Στέλιος Μιχαήλογλου / Δημήτρης Πατσιμάς

Βαγγέλης Τόλης / Νίκος Τούντας

www.Askisopolis.gr

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Α΄ ΤΕΥΧΟΣ

Σελίδες: 746

Σχήμα: 16 X 23

ISBN: 978-618-5528-32 -4

Κεντρική Διάθεση:

Εκδόσεις: **Z - T,** **https://zanthl.gr**

Τηλ.: Ν.Ζ.: 6936269609 - **Κ.Τ.:** 6974033501

Πρόλογος

Το βιβλίο χωρίζεται σε 22 ενότητες. Κάθε ενότητα χωρίζεται στα παρακάτω μέρη:

- Αναλυτική παρουσίαση της θεωρίας, οπτικοποιημένη, με πλήθος σχημάτων και παραδειγμάτων για την ευρεία κατανόηση της ύλης.
- Πληθώρα λυμένων ασκήσεων, παρουσιάζοντας την αντίστοιχη μεθοδολογία. Είμαστε της άποψης ότι τα μαθηματικά δεν είναι συνταγές αλλά σκέψη.
  Όμως, στις ειδικές συνθήκες των εξετάσεων, ο μαθητής χρειάζεται πειθαρχεία και καθοδήγηση. Οι λυμένες ασκήσεις, λοιπόν, αποτελούν ένα πλάνο του μαθήματος για την αντίστοιχη ενότητα, χωρίς βέβαια μόνο του να είναι αρκετό.
- Πολλές κατηγοριοποιημένες ασκήσεις που προσφέρονται για εξάσκηση στους μαθητές, χωρισμένες πολλές φορές σε ασκήσεις αυξημένης δυσκολίας. Οι ασκήσεις αυξημένης δυσκολίας δεν είναι πάντα κάτι το οποίο μπορούν να αντιμετωπίσουν μόνον οι άριστοι μαθητές. Στο τέλος κάθε ενότητας υπάρχουν αρκετές σύνθετες ασκήσεις.
- Ερωτήσεις τύπου Σωστό – Λάθος
- Ένα νέο είδος εξέτασης. Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής, που χρειάζονται χαρτί και μολύβι, δηλαδή δεν αποτελούν απλή θεωρία.
- Οι ασκήσεις της τράπεζας θεμάτων του ΙΕΠ

Επίσης σε ορισμένα σημεία της ύλης υπάρχει επαναληπτική ενότητα με διαγωνίσματα και ασκήσεις χωρισμένες σε επίπεδο Β΄, Γ΄ και Δ΄ θέματος.

Ελπίζουμε το βιβλίο αυτό να φανεί χρήσιμο στους μαθητές στην προετοιμασία τους για τις εξετάσεις και στους συναδέλφους καθηγητές στην διδασκαλία τους στην αντίστοιχη ύλη.

Ευχαριστούμε τον φίλο και συνάδελφο Μπλιά Άγγελο για τις πολύτιμες παρατηρήσεις του.

Αναλυτικές λύσεις μπορείτε να βρείτε στο πωλητήριο των εκδόσεων ΖΤ, είτε στο Askisopolis.gr.

Η συγγραφική ομάδα

Το εξώφυλλο είναι έργο του Joan Miró.

