
38. Έστω $s(t)$ η απόσταση ΑΒ. Είναι $s(t)=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)} \Leftrightarrow$

$s(t)=\sqrt{\left(t^2-t\right)^2+\left(4-t^2\right)^2}=\sqrt{2t^4-2t^3-7t^2+16}$ οπότε

$$s'(t)=\frac{8t^3-6t^2-14t}{2\sqrt{2t^4-2t^3-7t^2+16}}.$$

Άρα τη χρονική στιγμή $t=1$ είναι $s'(1)=-2$.

39. Επειδή το διάστημα που διανύει ο ποδηλάτης είναι s και η ταχύτητα με την οποία κινείται είναι 60m/min, ισχύει ότι $s'(t)=60$ m/min. Η ταχύτητα με την οποία ανυψώνεται ο ποδηλάτης είναι ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης y.



Τα τρίγωνα ΑΠΓ και ΑΒΚ είναι όμοια, οπότε

$$\frac{ΑΠ}{ΑΒ}=\frac{ΠΓ}{ΒΚ} \Leftrightarrow \frac{s(t)}{500}=\frac{y(t)}{50} \Leftrightarrow s(t)=10y(t) \Leftrightarrow$$

$y(t)=\frac{1}{10}s(t)$ οπότε $y'(t)=\frac{1}{10}s'(t)=\frac{1}{10}\cdot 60=6m/\min$.

40.α) Αν $u(t),\alpha(t)$ είναι αντίστοιχα η ταχύτητα, η επιτάχυνση του κινητού τότε

$u(t)=x'(t)=t^2-6t+5$, $\alpha(t)=u'(t)=2t-6$.

β) Το κινητό μένει ακίνητο όταν $u(t)=0 \Leftrightarrow t=1$ ή 5. Κινείται κατά τη θετική φορά όταν $t\in[0,1)\cup(5,6]$ και κατά την αρνητική φορά όταν $t\in(1,5)$.

γ) Το συνολικό διάστημα που διανύει το κινητό είναι

$$s_{ολ}=|x(1)-x(0)|+|x(5)-x(1)|+|x(6)-x(5)|=\frac{46}{3}.$$

δ) Η μέση ταχύτητα του κινητού είναι $\bar{u}=\frac{s_{ολ}}{\Delta t}=\frac{23}{9}$.

41. Έστω $s(t)=(\text{ΑΠ}), h(t)=\text{ΑΚ}$.
Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΚΠ έχουμε
$\text{ΑΠ}^2=\text{ΑΚ}^2+\text{ΠΚ}^2 \Leftrightarrow s^2(t)=h^2(t)+900$ (1). Με παραγώγιση κατά μέλη της σχέσης (1) έχουμε, $\left(s^2(t)\right)'=\left(h^2(t)+900\right)' \Leftrightarrow \cancel{2}s(t)s'(t)=\cancel{2}h(t)h'(t)$ (2)

Τη χρονική στιγμή $t=2\sec$ είναι $h(2)=20\cdot 2=40\text{m}$.

Από τη σχέση (1) είναι $s^2(2)=h^2(2)+900=40^2+900=2500 \Leftrightarrow$

$s(2)=50$ m οπότε από τη σχέση (2) έχουμε:

$s(2)s'(2)=h(2)h'(2) \Leftrightarrow 50s'(2)=40\cdot 20 \Leftrightarrow s'(2)=16 \text{ m/min}$.

Αυξημένης δυσκολίας

42. Το πλοίο Α σε διάστημα t ωρών διανύει απόσταση 8t ναυτικών μιλίων, οπότε αν θεωρήσουμε ως χρονική στιγμή t = 0 στις 10 π.μ.το πλοίο Α έχει διανύσει 16 ν.μ. οπότε η συνάρτηση θέσης t ώρες μετά, είναι $x(t)=16+8t$.

Έστω $y(t)$ η συνάρτηση θέσης του πλοίου Β. Επειδή διέρχεται από το Ο στις 10 π.μ., είναι $y(0)=0$ οπότε $y(t)=32t$ αφού κινείται με ταχύτητα 32ν.μ./ω..
Η μεταξύ τους απόσταση είναι

$d(t)=(\text{ΑΒ})=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}=\sqrt{(16+8t)^2+(32t)^2}$. Στις 11 π.μ. είναι $t=1$,

οπότε $d(1)=(\text{ΑΒ})=\sqrt{(16+8)^2+(32)^2}=\sqrt{576+1024}=\sqrt{1600}=40$ ν.μ..
Ο ρυθμός μεταβολής της απόστασής τους είναι

$$d'(t)=\left(\sqrt{(16+8t)^2+(32t)^2}\right)'=\frac{\left((16+8t)^2+(32t)^2\right)'}{2\sqrt{(16+8t)^2+(32t)^2}} \Leftrightarrow$$

$$d'(t)=\frac{\cancel{2}(16+8t)(16+8t)'+\cancel{2}\cdot 32t(32t)'}{\cancel{2}\sqrt{(16+8t)^2+(32t)^2}}=\frac{8(16+8t)+32^2t}{\sqrt{(16+8t)^2+(32t)^2}}.$$

Άρα ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής είναι ίσος με

$$d'(1)=\frac{8\cdot 24+32^2}{\sqrt{24^2+32^2}}=\frac{192+1024}{40}=\frac{1216}{40}=30,4 \text{ ν.μ./ω..}$$

43. Επειδή το αυτοκίνητο κινείται με ταχύτητα 20m/sec και απέχει από τη διασταύρωση 20m, χρειάζεται 1 δευτερόλεπτο να φτάσει στη διασταύρωση, οπότε t sec μετά θα βρίσκεται σε απόσταση $x(t)=20t-20$ μέτρα από τη διασταύρωση. Η μοτοσυκλέτα t sec μετά τη διέλευσή της από τη διασταύρωση βρίσκεται σε απόσταση $y(t)=20t$ από τη διασταύρωση. Η μεταξύ τους απόσταση είναι $d(t)=(AM)=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}=\sqrt{(20t-20)^2+(20t)^2}$.

Η ταχύτητα απομάκρυνσής τους είναι

$$d'(t)=\left(\sqrt{(20t-20)^2+(20t)^2}\right)'=\frac{2(20t-20)20+2\cdot 20t\cdot 20}{2\sqrt{(20t-20)^2+(20t)^2}}.$$

Τη χρονική στιγμή $t=4$ είναι $d'(4)=\dfrac{2400+3200}{2\sqrt{(80-20)^2+(80)^2}}=\dfrac{5600}{200}=28$ m/sec

44. Επειδή σε ένα λεπτό το Σ_1 φτάνει στο Α κινούμενο με 30m/min, είναι ΟΑ = 30. Επειδή σε ένα λεπτό το Σ_2 φτάνει στο Β κινούμενο με 20m/min, είναι ΟΒ = 20. Αν $A\Gamma=s_1$ τότε η ταχύτητα του Σ_1 είναι $\upsilon_1=s_1'(t)=45$.

Αν $B\Delta=s_2$ τότε η ταχύτητα του Σ_2 είναι $\upsilon_2=s_2'(t)$.

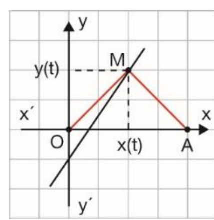
Επειδή ΑΒ//ΓΔ από το θεώρημα του Θαλή ισχύει ότι:

$$\frac{OA}{A\Gamma}=\frac{OB}{B\Delta}\Leftrightarrow\frac{30}{s_1(t)}=\frac{20}{s_2(t)}\Leftrightarrow s_2(t)=\frac{2}{3}s_1(t) \text{ οπότε}$$

$$s_2'(t)=\frac{2}{3}s_1'(t)=\frac{2}{3}\cdot 45=30\text{m}/\text{min}.$$

45. Έστω $M(x(t),y(t))$ με $y(t)=2x(t)-4$ οπότε

$y'(t)=2x'(t)$. Είναι $x(t_0)=e^4\Leftrightarrow e^{t_0^2}=e^4\Leftrightarrow t_0=2$.



Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΜΑ έχει τύπο

$(OMA)=E(t)=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot y(t)=4y(t)$ οπότε

$E'(t)=4y'(t)=4\cdot 2x'(t)=8\cdot 2te^{t^2}$, άρα ο ρυθμός μεταβολής του όταν διέρχεται από το σημείο Μ είναι ίσος με $E'(2)=32e^4$.

46.α) Ο όγκος του μπαλονιού την χρονική στιγμή t δίνεται από τον τύπο $v(t)=\frac{4}{3}\pi r^3(t)$ και η επιφάνειά του από τον τύπο $E(t)=4\pi r^2(t)$ όπου $r(t)$ είναι η ακτίνα του συναρτήσει του χρόνου t.

Ο ρυθμός μεταβολής του όγκου είναι $v'(t)=\frac{4}{3}\pi\cdot 3r^2(t)\cdot r'(t)=4\pi r^2(t)r'(t)$

και ο ρυθμός μεταβολής της επιφάνειάς του είναι $E'(t)=8\pi r(t)r'(t)$.

Έστω t_0 η χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής του όγκου του είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της επιφάνειας του.

Έχουμε $v'(t_0)=2E'(t_0) \Leftrightarrow 4\pi r^2(t_0)\cancel{r'(t_0)}=16\pi r(t_0)\cancel{r'(t_0)} \overset{r'(t_0)\neq 0}{\Leftrightarrow}$

$r^2(t_0)-4r(t_0)=0 \Leftrightarrow r(t_0)\big(r(t_0)-4\big)=0 \overset{r(t)\neq 0}{\Leftrightarrow} r(t_0)=4$.

(Η ακτίνα δεν γίνεται να είναι μηδέν γιατί το μπαλόνι συνεχώς φουσκώνει.)

β) Έστω $x(t)$ η απόσταση του παρατηρητή από το σημείο του εδάφους που ξεκίνησε την ανύψωση το μπαλόνι και $h(t)$ το ύψος στο οποίο βρίσκεται το μπαλόνι. Είναι $x'(t)=-8\pi$ m/min αφού μειώνεται η απόσταση και $h'(t)=16\pi$ m/min αφού αυξάνεται το ύψος. Έστω t_1 η χρονική στιγμή κατά την οποία ο παρατηρητής απέχει 100 m από το σημείο του εδάφους που ξεκίνησε την ανύψωση το μπαλόνι και το μπαλόνι βρίσκεται σε ύψος $h=100$ m.
Είναι $x(t_1)=100$ και $h(t_1)=100$.

i. Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο που σχηματίζεται έχουμε:

$$d^2(t)=x^2(t)+h^2(t) \quad (1) \Leftrightarrow d(t)=\sqrt{x^2(t)+h^2(t)} \quad (2)$$

Παραγωγίζουμε την (1) οπότε έχουμε

$$2d(t)d'(t)=2x(t)x'(t)+2h(t)h'(t) \Leftrightarrow d(t)d'(t)=x(t)x'(t)+h(t)h'(t) \Leftrightarrow$$

$$d(t)d'(t)=-8\pi x(t)+16\pi h(t) \Leftrightarrow d(t)d'(t)=-8\pi\big(x(t)+2h(t)\big) \Leftrightarrow$$

$$d'(t)=\frac{-8\pi\big(x(t)+2h(t)\big)}{d(t)} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} d'(t)=\frac{-8\pi\big(x(t)+2h(t)\big)}{\sqrt{x^2(t)+h^2(t)}}.$$

Άρα $d'(t_1)=\dfrac{-8\pi\big(x(t_1)+2h(t_1)\big)}{\sqrt{x^2(t_1)+h^2(t_1)}}=\dfrac{-8\pi(100+200)}{\sqrt{20000}}=$

$=-\dfrac{2400\pi}{100\sqrt{2}}=-\dfrac{24\pi}{\sqrt{2}}=-12\sqrt{2}\pi$ m/min.

ii. Είναι $\text{εφ}\theta(t)=\dfrac{h(t)}{x(t)}$.Με παραγώγιση κατά μέλη έχουμε:

$$\frac{1}{\text{συν}^2\theta(t)}\cdot\theta'(t)=\frac{h'(t)x(t)-h(t)x'(t)}{x^2(t)} \Leftrightarrow$$

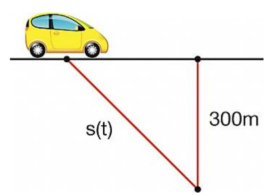
$$\frac{d^2(t)}{x^2(t)}\cdot\theta'(t)=\frac{h'(t)x(t)-h(t)x'(t)}{x^2(t)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2(t)+h^2(t)}{x^2(t)}\cdot\theta'(t)=\frac{h'(t)x(t)-h(t)x'(t)}{x^2(t)}\Leftrightarrow\theta'(t)=\frac{h'(t)x(t)-h(t)x'(t)}{x^2(t)+h^2(t)}$$

$$\theta'(t)=\frac{16\pi x(t)+8\pi h(t)}{x^2(t)+h^2(t)}\Leftrightarrow\theta'(t)=\frac{8\pi\big(2x(t)+h(t)\big)}{x^2(t)+h^2(t)}.$$

Άρα $\theta'(t_0)=\dfrac{8\pi\big(2x(t_0)+h(t_0)\big)}{x^2(t_0)+h^2(t_0)}=\dfrac{8(200+100)}{20000}=\dfrac{2400}{20000}=0{,}12$ rad/min.

47. Έστω $x(t)$ η οριζόντια απόσταση του αυτοκινήτου από τον παρατηρητή και $s(t)$ η μεταξύ τους απόσταση. Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο που σχηματίζεται είναι



$s^2(t)=x^2(t)+90000\quad(1)$

Με παραγώγιση κατά μέλη της σχέσης (1) έχουμε

$\left(s^2(t)\right)'=\left(x^2(t)+90000\right)'\Leftrightarrow\cancel{2}s(t)s'(t)=\cancel{2}x(t)x'(t)\quad(2)$

Τη χρονική στιγμή t_0 που η μεταξύ τους απόσταση είναι ίση με 500 m δηλαδή $s(t_0)=500$ έχουμε από τη σχέση (1):

$500^2=x^2(t_0)+90000\Leftrightarrow x^2(t_0)=25000-16000\Leftrightarrow$

$x^2(t_0)=9000\Leftrightarrow x(t_0)=400$ και από τη σχέση (2):

$s(t_0)s'(t_0)=x(t_0)x'(t_0)\Leftrightarrow 0{,}5\cdot s'(t_0)=0{,}4\cdot 80\Leftrightarrow s'(t_0)=64\,Km/h$.

48. Έστω $OA=x(t)$, $OB=y(t)$. Είναι $x'(t)=-8$, $y'(t)=9$.

Επίσης $s^2(t)=x^2(t)+y^2(t)\quad(1)$

Με παραγώγιση κατά μέλη της σχέσης (1) έχουμε

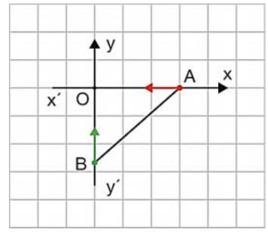
$2s(t)s'(t)=2x(t)x'(t)+2y(t)y'(t)\Leftrightarrow s(t)s'(t)=x(t)x'(t)+y(t)y'(t)\quad(2)$

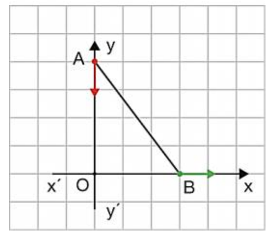
Τη χρονική στιγμή t_0 που βρίσκονται οι πεζοπόροι Α,Β αντίστοιχα σε απόσταση 4 km ανατολικά και 3 km νότια από το σταυροδρόμι Ο είναι:

- $x(t_0)=4,\ y(t_0)=3$.
- Από τη σχέση (1): $s^2(t_0)=4^2+3^2=25\Leftrightarrow s(t_0)=5$.
- Από τη σχέση (2): $s(t_0)s'(t_0)=x(t_0)x'(t_0)+y(t_0)y'(t_0)\Leftrightarrow$

$5s'(t_0)=4\cdot(-8)+3\cdot 9\Leftrightarrow s'(t_0)=-1$ km/h, άρα η μεταξύ τους απόσταση μικραίνει.

49. Για το σημείο Β ισχύει: $\upsilon = 2\,\text{m/s}$ και $s(t) = \upsilon t$ άρα $s(t) = 2t$. Αν η συνάρτηση θέσης του σημείου Α είναι $y(t)$, τότε από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο έχουμε:





$$OA^2 + OB^2 = AB^2 \Leftrightarrow$$
$$y^2(t) + (2t)^2 = 10^2 \Leftrightarrow y^2(t) + 4t^2 = 100 \Leftrightarrow$$
$$y^2(t) = 100 - 4t^2 \Leftrightarrow y(t) = \sqrt{100 - 4t^2}\,.$$

α) Για το εμβαδόν $E(t)$ του τριγώνου ΟΑΒ, ισχύει:

$$E(t) = \frac{1}{2}(OA)\cdot(OB) = \frac{1}{2}s(t)\cdot y(t) \Leftrightarrow$$
$$E(t) = \frac{1}{2}\cdot 2t\cdot\sqrt{100-4t^2} = t\cdot\sqrt{100-4t^2}\,.$$

β) Είναι $(OA) = 6\text{m} \Leftrightarrow y(t) = 6\text{m} \Leftrightarrow \sqrt{100-4t^2} = 6 \Leftrightarrow 100 - 4t^2 = 36 \Leftrightarrow$ $4t^2 = 64 \Leftrightarrow t^2 = 16$ άρα $t = 4$ sec. Είναι:

$$E'(t) = \sqrt{100-4t^2} + t\cdot\frac{1}{2\sqrt{100-4t^2}}\cdot\left(100-4t^2\right)' = \sqrt{100-4t^2} - \frac{4t^2}{\sqrt{100-4t^2}}\,.$$

Άρα $E'(4) = \sqrt{100-4\cdot 4^2} - \dfrac{4\cdot 4^2}{\sqrt{100-4\cdot 4^2}} = 6 - \dfrac{64}{6} = -\dfrac{14}{3}\ \text{m}^2/\text{sec}$.

Σύνθετες ασκήσεις

50.α) Τα τρίγωνα ΦΟΣ και ΚΠΣ είναι ορθογώνια με κοινή γωνία την $\Pi\hat{\Sigma}K$ άρα είναι όμοια. Επομένως έχουμε: $\dfrac{\Pi K}{O\Phi} = \dfrac{\Pi\Sigma}{O\Sigma} \Leftrightarrow \dfrac{1,6}{8} = \dfrac{s}{x+s} \Leftrightarrow 0,2 = \dfrac{s}{x+s} \Leftrightarrow$

$0,2x + 0,2s = s \Leftrightarrow 0,8s = 0,2x \Leftrightarrow s = \dfrac{1}{4}x$. Τα s και x μεταβάλλονται συναρτήσει του χρόνου t άρα έχουμε $s(t) = \dfrac{1}{4}x(t)$. Η γυναίκα απομακρύνεται από τον φανοστάτη με ταχύτητα 0,8 m/s άρα $x'(t) = 0,8$. Επομένως ο ρυθμός μεταβολής του ίσκιου της είναι $s'(t) = \dfrac{1}{4}x'(t) = \dfrac{1}{4}\cdot 0,8 = 0,2$ m/s.

β) Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΦΟΣ έχουμε:

$$(\Phi\Sigma)^2 = (\Phi O)^2 + (O\Sigma)^2 \overset{\Phi\Sigma\ge 0}{\Leftrightarrow} (\Phi\Sigma) = \sqrt{(\Phi O)^2 + (O\Sigma)^2} \Leftrightarrow$$

$$(\Phi\Sigma)=\sqrt{64+(x+s)^2}\Leftrightarrow(\Phi\Sigma)=\sqrt{64+\left(x+\frac{1}{4}x\right)^2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\Phi\Sigma)=\sqrt{64+\left(\frac{5}{4}x\right)^2}\Leftrightarrow(\Phi\Sigma)=\sqrt{64+\frac{25}{16}x^2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\Phi\Sigma)=\sqrt{\frac{1024+25x^2}{16}}\Leftrightarrow(\Phi\Sigma)=\frac{1}{4}\sqrt{1024+25x^2}\,.$$

Η απόσταση $d=(\Phi\Sigma)$ μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου άρα

$$d(t)=\frac{1}{4}\sqrt{1024+25x^2(t)}\,.$$

Η ταχύτητα απομάκρυνσης του Σ από το Φ είναι:

$$d'(t)=\frac{1}{4}\frac{50x(t)x'(t)}{2\sqrt{1024+25x^2(t)}}=\frac{25x(t)x'(t)}{4\sqrt{1024+25x^2(t)}}=$$

$$=\frac{25x(t)\cdot 0,8}{4\sqrt{1024+25x^2(t)}}=\frac{5x(t)}{\sqrt{1024+25x^2(t)}}\,.$$

Έστω t_0 η χρονική στιγμή που η γυναίκα απέχει 1 m από το Ο τότε $x(t_0)=1$

άρα $d'(t_0)=\dfrac{5x(t_0)}{\sqrt{1024+25x^2(t_0)}}=\dfrac{5}{\sqrt{1049}}$ m/sec.

γ) Το τετράπλευρο ΦΟΠΚ είναι τραπέζιο με βάσεις τις ΦΟ, ΠΚ και ύψος το ΟΠ

άρα το εμβαδόν του είναι: $E=\dfrac{\left[(\Phi O)+(\Pi K)\right]\cdot(O\Pi)}{2}=\dfrac{9,6x}{2}=4,8x$.

Το εμβαδόν μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου οπότε $E(t)=4,8x(t)$ άρα

$E'(t)=4,8x'(t)=4,8\cdot 0,8=3,84$ m/s.

δ) Την $t=2$ sec το φανάρι είναι σε ύψος $\Phi(2)=4$ m. Είναι όμοιο με το α) ερώτημα απλά τώρα το $(\Phi O)=4$ m άρα σύμφωνα με το α) ερώτημα έχουμε:

$$\frac{\Pi K}{O\Phi}=\frac{\Pi\Sigma}{O\Sigma}\Leftrightarrow\frac{1,6}{4}=\frac{s}{x+s}\Leftrightarrow 0,4=\frac{s}{x+s}\Leftrightarrow$$

$$0,4x+0,4s=s\Leftrightarrow 0,6s=0,4x\Leftrightarrow s=\frac{2}{3}x\,.$$

Τα s και x μεταβάλλονται συναρτήσει του χρόνου t άρα έχουμε $s(t)=\dfrac{2}{3}x(t)$.

Η γυναίκα απομακρύνεται από τον φανοστάτη με ταχύτητα 0,8 m/s οπότε $x'(t)=0,8$.

Άρα ο ρυθμός μεταβολής του ίσκιου της είναι:
$s'(t)=\frac{2}{3}x'(t)=\frac{2}{3}\cdot 0,8=\frac{1,6}{3}=\frac{16}{30}=\frac{8}{15}$ m/s.

51.α) Το σημείο Α ολισθαίνει πάνω στον τοίχο με ταχύτητα $u_A(t)=y'(t)$ και το σημείο Β ολισθαίνει πάνω στο έδαφος με ταχύτητα $u_B(t)=x'(t)=0,1$ m/sec, όπου t ο χρόνος σε sec. Τη χρονική στιγμή t_1, η κορυφή της σκάλας απέχει από το δάπεδο 2,5m οπότε έχουμε $y(t_1)=2,5$. Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΟΒ έχουμε: $x^2(t)+y^2(t)=(AB)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2(t)+y^2(t)=9 \Leftrightarrow x^2(t)=9-y^2(t) \overset{x(t)\geq 0}{\Leftrightarrow} x(t)=\sqrt{9-y^2(t)}$ m.

Άρα είναι $x(t_1)=\sqrt{9-y^2(t_1)}=\sqrt{9-6,25}=\sqrt{2,75}$ m.

i. Είναι $\sigma\upsilon\nu\theta_1=\frac{OB}{AB} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta_1=\frac{x}{3} \Leftrightarrow x=3\sigma\upsilon\nu\theta_1$ άρα $x(t)=3\sigma\upsilon\nu\theta_1(t)$.
Ισχύει ότι $x'(t)=-3\eta\mu\theta_1(t)\cdot\theta_1'(t)$ οπότε για $t=t_1$ έχουμε:
$x'(t_1)=-3\eta\mu\theta_1(t_1)\cdot\theta_1'(t_1) \Leftrightarrow 0,1=-\cancel{3}\cdot\frac{2,5}{\cancel{3}}\cdot\theta_1'(t_1) \Leftrightarrow \theta_1'(t_1)=-\frac{1}{25}$ rad/sec.

($\eta\mu\theta_1=\frac{OA}{AB} \Leftrightarrow \eta\mu\theta_1=\frac{y}{3}$ άρα $\eta\mu\theta_1(t)=\frac{y(t)}{3}$ επομένως

$\eta\mu\theta_1(t_1)=\frac{y(t_1)}{3}=\frac{2,5}{3}$.) Το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ορθογώνιο οπότε ισχύει

$\theta_1+\theta_2=\frac{\pi}{2}$ δηλαδή $\theta_1(t)+\theta_2(t)=\frac{\pi}{2}$.
Με παραγώγιση της σχέσης κατά μέλη έχουμε

$\theta_1'(t)+\theta_2'(t)=0 \Leftrightarrow \theta_1'(t)=-\theta_2'(t)$ άρα $|\theta_1'(t)|=|\theta_2'(t)|$.

ii. Από το πυθαγόρειο θεώρημα για το τρίγωνο ΑΟΒ έχουμε
$x^2(t)+y^2(t)=9$ (1) άρα είναι $2x(t)x'(t)+2y(t)y'(t)=0 \Leftrightarrow$
$x(t)x'(t)+y(t)y'(t)=0 \Leftrightarrow 0,1x(t)+y(t)y'(t)=0$.

