

1. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x}$.

Ενδεικτική λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι το διάστημα $A_f = (0, +\infty)$.

Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A_f = (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$, έχουμε:

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\stackrel{(\sqrt{x} \nearrow (0, +\infty))}{\Rightarrow} \begin{cases} \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \\ \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \\ -\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2} \end{cases} \stackrel{(+)}{\Rightarrow} \sqrt{x_1} - \frac{1}{x_1} < \sqrt{x_2} - \frac{1}{x_2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \end{aligned}$$

Με αφετηρία το $x_1 < x_2$ και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της διάταξης πραγματικών αριθμών κατασκευάζουμε στο πρώτο μέλος την τιμή $f(x_1) = \sqrt{x_1} - \frac{1}{x_1}$ και στο δεύτερο μέλος την τιμή $f(x_2) = \sqrt{x_2} - \frac{1}{x_2}$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $A_f = (0, +\infty)$.

2. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $f(x) = \ln x - e^{-x}$.

Ενδεικτική λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι το διάστημα $A_f = (0, +\infty)$.

Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A_f = (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$, έχουμε:

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\stackrel{(\ln x \nearrow (0, +\infty))}{\Rightarrow} \begin{cases} \ln x_1 < \ln x_2 \\ -x_1 > -x_2 \end{cases} \Rightarrow \\ &\stackrel{(e^x \nearrow \mathbb{R})}{\Rightarrow} \begin{cases} \ln x_1 < \ln x_2 \\ e^{-x_1} > e^{-x_2} \end{cases} \stackrel{(+)}{\Rightarrow} \begin{cases} \ln x_1 < \ln x_2 \\ -e^{-x_1} < -e^{-x_2} \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln x_1 - e^{-x_1} < \ln x_2 - e^{-x_2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \end{aligned}$$

Με αφετηρία το $x_1 < x_2$ και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της διάταξης πραγματικών αριθμών κατασκευάζουμε στο πρώτο μέλος την τιμή $f(x_1) = \ln x_1 - e^{-x_1}$ και στο δεύτερο μέλος την τιμή $f(x_2) = \ln x_2 - e^{-x_2}$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $A_f = (0, +\infty)$.

3Α: Μονοτονία συνάρτησης

3. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x-2} - \sqrt{x}$.

Ενδεικτική λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $A_f = [0, 2) \cup (2, +\infty)$.

Θα μελετήσουμε τη μονοτονία της συνάρτησης f στα διαστήματα $[0, 2), (2, +\infty)$

Σχόλιο: Ο ορισμός της μονοτονίας δόθηκε σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων. Έτσι τη μονοτονία τη μελετάμε σε κάθε διάστημα χωριστά.

- Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A_1 = [0, 2)$ με $x_1 < x_2$, έχουμε:

$$0 \leq x_1 < x_2 < 2 \Rightarrow \begin{cases} -2 \leq x_1 - 2 < x_2 - 2 < 0 \\ \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x_1 - 2} > \frac{1}{x_2 - 2} \\ -\sqrt{x_1} > -\sqrt{x_2} \end{cases} \Rightarrow$$
$$\stackrel{(+)}{\Rightarrow} \frac{1}{x_1 - 2} - \sqrt{x_1} > \frac{1}{x_2 - 2} - \sqrt{x_2} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $A_1 = [0, 2)$.

- Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A_2 = (2, +\infty)$ με $x_1 < x_2$, έχουμε:

$$2 < x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} 0 < x_1 - 2 < x_2 - 2 \\ \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x_1 - 2} > \frac{1}{x_2 - 2} \\ -\sqrt{x_1} > -\sqrt{x_2} \end{cases} \Rightarrow$$
$$\stackrel{(+)}{\Rightarrow} \frac{1}{x_1 - 2} - \sqrt{x_1} > \frac{1}{x_2 - 2} - \sqrt{x_2} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $A_2 = (2, +\infty)$.

Προσοχή:

Αντιστρέφουμε μόνο ανισώσεις στις οποίες τα μέλη είναι ομόσημα, αλλάζοντας ταυτόχρονα τη φορά της ανίσωσης.

4. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $2(f(x_1) - f(x_2)) < x_2 - x_1$ για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) + \frac{x}{2} - 1, x \in \mathbb{R}$. Να μελετήσετε τη g ως προς τη μονοτονία.

Ενδεικτική λύση

Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, με $x_1 < x_2$, από τη δοθείσα ανίσωση, έχουμε:

$$\begin{aligned} 2(f(x_1) - f(x_2)) < x_2 - x_1 &\Rightarrow \\ \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) < \frac{x_2 - x_1}{2} &\Rightarrow f(x_1) - f(x_2) < \frac{x_2}{2} - \frac{x_1}{2} \\ \Rightarrow f(x_1) + \frac{x_1}{2} < f(x_2) + \frac{x_2}{2} & \\ \Rightarrow f(x_1) + \frac{x_1}{2} - 1 < f(x_2) + \frac{x_2}{2} - 1 &\Rightarrow g(x_1) < g(x_2). \end{aligned}$$

Επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

5. Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $\ln(1 + e^{f(x)}) = 2x - f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία στο $\mathbb{R}$.

Ενδεικτική λύση

Με βοηθητική συνάρτηση:

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \ln(1 + e^{f(x)}) &= 2x - f(x) \Leftrightarrow \\ \ln(1 + e^{f(x)}) + f(x) &= 2x \Leftrightarrow \\ g(f(x)) &= 2x : (1) \end{aligned}$$

όπου $g(x) = \ln(1 + e^x) + x, x \in \mathbb{R}$.

Σχόλιο: Αρχικά μεταφέρουμε στο 1^ο μέλος τις παραστάσεις που εμφανίζουν μόνο την $f(x)$ και η δοθείσα σχέση παίρνει τη μορφή $A(f(x)) = B(x)$ δηλαδή παίρνει τη μορφή:

3Α: Μονοτονία συνάρτησης

Μελετάμε την g ως προς τη μονοτονία .

Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A_g = \mathbb{R}$, με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\stackrel{(e^x \nearrow \mathbb{R})}{\Rightarrow} \begin{cases} e^{x_1} < e^{x_2} \\ x_1 < x_2 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} 1 + e^{x_1} < 1 + e^{x_2} & (\ln x \nearrow (0, +\infty)) \\ x_1 < x_2 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} \ln(1 + e^{x_1}) < \ln(1 + e^{x_2}) & (+) \\ x_1 < x_2 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow x_1 + \ln(1 + e^{x_1}) < x_2 + \ln(1 + e^{x_2}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow g(x_1) < g(x_2) \end{aligned}$$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Μελετάμε την f ως προς τη μονοτονία.

παράσταση του $f(x)$ = παράσταση του x

Η βοηθητική συνάρτηση έχει τύπο

$g(x) = A(x)$, δηλαδή ο τύπος της

βοηθητικής συνάρτησης προκύπτει αν

στην παράσταση του $f(x)$ (στο 1^ο μέλος)

θέσουμε όπου $f(x)$ το x .

$$\dots \ln(1 + e^{f(x)}) = 2x - f(x) \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{\ln(1 + e^{f(x)}) + f(x)}_{\text{παράσταση του } f(x)} = \underbrace{2x}_{\text{παράσταση του } x}$$

Βοηθητική συνάρτηση (όπου $f(x)$ το x)

$$g(x) = \ln(1 + e^x) + x, x \in \mathbb{R}$$

Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A_f = \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 < 2x_2 \Rightarrow g(f(x_1)) < g(f(x_2)) \stackrel{(g \nearrow \mathbb{R})}{\Rightarrow} f(x_1) < f(x_2) .$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ για την οποία ισχύει $\sqrt{f(x)} + f(x) = x + 1 : (\alpha)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία στο $\mathbb{R}$.