Περιεχόμενα

Πρόλογος ……………………….............................. 3

1^{O} ΚΕΦΑΛΑΙΟ: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Η έννοια της συνάρτησης –
Πεδίο ορισμού συνάρτησης ……………............................ 9-20
● Ασκήσεις στο πεδίο ορισμού …………………..…. 21-32
2. Γραφική παράσταση συνάρτησης ..…….................. 33-50
● Ασκήσεις στη γραφική παράσταση
συνάρτησης ……………………………...…... 51-70
● Διαγώνισμα στη γραφική παράσταση …………. 71-72
3. Ισότητα – Πράξεις συναρτήσεων …………….......... 73-80
● Ασκήσεις στην ισότητα συναρτήσεων …………. 81-88
4. Σύνθεση συναρτήσεων 89-106
● Ασκήσεις στη σύνθεση συναρτήσεων …………. 107-122
● Διαγώνισμα στη σύνθεση συναρτήσεων ……..…. 123-125
5. Μονοτονία – Ακρότατα συνάρτησης 126-150
● Ασκήσεις στη μονοτονία - ακρότατα ………….. 151-171
● Διαγωνίσματα στη μονοτονία - ακρότατα …..…. 172-177
6. Αντίστροφη συνάρτηση 178-203
● Ασκήσεις στην αντίστροφη συνάρτηση ……….. 204-222
7. Επαναληπτικές ασκήσεις στις συναρτήσεις 223-238
● Διαγωνίσματα στις συναρτήσεις 239-245
8. Όριο συνάρτησης στο x_0 …………………….......... 246-281
● Ασκήσεις στο όριο συνάρτησης στο x_0 ………. 282-304
9. Μη πεπερασμένο όριο στο x_0 …………………...... 305-318
● Ασκήσεις στο μη πεπερασμένο όριο στο x_0 ……. 319-329
10. Όρια συνάρτησης στο άπειρο ..…………………...... 330-354
● Ασκήσεις στα όρια συνάρτησης στο άπειρο …… 355-374
11. Επαναληπτικές ασκήσεις στα όρια 375-379
● Διαγωνίσματα στα όρια ……….......................... 380-385

12. Συνέχεια συνάρτησης …………………….............. 386-397

● Ασκήσεις στη συνέχεια συνάρτησης 398-410

13. Θεωρήματα συνεχών συναρτήσεων ……................. 411-442

● Ασκήσεις στα θεωρήματα συνεχών συναρτήσεων ……………………………………... 443-469

14. Συνδυαστικές επαναληπτικές ασκήσεις στις συναρτήσεις και τα όριά τους 470-500

15. Επαναληπτικά διαγωνίσματα στις συναρτήσεις και τα όριά τους ………………………………… 501-519

2^{O} ΚΕΦΑΛΑΙΟ: ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

16. Η έννοια της παραγώγου …………………………… 523-550

● Ασκήσεις στην έννοια της παραγώγου 551-568

17. Παράγωγος συνάρτηση – Κανόνες παραγώγισης ..………………….…..… 569-580

● Ασκήσεις στην παράγωγο συνάρτησης και στους κανόνες παραγώγισης 581-589

18. Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης …..……..……… 591-604

● Ασκήσεις στην παράγωγο σύνθετης συνάρτησης 605-619

● Διαγώνισμα μέχρι και τους κανόνες παραγώγισης 620-621

19. Εξίσωση εφαπτομένης ……………...…………..… 622-636

● Ασκήσεις στην εξίσωση εφαπτομένης ………...... 637-656

● Διαγωνίσματα μέχρι και εφαπτομένη καμπύλης … 657-662

20. Ρυθμός μεταβολής …..……………......…………… 663-674

● Ασκήσεις στο ρυθμό μεταβολής …………………... 675-695

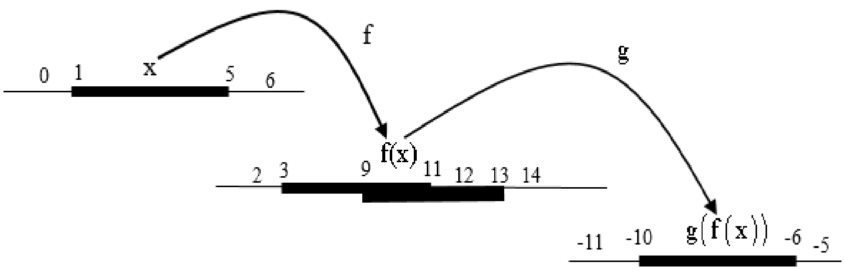
21. Συνδυαστικές επαναληπτικές ασκήσεις στις παραγώγους 696-703

22. Επαναληπτικό διαγώνισμα έως και το ρυθμό μεταβολής ...…………………………………… 704-706

Απαντήσεις ………………………………….………. 709-745

4 Σύνθεση συναρτήσεων

Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=2x+1$ με $D_f=[1,5]$
και $g(x)=3-x$ με $D_g=[9,13]$.
Είναι $1\le x\le 5 \Leftrightarrow 2\le 2x\le 10 \Leftrightarrow 3\le 2x+1\le 11 \Leftrightarrow 3\le f(x)\le 11$ και
$9\le x\le 13 \Leftrightarrow -9\ge -x\ge -13 \Leftrightarrow -10\le 3-x\le -6 \Leftrightarrow -10\le g(x)\le -6$



Ζητούμενο είναι η κατασκευή μιας νέας συνάρτησης που θα αντιστοιχεί κάποιες τιμές του διαστήματος $[1,5]$ σε κάποιες τιμές του διαστήματος $[-10,-6]$ έτσι ώστε να αντικαταστήσει τις f,g.