Για $t=t_1$ είναι: $0,1x(t_1)+y(t_1)y'(t_1)=0 \Leftrightarrow 0,1\cdot\sqrt{2,75}+2,5y'(t_1)=0 \Leftrightarrow$

$y'(t_1)=-\frac{\sqrt{2,75}}{25}$ rad/sec.

β) i. Τη χρονική στιγμή t_2 το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ισοσκελές και ορθογώνιο οπότε:

- $(OA)=(OB)\Leftrightarrow x(t_2)=y(t_2)$,
- από τη σχέση (1) για $t=t_2$ είναι $x^2(t_2)+y^2(t_2)=9\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2x^2(t_2)=9\Leftrightarrow x^2(t_2)=\frac{9}{2}\overset{x(t_2)\geq 0}{\Leftrightarrow} x(t_2)=\frac{3}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow \Leftrightarrow x(t_2)=\frac{3\sqrt{2}}{2}=y(t_2).$$

Με παραγώγιση της σχέσης (1) έχουμε: $2x(t)x'(t)+2y(t)y'(t)=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x(t)x'(t)+y(t)y'(t)=0\Leftrightarrow 0{,}1x(t)+y(t)y'(t)=0 \quad (2)$$

Από τη σχέση (2) για $t=t_2$ είναι $0{,}1x(t_2)+y(t_2)y'(t_2)=0\Leftrightarrow$

$$0{,}1\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}y'(t_2)=0\Leftrightarrow \cancel{\frac{3\sqrt{2}}{2}}y'(t_2)=-0{,}1\cdot\cancel{\frac{3\sqrt{2}}{2}}\Leftrightarrow y'(t_2)=-0{,}1 \text{ m/sec.}$$

ii. Με παραγώγιση της σχέσης (2) έχουμε:

$$0{,}1x'(t)+\left[y'(t)\right]^2+y(t)y''(t)=0\Leftrightarrow 0{,}01+\left[y'(t)\right]^2+y(t)y''(t)=0.$$

Για $t=t_2$ είναι $0{,}01+\left[y'(t_2)\right]^2+y(t_2)y''(t_2)=0\Leftrightarrow$

$$0{,}01+0{,}01+\frac{3\sqrt{2}}{2}y''(t_2)=0\Leftrightarrow 0{,}02+\frac{3\sqrt{2}}{2}y''(t_2)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\sqrt{2}}{2}y''(t_2)=-\frac{2}{100}\Leftrightarrow y''(t_2)=-\frac{2}{100}\cdot\frac{2}{3\sqrt{2}}\Leftrightarrow$$

$$y''(t_2)=-\frac{2}{100}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}\Leftrightarrow y''(t_2)=-\frac{\sqrt{2}}{150}\ \text{m/sec}^2.$$

52.α) Η ταχύτητα με την οποία πλησιάζει την ακτή το περιπολικό είναι ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του.

Θέτουμε $f(x)=y$ οπότε $y=-\frac{1}{3}x^3$.

Τα μεγέθη x,y μεταβάλλονται συναρτήσει του χρόνου οπότε

$y(t)=-\frac{1}{3}x^3(t)$ οπότε $y'(t)=-x^2(t)$.

Όμως $x(t)=\alpha(t)$ και $x'(t)=\alpha'(t)=-\alpha(t)$ οπότε $y(t)=-\frac{1}{3}\alpha^3(t)$.

Επομένως $y'(t)=-\alpha^2(t)\alpha'(t)=\alpha^3(t)$.

Τη χρονική στιγμή t_0 έχουμε $\alpha(t_0)=-3$ οπότε $y'(t_0)=\alpha^3(t_0)=-27$ m/sec.

β) Η ταχύτητα με την οποία πλησιάζει την αρχή των αξόνων είναι ο ρυθμός μεταβολής της απόστασής του από την αρχή των αξόνων.

Είναι $d(t)=(OA)=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}=\sqrt{\alpha^2(t)+\frac{1}{9}\alpha^6(t)}$ οπότε:

$$d'(t)=\frac{\alpha(t)\cdot\alpha'(t)+\frac{1}{3}\alpha^5(t)\cdot\alpha'(t)}{\sqrt{\alpha^2(t)+\frac{1}{9}\alpha^6(t)}}=\frac{-\alpha^2(t)-\frac{1}{3}\alpha^6(t)}{\sqrt{\alpha^2(t)+\frac{1}{9}\alpha^6(t)}}.$$

Την χρονική στιγμή t_0 έχουμε:

$$d'(t_0)=\frac{-\alpha^2(t_0)-\frac{1}{3}\alpha^6(t_0)}{\sqrt{\alpha^2(t_0)+\frac{1}{9}\alpha^6(t_0)}}=\frac{-9-\frac{1}{3}\cdot 3^6}{\sqrt{9+\frac{1}{9}\cdot 3^6}}=\frac{-9-3^5}{\sqrt{9+\frac{1}{3^2}\cdot 3^6}}=$$

$$=\frac{-9-3^5}{\sqrt{9+3^4}}=\frac{-9-243}{\sqrt{9+81}}=\frac{-252}{\sqrt{90}}\text{ m/sec.}$$

γ) Ο προβολέας φωτίζει κατά μήκος της εφαπτομένης της f στο σημείο Α, άρα τα φώτα του προβολέα παριστάνουν την εφαπτόμενη της C_f στο Α.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=-x^2$.

Η εφαπτομένη της C_f στο Α έχει εξίσωση:

$$(\varepsilon): y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)\Leftrightarrow y+\frac{\alpha^3}{3}=-\alpha^2(x-\alpha)\Leftrightarrow$$

$$y=-\alpha^2x+a^3-\frac{\alpha^3}{3}\Leftrightarrow y=-\alpha^2x+\frac{2\alpha^3}{3}.$$

Για $y=0$ έχουμε $0=-\alpha^2x+\frac{2\alpha^3}{3}\Leftrightarrow \alpha^2x=\frac{2\alpha^3}{3}\Leftrightarrow x=\frac{2\alpha}{3}$.

Τα μεγέθη x_M,α μεταβάλλονται συναρτήσει του χρόνου οπότε έχουμε

$$x_M(t)=\frac{2}{3}\alpha(t)\quad(1)$$

Άρα ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου Μ της ακτής στο οποίο πέφτουν τα φώτα του προβολέα είναι ίσος με $x_M{}'(t)=\frac{2}{3}\alpha'(t)=-\frac{2}{3}\alpha(t)$.

Τη χρονική στιγμή t_0 είναι $x_M{}'(t)=-\frac{2}{3}\alpha(t_0)=2\text{m}/\sec$.

δ) Έχουμε $\varepsilon\varphi\theta=f'(\alpha)=-\alpha^2$. Η γωνία θ και το α μεταβάλλονται συναρτήσει του χρόνου άρα $\varepsilon\varphi\theta(t)=-\alpha^2(t)\quad(2)$

Με παραγώγιση κατά μέλη της σχέσης (2) έχουμε

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}\cdot\theta'(t)=-2\alpha(t)\alpha'(t) \quad (3)$$

Από τη σχέση (3) τη χρονική στιγμή t_0 έχουμε:

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t_0)}\cdot\theta'(t_0)=-2\alpha(t_0)\alpha'(t_0)\Leftrightarrow\left(\varepsilon\varphi^2\theta(t_0)+1\right)\cdot\theta'(t_0)=2\alpha^2(t_0)\Leftrightarrow$$

$$82\theta'(t_0)=18\Leftrightarrow\theta'(t_0)=\frac{9}{41}\text{rad/sec}.$$

(Είναι $\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t_0)}=\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t_0)+\eta\mu^2\theta(t_0)}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t_0)}=1+\varepsilon\varphi^2\theta(t_0)$. Επίσης $\varepsilon\varphi\theta(t_0)=-\alpha^2(t_0)=-9$).

53.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με παράγωγο $f'(x)=-\dfrac{1}{x\ln^2 x}$.

Η ε έχει εξίσωση $y-f(k)=f'(k)(x-k)\Leftrightarrow y-\dfrac{1}{\ln k}=-\dfrac{1}{k\ln^2 k}(x-k)\Leftrightarrow$

$$y-\frac{1}{\ln k}=-\frac{1}{k\ln^2 k}x+\frac{k}{k\ln^2 k}\Leftrightarrow y=-\frac{1}{k\ln^2 k}x+\frac{1}{\ln k}+\frac{1}{\ln^2 k}\Leftrightarrow$$

$$y=-\frac{1}{k\ln^2 k}x+\frac{\ln k+1}{\ln^2 k}.$$

Για $y=0$ είναι $-\dfrac{1}{k\ln^2 k}x+\dfrac{\ln k+1}{\ln^2 k}=0\Leftrightarrow x=k(\ln k+1)\Leftrightarrow x=k\ln k+k$.

Άρα $A(k\ln k+k,0)$.

β) Το k μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου άρα:

$K(k(t),f(k(t))),A(k(t)\ln k(t)+k(t),0)$. Επίσης είναι $k'(t)=2k(t)\text{cm/s}$.

i. Είναι $x_A(t)=k(t)\ln k(t)+k(t)$ οπότε

$$x'_A(t)=k'(t)\ln k(t)+\cancel{k(t)}\frac{k'(t)}{\cancel{k(t)}}+k'(t)=k'(t)\ln k(t)+2k'(t).$$

Τη χρονική στιγμή t_0 είναι $k(t_0)=e$, $k'(t_0)=2k(t_0)=2e$ cm/s οπότε

$$x'_A(t_0)=k'(t_0)\ln k(t_0)+2k'(t_0)=2e\ln e+4e=6e\,\text{cm/sec}.$$

ii. Είναι $\varepsilon\varphi\theta=\lambda_\varepsilon=-\dfrac{1}{k\ln^2 k}$. Η γωνία θ και το k μεταβάλλονται συναρτήσει του χρόνου άρα $\varepsilon\varphi\theta(t)=-\dfrac{1}{k(t)\ln^2 k(t)}$ (1). Με παραγώγιση κατά μέλη της σχέσης

(1) έχουμε $\left(\varepsilon\varphi\theta(t)\right)'=\left(-\dfrac{1}{k(t)\ln^2 k(t)}\right)'\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}\theta'(t)=\frac{1}{k^2(t)\ln^4 k(t)}\left(k'(t)\ln^2 k(t)+\cancel{k(t)}\frac{2\ln k(t)}{\cancel{k(t)}}k'(t)\right)\Leftrightarrow$$

$\theta'(t)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}{k^2(t)\ln^4 k(t)}\left(k'(t)\ln^2 k(t)+2\ln k(t)k'(t)\right)$. Για $t=t_0$ έχουμε

$$\theta'(t_0)=\frac{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t_0)}{k^2(t_0)\ln^4 k(t_0)}\left(k'(t_0)\ln^2 k(t_0)+2\ln k(t_0)k'(t_0)\right)\Leftrightarrow$$

$$\theta'(t_0)=\frac{\dfrac{\cancel{e^2}}{1+e^2}}{\cancel{e^2}}(2e+4e)\Leftrightarrow\theta'(t_0)=\frac{6e}{1+e^2}.$$

(Είναι $\sigma\upsilon\nu^2\theta(t_0)=\dfrac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\theta(t_0)}=\dfrac{1}{1+\left(-\dfrac{1}{e}\right)^2}=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{e^2}}=\dfrac{1}{\dfrac{e^2+1}{e^2}}=\dfrac{e^2}{e^2+1}$).

54.α) Τα μεγέθη x,y μεταβάλλονται συναρτήσει του χρόνου οπότε έχουμε $M(x(t),y(t))$, $y(t)=2x^2(t)$ και $x'(t)=3cm/s$.

Είναι $d(t)=(OM)=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}$.

Για $t=t_0$ έχουμε $d(t_0)=\sqrt{x^2(t_0)+y^2(t_0)}\Leftrightarrow\sqrt{68}=\sqrt{x^2(t_0)+4x^4(t_0)}\Leftrightarrow$ $4x^4(t_0)+x^2(t_0)-68=0$. Θέτουμε $x^2(t_0)=\omega>0$ οπότε προκύπτει η δευτεροβάθμια εξίσωση $4\omega^2+\omega-68=0$ με ρίζες $(\omega=4)$ ή $\left(\omega=-\dfrac{17}{4}\right.$ που απορρίπτεται).

Άρα $x^2(t_0)=4\overset{x(t_0)>0}{\Leftrightarrow}x(t_0)=2$. Τότε $y(t_0)=2x^2(t_0)=2\cdot4=8$.

i.Είναι $y'(t)=\left(2x^2(t)\right)'=4x(t)x'(t)$.

Για $t=t_0$ έχουμε $y'(t_0)=4x(t_0)x'(t_0)=24cm/sec$.

ii. Το ζητούμενο ορθογώνιο έχει διαστάσεις $x(t),y(t)$ οπότε το εμβαδόν του είναι $E(t)=x(t)y(t)=2x^3(t)$.

Για $t=t_0$ είναι $E'(t_0)=6x^2(t)x'(t_0)=72cm^2/sec$.

iii. Είναι $\varepsilon\varphi\theta(t)=\dfrac{y(t)}{x(t)}$ (1)

Με παραγώγιση κατά μέλη της σχέσης (1) έχουμε

$$(\varepsilon\varphi\theta(t))'=\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)'\Leftrightarrow\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}\theta'(t)=\frac{y'(t)x(t)-y(t)x'(t)}{x^2(t)}\Leftrightarrow$$

$$\left(1+\varepsilon\varphi^2\theta(t)\right)\theta'(t)=\frac{y'(t)x(t)-y(t)x'(t)}{x^2(t)}.$$

Για $t=t_0$ έχουμε $\varepsilon\varphi\theta(t_0)=\dfrac{y(t_0)}{x(t_0)}=4$ οπότε

$$\left(1+\varepsilon\varphi^2\theta(t_0)\right)\theta'(t_0)=\frac{y'(t_0)x(t_0)-y(t_0)x'(t_0)}{x^2(t_0)}\Leftrightarrow$$

$$(1+16)\theta'(t_0)=\frac{24\cdot 2-8\cdot 3}{4}\Leftrightarrow 17\theta'(t_0)=6\Leftrightarrow\theta'(t_0)=\frac{6}{17}\text{ rad/sec.}$$

β) Πρέπει $y'(t_0)=x'(t_0)=3\text{cm/sec}\Leftrightarrow 4x(t_0)x'(t_0)=3\Leftrightarrow$

$12x(t_0)=3\Leftrightarrow x(t_0)=\dfrac{1}{4}$. Τότε $y(t_0)=\dfrac{1}{8}$ οπότε $M\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{8}\right)$.

55. Τα μεγέθη x,y μεταβάλλονται συναρτήσει του χρόνου οπότε έχουμε $M(x_0(t),y_0(t))$ με $y_0(t)=1-x_0^2(t)$. Η ΑΒ έχει εξίσωση

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y-1+x_0^2=-2x_0(x-x_0)\Leftrightarrow$$

$$y=-2x_0x+2x_0^2-x_0^2+1\Leftrightarrow y=-2x_0x+x_0^2+1.$$

Για $y=0$ είναι $-2x_0x+x_0^2+1=0\Leftrightarrow 2x_0x=x_0^2+1\Leftrightarrow x=\dfrac{x_0^2+1}{2x_0}$ οπότε το σημείο Α έχει τετμημένη $x_A(t)=\dfrac{1+x_0^2(t)}{2x_0(t)}=\dfrac{1}{2x_0(t)}+\dfrac{x_0(t)}{2}$.

Το Α κινείται στον Ox με ταχύτητα $u_A=3$ m/s άρα $x'_A(t)=3$ m/s, οπότε

$$\left(\frac{1}{2x_0(t)}+\frac{x_0(t)}{2}\right)'=3\Leftrightarrow-\frac{x'_0(t)}{2x_0^2(t)}+\frac{x'_0(t)}{2}=3\quad(1)$$

Έστω t_0 η χρονική στιγμή κατά την οποία $x_0(t_0)=\dfrac{1}{2}$.

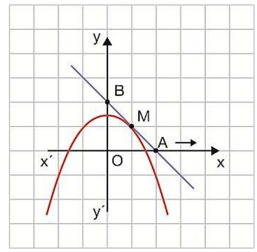
Από τη σχέση (1) για $t=t_0$ έχουμε:

$$-2x_0'(t_0)+\frac{x_0'(t_0)}{2}=3 \Leftrightarrow -4x_0'(t_0)+x_0'(t_0)=6 \Leftrightarrow$$

$$-3x_0'(t_0)=6 \Leftrightarrow x_0'(t_0)=-2\,.$$

α) Το Β κινείται στον Oy με ταχύτητα

$$u_B=y_B'(t_0)=2x_0(t_0)\cdot x_0'(t_0)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot(-2)=-2\,\mathrm{m/s}$$



β) Είναι $E=(OAB)=\frac{1}{2}(OA)(OB)=\frac{1}{2}x_A\cdot y_B$.

Τα μεγέθη Ε, x_A, y_A μεταβάλλονται συναρτήσει του χρόνου οπότε

$$E(t)=\frac{1}{2}x_A(t)y_B(t)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+x_0^2(t)}{2x_0(t)}\left(1+x_0^2(t)\right)=$$

$$\frac{\left(1+x_0^2(t)\right)^2}{4x_0(t)} \Leftrightarrow E(t)=\frac{x_0^4(t)+2x_0^2(t)+1}{4x_0(t)}=\frac{1}{4}x_0^3(t)+\frac{1}{2}x_0(t)+\frac{1}{4x_0(t)} \text{ οπότε}$$

$$E'(t)=\frac{3}{4}x_0^2(t)x_0'(t)+\frac{1}{2}x_0'(t)-\frac{x_0'(t)}{4x_0^2(t)}\,.$$

Για $t=t_0$ έχουμε $E'(t_0)=\frac{3}{4}x_0^2(t_0)x_0'(t_0)+\frac{1}{2}x_0'(t_0)-\frac{x_0'(t_0)}{4x_0^2(t_0)} \Leftrightarrow$

$$E'(t_0)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot(-2)+\frac{1}{2}\cdot(-2)+\frac{2}{4\cdot\frac{1}{4}} \Leftrightarrow$$

$$E'(t_0)=-\frac{3}{8}-1+2 \Leftrightarrow E'(t_0)=1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}\,\mathrm{m^2/sec}\,.$$

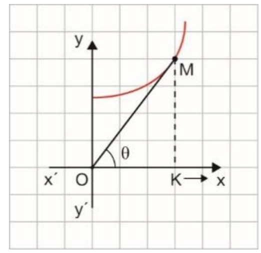
γ) Έστω t_1 η χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του Μ είναι διπλάσιος από την απόλυτη τιμή του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης του.

Τότε $x_0'(t_1)=2\left|y_0'(t_1)\right|=4\left|x_0'(t_1)x_0(t_1)\right| \underset{x_0'(t_1)>0}{\overset{x_0(t_1)>0}{\Leftrightarrow}}$

$$\cancel{x_0'(t_1)}=4\cancel{x_0'(t_1)}x_0(t_1) \Leftrightarrow 4x_0(t_1)=1 \Leftrightarrow x_0(t_1)=\frac{1}{4}\,.$$

Επομένως $E(t_1)=\frac{1}{4}x_0^3(t_1)+\frac{1}{2}x_0(t_1)+\frac{1}{4x_0(t_1)} \Leftrightarrow$

$$E(t_1)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{64}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+1 \Leftrightarrow E(t_1)=\frac{1}{256}+\frac{1}{8}+1 \Leftrightarrow E(t_1)=\frac{289}{256}\,\mathrm{m^2/s}.$$



56. Έστω $f(x)=y, M(x,y)$. Τα μεγέθη x,y μεταβάλλονται συναρτήσει του χρόνου οπότε έχουμε

$y(t)=x^2(t)+1$, $M(x(t),y(t))$, $K(x(t),0)$ με

$x'(t)=3\,cm/s$.

Τη χρονική στιγμή t_0 που το M έχει τετμημένη 2 είναι $x(t_0)=2$ οπότε $y(t_0)=x^2(t_0)+1=5$.

α) Είναι $(KM)=y(t)$ οπότε ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης KM είναι ίσος με $y'(t)=2x(t)x'(t)$ άρα τη ζητούμενη χρονική στιγμή t_0 είναι ίσος με

$y'(t_0)=2x(t_0)x'(t_0)=12\,cm/s$.

β) Η απόσταση $d=(OM)=\sqrt{x^2+y^2}$ μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου οπότε $d(t)=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}$ άρα

$$d'(t_0)=\frac{x(t_0)x'(t_0)+y(t_0)y'(t_0)}{\sqrt{x^2(t_0)+y^2(t_0)}} \Leftrightarrow d'(t_0)=\frac{2\cdot 3+5\cdot 12}{\sqrt{4+25}}=\frac{66}{\sqrt{29}}=\frac{66\sqrt{29}}{29}.$$

γ) Είναι $εφθ(t)=\dfrac{y(t)}{x(t)}$ (1). Με παραγώγιση κατά μέλη της σχέσης (1) έχουμε

$$\frac{θ'(t_0)}{συν^2θ(t_0)}=\frac{y'(t_0)x(t_0)-x'(t_0)y(t_0)}{x^2(t_0)} \Leftrightarrow$$

$$\left(1+εφ^2θ(t_0)\right)θ'(t_0)=\frac{y'(t_0)x(t_0)-x'(t_0)y(t_0)}{x^2(t_0)} \Leftrightarrow$$

$$\left(1+\frac{25}{4}\right)θ'(t_0)=\frac{12\cdot 2-3\cdot 5}{4} \Leftrightarrow \frac{29}{\cancel{4}}θ'(t_0)=\frac{9}{\cancel{4}} \Leftrightarrow$$

$$θ'(t_0)=\frac{9}{29}\ rad/s.$$

δ) Έστω ότι το M βρίσκεται στη θέση $M(x_0, f(x_0))$. Η εφαπτομένη στο M είναι η ε:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow y-\left(x_0^2+1\right)=2x_0(x-x_0) \Leftrightarrow y=2x_0x-x_0^2+1.$$

Για $y=0$ είναι $2x_0x-x_0^2+1=0 \Leftrightarrow 2x_0x=x_0^2-1 \Leftrightarrow x=\dfrac{x_0^2-1}{2x_0}$, άρα

$E\left(\dfrac{x_0^2-1}{2x_0},0\right)$. Είναι $x_E(t)=\dfrac{x_0^2(t)-1}{2x_0(t)}$ οπότε

$$x'_E(t_0)=\frac{4x_0^2(t_0)x'(t_0)-2x'(t_0)\left(x_0^2(t_0)-1\right)}{4x_0^2(t_0)}\Leftrightarrow$$

$$x'_E(t_0)=\frac{4\cdot4\cdot3-2\cdot3\cdot3}{16}=\frac{30}{16}=\frac{15}{8}\text{cm/s}.$$

57.α) i. Έστω $\varphi(x)=\dfrac{f(3x-5)-1}{x-2}\Leftrightarrow f(3x-5)=\varphi(x)(x-2)+1$, $x\neq2$.

Είναι $\lim\limits_{x\to2}f(3x-5)=\lim\left[\varphi(x)(x-2)+1\right]=1.$

Όμως $\lim\limits_{x\to2}f(3x-5)\underset{\substack{x\to2,\\u\to1}}{\overset{3x-5=u}{=}}\lim\limits_{u\to1}f(u)$ οπότε είναι $\lim\limits_{x\to1}f(x)=1=f(1)$ αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο 1.

ii. Είναι $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(3x-5)-1}{x-2}\underset{\substack{x\to2,\\u\to1}}{\overset{3x-5=u}{=}}\lim\limits_{u\to1}\dfrac{f(u)-f(1)}{\dfrac{u+5}{3}-2}=3\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(u)-f(1)}{u-1}$ άρα

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(u)-f(1)}{u-1}=\dfrac{1}{3}\cdot\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(3x-5)-1}{x-2}\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(u)-f(1)}{u-1}=4$ οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στο 4 με παράγωγο $f'(1)=4$.

β) Η ευθεία (ε) έχει εξίσωση:

$\varepsilon: y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-1=4(x-1)\Leftrightarrow y=4x-3$.

Τα μεγέθη x,y μεταβάλλονται συναρτήσει του χρόνου οπότε έχουμε

$\Sigma\left(x(t),y(t)\right)$, $x(t)>1$, $x'(t)=\dfrac{3}{4}$ και $y(t)=4x(t)-3$.

i. Είναι $y'(t)=4x'(t)=4\dfrac{3}{4}=3$ cm/sec.

ii. Είναι

$$\det\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{O\Sigma}\right)=\begin{vmatrix}1&1\\x(t)&y(t)\end{vmatrix}=y(t)-x(t)=4x(t)-3-x(t)=3x(t)-3>0$$

οπότε $E(t)=(OA\Sigma)=\dfrac{1}{2}\left|3x(t)-3\right|=\dfrac{3}{2}\left(x(t)-1\right)$ άρα

$$E'(t)=\frac{3}{2}x'(t)=\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{8}\ \text{cm}^2/\text{sec}.$$

58.α) Είναι

$$\lim_{x\to1^-}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{f\left(3-x^3\right)-f(2)}{x-1}\underset{u\to2^+}{\overset{3-x^3=u}{=}}\lim_{u\to2^+}\frac{f(u)-f(2)}{\sqrt[3]{3-u}-1}=$$

$$=\lim_{u\to 2^+}\left\{\frac{f(u)-f(2)}{-(u-2)}\left[\left(\sqrt[3]{3-u}\right)^2+\sqrt[3]{3-u}+1\right]\right\}=-3f'(2),$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(5-3x)-f(2)}{x-1}\overset{5-3x=u}{\underset{u\to 2^+}{=}}\lim_{x\to 2^+}\frac{f(u)-f(2)}{\frac{5-u}{3}-1}=$$

$\lim\limits_{u\to 2^+}\left(-3\dfrac{f(u)-f(2)}{u-2}\right)=-3f'(2)$, άρα η h είναι παραγωγίσιμη στο 1 με παράγωγο $h'(1)=-3f'(2)$.