Ενδεικτική λύση

Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, έχουμε:

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Rightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1 \stackrel{(x+1=\sqrt{f(x)}+f(x))}{\Rightarrow} \\ &\Rightarrow \sqrt{f(x_1)} + f(x_1) < \sqrt{f(x_2)} + f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) < g(f(x_2)) : (1) \end{aligned}$$

όπου $g(x) = \sqrt{x} + x, x \in [0, +\infty)$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, αφού για κάθε $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$, με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \\ x_1 < x_2 \end{cases} \xrightarrow{(+)} \sqrt{x_1} + x_1 < \sqrt{x_2} + x_2 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2).$$

Έτσι από την (1) έχουμε $g(f(x_1)) < g(f(x_2)) \xrightarrow{(g \nearrow [0, +\infty))} f(x_1) < f(x_2).$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

7.

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$e^{f(x)} + f(x) = x + 1 \quad (*)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Ενδεικτική λύση

Απαγωγή σε άτοπο:

Έστω ότι η f δεν είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Τότε θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in A_f = \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ και $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Έχουμε όμως:

$$f(x_1) \geq f(x_2) \xrightarrow{(e^x \nearrow \mathbb{R})} \begin{cases} e^{f(x_1)} \geq e^{f(x_2)} \\ f(x_1) \geq f(x_2) \end{cases} \xrightarrow{(+)} e^{f(x_1)} + f(x_1) \geq e^{f(x_2)} + f(x_2) \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{(*)} x_1 + 1 \geq x_2 + 1 \Rightarrow x_1 \geq x_2.$$

Άτοπο, αφού $x_1 < x_2$.

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

3Α

Ασκήσεις

1. Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία οι συναρτήσεις:

α. $f(x) = x^3 + x$ γ. $f(x) = x^3 + \sqrt{x}$ ε. $f(x) = (x+2)^2 + \sqrt{x+2}$	β. $f(x) = x + \sqrt{x}$ δ. $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$ στ. $f(x) = x^2 - 2x + 1 + \sqrt{x-1}$
--	---

2. Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία οι συναρτήσεις:

α. $f(x) = \frac{1}{x} - \sqrt{x}$ γ. $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{-x}$ ε. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + \sqrt{x-1}$	β. $f(x) = x\sqrt{x}$ δ. $f(x) = (x-2)^3 + \sqrt{x-2}$ στ. $f(x) = -\sqrt{1-x}$
--	--

3. Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία οι συναρτήσεις:

α. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$ γ. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$	β. $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{1-x}$ δ. $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$
---	---

4. Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία οι συναρτήσεις:

α. $f(x) = x + \eta\mu x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ γ. $f(x) = -x \cdot \eta\mu x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	β. $f(x) = x \cdot \eta\mu x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ δ. $f(x) = (1 - \sigma\upsilon\nu x) \cdot \eta\mu x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
---	---

5. Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία οι συναρτήσεις:

α. $f(x) = x + \ln x - 1$ γ. $f(x) = x \cdot \ln x, x \in (1, +\infty)$	β. $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$ δ. $f(x) = (x-1) \cdot \ln x, x \in (0, 1)$
---	---

6. Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία οι συναρτήσεις:

α. $f(x) = x + e^x - 1$ γ. $f(x) = e^{-x} + \frac{1}{x}, x \in (0, +\infty)$	β. $f(x) = e^x \cdot \sqrt{x}$ δ. $f(x) = e^{-x} \cdot \ln x, x \in (0, 1)$
--	---

7. Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία οι συναρτήσεις:

α. $f(x) = \ln(x-1) - e^{2-x}$

β. $f(x) = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

γ. $f(x) = \sqrt{5 - \sqrt{4-x}}$

δ. $f(x) = x\sqrt{x-1} + 1$

ε. $f(x) = xe^x, x > 0$

στ. $f(x) = (1-x)\ln(1-x), x < 0$

ζ. $f(x) = \frac{2^x + 3^x}{7^x}$

η. $f(x) = \frac{2^x - 4^x}{3^x}$

θ. $f(x) = \frac{e^x + 2}{e^x + 1} - \ln x$

ι. $f(x) = \frac{1}{x-e} - \sqrt{x-1}$

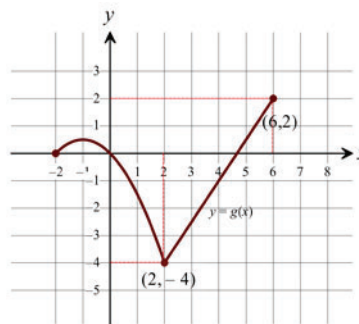
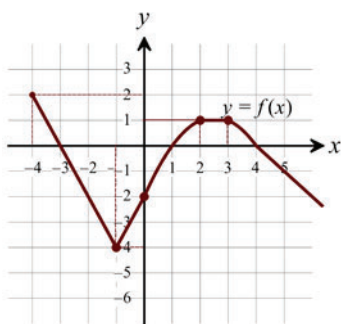
8. Να αποδείξετε ότι:

α. Η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 4x + 3$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, -2]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-2, +\infty)$.