Επειδή για κάθε $x\in[4,5]$ είναι $9\le f(x)\le 11$, παρατηρούμε ότι από τις τιμές του D_f, μόνο αυτές του $[4,5]$ μπορούν να αντιστοιχούν σε τμήμα του $g(A)$.

Είναι $4\xrightarrow{f} f(4)=9\xrightarrow{g} g(9)=-6$, δηλαδή $4\xrightarrow{;}-6$

και $5\xrightarrow{f} f(5)=11\xrightarrow{g} g(11)=-8$, δηλαδή $5\xrightarrow{;}-8$.

Η καινούργια συνάρτηση έχει ως πεδίο ορισμού τα $x\in A_f$ για τα οποία $f(x)\in A_g$.

Επιπλέον είναι: $g(9)=g(f(4))=-6$ και $g(11)=g(f(5))=-8$.

Το ίδιο συμβαίνει για οποιοδήποτε $x_0\in(9,11)$:

$$g(x_0)\underset{f(x_1)=x_0}{\overset{x_1\in(4,5)}{=}} g(f(x_1))=x_2\in(-8,-6)$$

65. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+2}$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει το $\left(f^{-1}\circ f^{-1}\right)\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

66. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x)=64$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)f^{-1}(x)=12f^{-1}\left(f^{-1}(12)\right)$.

Λύση ανίσωσης – Σχέσεις διάταξης

Αυξημένης δυσκολίας

67. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $e^{f(x)}+f(x)=x+2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(\ln x)=f\left(\dfrac{e}{x}\right)$.

γ) Να βρείτε την f^{-1}.

δ) Να λύσετε την ανίσωση $\left(x^3-8\right)\left(e^x-3\right)<f(-1)$.

68. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ και $g(x)=1-\ln x$.

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρεθεί η f^{-1}.

β) Να βρείτε τη συνάρτηση $\left(f^{-1}og\right)(x)$ και να τη μελετήσετε ως προς τη μονοτονία.

γ) Αν $1<\alpha<\beta<e$, να αποδείξετε ότι: $\dfrac{1-\ln\alpha}{1-\ln\beta}>\dfrac{\ln\alpha}{\ln\beta}$.

69. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ γνησίως μονότονη με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ που η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(3,4)$ και $B(6,-2)$.

2ο Διαγώνισμα

Θέμα Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Δύο συναρτήσεις f, g είναι ίσες, αν υπάρχουν κάποια $x \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $f(x)=g(x)$.

β) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε η συνάρτηση -f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

γ) Αν οι συναρτήσεις f και g είναι 1-1 στο $\mathbb{R}$, τότε και η συνάρτηση gof είναι 1 - 1 στο $\mathbb{R}$.

δ) Αν μια συνάρτηση είναι άρτια, τότε υπάρχει η αντίστροφή της.

ε) Η συνάρτηση f είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, αν για κάθε $x_1, x_2 \in A_f$ με $x_1 = x_2$ είναι $f(x_1)=f(x_2)$.

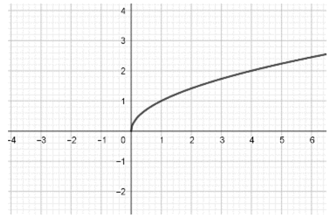
στ) Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ μέγιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \le f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

ζ) Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ τέτοια, ώστε: $f(x_1)<f(x_2)$.

η) Αν ένα σημείο $M(\alpha,\beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση μιας αντιστρέέψιμης συνάρτησης f, τότε το σημείο $M'(\beta,\alpha)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f^{-1}.

Μονάδες 8x2

Α2. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης f. Αφού μεταφέρετε το σχήμα στο τετράδιό σας να σχεδιάσετε, στο ίδιο σύστημα αξόνων, τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y=f^{-1}(x)$, $y=-f(x)$ και $y=f(-x)$.