β) Είναι $h(1)=f(2)=-\dfrac{1}{3}$ και $h'(1)=-3f'(2)=1$, άρα η (ε) έχει εξίσωση

$$y-h(1)=h'(1)(x-1)\Leftrightarrow y+\frac{1}{3}=x-1\Leftrightarrow y=x-\frac{4}{3}.$$

γ) Η ε τέμνει τους άξονες στα $A\left(\dfrac{4}{3},0\right)$ και $\left(0,\dfrac{4}{3}\right)$.

Τα μεγέθη x,y μεταβάλλονται συναρτήσει του χρόνου οπότε έχουμε $M(x(t)y(t))$.

Αν $(AM)=h(t)$, τότε $h'(t)=-2\,cm/sec$.

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΜΑΚ, έχουμε:

$$(AK)^2+(MK)^2=(AM)^2\Leftrightarrow\left(x(t)-\frac{4}{3}\right)^2+y^2(t)=h^2(t)\Leftrightarrow$$

$$\left(x(t)-\frac{4}{3}\right)^2+\left(x(t)-\frac{4}{3}\right)^2=h^2(t)\Leftrightarrow 2\left(x^2(t)-\frac{8}{3}x(t)+\frac{16}{9}\right)=h^2(t)\Leftrightarrow$$

$2x^2(t)-\dfrac{16}{3}x(t)+\dfrac{32}{9}=h^2(t)$ (1). Παραγωγίζοντας την (1) κατά μέλη έχουμε:

$$4x(t)x'(t)-\frac{16}{3}x'(t)=2h(t)h'(t)\Leftrightarrow 2x(t)x'(t)-\frac{8}{3}x'(t)=h(t)h'(t)\quad(2)$$

Τη χρονική στιγμή t_0 που είναι $y(t_0)=1$ έχουμε:

- $y(t_0)=x(t_0)-\dfrac{4}{3}\Leftrightarrow x(t_0)=\dfrac{7}{3}$ και
- από τη σχέση (1):

$$2x^2(t_0)-\frac{16}{3}x(t_0)+\frac{32}{9}=h^2(t_0)\Leftrightarrow 2\cdot\frac{49}{9}-\frac{16}{3}\cdot\frac{7}{3}+\frac{32}{9}=h^2(t_0)\Leftrightarrow$$

$$\frac{98-112+32}{9}=h^2(t_0)\Leftrightarrow h^2(t_0)=2\Leftrightarrow h(t_0)=\sqrt{2}.$$

• Από τη σχέση (2): $2x(t_0)x'(t_0)-\frac{8}{3}x'(t_0)=h(t_0)h'(t_0)\Leftrightarrow$

$2\frac{7}{3}x'(t_0)-\frac{8}{3}x'(t_0)=-2\sqrt{2}\Leftrightarrow 2x'(t_0)=-2\sqrt{2}\Leftrightarrow\ x'(t_0)=-\sqrt{2}\ \text{cm}/\text{sec}$.

Είναι $(OM)=s(t)=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}=\sqrt{2x^2(t)-\frac{8}{3}x(t)+\frac{16}{9}}$ οπότε

$$s'(t)=\frac{2x(t)x'(t)-\frac{4}{3}x'(t)}{\sqrt{2x^2(t)-\frac{8}{3}x(t)+\frac{16}{9}}}.$$

Τη χρονική στιγμή $t=t_0$, είναι

$$s'(t_0)=\frac{2x(t_0)x'(t_0)-\frac{4}{3}x'(t_0)}{\sqrt{2x^2(t_0)-\frac{8}{3}x(t_0)+\frac{16}{9}}}=\frac{2\cdot\frac{7}{3}\left(-\sqrt{2}\right)-\frac{4}{3}\left(-\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2\frac{49}{9}-\frac{8}{3}\cdot\frac{7}{3}+\frac{16}{9}}}\Leftrightarrow$$

$$s'(t_0)=\frac{-\frac{10}{3}\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{98}{9}-\frac{56}{9}+\frac{16}{9}}}=\frac{-\frac{10}{3}\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{58}{9}}}=\frac{-\frac{10}{\cancel{3}}\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{58}}{\cancel{3}}}\Leftrightarrow$$

$$s'(t_0)=-\frac{10}{\sqrt{29}}=-\frac{10\sqrt{29}}{29}\ \text{cm}/\text{sec}.$$

59.α) Είναι $f(x)=\frac{x+1}{x}=1+\frac{1}{x},\ x>0$. Για κάθε $0<x_1<x_2$ είναι

$\frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2}\Leftrightarrow 1+\frac{1}{x_1}>1+\frac{1}{x_2}\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)\Leftrightarrow f\searrow(0,+\infty)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$, άρα $f(A)=(1,+\infty)$.

β) Αρκεί η εξίσωση $f(x)=g(x)\Leftrightarrow\frac{x+1}{x}=x^3\Leftrightarrow x^3-1-\frac{1}{x}=0$ να έχει μοναδική ρίζα. Έστω $h(x)=x^3-1-\frac{1}{x},\ x>0$.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι $h\nearrow(0,+\infty)$ Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=+\infty$, οπότε $h(A)=\mathbb{R}$.

Επειδή $0\in h(A)$ υπάρχει $x_1\in A=(0,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $h(x_1)=0$, το οποίο είναι μοναδικό αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο A.

γ) Έστω $f(x)=y, M(x,y)$. Τα μεγέθη x,y μεταβάλλονται συναρτήσει του χρόνου οπότε έχουμε $M(x(t),y(t))$ $y(t)=\frac{1}{x(t)}+1,\ x'(t)=1$ $y(t)=1+\frac{1}{x(t)}$,

άρα $y'(t)=-\frac{x'(t)}{x^2(t)}$. Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία $x(t_0)=1$ είναι

$y(t_0)=2$ και $y'(t_0)=-1\text{cm}/\sec$.

δ) Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο M έχει εξίσωση

$$\varepsilon:\ y-y(t)=-\frac{1}{x^2(t)}(x-x(t))\Leftrightarrow y-1-\frac{1}{x(t)}=-\frac{1}{x^2(t)}(x-x(t))\Leftrightarrow$$

$$y=-\frac{1}{x^2(t)}x+\frac{2}{x(t)}+1.$$

Για $x=0$: $y=\frac{2}{x(t)}+1\Leftrightarrow y=\frac{x(t)+2}{x(t)}$ οπότε $A\left(0,\frac{x(t)+2}{x(t)}\right)$ και

για $y=0$: $-\frac{1}{x^2(t)}x+\frac{2}{x(t)}+1=0\Leftrightarrow -x+2x(t)+x^2(t)=0\Leftrightarrow$

$x=x^2(t)+2x(t)\Leftrightarrow x=x(t)(x(t)+2)$ οπότε $B(x(t)(x(t)+2),0)$.

i. Είναι $E(t)=(OAB)=\frac{1}{2}(OA)(OB)=\frac{1}{2}\frac{x(t)+2}{\cancel{x(t)}}\cdot\cancel{x(t)}\cdot(x(t)+2)\Leftrightarrow$

$E(t)=\frac{1}{2}(x(t)+2)^2$ οπότε $E'(t)=(x(t)+2)x'(t)$.

Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία $x(t_0)=1$ είναι

$E'(t_0)=(x(t_0)+2)x'(t_0)=3\text{cm}^2/\sec$.

ii. Είναι $d(t)=(AB)=\sqrt{\left(\frac{x(t)+2}{x(t)}\right)^2+(x(t)(x(t)+2))^2}\Leftrightarrow$

$$d(t)=\sqrt{\frac{(x(t)+2)^2}{x^2(t)}+x^2(t)(x(t)+2)^2}\Leftrightarrow d(t)=\sqrt{(x(t)+2)^2\frac{1+x^4(t)}{x^2(t)}}\Leftrightarrow$$

$$d(t)=\frac{x(t)+2}{x(t)}\cdot\sqrt{1+x^4(t)}\Leftrightarrow d(t)=\left(\frac{2}{x(t)}+1\right)\sqrt{x^4(t)+1}$$ οπότε,

$$d'(t)=-\frac{2x'(t)}{x^2(t)}\sqrt{x^4(t)+1}+\left(\frac{2}{x(t)}+1\right)\frac{2x^3(t)x'(t)}{\sqrt{x^4(t)+1}}.$$

Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία $x(t_0)=1$ είναι

$$d'(t_0)=-\frac{2x'(t_0)}{x^2(t_0)}\sqrt{x^4(t_0)+1}+\left(\frac{2}{x(t_0)}+1\right)\frac{2x^3(t_0)x'(t_0)}{\sqrt{x^4(t_0)+1}}\Leftrightarrow$$

$$d'(t_0)=-2\sqrt{2}+3\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{-4+6}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow d'(t_0)=\sqrt{2}\text{cm/sec}.$$

60.α) Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ (1) είναι $x_1^3<x_2^3$ (2)

Με πρόσθεση των σχέσεων (1),(2) έχουμε:

$x_1^3+x_1<x_2^3+x_2\Leftrightarrow x_1^3+x_1-1<x_2^3+x_2-1\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και 1-1.

β) Είναι $f(1)=1\Leftrightarrow f^{-1}(1)=1$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=3x^2+1$. Επειδή $f^{-1}(f(x))=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη, ισχύει ότι: $\left[f^{-1}(f(x))\right]'=(x)'\Leftrightarrow\left(f^{-1}\right)'(f(x))f'(x)=1$.

Για $x=1$ είναι $\left(f^{-1}\right)'(f(1))f'(1)=1\Leftrightarrow\left(f^{-1}\right)'(1)\cdot 4=1\Leftrightarrow\left(f^{-1}\right)'(1)=\frac{1}{4}$.

Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση:

$$y-f^{-1}(1)=\left(f^{-1}\right)'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-1=\frac{1}{4}(x-1)\Leftrightarrow y=\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}.$$

γ) $\left(x^3+x-1\right)^3+x^3+x=3\Leftrightarrow\left(x^3+x-1\right)^3+x^3+x-2=1\Leftrightarrow$

$f(f(x))=f(1)\overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow}f(x)=1=f(1)\overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow}x=1$.

δ) $(\alpha+\beta)\left(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2+1\right)<(\gamma+\delta)\left(\gamma^2-\gamma\delta+\delta^2+1\right)\Leftrightarrow$

$(\alpha+\beta)\left(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\right)+\alpha+\beta<(\gamma+\delta)\left(\gamma^2-\gamma\delta+\delta^2\right)+\gamma+\delta\Leftrightarrow$

$\alpha^3+\beta^3+\alpha+\beta<\gamma^3+\delta^3+\gamma+\delta\Leftrightarrow$

$\alpha^3+\alpha-1+\beta^3+\beta-1<\gamma^3+\gamma-1+\delta^3+\delta-1\Leftrightarrow$

$f(\alpha)+f(\beta)<f(\gamma)+f(\delta)$ που ισχύει.

($\alpha<\gamma\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(\alpha)<f(\gamma)$ (3), $\beta<\delta\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(\beta)<f(\delta)$ (4) και από $(3)+(4)\Rightarrow f(\alpha)+f(\beta)<f(\gamma)+f(\delta)$).

ε) Είναι $f(1)=1$ και $f(0)=-1$ οπότε $f(0)f(1)<0$.

Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano, οπότε υπάρχει $x_0\in(0,1):f(x_0)=0$. Άρα $\kappa=0$.

στ) Η εφαπτομένη ε έχει εξίσωση $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow$

$y=\left(3x_0^2+1\right)x-3x_0^3-x_0$. Για $x=0$ είναι $y=-3x_0^3-x_0$.

Η ε τέμνει τους άξονες στα σημεία $B(x_0,0)$ και $\Gamma\left(0,-3x_0^3-x_0\right)$.

Το τρίγωνο ΟΒΓ που σχηματίζει η ε με τους άξονες έχει εμβαδό

$E=\frac{1}{2}(OB)(O\Gamma)=\frac{1}{2}x_0\left(3x_0^3+x_0\right)=\frac{3}{2}x_0^4+\frac{1}{2}x_0^2$.

Είναι $0<x_0<1$ οπότε $x_0^2<1\Leftrightarrow\frac{1}{2}x_0^2<\frac{1}{2}$ (5) και $x_0^4<1\Leftrightarrow\frac{3}{2}x_0^4<\frac{3}{2}$ (6).

Με πρόσθεση των σχέσεων (4) και (5) έχουμε $\frac{3}{2}x_0^4+\frac{1}{2}x_0^2<2\Leftrightarrow E<2$.

ζ) Για τα κοινά σημεία των ε, C_f έχουμε το σύστημα

$$\begin{cases} y=\left(3x_0^2+1\right)x-3x_0^3-x_0 \ (7) \\ y=x^3+x-1 \ (8) \end{cases}.$$

Από τις σχέσεις (7),(8) έχουμε $x^3+x-1=\left(3x_0^2+1\right)x-3x_0^3-x_0\Leftrightarrow$

$x^3+\cancel{x}-1=3x_0^2\cdot x+\cancel{x}-3x_0^3-x_0 \Leftrightarrow x^3-3x_0^2x+3x_0^3+x_0-1=0$. Με σχήμα Horner η τελευταία γίνεται: $(x-x_0)\left(x^2+x_0x-2x_0^2\right)=0\Leftrightarrow(x=x_0)$ ή

$\left(x^2+x_0x-2x_0^2=0\Leftrightarrow(x=x_0)\text{ ή }(x=-2x_0)\right)$. Οπότε υπάρχει και άλλο κοινό σημείο με τετμημένη $x=-2x_0$.

η) Τα μεγέθη x, y μεταβάλλονται συναρτήσει του χρόνου οπότε έχουμε $M(x(t),y(t))$, $x'(t)=1\ cm/sec$, $y(t)=x^3(t)+x(t)-1$ οπότε

$y'(t)=3x^2(t)x'(t)+x'(t)$.

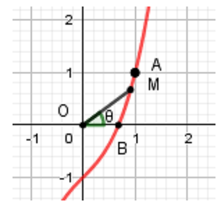
Τη χρονική στιγμή t_0 που το Μ διέρχεται από το Α είναι $x(t_0)=1,\ y(t_0)=1$.

i. $y'(t_0)=3x^2(t_0)x'(t_0)+x'(t_0)=4cm/sec$.

Είναι $s(t)=(OM)=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}$ οπότε

$$s'(t)=\frac{\cancel{2}x(t)x'(t)+\cancel{2}y(t)y'(t)}{\cancel{2}\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}}\Leftrightarrow s'(t)=\frac{x(t)x'(t)+y(t)y'(t)}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}}.$$

Τη χρονική στιγμή t_0 είναι $s'(t_0)=\frac{1\cdot1+1\cdot4}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}\ cm/sec$.



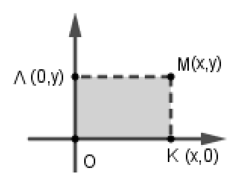
ii. Είναι $\varepsilon\varphi\theta(t)=\dfrac{y(t)}{x(t)}$. Με παραγώγιση κατά μέλη έχουμε: $\dfrac{\theta'(t)}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}=\dfrac{y'(t)x(t)-x'(t)y(t)}{x^2(t)}$.

Τη χρονική στιγμή t_0 είναι

$$\frac{\theta'(t_0)}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t_0)}=\frac{y'(t_0)x(t_0)-x'(t_0)y(t_0)}{x^2(t_0)}\Leftrightarrow$$

$$\frac{\theta'(t_0)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{4-1}{1}\Leftrightarrow\frac{\theta'(t_0)}{\frac{1}{2}}=3\Leftrightarrow 2\theta'(t_0)=3\Leftrightarrow\ \theta'(t_0)=\frac{3}{2}\ \text{rad/s}.$$

(Τη χρονική στιγμή t_0 έχουμε $\varepsilon\varphi\theta(t_0)=\dfrac{y(t_0)}{x(t_0)}=1$ άρα $\theta(t_0)=\dfrac{\pi}{4}$).



iii. Το ορθογώνιο που σχηματίζουν οι προβολές του Μ στους άξονες μαζί με την αρχή των αξόνων είναι το ΟΚΜΛ, το οποίο έχει εμβαδό:

$E=(OK)(O\Lambda)=x\cdot y$, άρα $E(t)=x(t)y(t),\ t\geq 0$.

Είναι $E'(t)=x'(t)y(t)+x(t)y'(t)$, άρα

$E'(t_0)=x'(t_0)y(t_0)+x(t_0)y'(t_0)=1\cdot 1+1\cdot 1=2\ \text{cm}^2/\text{sec}$.

61.α) Είναι $\left(f^2(x)+x^2-1\right)\left(f^2(x)-e^{2x+6}\right)=0\Leftrightarrow\left(f^2(x)+x^2-1=0\right)$ ή $\left(f^2(x)-e^{2x+6}=0\right)$. Επομένως οι τιμές της συνάρτησης f^2 θα έχουν τη μορφή $\left(f^2(x)=1-x^2\right)$ ή $\left(f^2(x)=e^{2x+6}\right)$.

Έστω ότι υπάρχει $x_1,x_2\in[-1,1]$ με $x_1<x_2$ τέτοια, ώστε $f^2(x_1)=1-x_1^2$ και $f^2(x_2)=e^{2x_2+6}$. Η f κατά συνέπεια και η f^2 είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών οπότε θα παίρνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές μεταξύ των $f(x_1)$ και $f(x_2)$.

Είναι $f^2(x_1)=1-x_1^2\Leftrightarrow x_1^2=1-f^2(x_1)\geq 0\Leftrightarrow f^2(x_1)\leq 1\Leftrightarrow$
$-1\leq f(x_1)\leq 1$ οπότε $f(x_1)<2$.

Επίσης $-1\leq x_2\leq 1\Leftrightarrow -2\leq 2x_2\leq 2\Leftrightarrow 4\leq 2x_2+6\leq 8\Leftrightarrow e^4\leq e^{2x_2+6}\leq e^8\Leftrightarrow$
$e^4\leq f^2(x_2)\leq e^8\Leftrightarrow e^4\leq f^2(x_2)\leq e^8\Leftrightarrow e^2\leq f(x_2)\leq e^4$ άρα $f(x_2)>2$.

Άρα υπάρχει $x_0\in[-1,1]$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=2$.

Η σχέση $\left(f^2(x)+x^2-1\right)\left(f^2(x)-e^{2x+6}\right)=0$ για $x=x_0$ γίνεται:

$\left(f^2(x_0)+x_0^2-1\right)\left(f^2(x_0)-e^{2x_0+6}\right)=0 \Leftrightarrow \left(4+x_0^2-1\right)\left(4-e^{2x_0+6}\right)=0 \Leftrightarrow$

$\left(x_0^2+3\right)\left(4-e^{2x_0+6}\right)=0 \Leftrightarrow \left(x_0^2=-3 \text{ αδύνατο}\right)$ ή

$\left(e^{2x_0+6}=4 \Leftrightarrow 2x_0+6=\ln 4 \Leftrightarrow 2x_0=2\ln 2-6 \Leftrightarrow x_0=\ln 2-3\right.$ που είναι αδύνατο αφού $0<\ln 2<1 \Leftrightarrow -3<\ln 2-3<-2$).

Άρα ($f^2(x)+x^2-1=0$ για κάθε $x\in[-1,1]$) ή ($f^2(x)-e^{2x+6}=0$ για κάθε $x\in[-1,1]$).

β) Αν $f^2(x)+x^2-1=0$ για κάθε $x\in[-1,1]$, τότε

$f^2(x)=1-x^2 \Leftrightarrow |f(x)|=\sqrt{1-x^2}$.

Για κάθε $x\in(-1,1)$ είναι $1-x^2>0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2}>0 \Leftrightarrow |f(x)|>0 \Leftrightarrow f(x)\neq 0$.

Η f είναι συνεχής στο $(-1,1)$ οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-1,1)$, άρα $\left(f(x)=\sqrt{1-x^2},\ x\in(-1,1)\right)$ ή $\left(f(x)=-\sqrt{1-x^2},\ x\in(-1,1)\right)$.

Είναι $|f(-1)|=0=|f(1)| \Leftrightarrow f(-1)=f(1)=0$ οπότε

$\left(f(x)=\sqrt{1-x^2},\ x\in[-1,1]\right)$ ή $\left(f(x)=-\sqrt{1-x^2},\ x\in[-1,1]\right)$.

Αν $f^2(x)-e^{2x+6}=0 \Leftrightarrow f^2(x)=e^{2x+6} \Leftrightarrow |f(x)|=e^{x+3}$.

Για κάθε $x\in[-1,1]$ είναι $e^{2x+6}>0 \Leftrightarrow |f(x)|>0 \Leftrightarrow f(x)\neq 0$.

Η f είναι συνεχής στο $[-1,1]$ οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[-1,1]$, άρα $\left(f(x)=e^{x+3},\ x\in[-1,1]\right)$ ή $\left(f(x)=-e^{x+3},\ x\in[-1,1]\right)$.

γ) i. Επειδή η σχέση $f(0)=1$ ικανοποιείται από τον τύπο $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, είναι $f(x)=\sqrt{1-x^2},\ x\in[-1,1]$.

ii. Έστω $M\left(x(t),y(t)\right)$ η θέση του κινητού τη χρονική στιγμή t.

Επειδή η τεταγμένη y ελαττώνεται με ρυθμό 3 μονάδες το δευτερόλεπτο, είναι $y'(t)=-3$ μ.μ./sec. Έστω t_0 η χρονική στιγμή που το κινητό διέρχεται από το Α, τότε $x(t_0)=\frac{1}{2}$ και $y(t_0)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Είναι $y(t)=\sqrt{1-x^2(t)} \Leftrightarrow y^2(t)=1-x^2(t)$. Με παραγώγιση κατά μέλη έχουμε $\left(y^2(t)\right)' = \left(1-x^2(t)\right)' \Leftrightarrow \cancel{2}y(t)y'(t) = -\cancel{2}x(t)x'(t) \Leftrightarrow$

$y(t)y'(t) = x(t)x'(t)$. Τη χρονική στιγμή $t = t_0$ είναι:

$y(t_0)y'(t_0) = -x(t_0)x'(t_0) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}(-3) = -\frac{1}{2}x'(t_0) \Leftrightarrow x'(t_0) = 3\sqrt{3}$ μ.μ./sec

iii. Για κάθε $-1 \le x_1 < x_2 < 0$ είναι

$x_1^2 > x_2^2 \Leftrightarrow -x_1^2 < -x_2^2 \Leftrightarrow 1-x_1^2 < 1-x_2^2 \Leftrightarrow \sqrt{1-x_1^2} < \sqrt{1-x_2^2} \Leftrightarrow$

$f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow f \nearrow [-1,0)$. Για κάθε $0 \le x_1 < x_2 \le 1$ είναι

$x_1^2 < x_2^2 \Leftrightarrow -x_1^2 > -x_2^2 \Leftrightarrow 1-x_1^2 > 1-x_2^2 \Leftrightarrow \sqrt{1-x_1^2} > \sqrt{1-x_2^2} \Leftrightarrow$

$f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow f \searrow [0,1]$.

iv. Για το πεδίο ορισμού της $f \circ f$ έχουμε:

$$\begin{cases} x \in A_f \\ f(x) \in A_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ -1 \le f(x) \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ -1 \le \sqrt{1-x^2} \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ \sqrt{1-x^2} \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ 1-x^2 \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ -x^2 \le 0 \text{ ισχύει} \end{cases}$$ οπότε $D_{f \circ f} = [-1,1]$.

Για κάθε $-1 \le x_1 < x_2 < 0 \overset{f \nearrow}{\Rightarrow} f(x_1) < f(x_2)$.

Τα $f(x_1), f(x_2)$ ανήκουν στο διάστημα $[0,1]$ όπου η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα $f(f(x_1)) > f(f(x_2)) \Rightarrow f \circ f \searrow [-1,0)$.

Για κάθε $0 \le x_1 < x_2 \le 1 \overset{f \searrow}{\Rightarrow} f(x_1) > f(x_2)$.

Τα $f(x_1), f(x_2)$ ανήκουν στο διάστημα $[0,1]$ όπου η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα $f(f(x_1)) < f(f(x_2)) \Rightarrow f \circ f \nearrow [0,1]$

v. Επειδή $x^2 \ge 0$, είναι $x^2, \eta\mu x^2 \in [0,1]$ όπου η $f \circ f$ είναι γνησίως αύξουσα.

Επομένως $f\left(f\left(\eta\mu x^2\right)\right) < f\left(f\left(x^2\right)\right) \Leftrightarrow (f \circ f)\left(\eta\mu x^2\right) < (f \circ f)\left(x^2\right) \overset{f \circ f \nearrow}{\Leftrightarrow}$

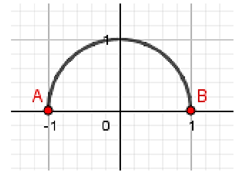
$\eta\mu x^2 < x^2 \Leftrightarrow x^2 \ne 0$ άρα $x \in [-1,0) \cup (0,1]$.

(Ισχύει $|\eta\mu x| \le |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$).

vi. Θέτουμε $f(x) = y \Leftrightarrow$

$y = \sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow y^2 = 1-x^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1,\ y \in [0,1]$.