β. Η συνάρτηση $g(x) = \frac{e}{x-e}$ είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, e)$ και $(e, +\infty)$.

9. Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα, να βρεθεί το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης $g(x) = f(2x-1) - f(1-3x), x \in \mathbb{R}$.

10. Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία οι συναρτήσεις f, g των οποίων οι γραφικές παραστάσεις φαίνονται στα παρακάτω σχήματα.



3Α: Μονοτονία συνάρτησης

11. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = \sqrt{x} - \sqrt{\pi - 2x} + \eta\mu x$ είναι γνησίως αύξουσα.
12. Να δείξετε ότι η $h(x) = \ln \frac{1}{x} \cdot \sqrt{1-x}$ είναι γνησίως φθίνουσα .
13. Να δείξετε ότι η $h(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1-x}}$ είναι γνησίως αύξουσα.
14. Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $3(f(x_1) - f(x_2)) < -(x_1 - x_2)$ για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F(x) = f(x) + \frac{x}{3} + 2, x \in \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα.
15. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f^3(x) = x - f(x) - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
16. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$, για την οποία ισχύει: $f^3(x) = x^3 - \sqrt{f(x)} - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
17. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f^3(x) = x - e^{f(x)} - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία .
18. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, για την οποία ισχύει: $\frac{1}{f(x)} - \sqrt{f(x)} - 1 = -x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

3B

Επίλυση ανισώσεων – εξισώσεων με τη βοήθεια της μονοτονίας

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x} + ax^2 - \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει την ευθεία $(\varepsilon): y = -1$ στο σημείο με τετμημένη $x = 0$ και διέρχεται από το σημείο $M(1,1)$.

- α.** Να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = 1$.
- β.** Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία.
- γ.** Να λυθεί η ανίσωση $|x| + x^4 \leq 2$.
- δ.** Να λυθεί η ανίσωση $\sqrt{x} \leq \sqrt{1-x} - 2x + 1$, $x \in [0,1]$.

Ενδεικτική λύση

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A_f = [0, +\infty)$.

α. Αφού η C_f τέμνει την ευθεία $(\varepsilon): y = -1$ στο σημείο με τετμημένη $x = 0$, διέρχεται από το σημείο $(0, -1)$. Επομένως οι συντεταγμένες $(x = 0, y = -1)$ του σημείου $(0, -1)$ επαληθεύουν την εξίσωση $f(x) = y$ της C_f , δηλαδή είναι $f(0) = -1$. Έχουμε:

$$f(0) = -1 \Leftrightarrow \sqrt{0} + 0 - \beta = -1 \Leftrightarrow \beta = 1.$$

Επίσης έχουμε $M(1,1) \in C_f$, οπότε:

$$f(1) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{1} + \alpha \cdot 1 - \beta \stackrel{(\beta=1)}{=} 1 \Leftrightarrow 1 + \alpha - 1 = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1. \text{ Άρα είναι } \alpha = \beta = 1 \text{ και άρα}$$

$$\text{είναι } f(x) = \sqrt{x} + x^2 - 1, x \geq 0.$$

β. Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A_f = [0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$, έχουμε:

$$0 < x_1 < x_2 \stackrel{(\sqrt{x}: \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, +\infty))}{\Rightarrow} \begin{cases} \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \\ x_1^2 < x_2^2 \end{cases} \stackrel{(+)}{\Rightarrow} \sqrt{x_1} + x_1^2 < \sqrt{x_2} + x_2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x_1} + x_1^2 - 1 < \sqrt{x_2} + x_2^2 - 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