Μονάδες 9

22.Να βρεθεί το πρόσημο της συνάρτησης $f(x)=x^3+2x^2-x-2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Λύση

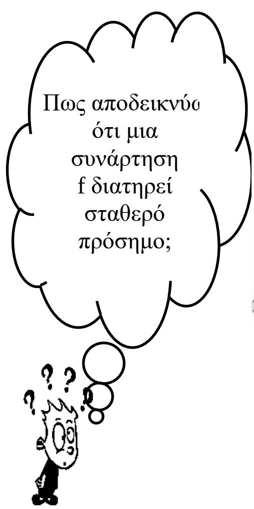
α) $f(x)=x^3+2x^2-x-2=x^2(x+2)-(x+2)=(x^2-1)(x+2)\Leftrightarrow$

$f(x)=(x-1)(x+1)(x+2)$.

Είναι $f(x)=0\Leftrightarrow x=1$ ή $x=-1$ ή $x=-2$.

Ο παρακάτω πίνακας δίνει το πρόσημο της f σε κάθε διάστημα .

Διάστημα	$(-\infty,-2)$	$(-2,-1)$	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$
Επιλεγμένο x_0	-3	$-3/2$	0	2
$f(x_0)$	-8	5/8	-2	12
Πρόσημο της f	—	+	—	+



• Υποθέτουμε ότι η f δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ, δηλαδή υπάρχουν $x_1,x_2\in\Delta$ $(x_1<x_2)$ με $f(x_1)f(x_2)\le 0$.

- Αν $f(x_1)f(x_2)=0$, τότε $f(x_1)=0$ ή $f(x_2)=0$ και για $x=x_1$, $x=x_2$ προκύπτει άτοπο από τη δοθείσα σχέση.

- Αν $f(x_1)f(x_2)<0$, εφαρμόζουμε το θ. Bolzano, οπότε υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=0$. Αντικαθιστούμε το ξ στη σχέση που δίνεται και καταλήγουμε σε άτοπο.

• Αν σε άσκηση γνωρίζουμε ότι η f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και αποδείξουμε ότι $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\Delta$, τότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ.

23.Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$f^2(x)-3f(x)=x^2-x+5 \quad (1) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Λύση

30. Να βρεθεί συνεχής συνάρτηση $\mathbf{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}}$ για την οποία ισχύει ότι: $\mathbf{f^2(x)+2f(x)=e^{2x}-2e^x}$ για κάθε $\mathbf{x\in\mathbb{R}}$, $\mathbf{f(-1)=\frac{1}{e}-2}$ και $\mathbf{f(1)=e-2}$.

Λύση

$f^2(x)+2f(x)=e^{2x}-2e^x \Leftrightarrow f^2(x)+2f(x)+1=e^{2x}-2e^x+1\Leftrightarrow$

$(f(x)+1)^2=(e^x-1)^2 \Leftrightarrow |f(x)+1|=|e^x-1|$.

Έστω $g(x)=f(x)+1,\ x\in\mathbb{R}$, τότε $|g(x)|=|e^x-1|$ (1)

Είναι $g(x)=0 \Leftrightarrow |e^x-1|=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=0$.

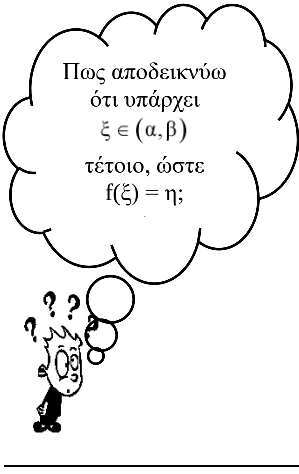
Για κάθε $x\neq 0$ είναι $g(x)\neq 0$, η g είναι συνεχής, οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$.

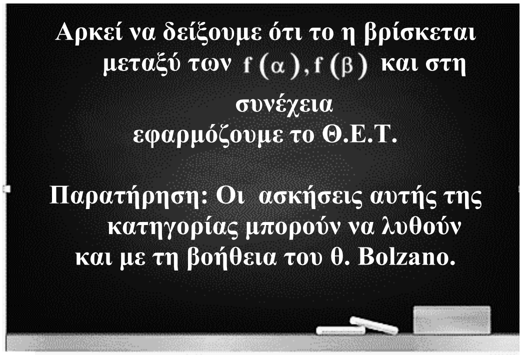
Είναι $g(-1)=f(-1)+1=\frac{1}{e}-2+1=\frac{1}{e}-1<0$, άρα $g(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)$ οπότε η (1) γίνεται:

$-g(x)=|e^x-1| \overset{x<0}{\Leftrightarrow} -f(x)-1=1-e^x \Leftrightarrow f(x)=e^x-2$.