Επειδή η γραφική παράσταση της f είναι το ημικύκλιο του διπλανού σχήματος, το ευθύγραμμο τμήμα AB



είναι χορδή του κύκλου και η μέγιστή τιμή της είναι η διάμετρος, άρα $(AB)\le 2\rho = 2$. Τη μέγιστη τιμή την παίρνει όταν $A(-1,0)$ και $B(1,0)$.

62.α) Από το πυθαγόρειο θεώρημα ισχύει ότι $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 = AB^2 + 3^2 =$

$= x^2 + 9 \Leftrightarrow B\Gamma = \sqrt{x^2+9}$, οπότε $\lambda = \dfrac{B\Gamma}{AB} = \dfrac{\sqrt{x^2+9}}{x}$.

β) Όταν το Β απομακρύνεται απεριόριστα από το Α τότε $x \to +\infty$, οπότε

$$\lim_{x\to+\infty}\lambda = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+9}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{9}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}}{\cancel{x}} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{9}{x^2}} = 1.$$

γ) i. Τα μεγέθη x,s μεταβάλλονται συναρτήσει του χρόνου οπότε $(AB) = x(t)$

με $x'(t) = 1\text{cm}/\text{sec}$, $s(t) = \sqrt{x^2(t)+9}$ άρα

$$s'(t) = \frac{\cancel{2}x(t)x'(t)}{\cancel{2}\sqrt{x^2(t)+9}} \Leftrightarrow s'(t) = \frac{x(t)x'(t)}{\sqrt{x^2(t)+9}} \quad (1)$$

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι $x(0) = 2\text{cm}$. Τη χρονική στιγμή $t = 2$ είναι:

- $x(2) = 2 + 2\cdot 1 = 4\text{cm}$.
- Από τη σχέση (1) $s'(2) = \dfrac{x(2)x'(2)}{\sqrt{x^2(2)+9}} = \dfrac{4\cdot 1}{\sqrt{16+9}} = \dfrac{4}{5}\text{cm}/\text{sec}$.

ii. Είναι $E(t) = (AB\Gamma) = \dfrac{1}{2}A\Gamma\cdot AB = \dfrac{3}{2}x(t)$ οπότε $E'(t) = \dfrac{3}{2}x'(t)$ και

$E'(2) = \dfrac{3}{2}x'(2) = 1{,}5\text{cm}^2/\text{sec}$.

iii. Είναι $\varepsilon\varphi B = \dfrac{A\Gamma}{AB}$ άρα $\varepsilon\varphi B(t) = \dfrac{3}{x(t)}$, οπότε

$$\left(\varepsilon\varphi B(t)\right)' = \left(\frac{3}{x(t)}\right)' \Leftrightarrow \frac{B'(t)}{\sigma\upsilon\nu^2 B(t)} = -\frac{3}{x^2(t)}x'(t) \Leftrightarrow B'(t) = -\frac{3x'(t)}{x^2(t)}\sigma\upsilon\nu^2 B(t)$$

άρα

$$B'(2) = -\frac{3x'(2)}{x^2(2)}\sigma\upsilon\nu^2 B(2) = -\frac{3\cdot 1}{4^2}\left(\frac{x(2)}{\sqrt{x^2(2)+9}}\right)^2 = -\frac{3}{\cancel{16}}\cdot\frac{\cancel{16}}{25} = -\frac{3}{25}\text{rad}/\text{sec}$$

δ) Είναι

i. $$\lim_{x\to 0}\frac{B\Gamma + AB - 3}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}+x-3}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x} + \frac{x}{x}\right) =$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\left(\sqrt{x^2+9}-3\right)\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}{x\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}+1\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\left(\sqrt{x^2+9}\right)^2-9}{x\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}+1\right)=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}+1\right)=0+1=1\,.$$

ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\text{ΒΓ}-\text{ΑΒ}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+9}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+9}-x\right)\left(\sqrt{x^2+9}+x\right)}{\sqrt{x^2+9}+x}=$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}+9-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{9}{x^2}\right)}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{9}{x\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}+x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{9}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}+1}\right)=0\,.$$

iii. $\lim\limits_{x\to 0}\lambda=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+9}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{x^2+9}\cdot\dfrac{1}{x}\right)=9\left(+\infty\right)=+\infty\,.$

63.α) Έστω ότι η C_2 είναι η γραφική παράσταση της f. Η ευθεία ε_2 διέρχεται από το (0,0) και από το (-1,1), οπότε είναι η y = -x. Επειδή η ε_2 εφάπτεται στη C_2 στο O(0,0), ισχύει ότι $f'(0)=\lambda_\varepsilon=-1$. Το σημείο (0,1) ανήκει στη C_1, η οποία είναι η γραφική παράσταση της f', οπότε $f'(0)=1$ που είναι άτοπο.
Άρα η C_1 είναι η γραφική παράσταση της f και η C_2 της f'.
β) Επειδή η ε_2 εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f' στο (0,0), ισχύει ότι $f''(0)=\lambda_{\varepsilon_2}=-1$.
γ) Είναι

i. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f'(x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)-1}{x}+\dfrac{f'(x)}{x}\right)=f'(0)+f''(0)=0-1=-1\,.$

ii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)f'(x)-f'(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)\left(f(x)-1\right)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f'(x)}{x}\cdot\dfrac{f(x)-1}{x}\right)=$

$f''(0)f'(0)=0\,.$

iii. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to -1}\left(f'(x)\dfrac{1}{f(x)}\right)=+\infty\left(+\infty\right)=+\infty$ γιατί

$$\lim_{x\to-1}\frac{1}{f(x)} \underset{\substack{x\to-1\Rightarrow\\ u\to0\\ u>0}}{\overset{f(x)=u}{=}} \lim_{u\to0^+}\frac{1}{u}=+\infty .$$

iv. $\lim\limits_{x\to-1}\left(\sqrt{f'(x)-1}-f'(x)\right) \underset{\substack{x\to-1\Rightarrow\\ u\to+\infty}}{\overset{f'(x)=u}{=}} \lim\limits_{u\to+\infty}\left(\sqrt{u-1}-u\right)=$

$$\lim_{u\to+\infty}\left(\sqrt{u^2\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u^2}\right)}-u\right)=$$

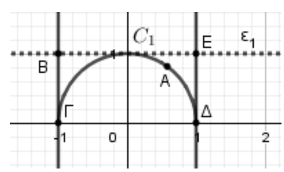
$$\lim_{u\to+\infty}\left(u\sqrt{\frac{1}{u}-\frac{1}{u^2}}-u\right)=\lim_{u\to+\infty}\left[u\left(\sqrt{\frac{1}{u}-\frac{1}{u^2}}-1\right)\right]=-\infty .$$

δ) Είναι $f'(x)=x^3-x-5 \Leftrightarrow f'(x)-x^3+x+5=0$.

Έστω $g(x)=f'(x)-x^3+x+5$. Είναι $g(0)=f'(0)+5=5>0$ και

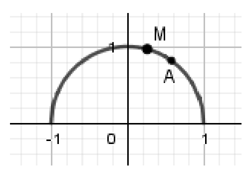
$\lim\limits_{x\to1^-}g(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\left[f'(x)-x^3+x+5\right]=-\infty+1-1+5=-\infty$, οπότε υπάρχει $\alpha<1$ πολύ κοντά στο 1, τέτοιο, ώστε $g(\alpha)<0$. Επειδή $g(0)g(\alpha)<0$ και η g είναι συνεχής στο $[0,\alpha]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε η εξίσωση $g(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x^3-x-5$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,\alpha)\subseteq(0,1)$.

ε) Στο σχήμα παρατηρούμε ότι το χωρίο που περικλείεται από την C_f και τον άξονα x΄x περιέχεται στο ορθογώνιο ΒΓΔΕ το οποίο έχει εμβαδό $(ΒΓΔΕ)=(ΓΔ)\cdot(ΔΕ)=2\cdot1=2$, οπότε $E<2$.



στ) Επειδή το Μ απομακρύνεται από τον άξονα y΄y με ταχύτητα 0,1 m/sec είναι $x'(t)=0{,}1$. Έστω t_0 η χρονική στιγμή που το Μ διέρχεται από το Α. Είναι

$x(t_0)=\frac{1}{2}$ και $y(t_0)=f(x(t_0))=\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Επειδή η εφαπτομένη της C_1 στο $x=\frac{1}{2}$ σχηματίζει γωνία 150° με τον άξονα x΄x, ισχύει ότι $f'\left(\frac{1}{2}\right)=εφ150^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

i. Ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης του από τον άξονα x΄x, είναι το $y'(t_0)$.
Είναι $y(t)=f(x(t))$ και $y'(t)=f'(x(t))x'(t)$, οπότε

$$y'(t_0)=f'(x(t_0))x'(t_0)=f'\left(\frac{1}{2}\right)\cdot 0{,}1=-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{10}=-\frac{\sqrt{3}}{30}\text{ cm/sec.}$$

ii. Είναι $\varepsilon_2: y=-x \Leftrightarrow x+y=0$. Η απόσταση του Μ από την ε_2 είναι

$$d(M,\varepsilon_2)=d=\frac{|x+f(x)|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+f(x))=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+f(x)).$$

Είναι $d(t)=\frac{\sqrt{2}}{2}(x(t)+f(x(t)))$ και $d'(t)=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'(t)+f'(x(t))x'(t))$.

Επομένως

$$d'(t_0)=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'(t_0)+f'(x(t_0))x'(t_0))=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(0{,}1+f'\left(\frac{1}{2}\right)0{,}1\right)=\frac{\sqrt{2}(3-\sqrt{3})}{60}$$

cm/sec.

Τράπεζα θεμάτων ΙΕΠ

28685. α) Έστω $f(x)=e^x+xe^x-3e^2,\ x>0$.

Παρατηρούμε ότι $f(2)=e^2+2e^2-3e^2=0$. Για κάθε $x_1,x_2>0$ με $x_1<x_2$ (1) είναι $e^{x_1}<e^{x_2}$ (2). Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των (1), (2) προκύπτει:

$x_1e^{x_1}<x_2e^{x_2} \Leftrightarrow x_1e^{x_1}-3e^2<x_2e^{x_2}-3e^2$ (3)

Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (2), (3) προκύπτει:

$e^{x_1}+x_1e^{x_1}-3e^2<e^{x_2}+x_2e^{x_2}-3e^2 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, άρα είναι 1-1. Είναι

$$e^x+xe^x=3e^2 \Leftrightarrow e^x+xe^x-3e^2=0 \Leftrightarrow f(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=f(2) \overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow} x=2.$$

β) i. Είναι $(OAM)=E(x)=\frac{1}{2}(AO)(AM)=\frac{1}{2}xe^x,\ x\ge 0$.

ii. Τα μεγέθη x, y μεταβάλλονται συναρτήσει του χρόνου οπότε έχουμε

$E(t)=\frac{1}{2}x(t)e^{x(t)},\ t\ge 0$ άρα $E'(t)=\frac{1}{2}x'(t)e^{x(t)}+\frac{1}{2}x(t)e^{x(t)}x'(t)$.

Τη χρονική στιγμή t_0 είναι:

- $x'(t_0)=2\,\text{cm/sec}$,
- $E'(t_0)=3e^2\ \text{cm}^2/\text{sec} \Leftrightarrow \frac{1}{2}x'(t_0)e^{x(t_0)}+\frac{1}{2}x(t_0)e^{x(t_0)}x'(t_0)=3e^2 \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{2}2e^{x(t_0)}+\frac{1}{2}x(t_0)e^{x(t_0)}2=3e^2 \Leftrightarrow e^{x(t_0)}+x(t_0)e^{x(t_0)}=3e^2 \overset{\text{α) σκέλος}}{\Leftrightarrow} x(t_0)=2.$$

Επομένως τη χρονική στιγμή t_0 το κινητό βρίσκεται στο σημείο $M(2,e^2)$.

33577.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Η (ε) έχει εξίσωση: $y-f(x_P)=f'(x_P)(x-x_P)\Leftrightarrow$

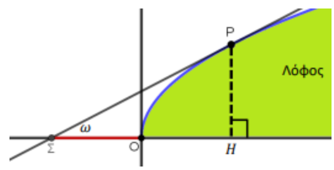
$$y-\sqrt{x_P}=\frac{1}{2\sqrt{x_P}}x-\frac{x_P}{2\sqrt{x_P}}\Leftrightarrow y=\frac{1}{2\sqrt{x_P}}x-\frac{x_P\sqrt{x_P}}{2\left(\sqrt{x_P}\right)^2}+\sqrt{x_P}\Leftrightarrow$$

$$y=\frac{1}{2\sqrt{x_P}}x-\frac{\cancel{x_P}\sqrt{x_P}}{2\cancel{x_P}}+\sqrt{x_P}\Leftrightarrow y=\frac{1}{2\sqrt{x_P}}x+\frac{\sqrt{x_P}}{2}.$$

Για y =0 είναι $0=\dfrac{1}{2\sqrt{x_P}}x+\dfrac{\sqrt{x_P}}{2}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2\sqrt{x_P}}x=-\dfrac{\sqrt{x_P}}{2}\Leftrightarrow x=-x_P$, άρα $x_\Sigma=-x_P$.

β) Έστω Η, η προβολή του Ρ στον άξονα x΄x.

Στο τρίγωνο ΡΗΣ είναι



$$\varepsilon\varphi\omega=\frac{PH}{\Sigma H}=\frac{y_P}{2x_P}=\frac{\sqrt{x_P}}{2x_P}=\frac{\left(\sqrt{x_P}\right)^2}{2x_P\sqrt{x_P}}=$$

$$\frac{\cancel{x_P}}{2\cancel{x_P}\sqrt{x_P}}=\frac{1}{2\sqrt{x_P}}=\frac{1}{2}x_P^{-\frac{1}{2}}$$ άρα $\varepsilon\varphi(\omega(t))=\dfrac{1}{2}(x_P(t))^{-\frac{1}{2}}$.

γ) Είναι $\omega(t_0)=\dfrac{\pi}{6}$, $\omega'(t_0)=\dfrac{1}{16}$,

$$\varepsilon\varphi(\omega(t_0))=\frac{1}{2}(x_P(t_0))^{-\frac{1}{2}}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{2\sqrt{x_P(t_0)}}\Leftrightarrow\frac{3}{9}=\frac{1}{4x_P(t_0)}\Leftrightarrow x_P(t_0)=\frac{3}{4}$$

Είναι $(O\Sigma)(t)=|x_S(t)|=x_P(t)$, οπότε $(O\Sigma)'(t_0)=x_P{'}(t_0)$.

Είναι $\left(\varepsilon\varphi(\omega(t))\right)'=\left(\dfrac{1}{2}(x_P(t))^{-\frac{1}{2}}\right)'\Leftrightarrow\dfrac{\omega'(t)}{\sigma\upsilon\nu^2\omega(t)}=-\dfrac{1}{4}(x_P(t))^{-\frac{3}{2}}x_P(t)\Leftrightarrow$

$$\omega'(t)\left(1+\varepsilon\varphi^2\omega(t)\right)=-\frac{1}{4}(x_P(t))^{-\frac{3}{2}}x_P(t).$$

Για $t=t_0$ είναι $\omega'(t_0)\left(1+\varepsilon\varphi^2\omega(t_0)\right)=-\dfrac{1}{4}(x_P(t_0))^{-\frac{3}{2}}x_P{'}(t_0)\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{16}\left(1+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\right)=-\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}x_P{'}(t_0)\Leftrightarrow x_P{'}(t_0)=...=\frac{\sqrt{3}}{8}m/\min.$$

36815. α) Έστω $\rho \in [-2,2]$ ρίζα της $f(x)=0$.

Για $x=\rho$ είναι $f^2(\rho)+\rho^2=4 \Leftrightarrow \rho^2=4 \Leftrightarrow \rho=\pm 2$.

β) Για κάθε $x \in [-2,2]$ είναι

$f^2(x)+x^2=4 \Leftrightarrow f^2(x)=4-x^2 \Leftrightarrow |f(x)|=\sqrt{4-x^2}$ (1)

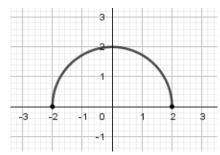
Για κάθε $x \in (-2,2)$ είναι $f(x) \neq 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα αυτό. Είναι $f(0)=1>0$, άρα $f(x)>0$ για κάθε $x \in (-2,2)$, οπότε η (1) γίνεται $f(x)=\sqrt{4-x^2}$.

Άρα $f(x)=\begin{cases} \sqrt{4-x^2}, & x \in (-2,2) \\ 0, & x=-2 \text{ ή } x=2 \end{cases} = \sqrt{4-x^2},\ x \in [-2,2]$.

γ) Για κάθε $x \in [-2,2]$ είναι $f(x)=y \Leftrightarrow$

$\sqrt{4-x^2}=y \geq 0 \Rightarrow 4-x^2=y^2 \Leftrightarrow x^2+y^2=4$.

Η γραφική παράσταση της f είναι το ημικύκλιο κέντρου O(0,0) και ακτίνας 2 που δεν βρίσκεται κάτω από τον x΄x.



δ) Έστω ότι το κινητό έχει συντεταγμένες $(x(t), y(t))$.

Έστω $t_0>0$ η χρονική στιγμή που διέρχεται από το B, τότε $x(t_0)=-1$ και $y(t_0)=\sqrt{3}$. Επειδή εκείνη τη χρονική στιγμή η τεταγμένη του y αυξάνεται με ρυθμό 2 μονάδες το δευτερόλεπτο, είναι $y'(t_0)=2\mu./\sec$.

Είναι $x^2(t)+y^2(t)=4 \Rightarrow \left(x^2(t)+y^2(t)\right)'=(4)' \Leftrightarrow$

$2x(t)x'(t)+2y(t)y'(t)=0 \overset{:2}{\Leftrightarrow} x(t)x'(t)+y(t)y'(t)=0$.

Για $t=t_0$ είναι $x(t_0)x'(t_0)+y(t_0)y'(t_0)=0 \Leftrightarrow$

$-1\cdot x'(t_0)+\sqrt{3}\cdot 2=0 \Leftrightarrow x'(t_0)=2\sqrt{3}$ μ/sec.

36787. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=3x^2+\frac{1}{4}$.

Η εφαπτομένη της C_f στο A έχει εξίσωση: $y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha) \Leftrightarrow$

$y-\alpha^3-\frac{1}{4}\alpha=\left(3\alpha^2+\frac{1}{4}\right)(x-\alpha) \Leftrightarrow$

$y=\left(3\alpha^2+\frac{1}{4}\right)x-3\alpha^3-\frac{1}{4}\alpha+\alpha^3+\frac{1}{4}\alpha \Leftrightarrow y=\left(3\alpha^2+\frac{1}{4}\right)x-2\alpha^3$.

β) i. Η εφαπτομένη της C_f στο A_0 διέρχεται από το Β όταν

$$\frac{1}{4}=\left(3\alpha^2+\frac{1}{4}\right)\cdot 0-2\alpha^3 \Leftrightarrow \alpha^3=-\frac{1}{8} \Leftrightarrow \alpha=-\frac{1}{2}.$$

Τότε $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$, άρα $A_0\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$.

ii. Έστω $A\left(x(t),y(t)\right)$, $y(t)=x^3(t)+\frac{1}{4}x(t)$ με $x(t_o)=-\frac{1}{2}$, $x'(t_0)=2$.

Ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του αυτοκινήτου είναι:

$y'(t)=3x^2(t)x'(t)+\frac{1}{4}x'(t)$ και τη χρονική στιγμή t_o:

$$y'(t_o)=3x^2(t_o)x'(t_o)+\frac{1}{4}x'(t_o)=3\left(-\frac{1}{2}\right)^2\cdot 2+\frac{1}{4}\cdot 2=2.$$

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό ή Λάθος»

1. Σ	**2.** Σ	**3.** Σ	**4.** Σ	**5.** Λ	**6.** Σ	**7.** Σ	**8.** Σ	**9.** Σ	**10.** Σ

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Έστω $y(t)=\sqrt{x^2(t)+1}$. Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$y'(t)=\dfrac{2x(t)x'(t)}{2\sqrt{x^2(t)+1}}=\dfrac{x(t)x'(t)}{\sqrt{x^2(t)+1}}$. Είναι $\varepsilon\varphi\theta(t)=\dfrac{y(t)}{x(t)}$ (1)

Με παραγώγιση κατά μέλη της σχέσης (1) έχουμε

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}\theta'(t)=\frac{y'(t)x(t)-y(t)x'(t)}{x^2(t)} \Leftrightarrow$$

$\left(1+\varepsilon\varphi^2\theta(t)\right)\theta'(t)=\dfrac{y'(t)x(t)-y(t)x'(t)}{x^2(t)}$ (2). Για $t=t_0$ είναι $x(t_0)=1$,

$x'(t_0)=2$, $y(t_0)=\sqrt{2}$, $\varepsilon\varphi\theta(t_0)=\dfrac{y(t_0)}{x(t_0)}=\dfrac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}$ και

$y'(t_0)=\dfrac{x'(t_0)x(t_0)}{\sqrt{x^2(t_0)+1}}=\dfrac{2\cdot 1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$. Αρά στην (2) για $t=t_0$ έχουμε

$$\left(1+\varepsilon\varphi^2\theta(t_0)\right)\theta'(t_0)=\frac{y'(t_0)x(t_0)-y(t_0)x'(t_0)}{x^2(t_0)} \Leftrightarrow$$

$(1+2)\theta'(t_0)=\dfrac{\sqrt{2}\cdot 1-2\sqrt{2}}{1} \Leftrightarrow \theta'(t_0)=-\dfrac{\sqrt{2}}{3}\,m/s$. **Σωστή απάντηση Δ.**

2. Είναι $y(t)=f(x(t))$. Η συνάρτηση y είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$y'(t)=f'(x(t))x'(t)$ (1)

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα θα είναι και 1-1 οπότε η f αντιστρέφεται.

Θέτουμε $f(x)=y \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$ οπότε από τη σχέση $f(x)+\ln f(x)=2x+1$

(2) έχουμε $y+\ln y=2f^{-1}(y)+1 \Leftrightarrow f^{-1}(y)=\frac{1}{2}(y+\ln y-1), y>0$.

Άρα $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}(x+\ln x-1), x>0$ οπότε $f^{-1}(e)=\frac{e}{2} \Leftrightarrow f\left(\frac{e}{2}\right)=e$.

Παραγωγίζοντας την (2) έχουμε $f'(x)+\frac{f'(x)}{f(x)}=2$ (2)

Από τη σχέση (2) για $x=\frac{e}{2}$ είναι $f'\left(\frac{e}{2}\right)+\frac{f'\left(\frac{e}{2}\right)}{f(e)}=2 \Leftrightarrow f'\left(\frac{e}{2}\right)=\frac{2e}{e+1}$. Οπότε

στην (1) για $t=t_0$ είναι $y'(t_0)=f'(x(t_0))x'(t_0)=f'\left(\frac{e}{2}\right)\cdot 2 \Leftrightarrow y'(t_0)=\frac{4e}{e+1}$.

Σωστή απάντηση Β.

3. Είναι $x'(t)=1m/s$, $y(t)=x^3(t)$.

Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο ε $y'(t)=3x^2(t)x'(t)$.

Για $t=t_0$ είναι $x(t_0)=2$ οπότε $y'(t_0)=3x^2(t_0)x'(t_0)=3\cdot 2^2\cdot 1=12$.

Σωστή απάντηση Γ.

4. Έστω $M\left(x,\sqrt{x}\right)$ και $d(t)=(OM)$.

Είναι $\varepsilon\varphi\theta(t)=\frac{\sqrt{x(t)}}{x(t)} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\theta(t)=\frac{1}{\sqrt{x(t)}}$ (1). Για $t=t_0$ είναι $\theta(t_0)=\frac{\pi}{6}$

οπότε $\varepsilon\varphi\theta(t_0)=\frac{1}{\sqrt{x(t_0)}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{\sqrt{x(t_0)}} \Leftrightarrow \sqrt{3x(t_0)}=3 \Leftrightarrow 3x(t_0)=9 \Leftrightarrow$

$x(t_0)=3$. Παραγωγίζοντας κατά μέλη τη σχέση (1) έχουμε

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}\theta'(t)=-\frac{\frac{x'(t)}{2\sqrt{x(t)}}}{x(t)} \Leftrightarrow \frac{\eta\mu^2\theta(t)+\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}\cdot\theta'(t)=-\frac{x'(t)}{2x(t)x'(t)}$$

$$\left(1+\varepsilon\varphi^2\theta(t)\right)\cdot\theta'(t)=-\frac{x'(t)}{2x(t)x'(t)} \quad (2)$$

Για $t = t_0$ είναι $\theta(t_0) = \frac{\pi}{6}, \theta'(t_0) = -\frac{\pi}{14}$ και $x(t_0) = 3$ οπότε

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{\pi}{14}\right) = -\frac{x'(t_0)}{2 \cdot 3\sqrt{3}} \Leftrightarrow -\frac{4\pi}{\cancel{3} \cdot 14} = -\frac{x'(t_0)}{2 \cdot \cancel{3}\sqrt{3}} \Leftrightarrow x'(t_0) = \frac{4\sqrt{3}\pi}{7}.$$

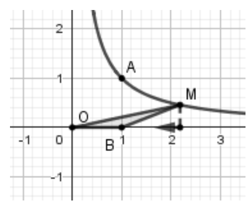
Είναι $d(t) = \sqrt{x^2(t) + x(t)}$.

Η d είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $d'(t) = \dfrac{2x(t)x'(t) + x'(t)}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}}$.

Για $t = t_0$ είναι $d'(t_0) = \dfrac{2 \cdot 3 \cdot \frac{4\sqrt{3}\pi}{7} + \frac{4\sqrt{3}\pi}{7}}{2\sqrt{12}} = \dfrac{4\sqrt{3}\pi}{2 \cdot 2\sqrt{3}} = \pi$.

Σωστή απάντηση Β.