3B: Επίλυση εξισώσεων ανισώσεων με τη βοήθεια της μονοτονίας

γ. Αναζητούμε $x \in \mathbb{R}$ τα οποία είναι οι λύσεις της ανίσωσης:

$$\begin{aligned} \begin{cases} |x| + x^4 \leq 2 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2} + (x^2)^2 - 1 \leq 1 & (f(x) = \sqrt{x^2 + x^2 - 1}) \\ x \in \mathbb{R} & (f(1)=1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x^2) \leq f(1) \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \\ &\stackrel{(f \nearrow [0, +\infty))}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x^2 \leq 1 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2} \leq \sqrt{1} \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \leq 1 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

Επομένως οι λύσεις της ανίσωσης $|x| + x^4 \leq 2$, είναι οι αριθμοί $x \in [-1, 1]$.

δ. Αναζητούμε $x \in [0, 1]$ τα οποία είναι οι λύσεις της ανίσωσης:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \sqrt{x} \leq \sqrt{1-x} - 2x + 1 \\ x \in [0, 1] \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} + x^2 \leq \sqrt{1-x} + x^2 - 2x + 1 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} + x^2 \leq \sqrt{1-x} + (x-1)^2 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} \sqrt{x} + x^2 - 1 \leq \sqrt{1-x} + (1-x)^2 - 1 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq f(1-x) & (f \nearrow [0, +\infty)) \\ 0 \leq x \leq 1 & (1-x, x \in [0, +\infty)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1-x \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Επομένως οι λύσεις της ανίσωσης $\sqrt{x} \leq \sqrt{1-x} - 2x + 1$, είναι οι αριθμοί $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{x}$.

α. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία.

β. Να λυθεί η ανίσωση $-x\sqrt{x} + x \leq \sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-x^3}$, $x \in [0, 1]$.

γ. Να λυθεί η ανίσωση $f(x) - f(1-x) \geq 2\sqrt{x} + 2$.

Ενδεικτική λύση

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A_f = [0, 1]$.

α. Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A_f = [0, 1]$ με $x_1 < x_2$, έχουμε:

- $x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow 1-x_1 > 1-x_2 \Rightarrow \sqrt{1-x_1} > \sqrt{1-x_2} : (1)$
- $x_1 < x_2 \Rightarrow \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \Rightarrow -\sqrt{x_1} > -\sqrt{x_2} : (2)$

Από τις (1) και (2) έχουμε: $\sqrt{1-x_1} - \sqrt{x_1} > \sqrt{1-x_2} - \sqrt{x_2} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, 1]$.

β. Αναζητούμε τους αριθμούς $x \in [0,1]$ οι οποίοι είναι οι λύσεις της ανίσωσης :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} -x\sqrt{x} + x \leq \sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-x^3} \\ x \in [0,1] \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \begin{cases} \sqrt{1-x^3} - x \cdot \sqrt{x} \leq \sqrt{1-x^2} - x \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \begin{cases} \sqrt{1-x^3} - \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{x} \leq \sqrt{1-x^2} - x \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \begin{cases} \sqrt{1-x^3} - \sqrt{x^3} \leq \sqrt{1-x^2} - \sqrt{x^2} \quad (x^2, x^3 \in [0,1] = A_f) \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} f(x^3) \leq f(x^2) \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \\ & \stackrel{(f \searrow [0,1])}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x^3 \geq x^2 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \stackrel{(x^2, x^3 \in [0,1])}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x^3 - x^2 \geq 0 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(x-1) \geq 0 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} : (1) \end{aligned}$$

Συντάσσουμε τον πίνακα προσήμου των $x^2, x-1$ και του γινομένου τους $x^2(x-1)$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$
x^2	$+$	$+$	$+$	$+$
$x^2(x-1)$	$-$	$-$	$+$	$+$

Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα έχουμε $x^2(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [1, +\infty) \cup \{0\}$.

Έτσι από την (1) έχουμε $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [1, +\infty) \cup \{0\} \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$.

γ. Η ανίσωση $f(x) - f(1-x) \geq 2\sqrt{x} + 2$ ορίζεται αν και μόνο αν