Είναι $g(1)=f(1)+1=e-2+1=e-1>0$, άρα $g(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ οπότε η (1) γίνεται: $g(x)=|e^x-1| \overset{x>0}{\Leftrightarrow} f(x)+1=e^x-1 \Leftrightarrow$

$f(x)=e^x-2$. Επομένως $f(x)=\begin{cases} e^x-2, & x\neq 0 \\ -1, & x=0\end{cases} = e^x-2,\ x\in\mathbb{R}$.





Τράπεζα θεμάτων ΙΕΠ

(Θ4)26640. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{2x}+x^3+2x$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να αποδείξετε ότι έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

γ) Να αποδείξετε ότι η αντίστροφη συνάρτηση της f είναι επίσης γνησίως αύξουσα.

δ) Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x)=0$.

(Θ2)29834. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{9x^2+16}-\frac{5}{2}\ln(8x+1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

β) Να αποδείξετε ότι $f(0)>0$ και $f(1)<0$.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

(Θ4)23106. Δίνεται η συνάρτηση g με $g(x)=\sqrt{1-x^2}$, $x\in[-1,1]$ και η συνεχής συνάρτηση f, ορισμένη στο $[0,\pi]$, με $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, τέτοιες ώστε:

$(g\circ f)(x)=|συνx|$, για κάθε $x\in[0,\pi]$

α) i. Να αποδείξετε ότι $|f(x)|=|ημx|$.

ii. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$.

β) Να βρείτε την συνάρτηση f.

γ) Δίνεται η συνάρτηση $h:(0,\pi]\to\mathbb{R}$ με $h(x)=\frac{1}{f(x)-x}$, όπου f είναι η συνάρτηση του προηγούμενου ερωτήματος.

Να υπολογίσετε το παρακάτω όριο: $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$.

(Θ2)29838. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία για κάθε $x\neq 0$ ισχύει: $xf(x)+συνx=1-x^2ημ\frac{1}{x}$.

22.	Κάθε συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.	
23.	Κάθε συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ έχει μία μέγιστη τιμή Μ και μία ελάχιστη τιμή m.	
24.	Κάθε συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με μέγιστη τιμή Μ και ελάχιστη τιμή m έχει σύνολο τιμών το $[m,M]$.	
25.	Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $[\alpha,\beta]$ και συνεχής στο $(\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει πάντοτε στο $[\alpha,\beta]$ μία μέγιστη τιμή.	
26.	Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.	
27.	Αν η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα, τότε η f είναι συνεχής στο Δ.	
28.	Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.	
29.	Υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}^*$.	
30.	Υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.	
31.	Αν μία συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ, τότε έχει στο διάστημα αυτό μία μέγιστη τιμή Μ και μία ελάχιστη τιμή m.	
32.	Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f(x)-1)(f(x)+1)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Θα είναι $f(x)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ή $f(x)=-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.	
33.	Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f(x)-x)(f(x)+x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Θα είναι $f(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ή $f(x)=-x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.	

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Δίνεται συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι

$$f(x) \neq 2x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^* \text{ και } f(0) = 2$$

Το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ είναι ίσο με:

Α. 0 **Β.** 2 **Γ.** $+\infty$ **Δ.** $-\infty$

2. Η συνάρτηση $f(x) = e^{\sigma\upsilon\nu x} - \eta\mu x,\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ έχει σύνολο τιμών το:

Α. $[-1, 0]$ **Β.** $[0, 1]$ **Γ.** $\left[1, \frac{\pi}{2}\right]$ **Δ.** $[1, e]$

3. Δίνεται συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι $f(1) > 1$ και $f^2(x) = 2xf(x) + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η f έχει τύπο:

Α. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + 2x$ **Β.** $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + x$

Γ. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ **Δ.** $f(x) = x + 1$

4. Δίνεται συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι:

$$f(x)f(f(x)) = 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Αν $f(1000) = 999$ τότε το $f(500)$ είναι ίσο με:

Α. $\frac{1}{500}$ **Β.** 499 **Γ.** $\frac{1}{999}$ **Δ.** 500

5. Αν η $f: [0, 2] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής με $f(0) = 0$ και $f(2) = 2$, τότε σωστή είναι η πρόταση:

Α. Υπάρχει $x_1 \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = 3$.