5. Είναι $(OBM) = \frac{1}{2}(OB)(MK)$.



Αν $E(t) = (OBM)$ τότε

$E(t) = \frac{1}{2}y(t)$ όπου $y(t) = \frac{1}{x(t)}$. Άρα $E(t) = \frac{1}{2}\frac{1}{x(t)}$.

Η συνάρτηση ε είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$E'(t) = \dfrac{-x'(t)}{2x^2(t)}$.

Για $t = t_0$ είναι $x(t_0) = 1, x'(t_0) = -4$.

Επομένως $E'(t_0) = \dfrac{-x'(t_0)}{2x^2(t_0)} = -\dfrac{-4}{2 \cdot 1^2} = 2$.

Σωστή απάντηση Α.

21 Επαναληπτικές Συνδυαστικές ασκήσεις

Επίπεδο δυσκολίας Β Θέματος

1. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι συνεχής στο $x_0 = 0$. Επομένως $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x^3+\alpha x+\beta\right) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2+\beta x+\alpha^2\right) = \beta \Leftrightarrow \beta = \alpha^2 \quad (1)$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^3+\alpha x+\beta-\beta}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\cancel{x}\left(x^2+\alpha\right)}{\cancel{x}} = \alpha$ και

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2+\beta x+\alpha^2-\alpha^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\cancel{x}(x+\beta)}{\cancel{x}} = \beta$.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, ισχύει ότι

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x} \Leftrightarrow \alpha = \beta$. Από τη σχέση (1) είναι

$\beta^2 = \beta \Leftrightarrow \beta^2 - \beta = 0 \Leftrightarrow \beta(\beta-1) = 0 \Leftrightarrow (\beta = 0$ απορρίπτεται) ή ($\beta = 1$).

β) Για $\alpha = \beta = 1$ έχουμε $f(x) = \begin{cases} x^3+x+1, & x \le 0 \\ x^2+x+1, & x > 0 \end{cases}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x) = \begin{cases} 3x^2+1, & x \le 0 \\ 2x+1, & x > 0 \end{cases}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{3x^2+1-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{3x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = 0$ και

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2x+1-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2\cancel{x}}{\cancel{x}} = 2$, οπότε η f΄ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη για $x < 0$ με παράγωγο $f''(x) = 6x$ και για x > 0 με παράγωγο $f''(x) = 2$, άρα $f''(x) = \begin{cases} 6x, & x < 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases}$.

γ) Επειδή η ευθεία ε έχει συντελεστή διεύθυνσης λ = 13, θα αναζητήσουμε σημείο $K\left(x_1, f(x_1)\right)$ της C_f στο οποίο $f'(x_1) = 13$.

Αν $x_1 \le 0$ τότε $f'(x_1) = 13 \Leftrightarrow 3x_1^2+1 = 13 \Leftrightarrow 3x_1^2 = 12 \Leftrightarrow x_1^2 = 4 \overset{x_1 \le 0}{\Leftrightarrow} x_1 = -2$.

Είναι $f(-2) = (-2)^3 - 2 + 1 = -9$ οπότε η εφαπτομένη της C_f στο Κ έχει εξίσωση $y - f(-2) = f'(-2)(x+2) \Leftrightarrow y + 9 = 13(x+2) \Leftrightarrow y = 13x + 17$ δηλαδή είναι η ε.

Αν $x_1 > 0$ τότε $f'(x_1)=13 \Leftrightarrow x_1^2+x_1+1=13 \Leftrightarrow x_1^2+x_1-12=0 \Leftrightarrow (x_1=-4$ απορρίπτεται) ή $(x_1=3)$. Είναι $f(3)=3^2+3+1=13$ οπότε η εφαπτομένη της C_f στο Κ έχει εξίσωση $y-f(3)=f'(3)(x-3) \Leftrightarrow y-13=13(x-3) \Leftrightarrow y=13x-26$ απορρίπτεται αφού δεν είναι η ε.

δ) Επειδή το σημείο Μ πλησιάζει τον άξονα y΄y με ταχύτητα 0,5cm/sec, είναι $\alpha'(t)=-0,5m/\sec$. Η απόσταση του Κ από τον άξονα x΄x είναι $y(t)=f(\alpha(t))=\alpha^3(t)+\alpha(t)+1$. Ο ρυθμός μεταβολής της απόστασής του από τον άξονα x΄x τη χρονική στιγμή t είναι $y'(t)=3\alpha^2(t)\alpha'(t)+\alpha'(t)$.

Τη χρονική στιγμή t_0 που το Μ διέρχεται από το Α είναι $\alpha(t_0)=-1$, οπότε $y'(t_0)=3\alpha^2(t_0)\alpha'(t_0)+\alpha'(t_0)=3\cdot1\cdot(-0,5)-0,5=-2cm/\sec$.

2. α) Είναι $A_{f\circ g}=\{x\in A_g / g(x)\in A_f\}=\{x>0/x\ln x\in\mathbb{R}\}=(0,+\infty)=A_h$.

Η $f\circ g$ έχει τύπο $(f\circ g)(x)=f(g(x))=e^{x\ln x}=e^{\ln x^x}=x^x=h(x)$.

β) Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο $h'(x)=e^{x\ln x}(x\ln x)'=h(x)\left(\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}\right)=h(x)(\ln x+1)$.

Η h ΄ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως σύνθεση και πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $h''(x)=\left(h(x)(\ln x+1)\right)'=h'(x)(\ln x+1)+h(x)\cdot\dfrac{1}{x}=$

$$=h(x)(\ln x+1)(\ln x+1)+h(x)\cdot\frac{1}{x}\Leftrightarrow$$

$$h''(x)=h(x)\left[(\ln x+1)^2+\frac{1}{x}\right]=h(x)\left(\ln^2 x+2\ln x+1+\frac{1}{x}\right), x>0.$$

γ) 1ος τρόπος: Είναι $f'(x)=e^x$ και $f'(0)=1=f(0)$.

Η (ε) έχει εξίσωση $y-f(0)=f'(0)x\Leftrightarrow y=x+1$.

Για y = 0 είναι $x=-1$ και για x = 0 είναι y = 1, δηλαδή η (ε) τέμνει τους άξονες στα σημεία Β(-1,0) και Γ(0,1). Επειδή (ΟΒ) = (ΟΓ) το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισοσκελές.

2ος τρόπος: Το τρίγωνο ΟΒΓ που σχηματίζει η (ε) με τους άξονες είναι ορθογώνιο. Επειδή $\lambda_\varepsilon=1$ είναι $\varepsilon\varphi\omega=1\Leftrightarrow\omega=45^\circ$, δηλαδή το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΒΓ έχει μια γωνία 45°, οπότε και η άλλη οξεία γωνία του είναι 45° και είναι ισοσκελές.

δ) Αρχικά πρέπει να υπάρχει $x_1>0$ τέτοιο, ώστε $g'(x_1)=\lambda_\varepsilon=1$.

Είναι $g'(x)=\ln x+1$, οπότε $g'(x_1)=1\Leftrightarrow\ln x_1+1=1\Leftrightarrow\ln x_1=0\Leftrightarrow x_1=1$.

Η εφαπτομένη της C_g στο $x_1=1$ έχει εξίσωση

$y-g(x_1)=g'(x_1)(x-1) \Leftrightarrow y=x-1$ η οποία δεν είναι η εξίσωση της (ε).

Άρα η (ε) δεν εφάπτεται της C_g.

ε) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x=+\infty(+\infty)=+\infty$ και

$$\lim_{x\to+\infty} h(x)=\lim_{x\to+\infty}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to+\infty} e^{x\ln x} \underset{\substack{x\to+\infty\Rightarrow\\ u\to+\infty}}{\overset{x\ln x=u}{=}} \lim_{u\to+\infty} e^u=+\infty .$$

3. α) Η f ορίζεται όταν $\begin{cases} x\ge 0 \\ 1-\sqrt{x}\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ \sqrt{x}\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow x\in[0,1]$,

άρα $D_f=[0,1]$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο (0,1) ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1-\sqrt{x}}}\left(1-\sqrt{x}\right)'=-\frac{1}{2\sqrt{1-\sqrt{x}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}==-\frac{1}{4\sqrt{x\left(1-\sqrt{x}\right)}}=-\frac{1}{4\sqrt{x-x\sqrt{x}}}$$

Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{1-\sqrt{x}}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\cancel{1}-\sqrt{x}-\cancel{1}}{x\left(\sqrt{1-\sqrt{x}}+1\right)}=$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{-\sqrt{x}}{x\left(\sqrt{1-\sqrt{x}}+1\right)}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\cancel{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}^{\cancel{2}}\left(\sqrt{1-\sqrt{x}}+1\right)}=\lim_{x\to0^+}\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x}}+1}\right)-\infty .$$

Είναι $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{-(1-x)}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{-\sqrt{(1-x)^2}}=$

$$=-\lim_{x\to1^-}\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{(1-x)^2}}=-\lim_{x\to1^-}\sqrt{\frac{\cancel{1-x}}{\left(1+\sqrt{x}\right)(1-x)^{\cancel{2}}}}=-\infty .$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στα 0,1 οπότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο [0,1] δηλαδή στο πεδίο ορισμού της.

γ) Για κάθε $0\le x_1<x_2\le 1$ είναι $\sqrt{x_1}<\sqrt{x_2} \Leftrightarrow -\sqrt{x_1}>-\sqrt{x_2} \Leftrightarrow$

$1-\sqrt{x_1}>1-\sqrt{x_2} \Leftrightarrow \sqrt{1-\sqrt{x_1}}>\sqrt{1-\sqrt{x_2}} \Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$ οπότε είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται. Η f είναι συνεχής στο [0,1] ως σύνθεση και πράξεις συνεχών συναρτήσεων άρα $f([0,1])=[f(1),f(0)]=[0,1]$.

Για κάθε $x,y\in[0,1]$ είναι $f(x)=y \Leftrightarrow \sqrt{1-\sqrt{x}}=y \Leftrightarrow$

$1-\sqrt{x}=y^2 \Leftrightarrow \sqrt{x}=1-y^2 \Leftrightarrow f^{-1}(y)=\left(1-y^2\right)^2$, $y\in[0,1]$ άρα

$f^{-1}(x)=\left(1-x^2\right)^2$, $x\in[0,1]$.

δ) Θέτουμε $f(x)=y$ οπότε $y=\sqrt{1-\sqrt{x}}$. Τα μεγέθη x,y μεταβάλλονται συναρτήσει του χρόνου οπότε έχουμε $M(x(t),y(t))$, $0\le x(t)\le 1$, $x'(t)=1$ και

$y(t)=\sqrt{1-\sqrt{x(t)}}$ οπότε

$$y'(t)=-\frac{1}{2\sqrt{1-\sqrt{x(t)}}}\cdot\frac{x'(t)}{2\sqrt{x(t)}}=-\frac{x'(t)}{4\sqrt{x(t)-x(t)\sqrt{x(t)}}}\Leftrightarrow$$

$$y'(t)=-\frac{x'(t)}{4\sqrt{x(t)-x(t)\sqrt{x(t)}}}=-\frac{1}{4\sqrt{x(t)-x(t)\sqrt{x(t)}}}.$$

Τη χρονική στιγμή $t=t_0$ είναι:

- $x(t_0)=\frac{1}{2}$.
- $y'(t_0)=-\frac{1}{4\sqrt{x(t_0)-x(t_0)\sqrt{x(t_0)}}}=-\frac{1}{4\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}=$

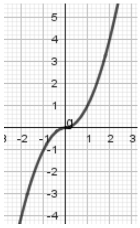
$$=-\frac{1}{4\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}}}=-\frac{1}{4\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}}=-\frac{1}{4\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}=-\frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}\ \text{m/sec.}$$

4. α) Είναι $f(x)=x|x|=\begin{cases}-x^2 & ,\ x<0\\ x^2 & ,\ x\ge 0\end{cases}$. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.Η f είναι παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$, $(0,+\infty)$ ως πολυωνυμική. Είναι $\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}=0$ και

$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}=0$ άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο μηδέν με $f'(0)=0$.

Επομένως $f'(x)=\begin{cases}-2x\ ,\ x<0\\ 0\ \ ,\ x=0\\ 2x\ ,\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow f'(x)=\begin{cases}-2x\ ,\ x<0\\ 2x\ ,\ x\ge 0\end{cases}$.

β)



γ) Αρκεί να βρούμε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2$ και $f'(x_1) = f'(x_2)$.
Αν $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ με $x_1 \neq x_2$ τότε $f'(x_1) \neq f'(x_2)$.
Αν $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ με $x_1 \neq x_2$ τότε $f'(x_1) \neq f'(x_2)$.
Αν $x_1 < 0 < x_2$ τότε $f'(x_1) = -2x_1$ και $f'(x_2) = 2x_2$, θα είναι
$f'(x_1) = f'(x_2) \Leftrightarrow x_1 = -x_2$ άρα αν $x_1 = -1$ και $x_2 = 1$ τότε $f'(-1) = 2 = f'(1)$.
Η εφαπτομένη στο $x_1 = -1$ είναι η (ε): $y - f(-1) = f'(-1)(x+1) \Leftrightarrow y = 2x + 1$.
Η εφαπτομένη στο $x_1 = 1$ είναι η (ζ): $y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y = 2x - 1$.
Άρα δύο παράλληλες εφαπτομένες είναι οι (ε) και (ζ).

δ) Για κάθε $x \in [0,1]$ είναι $x^{2023} + f(x) = 1 - f'(x) \Leftrightarrow x^{2023} + x^2 = 1 - 2x \Leftrightarrow$
$x^{2023} + x^2 + 2x - 1 = 0$. Έστω η συνάρτηση $g(x) = x^{2023} + x^2 + 2x - 1$, $x \in [0,1]$ η οποία είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική. Είναι $g(0) = -1$, $g(1) = 3 > 0$ άρα $g(0)g(1) < 0$. Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο [0,1]. Επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα το x_0 είναι μοναδικό.

ε) Έστω η εφαπτομένη (η) της C_f στο $A(\alpha, f(\alpha))$ με $\alpha > 0$. Η (η) έχει εξίσωση:
$y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha) \Leftrightarrow y - \alpha^2 = 2\alpha x - 2\alpha^2 \Leftrightarrow \Leftrightarrow y = 2\alpha x - \alpha^2$.
Πρέπει η (η) να διέρχεται από το (0,0) άρα $-\alpha^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ αδύνατη.
Έστω η εφαπτομένη (λ) της C_f στο $A(\beta, f(\beta))$ με $\beta < 0$.
Είναι (η): $y - f(\beta) = f'(\beta)(x - \beta) \Leftrightarrow y + \beta^2 = -2\beta x + 2\beta^2 \Leftrightarrow \Leftrightarrow y = -2\beta x + \beta^2$.
Πρέπει η (λ) να διέρχεται από το (0,0) άρα $\beta^2 = 0 \Leftrightarrow \beta = 0$ αδύνατη.
Η εφαπτομένη της C_f στο (0,0) είναι $y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = 0$, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων άρα είναι η ζητούμενη εφαπτομένη.

5. α) Για $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ είναι $\eta\mu\theta = \frac{\beta}{\alpha}$, $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\gamma}{\alpha} \underset{\sigma\upsilon\nu\theta > 0}{\overset{0<\theta<\frac{\pi}{2}}{\Leftrightarrow}} \alpha = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}$ και

$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\beta}{\gamma} \Leftrightarrow \beta = \varepsilon\varphi\theta$.

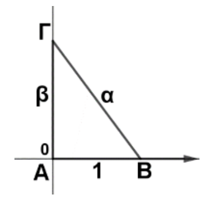
i. $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}} (\alpha - \beta) = \lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta} - \varepsilon\varphi\theta \right) = \lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \eta\mu\theta)(1 + \eta\mu\theta)}{\sigma\upsilon\nu\theta(1 + \eta\mu\theta)} =$

$\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \eta\mu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta(1 + \eta\mu\theta)} = \lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta(1 + \eta\mu\theta)} = \lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1 + \eta\mu\theta} = 0$.

ii. Από πυθαγόρειο θεώρημα ισχύει $\alpha^2 - \beta^2 = \gamma^2$, άρα $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\left(\alpha^2-\beta^2\right)=\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\left(\gamma^2\right)=1$.

iii. $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{\beta}{\alpha}=\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}(\eta\mu\theta)=1$.

β) Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο:



$E=\frac{1}{2}(A\Gamma)(AB)=\frac{1}{2}\beta\cdot x_B$, όπου x_B η τετμημένη του σημείου B. Τα μεγέθη Ε, x_B μεταβάλλονται συναρτήσει του χρόνου οπότε έχουμε $E(t)=\frac{1}{2}\beta\cdot x_B(t)$ οπότε

$E'(t)=\frac{1}{2}\beta\cdot x_B'(t)=\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\beta\cdot\cancel{2}=\beta \quad m^2/\text{sec}$.

γ) Όταν το σημείο Β απομακρυνθεί απεριόριστα η γωνία θ τείνει να γίνει μηδέν άρα θα έχουμε: $\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{AB}{B\Gamma}=\lim\limits_{\theta\to 0}(\sigma\upsilon\nu\theta)=1$ άρα το ΑΒ θα είναι περίπου ίσο με το ΒΓ.

Επίπεδο δυσκολίας Γ Θέματος

6. α) Είναι $f^2(x)=|x|\Leftrightarrow|f(x)|=\sqrt{|x|}$.

Έχουμε $f(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{|x|}=0\Leftrightarrow x=0$. Για κάθε $x\neq 0$ είναι $f(x)\neq 0$, η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$. Είναι $f(-4)>0, f(4)>0$, οπότε $f(x)>0$ σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$, άρα $f(x)=\sqrt{|x|}$, $x\neq 0$.

Όμως $f(0)=0$ επομένως $f(x)=\sqrt{|x|}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}\right)^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$, οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$. Για $x>0$ η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$f'(x)=\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ και για $x<0$ είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$f'(x)=\left(\sqrt{-x}\right)'=\frac{(-x)'}{2\sqrt{-x}}=-\frac{1}{2\sqrt{-x}}, \text{ άρα } f'(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2\sqrt{-x}}, & x<0\\ \frac{1}{2\sqrt{x}}, & x>0\end{cases}.$$

Για κάθε x > 0 η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με δεύτερη παράγωγο

$$f''(x)=\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)'=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{\left(\sqrt{x}\right)^2}\right)\left(\sqrt{x}\right)'=-\frac{1}{4x\sqrt{x}}$$ και για x < 0 δύο φορές παραγωγίσιμη με δεύτερη παράγωγο

$$f''(x)=\left(-\frac{1}{2\sqrt{-x}}\right)'=-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{\left(\sqrt{-x}\right)^2}\right)\left(\sqrt{-x}\right)'=\frac{1}{2x}\cdot\frac{(-x)'}{2\sqrt{-x}}=-\frac{1}{4x\sqrt{-x}}$$, άρα

$$f''(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{4x\sqrt{-x}}, & x<0\\ -\dfrac{1}{4x\sqrt{x}}, & x>0\end{cases}.$$

γ) Έστω $K\left(x_1,f\left(x_1\right)\right)$, $\Lambda\left(-x_1,f\left(-x_1\right)\right)$ δύο σημεία της C_f με αντίθετες τετμημένες και $x_1>0$. Για να είναι οι εφαπτομένες της C_f στα Κ, Λ κάθετες, πρέπει

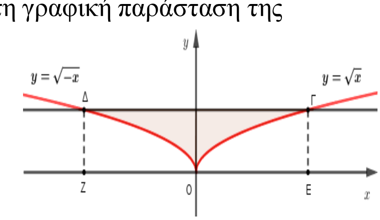
$$f'\left(x_1\right)f'\left(-x_1\right)=-1\Leftrightarrow\frac{1}{2\sqrt{x_1}}\cdot\left(-\frac{1}{2\sqrt{-\left(-x_1\right)}}\right)=-1\Leftrightarrow 4\sqrt{x_1}\cdot\sqrt{x_1}=1\Leftrightarrow$$

$\sqrt{x_1}\cdot\sqrt{x_1}=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow x_1^2=\dfrac{1}{16}\overset{x_1>0}{\Leftrightarrow}x_1=\dfrac{1}{4}$. Είναι $f\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{2}$, οπότε τα ζητούμενα σημεία είναι τα $K\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right)$ και $\Lambda\left(-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right)$. Όμοια αν $x_1<0$.

δ) Η ευθεία ΑΒ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{AB}=\dfrac{0-\sqrt{\alpha}}{-\alpha-\alpha}=\dfrac{\sqrt{\alpha}}{2\alpha}$.

Επειδή η ευθεία ΑΒ και η C_f έχουν κοινό σημείο το Β, για να εφάπτεται η ΑΒ της C_f στο Β πρέπει $f'(\alpha)=\lambda_{AB}$. Είναι $f'(\alpha)=\dfrac{1}{2\sqrt{\alpha}}=\dfrac{\sqrt{\alpha}}{2\left(\sqrt{\alpha}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{\alpha}}{2\alpha}=\lambda_{AB}$.

ε) Η γραφική παράσταση της f αποτελείται από τη γραφική παράσταση της $y=\sqrt{x},\ x\ge 0$ και από τη συμμετρική της ως προς τον άξονα y΄y. Για τα κοινά σημεία της $y=\lambda$ με την C_f, έχουμε:



Για x < 0:

$f(x)=\lambda\Leftrightarrow\sqrt{-x}=\lambda\Leftrightarrow -x=\lambda^2\Leftrightarrow x=-\lambda^2$ και

για x > 0 είναι $f(x)=\lambda\Leftrightarrow\sqrt{x}=\lambda\Leftrightarrow x=\lambda^2$, άρα έχουν κοινά σημεία τα σημεία $\Gamma\left(\lambda^2,\lambda\right)$ και $\Delta\left(-\lambda^2,\lambda\right)$.

Έστω Ε, Ζ οι προβολές των Γ, Δ στον άξονα x΄x, τότε $\Gamma\left(\lambda^2,0\right)$ και $\Delta\left(-\lambda^2,0\right)$. Στο σχήμα παρατηρούμε ότι το χωρίο που περικλείεται από τη C_f και την ευθεία $y=\lambda$ είναι μικρότερο από το εμβαδόν του ορθογωνίου ΓΔΖΕ, οπότε
$E<\left(\Gamma\Delta ZE\right)=\left(ZE\right)\left(\Gamma E\right)=2\lambda^2\cdot\lambda=2\lambda^3$.

7. α) Επειδή το σημείο Α ανήκει στην ε, ισχύει ότι $f\left(1\right)=1+1=2$.

Επειδή η ε εφάπτεται της C_f στο Α, ισχύει ότι $f'\left(1\right)=\lambda_\varepsilon=1$.

β) Είναι $f'\left(1\right)=1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to1}\frac{f\left(x\right)-f\left(1\right)}{x-1}=1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to1}\frac{f\left(x\right)-2}{x-1}=1$.

i. Επειδή η f είναι συνεχής ισχύει $\lim\limits_{x\to1}f\left(x\right)=f\left(1\right)=2$.

Είναι $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{f\left(x\right)}-\sqrt{2}}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{f\left(x\right)}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{f\left(x\right)}+\sqrt{2}\right)}{\left(x-1\right)\left(\sqrt{f\left(x\right)}+\sqrt{2}\right)}=$

$$\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{f\left(x\right)}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}{\left(x-1\right)\left(\sqrt{f\left(x\right)}+\sqrt{2}\right)}=\lim_{x\to1}\left(\frac{f\left(x\right)-2}{x-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{f\left(x\right)}+\sqrt{2}}\right)=1\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

ii. $\lim\limits_{x\to1}\frac{xf\left(x\right)-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{xf\left(x\right)-2x+2x-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{x\left(f\left(x\right)-2\right)}{x-1}+\frac{2\cancel{\left(x-1\right)}}{\cancel{x-1}}\right)=3$.

γ) Είναι $g\left(0\right)=f\left(1\right)-1=2-1=1$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση και πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'\left(x\right)=f'\left(x^2+x+1\right)\left(2x+1\right)$.

Είναι $g'\left(0\right)=f'\left(1\right)\cdot1=1$.

Η εφαπτομένη της C_g στο Γ έχει εξίσωση
$y-g\left(0\right)=g'\left(0\right)x\Leftrightarrow y-1=x\Leftrightarrow y=x+1$.

Άρα η ε είναι εφαπτομένη της C_g στο σημείο Γ.

δ) i. Αν η φ είναι πολυώνυμο 2ου βαθμού τότε θα είναι της μορφής
$f\left(x\right)=\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha\neq0,\ \beta,\gamma\in\mathbb{R}$. Είναι $f\left(1\right)=2\Leftrightarrow\alpha+\beta+\gamma=2\ \left(1\right)$

Επίσης $f\left(0\right)=-1\Leftrightarrow\gamma=-1$, οπότε η (1) γίνεται $\alpha+\beta-1=2\Leftrightarrow\beta=3-\alpha$ (2)

Η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'\left(x\right)=2\alpha x+\beta$.

Όμως $f'\left(1\right)=1\Leftrightarrow2\alpha+\beta=1\overset{(2)}{\Leftrightarrow}2\alpha+3-\alpha=1\Leftrightarrow\alpha=-2$ οπότε, $\beta=3-\left(-2\right)=5$.

Άρα $f\left(x\right)=-2x^2+5x-1,\ x\in\mathbb{R}$.

ii. Έστω $h\left(x\right)=f\left(x\right)-\ln\frac{1}{x}=f\left(x\right)+\ln x,\ x\in\left(0,1\right]$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(f(x)+\ln x\right) = -\infty$, οπότε υπάρχει $\kappa > 0$ όπου ο κ είναι πολύ κοντά στο 0, τέτοιο, ώστε $h(\kappa) < 0$. Είναι $h(1) = f(1) = 2 > 0$.

Επειδή $h(\kappa)h(1) < 0$, η h είναι συνεχής στο [κ, 1], σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = \ln\frac{1}{x}$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(\kappa,1)$, οπότε και στο (0,1).

8. α) Είναι $\left(f(x)-1\right)^2 = (x-1)^6 \Leftrightarrow |f(x)-1| = \sqrt{(x-1)^6} \Leftrightarrow |f(x)-1| = |x-1|^3$ (1)

Έστω $\nu(x) = f(x)-1, x\in\mathbb{R}$. Είναι $\nu(x) = 0 \Leftrightarrow |\nu(x)| = 0 \Leftrightarrow |x-1|^3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Επειδή η ν είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών στο $\mathbb{R}$ και $\nu(x) \neq 0$ για κάθε $x \neq 1$, διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,1),(1,+\infty)$.

Είναι $\nu(0) = f(0)-1 = 1 > 0$, άρα $\nu(x) > 0 \Leftrightarrow f(x)-1 > 0$ για κάθε $x\in(-\infty,1)$.

Είναι $\nu(2) = f(2)-1 = -1 < 0$ άρα $\nu(x) < 0 \Leftrightarrow f(x)-1 < 0$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$.

Από τη σχέση (1): για $x < 1$ είναι $f(x)-1 = -(x-1)^3 \Leftrightarrow f(x) = -(x-1)^3+1$ και για $x > 1$: $-f(x)+1 = (x-1)^3 \Leftrightarrow f(x) = -(x-1)^3+1$.

Για $x = 1: f(x)-1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 1$ άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι

$f(x) = -(x-1)^3+1$.

β) Για κάθε $x_1, x_2 \in\mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1-1 < x_2-1 \Leftrightarrow (x_1-1)^3 < (x_2-1)^3 \Leftrightarrow$
$-(x_1-1)^3 > -(x_2-1)^3 \Leftrightarrow -(x_1-1)^3+1 > -(x_2-1)^3+1 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα είναι 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R}) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right) = \mathbb{R}$. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $y\in\mathbb{R}$ είναι:

$f(x) = y \Leftrightarrow -(x-1)^3+1 = y \Leftrightarrow (x-1)^3 = 1-y$.

Αν $y \le 1$ τότε $x-1 = \sqrt[3]{1-y} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{1-y}+1 \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \sqrt[3]{1-y}+1$

Αν $y > 1$ τότε $x-1 = -\sqrt[3]{y-1} \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{y-1}+1 \Leftrightarrow f^{-1}(y) = -\sqrt[3]{y-1}+1$.

Άρα $f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{1-x}+1, x \le 1 \\ -\sqrt[3]{x-1}+1, x > 1 \end{cases}$.

γ) Αν $x \le 1$: $f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow -(x-1)^3+1 = \sqrt[3]{1-x}+1 \Leftrightarrow -(x-1)^3 = \sqrt[3]{1-x} \Leftrightarrow$
$-(x-1)^9 = 1-x \Leftrightarrow -(x-1)^9+x-1 = 0 \Leftrightarrow -(x-1)\left((x-1)^8-1\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\left(x-1=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ δεκτή}\right)$ ή $\left(\left(x-1\right)^8=1 \overset{x\le 1}{\Leftrightarrow} x-1=-1 \Leftrightarrow x=0 \text{ απορρίπτεται}\right)$.

Αν $x>1$: $f\left(x\right)=f^{-1}\left(x\right) \Leftrightarrow -\left(x-1\right)^3+1=-\sqrt[3]{x-1}+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x-1\right)^3=\sqrt[3]{x-1} \Leftrightarrow \left(x-1\right)^9=x-1 \Leftrightarrow \left(x-1\right)\left(\left(x-1\right)^8-1\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x-1=0 \Leftrightarrow x=1\right)$ ή $\left(\left(x-1\right)^8=1 \overset{x\ge 1}{\Leftrightarrow} x-1=1 \Leftrightarrow x=2\right)$ οπότε δεκτή ρίζα είναι μόνον η x=2. Είναι $f\left(2\right)=0, f\left(1\right)=1$ άρα τα κοινά σημεία των C_f , $C_{f^{-1}}$ είναι τα $A\left(1,1\right)$, $B\left(2,0\right)$. Έστω τα διανύσματα $\overrightarrow{BA}=\left(-1,1\right)$ και $\overrightarrow{B\Gamma}=\left(2,-2\right)$.

Είναι $\det\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{B\Gamma}\right)=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}=2-2=0$ οπότε τα σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακά.

δ) Για κάθε $x>1$ είναι $f^{-1}\left(x\right)=\sqrt[3]{x-1}+1 \overset{x>1}{=} \left(x-1\right)^{\frac{1}{3}}+1$. Η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $\left(1,+\infty\right)$ με παράγωγο $\left(f^{-1}\right)'\left(x\right)=\frac{1}{3}\left(x-1\right)^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\left(x-1\right)^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{\left(x-1\right)^2}}$.

Η εφαπτομένη (ε) της $C_{f^{-1}}$ στο $x_0=2$ έχει εξίσωση:

$y-f^{-1}\left(2\right)=\left(f^{-1}\right)'\left(2\right)\left(x-2\right) \Leftrightarrow y-2=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3} \Leftrightarrow y=\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$.

ε) Έστω $M\left(x\left(t\right),y\left(t\right)\right)$ με $y\left(t\right)=f\left(x\left(t\right)\right)=-\left[x\left(t\right)-1\right]^3+1$.

Είναι $x'\left(t\right)=1$ και $x\left(t_0\right)=1$.

Είναι $E\left(t\right)=\left(OK\Lambda M\right)=\left(OK\right)\left(OM\right)=x\left(t\right)y\left(t\right)=-x\left(t\right)\left[x\left(t\right)-1\right]^3+x\left(t\right)$

οπότε $E'\left(t\right)=-x'\left(t\right)\left[x\left(t\right)-1\right]^3-3x\left(t\right)\left[x\left(t\right)-1\right]^2x'\left(t\right)+x'\left(t\right)=$

$=-\left[x\left(t\right)-1\right]^3-3x\left(t\right)\left[x\left(t\right)-1\right]^2+1$. Τη χρονική στιγμή $t=t_0$ είναι

$E'\left(t_0\right)=-\left[x\left(t_0\right)-1\right]^3-3x\left(t_0\right)\left[x\left(t_0\right)-1\right]^2+1=0+0+1=1 \ m^2/\text{sec}$.

9. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ οπότε είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα είναι συνεχής και στο x = 0, επομένως $\lim_{x\to 0} f\left(x\right)=f\left(0\right) \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\left(\alpha x e^x-\beta\right)=\alpha-\beta-1 \Leftrightarrow$

$\alpha-\cancel{\beta}-1=-\cancel{\beta} \Leftrightarrow \alpha=1$, δηλαδή $f\left(x\right)=\begin{cases} x e^x-\beta, & x\ne 0 \\ -\beta, & x=0 \end{cases}$.

Το σημείο $\left(0,-\beta\right)$ ανήκει στην (ε) οπότε $-\beta=-1 \Leftrightarrow \beta=1$.

Άρα $f\left(x\right)=\begin{cases} x e^x-1, & x\ne 0 \\ -1, & x=0 \end{cases} \Leftrightarrow f\left(x\right)=x e^x-1, \ x\in\mathbb{R}$.

β) Θεωρούμε τις συναρτήσεις $g(x)=f(x)-x$, $x\in[0,1]$ και

$h(x)=f(x)+x$, $x\in[0,1]$ οι οποίες είναι συνεχείς στο $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Είναι $g(0)=f(0)=-1<0$ και $g(1)=f(1)+1=e-1-1=e-2>0$.

Επίσης $h(0)=f(0)=-1<0$ και $h(1)=f(1)+1=e-1+1=e>0$.

Άρα $g(0)g(1)<0$ και $h(0)h(1)<0$ επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχουν $x_1,x_2\in(0,1)$ τέτοια ώστε

$g(x_1)=0\Leftrightarrow f(x_1)-x_1=0\Leftrightarrow\Leftrightarrow f(x_1)=x_1$ (1) και

$h(x_2)=0\Leftrightarrow f(x_2)+x_2=0\Leftrightarrow f(x_2)=-x_2$ (2)

Με πρόσθεση των σχέσεων (1) και (2) έχουμε το ζητούμενο δηλαδή

$f(x_1)+f(x_2)=x_1-x_2$.

γ) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x,\ x\in\mathbb{R}$.

Είναι $f'(x)=0\Leftrightarrow(x+1)e^x=0\Leftrightarrow x=-1$ άρα η C_f δέχεται μοναδική οριζόντια εφαπτομένη την $y=f(-1)\Leftrightarrow y=-e^{-1}-1\Leftrightarrow y=-\dfrac{1+e}{e}$.

δ) i. Είναι $\varphi(x)=f(x)=xe^x-1$, $x>0$. Για κάθε $0<x_1<x_2$ (3) είναι $0<e^{x_1}<e^{x_2}$ (4). Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) έχουμε

$x_1e^{x_1}<x_2e^{x_2}\Leftrightarrow x_1e^{x_1}-1<x_2e^{x_2}-1\Leftrightarrow\varphi(x_1)<\varphi(x_2)\Rightarrow\varphi\nearrow(0,+\infty)$.

ii. Η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ άρα 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

Επειδή η φ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ έχει σύνολο τιμών το

$$\varphi((0,+\infty))=\left(\lim_{x\to0^+}\varphi(x),\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)\right)=(-1,+\infty).$$

Άρα η φ^{-1} έχει πεδίο ορισμού το $(-1,+\infty)$.

iii. Για κάθε $x>0$ είναι $\varphi'(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x$.

Είναι $\varphi^{-1}(e-1)=\alpha\Leftrightarrow\varphi(\alpha)=e-1\Leftrightarrow\varphi(\alpha)=\varphi(1)\overset{\varphi\ 1-1}{\Leftrightarrow}\alpha=1$.

Είναι $\varphi(\varphi^{-1}(x))=x$ (5) για κάθε $x>-1$.

Με παραγώγιση της σχέσης (5) κατά μέλη έχουμε $(\varphi)'(\varphi^{-1}(x))\cdot(\varphi^{-1})'(x)=1$.

Για $x=e-1$ είναι $\varphi'(\varphi^{-1}(e-1))\cdot(\varphi^{-1})'(e-1)=1\Leftrightarrow\varphi'(1)\cdot(\varphi^{-1})'(e-1)=1\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2e\cdot(\varphi^{-1})'(e-1)=1\Leftrightarrow(\varphi^{-1})'(e-1)=\frac{1}{2e}.$$

Άρα η εφαπτομένη της $C_{\varphi^{-1}}$ στο $x_0=e-1$ έχει εξίσωση:

$y-\varphi^{-1}(e-1)=\left(\varphi^{-1}\right)'(e-1)(x-e+1)\Leftrightarrow$

$y-1=\frac{1}{2e}x-\frac{e-1}{2e}\Leftrightarrow y=\frac{1}{2e}x+\frac{e+1}{2e}$.

10. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με $f'(x)=3x^2, x\in\mathbb{R}$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $M\left(\alpha,\alpha^3\right)$ είναι:

$(\varepsilon): y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)\Leftrightarrow y-\alpha^3=3\alpha^2(x-\alpha)\Leftrightarrow y=3\alpha^2x-2\alpha^3$.

Για τα κοινά σημεία των ε, C_f έχουμε:

$f(x)=y\Leftrightarrow x^3=3\alpha^2x-2\alpha^3\Leftrightarrow x^3-3\alpha^2x+2\alpha^3=0\Leftrightarrow$

$x^3-\alpha^2x-2\alpha^2x+2\alpha^3=0\Leftrightarrow x\left(x^2-\alpha^2\right)-2\alpha^2(x-\alpha)=0\Leftrightarrow$

$x(x-\alpha)(x+\alpha)-2\alpha^2(x-\alpha)=0\Leftrightarrow(x-\alpha)\left(x^2+\alpha x-2\alpha^2\right)=0\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}x-\alpha=0\\x^2+\alpha x-2\alpha^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\alpha\\x=\alpha\\x=-2\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\alpha\\x=-2\alpha\end{cases}.$$

Είναι $f(-2\alpha)=-8\alpha^3$ άρα έχουν κοινό σημείο και το $N\left(-2\alpha,-8\alpha^3\right)$.

β) Είναι $f'(-2\alpha)=3(-2\alpha)^2=3\cdot4\alpha^2=4\cdot3\alpha^2=4f'(\alpha)$ άρα στο σημείο Ν η κλίση της C_f είναι τετραπλάσια της κλίσης της στο Μ.

γ) Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι $x_1^3<x_2^3\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)\Leftrightarrow f\nearrow\mathbb{R}$, οπότε η f είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

Θέτουμε $f(x)=y\Leftrightarrow x^3=y\Leftrightarrow x=\begin{cases}\sqrt[3]{y}, & y\ge0\\-\sqrt[3]{-y}, & y<0\end{cases}$, άρα $f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x}, & x\ge0\\-\sqrt[3]{-x}, & x<0\end{cases}$.

δ) Η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων με παράγωγο

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\left(-\sqrt[3]{-x}\right)'=\left(-(-x)^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{3}(-x)^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{(-x)^2}}.$$

Η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων με

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\left(\sqrt[3]{x}\right)'=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Στο x = 0 είναι:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt[3]{x}}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt[3]{x}}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^3}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}=+\infty.$$

Άρα $\left(f^{-1}\right)'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} & ,x>0\\ \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(-x)^2}} & ,x<0\end{cases}$.

ε) Θέτουμε $k(x)=f'(x)-\left(f^{-1}\right)'(x)=3x^2-\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}},x>0$.

Η k είναι συνεχής στο [0, 1] ως σύνθεση και πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

$\lim\limits_{x\to o}k(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(3x^2-\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)=-\infty$ άρα υπάρχει ξ κοντά στο μηδέν από μεγαλύτερες τιμές τέτοιο ώστε $k(\xi)<0$. Είναι $k(1)=3-\dfrac{1}{3}>0$ άρα $k(\xi)k(1)<0$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano, άρα υπάρχει $x_0\in(\xi,1)\subseteq(0,1)$ τέτοιο ώστε $k(x_0)=0\Leftrightarrow f'(x_0)=\left(f^{-1}\right)'(x_0)$ άρα έχουν κοινή εφαπτόμενη στο $(0,1)$.

11. α) Η f ορίζεται όταν $|x|^3+x^2\neq 0$.

1^{ος} τρόπος: Είναι $|x|\geq 0\Leftrightarrow |x|^3\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=0$. Είναι $x^2\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=0$. Άρα είναι $|x|^3+x^2=0\Leftrightarrow x=0$. Επομένως πρέπει $x\neq 0$ άρα η f έχει πεδίο ορισμού έχουμε $D_f=\mathbb{R}^*$.

2^{ος} τρόπος: $|x|^3+x^2\neq 0\Leftrightarrow |x|^3+|x|^2\neq 0\Leftrightarrow |x|^2\left(|x|+1\right)\neq 0\Leftrightarrow$
$\left(|x|^2\neq 0\Leftrightarrow x\neq 0\right)$ και $\left(|x|+1\neq 0\Leftrightarrow |x|\neq -1 \text{ ισχύει}\right)\Leftrightarrow x\neq 0$ επομένως $D_f=\mathbb{R}^*$.

Η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{2}{x}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^*$.

Για κάθε $x\neq 0$: $f(x)=\dfrac{2x^2+2|x|}{|x|^3+x^2}=\dfrac{2|x|^2+2|x|}{|x|^3+|x|^2}=\dfrac{2\cancel{|x|}\cancel{\left(|x|+1\right)}}{|x|^{\cancel{2}}\cancel{\left(|x|+1\right)}}=\dfrac{2}{|x|}$.

Άρα $f(x)=\dfrac{2}{|x|}=\begin{cases}-\dfrac{2}{x} & , x<0\\ \dfrac{2}{x} & , x>0\end{cases}$, επομένως είναι $f=g$ στο $(0,+\infty)$.

β) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ ως ρητή με παράγωγο $g'(x)=-\dfrac{2}{x^2}$.

Η εφαπτομένη της C_g στο τυχαίο σημείο $A\left(x_0,g(x_0)\right)$ με $x_0\neq 0$ είναι η

$y-g(x_0)=g'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y-\dfrac{2}{x_0}=-\dfrac{2}{x_0^{\,2}}x+\dfrac{2}{x_0}\Leftrightarrow y=-\dfrac{2}{x_0^{\,2}}x+\dfrac{4}{x_0}$.

Για να διέρχεται από την αρχή των αξόνων πρέπει:

$0=-\dfrac{2}{x_0^{\,2}}\cdot 0+\dfrac{4}{x_0}\Leftrightarrow \dfrac{4}{x_0}=0\Leftrightarrow 4=0$ αδύνατο.

γ) Όπως στο προηγούμενο ερώτημα η εφαπτομένη της C_g στο τυχαίο σημείο $A(x_0,g(x_0))$ με $x_0\neq 0$ είναι η $y=-\dfrac{2}{x_0^{\,2}}x+\dfrac{4}{x_0}$.

Για $x=0$ είναι: $y=\dfrac{4}{x_0}$ άρα τέμνει τον άξονα y΄y στο $K\left(0,\dfrac{4}{x_0}\right)$.

Για $y=0$ είναι: $\dfrac{2}{x_0^{\,2}}x=\dfrac{4}{x_0}\Leftrightarrow x=\dfrac{2x_0^{\,2}}{x_0}\Leftrightarrow x=2x_0$ άρα τέμνει τον άξονα x΄x στο $\Lambda(2x_0,0)$. Για να σχηματίζει ισοσκελές τρίγωνο με τους άξονες πρέπει:

$(OK)=(O\Lambda)\Leftrightarrow \left|\dfrac{4}{x_0}\right|=|2x_0|\Leftrightarrow \dfrac{4}{|x_0|}=2|x_0|\Leftrightarrow |x_0|^2=2\Leftrightarrow x_0=\pm\sqrt{2}$.

Για $x_0=-\sqrt{2}$ είναι $y=-\dfrac{2}{2}x-\dfrac{4}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow y=-x-\dfrac{4\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow y=-x-2\sqrt{2}$.

Για $x_0=\sqrt{2}$ είναι $y=-\dfrac{2}{2}x+\dfrac{4}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow y=-x+\dfrac{4\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow y=-x+2\sqrt{2}$.

δ) 1ος τρόπος: $x^9+x+\dfrac{1}{x}=g(x)\Leftrightarrow x^9+x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{2}{x}\Leftrightarrow x^9+x-\dfrac{1}{x}=0$.

Έστω η συνάρτηση $h(x)=x^9+x-\dfrac{1}{x}$, $x\neq 0$ η οποία είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Είναι $h(-1)=-1-1+1=-1<0$,

$\lim\limits_{x\to 0^-}h(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x^9+x-\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$ άρα υπάρχει $\alpha<0$ πολύ κοντά στο μηδέν τέτοιο ώστε $h(\alpha)>0$. Επομένως $h(-1)h(\alpha)<0$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_1\in(-1,\alpha)\subseteq(-1,0)$ τέτοιο ώστε $h(x_1)=0$.

Είναι $h(1)=1+1-1=1>0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^9+x-\dfrac{1}{x}\right)=-\infty$ άρα υπάρχει $\beta>0$ πολύ κοντά στο μηδέν τέτοιο ώστε $h(\beta)<0$. Άρα είναι $h(\beta)h(1)<0$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_2\in(\beta,1)\subseteq(0,1)$ τέτοιο ώστε $h(x_2)=0$.

2^{ος} τρόπος: Για κάθε $x \neq 0$:

$$x^9 + x + \frac{1}{x} = g(x) \Leftrightarrow x^9 + x + \frac{1}{x} = \frac{2}{x} \Leftrightarrow x^9 + x - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x^{10} + x^2 - 1 = 0 .$$

Έστω η συνάρτηση $k(x) = x^{10} + x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής ως πολυωνυμική. Είναι $k(-1) = 1 > 0$, $k(0) = -1 < 0$ και $k(1) = 1 > 0$.

Άρα $k(-1)k(0) < 0$ και $k(0)k(1) < 0$ επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχουν $x_1 \in (-1,0)$ και $x_2 \in (0,1)$ τέτοια ώστε $k(x_1) = 0$ και $k(x_2) = 0$.

12. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο (0,2π) ως σύνθεση και διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο $f'(x) = \dfrac{(\eta\mu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2(\eta\mu x)} - 1 = \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu^2(\eta\mu x)} - 1$.

Είναι $f(\pi) = \varepsilon\varphi(\eta\mu\pi) - \pi = \varepsilon\varphi 0 - \pi = -\pi$,

$$f'(\pi) = \frac{\sigma\upsilon\nu\pi}{\sigma\upsilon\nu^2(\eta\mu\pi)} - 1 = \frac{-1}{\sigma\upsilon\nu^2 0} - 1 = -1 - 1 = -2 .$$

Η εφαπτομένη της C_f στο $A(\pi, f(\pi))$ έχει εξίσωση:

$$y - f(\pi) = f'(\pi)(x - \pi) \Leftrightarrow y + \pi = -2x + 2\pi \Leftrightarrow y = -2x + \pi .$$

β) Είναι $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\varepsilon\varphi(\eta\mu x) - x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\varepsilon\varphi(\eta\mu x)}{x} - 1\right) =$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu(\eta\mu x)}{x\,\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x)} - 1\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x)} - 1\right) = 0 \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu(\eta\mu x)}{\eta\mu x} \overset{\eta\mu x = u}{\underset{u\to 0}{=}} \lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u} = 1,\ \lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x} = 1 \text{ και } \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x)} \overset{k=\eta\mu x}{\underset{\substack{x\to 0,\\ k\to 0}}{=}} \lim_{k\to 0}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu k} = 1 .$$

γ) Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu^2(\eta\mu x)} - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu^2(\eta\mu x)}{\sigma\upsilon\nu^2(\eta\mu x)} = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu^2(\eta\mu x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (1,π). Έστω η συνάρτηση $g(x) = \sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu^2(\eta\mu x)$, $x \in [1,\pi]$, η οποία είναι συνεχής στο $[1,\pi]$ ως σύνθεση και πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $g(1) = \sigma\upsilon\nu 1 - \sigma\upsilon\nu^2(\eta\mu 1) > 0$, $g(\pi) = \sigma\upsilon\nu\pi - \sigma\upsilon\nu^2(\eta\mu\pi) = -1 - \sigma\upsilon\nu^2 0 = -2 < 0$

Άρα $g(1)g(\pi) < 0$, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano, οπότε υπάρχει $x_0 \in (1,\pi)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$.

δ) Για κάθε $x \in (0,2\pi)$ είναι $g'(x) = εφ^2(ημx) = \dfrac{ημ^2(ημx)}{συν^2(ημx)} =$

$= \dfrac{1-συν^2(ημx)}{συν^2(ημx)} = \dfrac{1}{συν^2(ημx)} - 1$. Επίσης για κάθε $x \in (0,2\pi)$ είναι

$συν^2(ημx) > 0$ και $συνx < 1$ άρα $\dfrac{συνx}{συν^2(ημx)} < \dfrac{1}{συν^2(ημx)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{συνx}{συν^2(ημx)} - 1 < \dfrac{1}{συν^2(ημx)} - 1 \Leftrightarrow f'(x) < g'(x)$ οπότε οι C_f, C_g δεν δέχονται κοινή εφαπτομένη.

Επίπεδο δυσκολίας Δ Θέματος

13. α) Για κάθε $x > 0$ είναι: $f^2(x) = 2\sqrt[ν]{x}\,f(x) \Leftrightarrow f^2(x) - 2\sqrt[ν]{x}\,f(x) = 0 \Leftrightarrow$

$f^2(x) - 2\sqrt[ν]{x}\,f(x) + \sqrt[ν]{x}^{\,2} = \sqrt[ν]{x}^{\,2} \Leftrightarrow \left(f(x) - \sqrt[ν]{x}\right)^2 = \sqrt[ν]{x}^{\,2} \Leftrightarrow$

$\left|f(x) - \sqrt[ν]{x}\right| = \left|\sqrt[ν]{x}\right| \Leftrightarrow \left|f(x) - \sqrt[ν]{x}\right| = \sqrt[ν]{x}$ (1).

Έστω $g(x) = f(x) - \sqrt[ν]{x}$, $x > 0$. Είναι $\sqrt[ν]{x} > 0 \Leftrightarrow |g(x)| > 0 \Leftrightarrow g(x) \neq 0$ στο $(0,+\infty)$. Η g είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων στο $(0,+\infty)$ επομένως η g διατηρεί πρόσημο στο $(0,+\infty)$.

Είναι $g(1) = f(1) - 1 = 1 > 0$ άρα $g(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.

Επομένως από τη σχέση (1) έχουμε $f(x) - \sqrt[ν]{x} = \sqrt[ν]{x} \Leftrightarrow f(x) = 2\sqrt[ν]{x}$ για κάθε $x > 0$

Επειδή η f συνεχής είναι συνεχής στο $x = 0$, ισχύει ότι

$f(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \Leftrightarrow f(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} 2\sqrt[ν]{x} \Leftrightarrow f(0) = 0$ επομένως είναι

$$f(x) = \begin{cases} 2\sqrt[ν]{x} &, x > 0 \\ 0 &, x = 0 \end{cases} = 2\sqrt[ν]{x}\ , x \geq 0 .$$

β) 1ος τρόπος:

Είναι $g(x) = 2\sqrt[3]{x} = 2x^{\frac{1}{3}}$, $x \geq 0$, $h(x) = 2\sqrt[4]{x} = 2x^{\frac{1}{4}}$, $x \geq 0$.