Β. Υπάρχει $x_2 \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε $f(x_2) = x_2$.

Γ. Υπάρχει $x_3 \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε $f(x_3) = -1$.

Δ. Υπάρχει $x_4 \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε $f(x_4) = 1$.

14 Συνδυαστικές επαναληπτικές ασκήσεις

Επίπεδο δυσκολίας Β Θέματος

1. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\alpha e^{x}+1, \alpha>0$ και $g(x)=x+\beta,\ \beta\in\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

- $f(g(x))=e^{x+2}+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
- Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται πάνω στην ευθεία $y=2$.

α) Να αποδείξετε ότι $\beta=2+\ln\alpha$.

β) Να αποδείξετε ότι: $\alpha=1, \beta=2$ και να δείξετε ότι το σημείο τομής των συναρτήσεων f και g βρίσκεται πάνω στον άξονα y΄y.

Αν $\varphi(x)=f(g(x))$:

γ) Να αποδείξετε ότι η φ αντιστρέφεται, να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της φ^{-1}.

δ) Έστω συνάρτηση $k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $g(x)\le k(x)\le f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η k είναι συνεχής στο 0.

2. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln(x-2)$ και $g(x)=x^2-2$.

α) Να αποδείξετε ότι ορίζεται η συνάρτηση $f\circ g$ και να βρείτε τον τύπο της.

Αν $(f\circ g)(x)=\ln(x^2-4)$.

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της συνάρτησης

$$\varphi(x)=f\left(g\left(\sqrt{x}\right)\right)$$

Δίνεται $\varphi(x)=\ln(x-4),\ x>4$.

γ) Να αποδείξετε ότι η φ αντιστρέφεται, να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της φ^{-1}.

δ) Με δεδομένο ότι $\varphi^{-1}(x)=e^{x}+4,\ x\in\mathbb{R}$, να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\varphi^{-1}(x)+2^{x}}{\varphi^{-1}(x)-4-2^{x+3}}$ **ii.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^{\varphi(x)}}{\sqrt{g(x)}+x}\right)$.

4ο Διαγώνισμα

Θέμα Α

Α1. Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β] και $f(\alpha) \neq f(\beta)$, τότε για κάθε αριθμό η μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει τουλάχιστον ένας $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $f(x_0) = \eta$.

Μονάδες 10

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f, g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, αν ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -1$.»

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (μονάδες 4)

Μονάδες 5

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Μια συνεχής συνάρτηση f με πεδίο ορισμού κλειστό διάστημα, η οποία έχει δύο σημεία της με τεταγμένες ετερόσημες έχει σύνολο τιμών κλειστό διάστημα.

β) Αν $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $f(x) > g(x)$ για κάθε πραγματικό αριθμό x, τότε υπάρχει σημείο x_0 του πεδίου ορισμού τους τέτοιο ώστε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

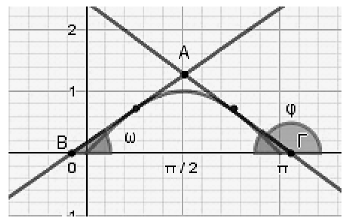
γ) Αν μία συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, είναι συνεχής και έχει σύνολο τιμών ανοικτό διάστημα τότε το πεδίο ορισμού της θα είναι ανοικτό διάστημα.

δ) Αν για οποιαδήποτε $\alpha, \beta \in A_f = [\gamma, \delta]$ με $\alpha \neq \beta$ ισχύει $f(\alpha) \neq f(\beta)$, τότε η εξίσωση $f(x) = \kappa$, $\kappa \in f(A) = [f(\gamma), f(\delta)]$ έχει μία τουλάχιστον λύση.

Είναι $f'(x_2) = -f'(x_1) \Leftrightarrow συνx_2 = -συνx_1 = συν(\pi - x_1) \Leftrightarrow x_2 = \pi - x_1$.

Άρα για κάθε $x_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ οι εφαπτόμενες της C_f στο $x = x_1$ και στο $x = \pi - x_1$ έχουν αντίθετες κλίσεις.