Οι συναρτήσεις g, h είναι παραγωγίσιμες στο $(0,+\infty)$ με παραγώγους αντίστοιχα

$g'(x) = \dfrac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $x > 0$ και $h'(x) = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{4}} = \dfrac{1}{2\sqrt[4]{x^3}}$, $x > 0$.

Επομένως $g'(1) = \dfrac{2}{3}$ και $h'(1) = \dfrac{1}{2}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2\sqrt[3]{x}-2}{2\sqrt[4]{x}-2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{g(x)-2}{h(x)-2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{g(x)-g(1)}{h(x)-h(1)}=$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}}{\dfrac{h(x)-h(1)}{x-1}}=\frac{g'(1)}{h'(1)}=\frac{\dfrac{2}{3}}{\dfrac{1}{2}}=\frac{4}{3}.$$

2^{ος} τρόπος: Θέτουμε $\sqrt[12]{x}=u$, τότε $\left(\sqrt[12]{x}\right)^4=u^4\Leftrightarrow\sqrt[3]{x}=u^4$ και

$\left(\sqrt[12]{x}\right)^3=u^3\Leftrightarrow\sqrt[4]{x}=u^3$. Όταν $x\to1$ τότε και $u\to1$, οπότε:

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}=\lim_{u\to1}\frac{u^4-1}{u^3-1}=\lim_{u\to1}\frac{\cancel{(u-1)}(u+1)(u^2+1)}{\cancel{(u-1)}(u^2+u+1)}=\frac{4}{3}.$$

γ) Είναι $\varphi(x)=\dfrac{xf(x)}{x^2+1}=\dfrac{2x\sqrt{x}}{x^2+1}$, $x\in[0,+\infty)$. Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$\varphi'(x)=\frac{\left(2\sqrt{x}+\dfrac{x}{\sqrt{x}}\right)(x^2+1)-4x^2\sqrt{x}}{(x^2+1)^2}=\frac{\dfrac{3x(x^2+1)-4x^3}{\sqrt{x}}}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{3x(x^2+1)-4x^3}{\sqrt{x}(x^2+1)^2}=\frac{3x^3+3x-4x^3}{\sqrt{x}(x^2+1)^2}=\frac{-x^3+3x}{\sqrt{x}(x^2+1)^2},\ x>0.$$

Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\dfrac{2x\sqrt{x}}{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2\sqrt{x}}{x^2+1}=0$ άρα η φ είναι παραγωγίσιμη στο μηδέν με $\varphi'(0)=0$. Έστω το σημείο $M(x_0,\varphi(x_0))$, $x_0>0$. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της φ είναι η $y-\varphi(x_0)=\varphi'(x_0)(x-x_0)$.

Αν διέρχεται από την αρχή των αξόνων τότε:

$$-\varphi(x_0)=-x_0\varphi'(x_0)\Leftrightarrow\varphi(x_0)=x_0\varphi'(x_0)\Leftrightarrow\frac{2\cancel{x_0}\sqrt{x_0}}{\cancel{x_0^2+1}}=\cancel{x_0}\frac{-x_0^3+3x_0}{\sqrt{x_0}(x_0^2+1)^{\cancel{2}}}\Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{x_0}=\frac{-x_0^3+3x_0}{\sqrt{x_0}(x_0^2+1)}\Leftrightarrow 2x_0(x_0^2+1)=-x_0^3+3x_0\Leftrightarrow 2x_0^3+2x_0=-x_0^3+3x_0\Leftrightarrow$$

$3x_0^3=x_0\Leftrightarrow x_0\overset{x_0>0}{\Leftrightarrow}3x_0^2=1\overset{x_0>0}{\Leftrightarrow}x_0=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Επομένως για $x_0>0$ διέρχεται μοναδική εφαπτομένη. Για $x_0=0$: Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της φ είναι η

$y=\varphi(0)\Leftrightarrow y=0$. Επομένως οι εφαπτομένες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων είναι δύο.

δ) Έστω $M(x,y)$. Τα μεγέθη x,y μεταβάλλονται συναρτήσει του χρόνου άρα

$y(t)=2\sqrt{x(t)}$ οπότε $y'(t)=\dfrac{x'(t)}{\sqrt{x(t)}}$. Επίσης

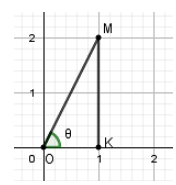
$M\big(x(t),y(t)\big)\equiv M\big[x(t),f\big(x(t)\big)\big]\equiv M\Big(x(t),2\sqrt{x(t)}\Big)$ αφού το M κινείται πάνω στην γραφική παράσταση της f.

i. Τη χρονική στιγμή t_0 είναι:

$$y'(t_0)=\frac{x'(t_0)}{\sqrt{x(t_0)}}\Leftrightarrow x'(t_0)=\frac{x'(t_0)}{\sqrt{x(t_0)}}\overset{x'(t)\neq 0}{\Leftrightarrow}\sqrt{x(t_0)}=1\Leftrightarrow x(t_0)=1.$$

Άρα το σημείο M έχει συντεταγμένες $M(1,2)$.

ii. Για την γωνία θ ισχύει: $\varepsilon\varphi\theta(t)=\dfrac{y(t)}{x(t)}\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\theta(t)=\dfrac{2\sqrt{x(t)}}{x(t)}$,



οπότε $$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}\cdot\theta'(t)=\frac{\dfrac{x(t)x'(t)}{\sqrt{x(t)}}-2\sqrt{x(t)}x'(t)}{x^2(t)}\Leftrightarrow$$

$$\theta'(t)=\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)\cdot\frac{x(t)x'(t)-2x(t)x'(t)}{x^2(t)\cdot\sqrt{x(t)}}\Leftrightarrow\theta'(t)=\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)\cdot\frac{-\cancel{x(t)}x'(t)}{x^{\cancel{2}}(t)\cdot\sqrt{x(t)}}\Leftrightarrow$$

$$\theta'(t)=\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)\cdot\frac{-x'(t)}{x(t)\cdot\sqrt{x(t)}}\quad(1)$$

1^{ος} τρόπος: Τη χρονική στιγμή $t=t_0$ είναι:

- $\theta'(t_0)=\sigma\upsilon\nu^2\theta(t_0)\dfrac{-x'(t_0)}{x(t_0)\sqrt{x(t_0)}}$.
- $OM^2=OK^2+KM^2=1+4=5\Leftrightarrow OM=\sqrt{5}$.
- $x'(t_0)=y'(t_0)=-1$.

Είναι $\sigma\upsilon\nu\theta(t_0)=\dfrac{OK}{OM}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, οπότε $\theta'(t_0)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^2\dfrac{1}{1\cdot\sqrt{1}}=\dfrac{1}{5}$ rad / sec.

2^{ος} τρόπος: Από τη σχέση (1) έχουμε: $\theta'(t)=\dfrac{1}{\varepsilon\varphi^2\theta(t)+1}\dfrac{-x'(t)}{x(t)\sqrt{x(t)}}$.

Τη χρονική στιγμή t_0 είναι:

- $x'(t_0)=y'(t_0)=-1$,
- $\varepsilon\varphi\theta(t_0)=\dfrac{y(t_0)}{x(t_0)} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\theta(t_0)=2$,
- $\theta'(t_0)=-\dfrac{1}{\varepsilon\varphi^2\theta(t_0)+1}\dfrac{x'(t_0)}{x(t_0)\sqrt{x(t_0)}} \Leftrightarrow \theta'(t_0)=-\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{-1}{1} \Leftrightarrow \theta'(t_0)=\dfrac{1}{5}\text{rad/sec}$.

14. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,+\infty)$ με παράγωγο

$f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x+1}+2$, $x>-1$. Για κάθε $x_1,x_2>-1$ με $x_1<x_2$ είναι

$$\begin{cases} e^{x_1}<e^{x_2} \\ x_1+1<x_2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x_1}<e^{x_2} \\ \dfrac{1}{x_1+1}>\dfrac{1}{x_2+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x_1}<e^{x_2} & (1) \\ -\dfrac{1}{x_1+1}<-\dfrac{1}{x_2+1} & (2) \end{cases}.$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) έχουμε:

$$e^{x_1}-\frac{1}{x_1+1}+2<e^{x_2}-\frac{1}{x_2+1}+2 \Leftrightarrow f'(x_1)<f'(x_2) \Leftrightarrow f'\nearrow(-1,+\infty).$$

Είναι $\lim\limits_{x\to-1^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\left(e^x-\dfrac{1}{x+1}+2\right)=-\infty$ άρα πολύ κοντά στο -1 υπάρχει αριθμός $\gamma\in\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right): f(\gamma)<0$, $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{e}}>0$ άρα $f(\gamma)f\left(-\dfrac{1}{2}\right)<0$.

Η f' είναι συνεχής στο, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει

$x_0\in\left(\gamma,-\dfrac{1}{2}\right)\subseteq\left(0,-\dfrac{1}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=0$. Επειδή f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1,+\infty)$, το x_0 είναι μοναδικό.

β) Επειδή $f(0)=0$ η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Η εφαπτομένη της C_f στο $O(0,0)$ είναι η ευθεία ε: $y=f'(0)x \Leftrightarrow y=2x$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $h'(x)=e^{x-1}+1$.

Για να εφάπτεται η (ε) στη C_h, αρχικά πρέπει να υπάρχει $x_1\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε

$h'(x_1)=2 \Leftrightarrow e^{x_1-1}+1=2 \Leftrightarrow e^{x_1-1}=1 \Leftrightarrow x_1-1=0 \Leftrightarrow x_1=1$.

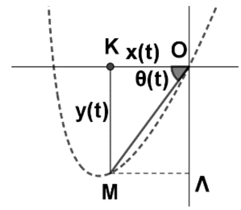
Η εφαπτομένη της C_h στο $x=1$ έχει εξίσωση

$y-h(1)=h'(1)(x-1) \Leftrightarrow y-2=2x-2 \Leftrightarrow y=2x$, οποία είναι η εξίσωση της (ε).

γ) Αρκεί να υπάρχουν $x_2,x_3>x_0$ τέτοια, ώστε $f'(x_1)f'(x_2)=-1$.

Για $x>x_0 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(x_0)=0$ άρα $f'(x_1)f'(x_2)>0$ οπότε δεν υπάρχουν τέτοια σημεία.

δ) Έστω $M(x,y)$. Τα μεγέθη x,y μεταβάλλονται συναρτήσει του χρόνου άρα



$M(x(t),y(t))$ με $y(t)=f(x(t))$, $x(t)>-1$ και $x'(t)=1$.

Είναι $\varepsilon\varphi\theta(t)=\dfrac{y(t)}{x(t)}$ και

$$(\varepsilon\varphi\theta(t))'=\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)'\Leftrightarrow$$

$$\frac{\theta'(t)}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}=\frac{y'(t)x(t)-y(t)x'(t)}{x^2(t)}\Leftrightarrow(\varepsilon\varphi\theta(t))'=\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)'\Leftrightarrow$$

$$\theta'(t)=\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)\cdot\frac{y'(t)x(t)-y(t)}{x^2(t)}\Leftrightarrow\ \theta'(t)=\frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\theta(t)}\cdot\frac{y'(t)x(t)-y(t)}{x^2(t)}\quad (A)$$

Τη χρονική στιγμή t_0 που το Μ διέρχεται από το $(x_0,f(x_0))$ είναι $x(t_0)=x_0$,

$y(t_0)=f(x_0)$, $\varepsilon\varphi\theta(t_0)=\dfrac{y(t_0)}{x(t_0)}=\dfrac{f(x_0)}{x(t_0)}$ και $y'(t_0)=f'(x_0)=0$.

Επομένως η (Α) γίνεται: $\theta'(t_0)=\dfrac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\theta(t_0)}\cdot\dfrac{y'(t_0)\cdot x(t_0)-y(t_0)}{x^2(t_0)}\Leftrightarrow$

$$\theta'(t_0)=\frac{1}{1+\dfrac{f^2(x_0)}{{x_0}^2}}\cdot\frac{-f(x_0)}{{x_0}^2}\Leftrightarrow\theta'(t_0)=-\frac{f(x_0)}{{x_0}^2+f^2(x_0)}.$$

Άρα η γωνία $\theta = MOx$ μειώνεται με ρυθμό $\dfrac{f(x_0)}{{x_0}^2+f^2(x_0)}$ rad/sec.

15. α) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to0}\left(-\sqrt[3]{x^2}+1\right)=f(0)\Leftrightarrow f(0)=1$.

Άρα $f(x)=\begin{cases}-\sqrt[3]{x^2}+1\ ,\ x\neq0\\ \quad 1\quad ,\ x=0\end{cases}\Leftrightarrow f(x)=\begin{cases}-|x|^{\frac{2}{3}}+1\ ,\ x\neq0\\ \quad 1\quad ,\ x=0\end{cases}\Leftrightarrow$

$f(x)=\begin{cases}-(-x)^{\frac{2}{3}}+1\ ,\ x<0\\ \quad 1\quad ,\ x=0\\ -x^{\frac{2}{3}}+1\ ,x>0\end{cases}$. Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-x^{\frac{2}{3}}+1-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-x^{\frac{2}{3}}}{x}=$

$= \lim\limits_{x\to 0^+}\left(-x^{-\frac{1}{3}}\right) = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{-x^{\frac{1}{3}}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{-\sqrt[3]{x}} = -\infty$ άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο μηδέν. Η f είναι παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Για $x>0: f'(x)=\left(-x^{\frac{2}{3}}+1\right)' = -\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.

Για $x<0: f'(x)=\left(-(-x)^{\frac{2}{3}}+1\right)' = \frac{2}{3}(-x)^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{-x}}$.

Άρα $f'(x)=\begin{cases} -\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}} & ,x>0 \\ \dfrac{2}{3\sqrt[3]{-x}} & ,x<0 \end{cases}$.

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $x_1\in\mathbb{R}^*$ υπάρχει μοναδικό $x_2\in\mathbb{R}^*$ ώστε $f'(x_1)f'(x_2)=-1$. Έχουμε για $x>0: f'(x)=-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}<0$ και για $x<0: f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{-x}}>0$. Άρα αν $x_1,x_2>0$ ή $x_1,x_2<0$ τότε $f'(x_1)f'(x_2)>0$ απορρίπτεται. Αν $x_1>0$ και $x_2<0$ τότε θα ισχύει $f'(x_1)f'(x_2)<0$ άρα θα αναζητήσουμε αν υπάρχουν δύο ετερόσημοι αριθμοί. Είναι

$$f'(x_1)f'(x_2)=-1 \Leftrightarrow -\frac{2}{3\sqrt[3]{x_1}}\cdot\frac{2}{3\sqrt[3]{-x_2}}=-1 \Leftrightarrow \frac{2}{3\sqrt[3]{x_1}}\cdot\frac{2}{3\sqrt[3]{-x_2}}=1 \Leftrightarrow$$

$$3\sqrt[3]{x_1}\cdot 3\sqrt[3]{-x_2}=4 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x_1}\cdot\sqrt[3]{-x_2}=\frac{4}{9} \Leftrightarrow \sqrt[3]{-x_1\cdot x_2}=\frac{4}{9} \Leftrightarrow -x_1x_2=\frac{64}{729} \Leftrightarrow$$

$x_2=-\frac{64}{729x_1}$. Άρα για κάθε $x_1\in\mathbb{R}^*$ υπάρχει μοναδικό $x_2\in\mathbb{R}^*$ ώστε $f'(x_1)f'(x_2)=-1$.

γ) Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $\rho_1>0$ είναι $(\varepsilon): y-f(\rho_1)=f'(\rho_1)(x-\rho_1) \Leftrightarrow$

$$y+\sqrt[3]{\rho_1^2}-1=-\frac{2}{3\sqrt[3]{\rho_1}}(x-\rho_1) \Leftrightarrow y+\sqrt[3]{\rho_1^2}-1=-\frac{2}{3\sqrt[3]{\rho_1}}x+\frac{2\rho_1}{3\sqrt[3]{\rho_1}} \Leftrightarrow$$

$$y=-\frac{2}{3\sqrt[3]{\rho_1}}x+\frac{2\rho_1}{3\sqrt[3]{\rho_1}}-\sqrt[3]{\rho_1^2}+1 \Leftrightarrow$$

$$y=-\frac{2}{3\sqrt[3]{\rho_1}}x+\frac{2\rho_1-3\rho_1+3\sqrt[3]{\rho_1}}{3\sqrt[3]{\rho_1}} \Leftrightarrow y=-\frac{2}{3\sqrt[3]{\rho_1}}x+\frac{-\rho_1+3\sqrt[3]{\rho_1}}{3\sqrt[3]{\rho_1}}.$$

Η εφαπτομένη διέρχεται από το $A\left(-\frac{1}{2},1\right)$ όταν:

$$1=-\frac{\cancel{2}}{3\sqrt[3]{\rho_1}}\cdot\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)+\frac{-\rho_1+3\sqrt[3]{\rho_1}}{3\sqrt[3]{\rho_1}} \Leftrightarrow \cancel{3\sqrt[3]{\rho_1}}=1-\rho_1+\cancel{3\sqrt[3]{\rho_1}} \Leftrightarrow$$

$$1=-\frac{\cancel{2}}{3\sqrt[3]{\rho_1}}\cdot\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)+\frac{-\rho_1+3\sqrt[3]{\rho_1}}{3\sqrt[3]{\rho_1}} \Leftrightarrow \cancel{3\sqrt[3]{\rho_1}}=1-\rho_1+\cancel{3\sqrt[3]{\rho_1}} \Leftrightarrow \rho_1=1.$$

Άρα διέρχεται από το σημείο Α η εφαπτόμενη με εξίσωση $(\varepsilon_1): y=-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $\rho_2<0$ είναι:

$$(\varepsilon): y-f(\rho_2)=f'(\rho_2)(x-\rho_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y+\sqrt[3]{\rho_2{}^2}-1=\frac{2}{3\sqrt[3]{-\rho_2}}(x-\rho_2) \Leftrightarrow y=\frac{2}{3\sqrt[3]{-\rho_2}}x-\frac{2\rho_2}{3\sqrt[3]{-\rho_2}}+1-\sqrt[3]{\rho_2{}^2} \Leftrightarrow$$

$$y=\frac{2}{3\sqrt[3]{-\rho_2}}x+\frac{-2\rho_2+3\sqrt[3]{-\rho_2}+3\rho_2}{3\sqrt[3]{-\rho_2}} \Leftrightarrow y=\frac{2}{3\sqrt[3]{-\rho_2}}x+\frac{\rho_2+3\sqrt[3]{-\rho_2}}{3\sqrt[3]{-\rho_2}}.$$

Η εφαπτομένη διέρχεται από το $A\left(-\frac{1}{2},1\right)$ άρα:

$$1=\frac{\cancel{2}}{3\sqrt[3]{-\rho_2}}\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)+\frac{\rho_2+3\sqrt[3]{-\rho_2}}{3\sqrt[3]{-\rho_2}} \Leftrightarrow \cancel{3\sqrt[3]{-\rho_2}}=-1+\rho_2+\cancel{3\sqrt[3]{-\rho_2}} \Leftrightarrow$$

$\rho_2=1$ απορρίπτεται. Άρα η μοναδική εφαπτομένη είναι η $y=-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}$.

δ) i. Η εφαπτομένη στο $M(\alpha, f(\alpha))$ με $\alpha>0$ έχει εξίσωση:

$$(\varepsilon): y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha) \Leftrightarrow y=-\frac{2}{3\sqrt[3]{\alpha}}x+\frac{-\alpha+3\sqrt[3]{\alpha}}{3\sqrt[3]{\alpha}}.$$

Είναι $y=0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3\sqrt[3]{\alpha}}x+\frac{-\alpha+3\sqrt[3]{\alpha}}{3\sqrt[3]{\alpha}}=0 \Leftrightarrow \frac{2}{3\sqrt[3]{\alpha}}x=\frac{-\alpha+3\sqrt[3]{\alpha}}{3\sqrt[3]{\alpha}} \Leftrightarrow$

$$2x=-\alpha+3\sqrt[3]{\alpha} \Leftrightarrow x=\frac{3\sqrt[3]{\alpha}-\alpha}{2}.$$

Άρα η εφαπτομένη τέμνει τον άξονα στο $x=\frac{3\sqrt[3]{\alpha}-\alpha}{2}$ άρα $K\left(\frac{3\sqrt[3]{\alpha}-\alpha}{2},0\right)$.

ii. Η τετμημένη του σημείου Κ συναρτήσει του χρόνου είναι:

$x(t)=\frac{3\sqrt[3]{\alpha(t)}-\alpha(t)}{2}=\frac{3\alpha^{\frac{1}{3}}(t)-\alpha(t)}{2}$ με $\alpha(t)>0$ οπότε

$x'(t)=\dfrac{\alpha^{-\frac{2}{3}}(t)\cdot\alpha'(t)-\alpha'(t)}{2}$. Επειδή το σημείο $M\left[\alpha(t),f\left[\alpha(t)\right]\right]$ με $0<\alpha(t)<1$ απομακρύνεται από τον άξονα y΄y με ταχύτητα 1 cm/sec είναι $\alpha'(t)=1$.

Επομένως $x'(t)=\dfrac{\alpha^{-\frac{2}{3}}(t)-1}{2}$. Έστω t_0 η χρονική στιγμή που το Μ διέρχεται από το $N\left(\frac{1}{2},f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$. Είναι $\alpha(t_0)=\frac{1}{2}$,

$$x'(t_0)=\frac{\alpha^{-\frac{2}{3}}(t_0)-1}{2}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}-1}{2}=\frac{2^{\frac{3}{2}}-1}{2}=\frac{\sqrt{8}-1}{2}=\frac{2\sqrt{2}-1}{2}\ \text{cm/sec}^2.$$

16. α) Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $x\in\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x)=2\alpha x+\beta$.

Η C_f διέρχεται από το σημείο Α οπότε $f(1)=1$.

Επίσης εφάπτεται στον άξονα x΄x στην αρχή των αξόνων οπότε $f(0)=f'(0)=0$.

Επομένως προκύπτει το σύστημα: $\begin{cases}f(1)=1\\ f(0)=0\\ f'(0)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=1\\ \gamma=0\\ \beta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=1\\ \gamma=0\\ \beta=0\end{cases}$.

Επομένως είναι $f(x)=x^2$, $x\in\mathbb{R}$.

β) Είναι $g(x)=\begin{cases}x^2\cdot\eta\mu\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ \delta, & x=0\end{cases}$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο μηδέν οπότε είναι συνεχής στο 0 άρα $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=g(0)\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\right)=\delta\Leftrightarrow\delta=0$.

(Είναι $\left|x^2\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\right|=\left|x^2\right|\left|\eta\mu\frac{1}{x}\right|\le x^2\cdot 1\Leftrightarrow\left|x^2\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\right|\le x^2\Leftrightarrow -x^2\le x^2\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\le x^2$.

Όμως $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0=\lim\limits_{x\to 0}\left(-x^2\right)$ άρα από το κριτήριο παρεμβολής ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\right)=0$.)

γ) Για $\delta=0$ η g έχει τύπο $g(x)=\begin{cases}x^2\cdot\eta\mu\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x)=2x$, $x\in\mathbb{R}$.

Για $x \neq 0$ η g είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο:

$$g'(x) = 2x \cdot ημ\frac{1}{x} + \cancel{x^2} \cdot συν\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{\cancel{x^2}}\right) = 2x \cdot ημ\frac{1}{x} - συν\frac{1}{x}\ ,\ x \neq 0\,.$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{\cancel{2}}\cdot ημ\frac{1}{x}}{\cancel{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\left(x \cdot ημ\frac{1}{x}\right) = 0$.

(Είναι $\left|x \cdot ημ\frac{1}{x}\right| = |x|\left|ημ\frac{1}{x}\right| \leq |x| \Leftrightarrow \left|x \cdot ημ\frac{1}{x}\right| \leq |x| \Leftrightarrow -|x| \leq x \cdot ημ\frac{1}{x} \leq |x|$.

Όμως $\lim\limits_{x\to 0}|x| = 0 = \lim\limits_{x\to 0}(-|x|)$ άρα από το κριτήριο παρεμβολής ισχύει

$\lim\limits_{x\to 0}\left(xημ\frac{1}{x}\right) = 0$.)

Άρα η g είναι παραγωγίσιμη στο 0 με παράγωγο $g'(0) = 0$.

Επομένως η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$g'(x) = \begin{cases} 2x \cdot ημ\frac{1}{x} - συν\frac{1}{x}\ , & x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

Οι εφαπτόμενες των f,g στα σημεία $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, g(x_2))$ αντίστοιχα, έχουν εξισώσεις:

$(ε_1): y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \Leftrightarrow y = f'(x_1)x + f(x_1) - f'(x_1)x_1$

$(ε_2): y - g(x_2) = g'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow y = g'(x_2)x + g(x_2) - g'(x_2)x_2$

Για να έχουν κοινή εφαπτομένη πρέπει: $\begin{cases} f'(x_1) = g'(x_2) \\ f(x_1) - f'(x_1)x_1 = g(x_2) - g'(x_2)x_2 \end{cases}$.

Για $x_1 = x_2 = 0$: $\begin{cases} f'(0) = g'(0) \\ f(0) = g(0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$. Άρα έχουν μία κοινή εφαπτόμενη στο μηδέν και συγκεκριμένα την ευθεία $y = 0$ δηλαδή τον άξονα x΄x.

δ) Είναι $g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot ημ\frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0\right)$ ή

$\left(ημ\frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = κπ \overset{κ\neq 0}{\Leftrightarrow} x = \frac{1}{κπ}\ ,\ κ \in \mathbb{Z}^*\right)$. Άρα η γραφική παράσταση της f έχει άπειρα κοινά σημεία με τον άξονα x΄x.

ε) Είναι $g(x) = x^2 \cdot g\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow x^2 \cdot ημ\frac{1}{x} = \cancel{x^2} \cdot \frac{1}{\cancel{x^2}} \cdot ημx \Leftrightarrow x^2 \cdot ημ\frac{1}{x} - ημx = 0$.

Έστω η συνάρτηση $h(x) = x^2 \cdot ημ\frac{1}{x} - ημx\ ,\ x > 0$ η οποία είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως σύνθεση και πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Είναι

$h\left(\frac{1}{\pi}\right)=\frac{1}{\pi^2}\eta\mu\pi-\eta\mu\frac{1}{\pi}=-\eta\mu\frac{1}{\pi}<0$, $h(\pi)=\pi^2\cdot\eta\mu\frac{1}{\pi}>0$, άρα $h\left(\frac{1}{\pi}\right)h(\pi)<0$.

Η h είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{\pi},\pi\right]$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano

οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in\left(\frac{1}{\pi},\pi\right)$ τέτοιο ώστε

$h(x_0)=0\Leftrightarrow {x_0}^2\cdot\eta\mu\frac{1}{x_0}-\eta\mu x_0=0$. Άρα το ζητούμενο διάστημα είναι το $\left(\frac{1}{\pi},\pi\right)$.

στ) Έστω $M(\rho,g(\rho))$ με $\rho\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$. Η εφαπτομένη της g στο $M(\rho,g(\rho))$ με $\rho\neq 0$

είναι η ευθεία $y-g(\rho)=g'(\rho)(x-\rho)$. Επειδή διέρχεται από το $O(0,0)$ ισχύει

$$-g(\rho)=-\rho g'(\rho)\Leftrightarrow g(\rho)=\rho g'(\rho)\Leftrightarrow \rho^2\cdot\eta\mu\frac{1}{\rho}=\rho\left(2\rho\cdot\eta\mu\frac{1}{\rho}-\sigma\upsilon\nu\frac{1}{\rho}\right)\overset{\rho\neq0}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{\rho\neq0}{\Leftrightarrow}\ \rho\cdot\eta\mu\frac{1}{\rho}=2\rho\cdot\eta\mu\frac{1}{\rho}-\sigma\upsilon\nu\frac{1}{\rho}\Leftrightarrow\rho\cdot\eta\mu\frac{1}{\rho}=\sigma\upsilon\nu\frac{1}{\rho}\quad(1)$$

Έστω ότι $\sigma\upsilon\nu\frac{1}{\rho}=0$ τότε από την (1) θα είναι $\eta\mu\frac{1}{\rho}=0$ αφού $\rho\neq0$.

Όμως $\eta\mu^2\left(\frac{1}{\rho}\right)+\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{1}{\rho}\right)=1\Leftrightarrow 0=1$ Άτοπο. Άρα $\sigma\upsilon\nu\frac{1}{\rho}\neq0$.

Από την (1) έχουμε: $\rho\dfrac{\eta\mu\frac{1}{\rho}}{\sigma\upsilon\nu\frac{1}{\rho}}=1\overset{\rho\neq0}{\Leftrightarrow}\ \varepsilon\varphi\frac{1}{\rho}=\frac{1}{\rho}\quad(2)$

Για κάθε δεκτή λύση της εξίσωσης (2) υπάρχει μία εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της g στο $M(\kappa,g(\kappa))$, όπου με κ συμβολίζουμε ρίζες της (2), η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Επομένως υπάρχουν άπειρες εφαπτομένες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων. Προφανώς για $\rho=0$ είναι $M(0,0)$ και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g είναι η ευθεία $y=0$ δηλαδή ο άξονας x΄x, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

17. α) Έστω ότι η f δεν είναι γνησίως αύξουσα τότε θα υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ τέτοια ώστε: $f(x_1)\geq f(x_2)\ (1)\Leftrightarrow f^3(x_1)\geq f^3(x_2)\ (2)$

Με πρόσθεση των σχέσεων (1) και (2) έχουμε:

$f^3(x_1)+f(x_1)\geq f^3(x_2)+f(x_2)\Leftrightarrow x_1\geq x_2$ άτοπο. Άρα για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Για $x=0$ στην αρχική σχέση είναι:

$$f^3(0)+f(0)=0 \Leftrightarrow f(0)\left(\underbrace{f^2(x)+1}_{>0}\right)=0 \Leftrightarrow f(0)=0.$$

Για κάθε $x<0 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x)<f(0)=0$ και για κάθε $x>0 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x)>f(0)=0$.

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη τότε παραγωγίζοντας την αρχική σχέση έχουμε $3f^2(x)f'(x)+f'(x)=1 \Leftrightarrow f'(x)\left(3f^2(x)+1\right)=1 \Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{1}{3f^2(x)+1}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ) Είναι $f'(0)=\dfrac{1}{3f^2(0)+1}=1$ άρα η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση $y-f(0)=f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y=x$.

δ) i. Είναι $g(x)=x^3+x$, $x\in\mathbb{R}$. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ (3) είναι $x_1^{\,3}<x_2^{\,3}$ (4). Με πρόσθεση των σχέσεων (3) και (4) έχουμε $x_1^{\,3}+x_1<x_2^{\,3}+x_2 \Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2) \Leftrightarrow$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα οπότε είναι 1-1 επομένως αντιστρέφεται. Η g συνεχής και γνησίως αύξουσα άρα το σύνολο τιμών της είναι το $g(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}g(x),\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)\right)=\mathbb{R}$. Από την αρχική σχέση προκύπτει:

$$g(f(x))=x \Leftrightarrow g^{-1}\left(g(f(x))\right)=g^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x)=g^{-1}(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Είναι $D_f=D_{g^{-1}}=\mathbb{R}$ οπότε οι g^{-1},f είναι ίσες. Δηλαδή $g=f^{-1}$.

Άρα $f^{-1}(x)=g(x)=x^3+x$, $x\in\mathbb{R}$.

ii. Είναι $f(x)=f^{-1}(x)$ για κάθε $x\in D_f\cap D_{f^{-1}}=\mathbb{R}$. Επίσης $f^{-1}(x)<x \Leftrightarrow x^3+x<x \Leftrightarrow x^3<0 \Leftrightarrow x<0$. Δύο αντίστροφες συναρτήσεις είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ οπότε θα είναι $f^{-1}(x)<x<f(x)$ στο $(-\infty,0)$. Ανάλογα $f^{-1}(x)>x \Leftrightarrow x^3+x>x \Leftrightarrow x^3>0 \Leftrightarrow x>0$ οπότε $f(x)<x<f^{-1}(x)$ στο $(0,+\infty)$. Άρα $f(x)\neq f^{-1}(x)$ για $x\neq 0$. Είναι $f(0)=f^{-1}(0)=0$ άρα η $x=0$ είναι ρίζα της εξίσωσης. Άρα οι C_f, $C_{f^{-1}}$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο την αρχή των αξόνων.

iii. Η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $\left(f^{-1}\right)'(x)=3x^2+1\geq 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=0$.

Είναι $f'(x)=\dfrac{1}{3f^2(x)+1}\leq 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=1$.

(Είναι $f'(x)=1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3f^2(x)+1}=1 \Leftrightarrow 3f^2(x)+1=1 \Leftrightarrow 3f^2(x)=0 \Leftrightarrow$

$f^2(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=f(0) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x=0$.)

Άρα $f'(x) \le 1 \le \left(f^{-1}\right)'(x)$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=0$. Άρα δέχονται κοινή εφαπτομένη στην αρχή των αξόνων την $y=x$ (από γ ερώτημα).

iv. $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f^3(x)}{f^{-1}(x)+x}$. Θέτουμε $f(x)=u \Leftrightarrow x=f^{-1}(u)=u^3+u$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα οπότε έχει σύνολο τιμών το

$f\left((-\infty,+\infty)\right)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=A_{f^{-1}}=(-\infty,+\infty)$.

Επομένως $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty=\lim\limits_{x\to+\infty}u$. Άρα $L=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{u^3}{f^{-1}\left(u^3+u\right)+\left(u^3+u\right)}=$

$=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{u^3}{\left(u^3+u\right)^3+\left(u^3+u\right)+\left(u^3+u\right)}=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{u^3}{u^9+3u^7+3u^5+3u^3+2u}=$

$\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{u^{\cancel{3}}}{u^{\cancel{9}}}=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{1}{u^6}=0$.

22 Επαναληπτικό διαγώνισμα έως και το ρυθμό μεταβολής

Θέμα Α

Α1. α) Σ **β)** Λ **γ)** Σ **δ)** Λ **ε)** Λ **στ)** Λ **ζ)** Λ **η)** Λ **θ)** Λ **ι)** Σ

Α2. α) $f'(1) = \text{εφ}135° = -1$, $\text{εφ}45° = \dfrac{AK}{KB} = \dfrac{f(1)}{3} \Leftrightarrow 1 = \dfrac{f(1)}{3} \Leftrightarrow f(1) = 3$.

β) Είναι $(g \circ f)'(x) = [g(f(x))]' = g'(f(x))f'(x)$, άρα

$(g \circ f)'(1) = g'(f(1))f'(1) = g'(3) \cdot 1 = g'(3) = -20$.

($g'(x) = (-3x^2 - 2x + 5)' = -6x - 2$, άρα $g'(3) = -20$.)

Θέμα Β

Β1. Από το πυθαγόρειο θεώρημα ισχύει ότι

$B\Gamma^2 = AB^2 + 3^2 = x^2 + 9 \Leftrightarrow B\Gamma = \sqrt{x^2+9}$, οπότε $\lambda = \dfrac{B\Gamma}{AB} = \dfrac{\sqrt{x^2+9}}{x}$.

Β2. Όταν το Β απομακρύνεται απεριόριστα από το Α τότε $x \to +\infty$, οπότε

$$\lim_{x\to+\infty} \lambda = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+9}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{9}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}}{\cancel{x}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{9}{x^2}} = 1.$$

Β3. α) Τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι $x(0) = 2\text{cm}$ και $x'(t) = 1\text{cm}/\text{sec}$.

Είναι $s(t) = \sqrt{x^2(t)+9}$ και $s'(t) = \dfrac{\cancel{2}x(t)x'(t)}{\cancel{2}\sqrt{x^2(t)+9}}$. Τη χρονική στιγμή $t = 2$ είναι

$x(2) = 2 + 2 \cdot 1 = 4\text{cm}$, οπότε $s'(2) = \dfrac{x(2)x'(2)}{\sqrt{x^2(2)+9}} = \dfrac{4 \cdot 1}{\sqrt{16+9}} = \dfrac{4}{5}\text{cm}/\text{sec}$.

β) Είναι $E(t) = (AB\Gamma) = \dfrac{1}{2}A\Gamma \cdot AB = \dfrac{3}{2}x(t)$, οπότε $E'(t) = \dfrac{3}{2}x'(t)$ και

$E'(2) = \dfrac{3}{2}x'(2) = \dfrac{3}{2}\text{cm}^2/\text{sec}$.

γ) Είναι $\text{εφ}B = \dfrac{A\Gamma}{AB}$ άρα $\text{εφ}B(t) = \dfrac{3}{x(t)}$, οπότε με παραγώγιση κατά μέλη έχουμε

$$(\text{εφ}B(t))' = \left(\frac{3}{x(t)}\right)' \Leftrightarrow \frac{B'(t)}{\text{συν}^2B(t)} = -\frac{3}{x(t)}x'(t) \Leftrightarrow B'(t) = -\frac{3x'(t)}{x(t)}\text{συν}^2B(t).$$

Άρα

$$B'(2)=-\frac{3x'(2)}{x(2)}\text{συν}^2B(2)=-\frac{3\cdot 1}{2+2\cdot 1}\left(\frac{x(2)}{\sqrt{x^2(2)+9}}\right)^2=-\frac{3}{4}\left(\frac{4}{5}\right)^2=-\frac{12}{25}\text{rad/sec}.$$

Β4. α) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ΒΓ+ΑΒ-3}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}+x-3}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x}+\frac{x}{x}\right)=$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\left(\sqrt{x^2+9}-3\right)\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}{x\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}+1\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\left(\sqrt{x^2+9}\right)^2-9}{x\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}+1\right)=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}+1\right)=0+1=1.$$

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}(ΒΓ-ΑΒ)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+9}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+9}-x\right)\left(\sqrt{x^2+9}+x\right)}{\sqrt{x^2+9}+x}=$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}+9-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{9}{x^2}\right)}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{9}{x\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{9}{x\left(\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}+1\right)}=0.$$

γ) $\lim\limits_{x\to 0}λ=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{x^2+9}\cdot\frac{1}{x}\right)=9(+\infty)=+\infty$.

Θέμα Γ

Γ1. Για κάθε $x_1,x_2\in[0,2]$ με $x_1<x_2$ είναι $x_1^2<x_2^2\Leftrightarrow -x_1^2>-x_2^2\Leftrightarrow$
$4-x_1^2>4-x_2^2\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,2]$.

Γ2. Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα, είναι και 1-1 οπότε αντιστρέφεται.
Θέτουμε $f(x)=y\Leftrightarrow\sqrt{4-x^2}=y$ με $y\geq 0$ (1), τότε $4-x^2=y^2\Leftrightarrow 4-y^2=x^2$ (2)
Πρέπει $4-y^2\geq 0\Leftrightarrow y^2\leq 4\Leftrightarrow|y|\leq 2\overset{y\geq 0}{\Leftrightarrow}0\leq y\leq 2$.
Από τη σχέση έχουμε: $x=\sqrt{4-y^2}$, άρα $f^{-1}(y)=\sqrt{4-y^2}$, $y\in[0,2]$, άρα
$f^{-1}(x)=\sqrt{4-x^2}$, $x\in[0,2]$.

Γ3. Έστω $M(x(t),y(t))$ όπου t ο χρόνος σε sec με $t\geq 0$. Είναι $y(t)=\sqrt{4-x^2(t)}$
και $x'(t)=0{,}1$ μ.μ./sec .

α) Έστω t_0 η χρονική στιγμή που το Μ διέρχεται από το Α, τότε:
$x(t_0)=\sqrt{3},\ y(t_0)=1$.

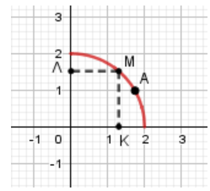
Είναι $y'(t)=\left(\sqrt{4-x^2(t)}\right)'=\dfrac{-\cancel{2}x(t)x'(t)}{\cancel{2}\sqrt{4-x^2(t)}}$ οπότε τη χρονική στιγμή t_0 είναι:

$$y'(t_0)=-\frac{x(t_0)x'(t_0)}{\sqrt{4-x^2(t_0)}}=-\frac{0{,}1\cdot\sqrt{3}}{1}=-\frac{\sqrt{3}}{10}\ \text{μ.μ./sec}.$$

β) Είναι $E(t)=(OK)(O\Lambda)=x(t)y(t)$ οπότε

$E'(t)=x'(t)y(t)+x(t)y'(t)$. Τη χρονική στιγμή t_0 είναι:

$E'(t_0)=x'(t_0)y(t_0)+x(t_0)y'(t_0)=-0{,}2$ μ.μ./sec.



Γ4. Έστω $K(x_0,f(x_0))$ σημείο της C_f. Η εφαπτομένη της C_f στο K είναι η ευθεία

$$\varepsilon:\ y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y-\sqrt{4-x_0^2}=-\frac{x_0}{\sqrt{4-x_0^2}}(x-x_0)\Leftrightarrow$$

$$y=-\frac{x_0}{\sqrt{4-x_0^2}}\cdot x+\frac{x_0^2}{\sqrt{4-x_0^2}}+\sqrt{4-x_0^2}\Leftrightarrow\ y=-\frac{x_0}{\sqrt{4-x_0^2}}\cdot x+\frac{x_0^2+4-x_0^2}{\sqrt{4-x_0^2}}\Leftrightarrow$$

$y=-\dfrac{x_0}{\sqrt{4-x_0^2}}\cdot x+\dfrac{4}{\sqrt{4-x_0^2}}$. Για $y=0$ είναι

$-\dfrac{x_0}{\sqrt{4-x_0^2}}\cdot x+\dfrac{4}{\sqrt{4-x_0^2}}=0\Leftrightarrow\dfrac{x_0}{\sqrt{4-x_0^2}}\cdot x=\dfrac{4}{\sqrt{4-x_0^2}}\Leftrightarrow x_0\cdot x=4\Leftrightarrow\ x=\dfrac{4}{x_0}$ και

για $x=0$ είναι $y=\dfrac{4}{\sqrt{4-x_0^2}}$, δηλαδή η ε τέμνει τους άξονες στα σημεία $B\left(\dfrac{4}{x_0},0\right)$

και $\Gamma\left(0,\dfrac{4}{\sqrt{4-x_0^2}}\right)$.

$$(OB\Gamma)=\alpha\Leftrightarrow\frac{1}{2}(OB)(O\Gamma)=\alpha\Leftrightarrow\frac{4}{x_0}\cdot\frac{4}{\sqrt{4-x_0^2}}=2\alpha\Leftrightarrow 8=\alpha x_0\sqrt{4-x_0^2}\Leftrightarrow$$

$64=\alpha^2x_0^2\left(4-x_0^2\right)$ (3). Θέτουμε $x_0^2=\omega\geq 0$ οπότε η (3) γίνεται:

$64=\alpha^2\omega(4-\omega)\Leftrightarrow 64=4\alpha^2\omega-\alpha^2\omega^2\Leftrightarrow\alpha^2\omega^2-4\alpha^2\omega+64=0$ (4)

Η (4) είναι 2ου βαθμού ως προς ω με $\Delta=16\alpha^4-256\alpha^2=16\alpha^2\left(\alpha^2-16\right)$.

Αν $\Delta>0\Leftrightarrow 16\alpha^2\left(\alpha^2-16\right)>0\overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow}\alpha^2-16>0\Leftrightarrow\alpha^2>16\Leftrightarrow\alpha>4$ τότε η (4) έχει ρί-

ζες τις $\omega=\dfrac{4\alpha^2\pm 4\alpha\sqrt{\alpha^2-16}}{2\alpha^2}=2\pm\dfrac{2}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-16}$. Επειδή $x_0\in[0,2]$, είναι $0\leq x_0^2\leq 4$, άρα $0 \le \omega \le 4$. Αν $\omega = 2 + \frac{2}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - 16}$, τότε

$2 + \frac{2}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - 16} \le 4 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2 - 16} \le \alpha \Leftrightarrow \alpha^2 - 16 \le \alpha^2$ που ισχύει. Αν

$\omega = 2 - \frac{2}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - 16}$, τότε $2 - \frac{2}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - 16} \ge 0 \Leftrightarrow 2 \ge \frac{2}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - 16} \Leftrightarrow \alpha \ge \sqrt{\alpha^2 - 16} \Leftrightarrow$

$\alpha^2 \ge \alpha^2 - 16$ ισχύει. Τότε $x_0^2 = 2 + \frac{2}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - 16} \overset{x_0 \in [0,2]}{\Leftrightarrow} x_0 = \sqrt{2 + \frac{2}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - 16}}$ ή

$x_0^2 = 2 - \frac{2}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - 16} \overset{x_0 \in [0,2]}{\Leftrightarrow} x_0 = \sqrt{2 - \frac{2}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - 16}}$.

Οπότε η C_f δέχεται δύο εφαπτόμενες που σχηματίζουν με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν α. Αν $\Delta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 4$, τότε η (4) γίνεται

$16\omega^2 - 64\omega + 64 = 0 \Leftrightarrow \omega^2 - 4\omega + 4 = 0 \Leftrightarrow (\omega - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \omega = 2$.

Τότε $x_0^2 = 2 \overset{x_0 \in [0,2]}{\Leftrightarrow} x_0 = \sqrt{2}$ και η C_f δέχεται μοναδική εφαπτομένη στη περίπτωση αυτή. Τέλος αν $\Delta < 0 \Leftrightarrow 0 < \alpha < 4$ η (4) είναι αδύνατη οπότε δεν υπάρχουν εφαπτόμενες με τη συγκεκριμένη ιδιότητα.

Άρα για $\alpha > 4$ έχουμε δύο εφαπτόμενες που σχηματίζουν με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν α.

Θέμα Δ

Δ1. Είναι $f^2(x) - 2f(x) = x^6 - 2x^3 \Leftrightarrow f^2(x) - 2f(x) + 1 = x^6 - 2x^3 + 1 \Leftrightarrow$

$(f(x) - 1)^2 = (x^3 - 1)^2 \Leftrightarrow |f(x) - 1| = |x^3 - 1|$ (1)

Είναι $x^3 - 1 \ne 0$ για κάθε $x \ne 1$, οπότε $g(x) = f(x) - 1 \ne 0$ για κάθε $x \ne 1$.

Η g είναι συνεχής, στο $\mathbb{R}$ οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $(1, +\infty)$. Είναι $g(0) = f(0) - 1 = -1 < 0$ άρα $g(x) < 0$ για κάθε $x < 1$, οπότε $g(x) = -|x^3 - 1| = x^3 - 1 \Leftrightarrow f(x) - 1 = x^3 - 1 \Leftrightarrow f(x) = x^3,\ x < 1$.

Ακόμη για $x > 1$ είναι $g(x) = \pm|x^3 - 1| = \pm(x^3 - 1)$.

Άρα $(f(x) - 1 = x^3 - 1 \Leftrightarrow f(x) = x^3,\ x > 1)$ ή

$(f(x) - 1 = -x^3 + 1 \Leftrightarrow f(x) = 2 - x^3,\ x > 1)$.

Από τη σχέση (1) για x=1 είναι $|f(1) - 1| = 0 \Leftrightarrow f(1) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(1) = 1$.

Οι δυνατοί τύποι της f είναι $f(x) = x^3,\ x \in \mathbb{R}$ ή $f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ 2 - x^3, & x > 1 \end{cases}$.

Δ2. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ τότε $x_1^3 < x_2^3 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα, οπότε είναι και 1-1 και αντιστρέφεται.

$f(x) = y \Leftrightarrow x^3 = y \quad (1)$

Αν $y \geq 0$ τότε $x = \sqrt[3]{y}$, ενώ αν $y < 0$ τότε $x = -\sqrt[3]{-y}$, άρα

$f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt[3]{y}, & y \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-y}, & y < 0 \end{cases}$, οπότε $f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-x}, & x < 0 \end{cases}$.

Δ3. α) Θέτουμε $f(x) = y$ με $\lim\limits_{x \to \sqrt[3]{\pi}} f(x) = \left(\sqrt[3]{\pi}\right)^3 = \pi$.

Τότε $\lim\limits_{x \to \sqrt[3]{\pi}} \dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x) - \pi} = \lim\limits_{y \to \pi} \dfrac{\eta\mu y}{y - \pi} = \lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\eta\mu(\pi - y)}{y - \pi} \underset{\omega \to 0}{\overset{\pi - y = \omega}{=}} \lim\limits_{\omega \to 0} \dfrac{\eta\mu\omega}{-\omega} = -1$.

β) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x+1}{f^2(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x+1}{x^6} = \lim\limits_{x \to 0}\left[(x+1) \cdot \dfrac{1}{x^6}\right] = +\infty$ γιατί $\lim\limits_{x \to 0}(x+1) = 1$ και

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^6} = +\infty$.

Δ4. $x^5 + f(x) + 1 = x^2 + 2x \Leftrightarrow x^5 + x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$.

Έστω $g(x) = x^5 + x^3 - x^2 - 2x + 1, \ x \in [-1,1]$.

Από το σχήμα Horner έχουμε: $g(x) = (x-1)(x+1)(x^3 + 2x - 1)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = x^3 + 2x - 1, \ x \in [-1,1]$.

Είναι $h(-1) = -4 < 0, \ h(1) = 2 > 0$ οπότε $h(-1)h(1) < 0$.

Η h είναι συνεχής ως πολυωνυμική άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_0 \in (-1,1)$ τέτοιο, ώστε $h(x_0) = 0$.

Τότε $g(x_0) = (x_0 - 1)(x_0 + 1)h(x_0) = 0$, οπότε η εξίσωση

$g(x) = 0 \Leftrightarrow x^5 + x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(-1,1)$.

Δ5. Έστω $A(x_0, x_0^3)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 3x^2$.

Η εφαπτομένη της C_f στο A είναι η ευθεία

ε: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow$

$y - x_0^3 = 3x_0^2(x - x_0) \Leftrightarrow y = 3x_0^2 x - 2x_0^3$.

Για τα κοινά σημεία των ε, C_f έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} y = 3x_0^2 x - 2x_0^3 \\ y = x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 3x_0^2 x - 2x_0^3 \\ y = x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x_0^2 x + 2x_0^3 = 0 \\ y = x^3 \end{cases} \overset{\text{Horner}}{\Leftrightarrow}$$

$\begin{cases}(x-x_0)(x^2+x_0x-2x_0^2)=0\\ y=x^3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-x_0)(x-x_0)(x+2x_0)=0\\ y=x^3\end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases}(x-x_0)^2(x+2x_0)=0\\ y=x^3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=x_0 \text{ ή } x=-2x_0\\ y=x^3\end{cases}$.

Αν $x=-2x_0$, τότε $y=(-2x_0)^3=-8x_0^3$, οπότε η ε έχει κοινό σημείο με την C_f το $B(-2x_0,-8x_0^3)$.

Η κλίση της C_f στο Β είναι $f'(-2x_0)=3(-2x_0)^2=12x_0^2=4\cdot 3x_0^2=4f'(x_0)$.

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ZT

Οι εκδόσεις μας

ΤΙΜΗ ΛΙΑΝΙΚΗΣ ΠΩΛΗΣΗΣ: ??? €

ISBN: 978-618-5528-31-7