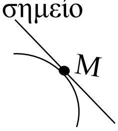
β) Έστω ω η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο x_1 με τον άξονα x΄x και φ η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_k στο $x_2 = \pi - x_1$ με τον άξονα x΄x. Είναι $f'(x_1) = εφω$ και $f'(x_2) = εφφ$. Έστω ότι οι εφαπτόμενες τέμνονται στο Α.



Είναι: $f'(x_2) = -f'(x_1) \Leftrightarrow εφφ = -εφω = εφ(180° - φ) \Leftrightarrow A\hat{B}Γ = A\hat{Γ}B$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Ευθεία ε: $y = \lambda x + \beta$ εφάπτεται της C_f

Σε γνωστό σημείο $M(x_0, y_0)$



- Το Μ είναι σημείο της ε, οπότε: $y_0 = \lambda x_0 + \beta$
- Το Μ είναι σημείο της C_f οπότε: $f(x_0) = y_0$
- Η ευθεία ε εφάπτεται της C_f στο Μ, οπότε: $f'(x_0) = \lambda$

Σε άγνωστο σημείο

1ος τρόπος
Λύνω το σύστημα των ε, C_f και βρίσκω τα κοινά τους σημεία. Έστω $x_1, x_2, \ldots$ οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = \lambda x + \beta$

- Αν $f'(x_1) = \lambda$ τότε η ε εφάπτεται της C_f στο $x = x_1$.
- Αν $f'(x_2) \neq \lambda$ τότε η ε τέμνει τη C_f στο $x = x_2$ κ.ο.κ..

2ος τρόπος
Αναζητώ $x \in D_f$ για το οποίο $f'(x) = \lambda$.

Έστω $x_1, x_2, \ldots$ οι ρίζες της εξίσωσης. Βρίσκω τις εφαπτόμενες της C_f στα $x = x_1$, $x = x_2$ κ.ο.κ.. Κάποια από τις εφαπτόμενες θα είναι η ευθεία ε.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+\alpha x+\beta$ και η ευθεία ε: $y=\lambda x-1$. Να βρεθούν τα α, β, $\lambda\in\mathbb{R}$ για τα οποία η ε εφάπτεται της C_f στο σημείο $A(2,3)$.

Λύση

Το Α είναι κοινό σημείο των ε, C_f οπότε:

$$f(2)=3\Leftrightarrow 4+2\alpha+\beta=3\Leftrightarrow\ 2\alpha+\beta=-1\ \ (1)\ \text{ και }\ 3=2\lambda-1\Leftrightarrow\lambda=2$$

Επειδή η ε εφάπτεται της C_f στο σημείο $A(2,3)$ ισχύει: $f'(2)=\lambda=2$.

Όμως $f'(x)=\left(x^2+\alpha x+\beta\right)'=2x+\alpha$ οπότε

$f'(2)=2\Leftrightarrow\ 4+\alpha=2\Leftrightarrow\alpha=-2$. Από τη σχέση (1) είναι: $\beta=3$.

7. Να αποδειχθεί ότι η ευθεία ε: $y=9x-2$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^3-6x^2+9x-2$.

Λύση

1ος τρόπος:

Αρχικά θα βρούμε τα κοινά σημεία της ε με την C_f.

$$f(x)=9x-2\Leftrightarrow x^3-6x^2+\cancel{9x}-\cancel{2}=\cancel{9x}-\cancel{2}\Leftrightarrow$$

$$x^2(x-6)=0\Leftrightarrow(x=0)\ \text{ή}\ (x=6).$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=3x^2-12x+9$.

Η εφαπτομένη της C_f στο $x=0$ έχει εξίσωση
$y-f(0)=f'(0)x\Leftrightarrow y=9x+2$ και η εφαπτομένη ης C_f στο $x=6$ έχει εξίσωση $y-f(6)=f'(6)(x-6)\Leftrightarrow y=45x-218$, οπότε η ε εφάπτεται της C_f στο $x=0$.

2ος τρόπος:

Η ευθεία ε έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=9$.

Θα βρούμε τα σημεία της C_f στα οποία η εφαπτομένη έχει $\lambda=9$. Είναι:

$$f'(x)=9\Leftrightarrow 3x^2-12x+\cancel{9}=\cancel{9}\Leftrightarrow 3x(x-4)=0\Leftrightarrow(x=0)\ \text{ή}\ (x=4)$$