ΓΕΝΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

Ενδεικτικές Απαντήσεις

Θέμα Α

Α.1 Θεωρία

Α.2 $(\alpha)\to(\Lambda)$, $(\beta)\to(\Sigma)$, $(\gamma)\to(\Sigma)$, $(\delta)\to(\Sigma)$, $(\varepsilon)\to(\Lambda)$

Θέμα Β

Από την υπόθεση έχουμε ότι ισχύουν:

- $x^2 f(x) \geq e^x - e^{-x} - 2x \quad :(1)$
- $f(-x) = -f(x) \,:(2)$ (αφού η f είναι περιττή).

Β.1 Από τη σχέση (1) θέτοντας όπου x το $-x$ έχουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$(-x)^2 f(-x) \geq e^{-x} - e^{-(-x)} - 2(-x) \Rightarrow$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} x^2(-f(x)) \geq -(e^x - e^{-x} - 2x)$$

$$\Rightarrow -x^2 f(x) \geq -(e^x - e^{-x} - 2x)$$

$$\Rightarrow x^2 f(x) \leq e^x - e^{-x} - 2x \quad :(3)$$

Από τις (1) και (3) προκύπτει ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $x^2 f(x) = e^x - e^{-x} - 2x$,

οπότε για κάθε $x \neq 0$ είναι $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^2}$.

Ακόμη από τη (2) για $x = 0$ έχουμε:

$f(-0) = -f(0) \Leftrightarrow 2f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$.

Επομένως είναι $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x^2} & , x\neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$.

B.2 Για κάθε $x\neq 0$ είναι $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x^2}$, οπότε η f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$, αφού προκύπτει από πράξεις και σύνθεση μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

Στο $x_0=0$, είναι:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x^2} \underset{(D.L.H)}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-e^{-x}-2x\right)'}{\left(x^2\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{2x} \underset{(D.L.H)}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x+e^{-x}-2\right)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{2}=0$$

Άρα ισχύει $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$, οπότε η f είναι συνεχής και στο $x_0=0$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η f είναι τελικά συνεχής στο $\mathbb{R}$.

B.3 Για κάθε $x\neq 0$ είναι:

$$f'(x)=\left(\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x^2}\right)'=\frac{\left(e^x+e^{-x}-2\right)x^2-\left(e^x-e^{-x}-2x\right)2x}{x^4}=$$

$$=\frac{xe^x+xe^{-x}-2x-2e^x+2e^{-x}+4x}{x^3}$$

$$=\frac{(x-2)e^x+(x+2)e^{-x}+2x}{x^3}$$

Στο $x_0=0$, έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x^2}-0}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x^3}\underset{(D.L.H)}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-e^{-x}-2x\right)'}{\left(x^3\right)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{3x^2}\underset{(D.L.H)}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x+e^{-x}-2\right)'}{\left(3x^2\right)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{6x}\underset{(D.L.H)}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-e^{-x}\right)'}{\left(6x\right)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{6}=\frac{1}{3}\in\mathbb{R}$$

Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0=0$ με $f'(0)=\frac{1}{3}$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-2)e^x+(x+2)e^{-x}+2x}{x^3} & \text{, αν } x\neq 0\\[2ex] \dfrac{1}{3} & \text{, αν } x=0\end{cases}$$

B.4 Για κάθε $x\neq 0$ είναι $f'(x)=\dfrac{(x-2)e^x+(x+2)e^{-x}+2x}{x^3}=\dfrac{\varphi(x)}{x^3}$, όπου $\varphi(x)=(x-2)e^x+(x+2)e^{-x}+2x,\ x\in\mathbb{R}$.

Είναι:

- $\varphi'(x)=\left((x-2)e^x+(x+2)e^{-x}+2x\right)'=(x-1)e^x-(x+1)e^{-x}+2$
- $\varphi''(x)=\left((x-1)e^x-(x+1)e^{-x}+2\right)'=xe^x+xe^{-x}=x\left(e^x+e^{-x}\right)$

Έχουμε:

- $\varphi''(x)=0\Leftrightarrow x\left(e^x+e^{-x}\right)=0\overset{\left(\substack{e^x+e^{-x}\neq 0\\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}}\right)}{\Leftrightarrow}x=0$

- $\varphi''(x)>0 \Leftrightarrow x\left(e^{x}+e^{-x}\right)>0 \overset{\left(\substack{e^{x}+e^{-x}>0 \\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}}\right)}{\Leftrightarrow} x>0$
- $\varphi''(x)<0 \Leftrightarrow x\left(e^{x}+e^{-x}\right)<0 \overset{\left(\substack{e^{x}+e^{-x}>0 \\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}}\right)}{\Leftrightarrow} x<0$

Επομένως έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της φ'' και μονοτονίας της συνάρτησης φ'.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi''(x)$	$-$	0	$+$
$\varphi'(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

Από το πρόσημο της $\varphi''(x)$ που φαίνεται στον πίνακα, προκύπτει ότι η φ' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, οπότε η φ' παρουσιάζει στο $x_0=0$ ολικό ελάχιστο, το οποίο είναι το $\min\varphi'(x)=\varphi'(0)=0$.

Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $\varphi'(x)\geq\min\varphi'(x)\Rightarrow\varphi'(x)\geq 0$, με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν $x=0$. Επομένως η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

- Για κάθε $x>0$ έχουμε:

$$x>0 \overset{\left(\substack{\varphi \text{ γν.αύξουσα} \\ \text{στο } \mathbb{R}}\right)}{\Rightarrow} \varphi(x)>\varphi(0) \overset{(\varphi(0)=0)}{\Rightarrow} \varphi(x)>0 \overset{(x^3>0)}{\Rightarrow} \frac{\varphi(x)}{x^3}>0 \Rightarrow f'(x)>0$$

- Ακόμη, για κάθε $x<0$ έχουμε:

$$x<0 \overset{\left(\substack{\varphi \text{ γν.αύξουσα} \\ \text{στο } \mathbb{R}}\right)}{\Rightarrow} \varphi(x)<\varphi(0) \overset{(\varphi(0)=0)}{\Rightarrow} \varphi(x)<0 \overset{(x^3<0)}{\Rightarrow} \frac{\varphi(x)}{x^3}>0 \Rightarrow f'(x)>0$$

Ακόμη είναι $f'(0)=\frac{1}{3}>0$. Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f'(x)>0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Θέμα Γ

Γ.1

α. Έχουμε $\left|f'(x)-f'(y)-x+y\right|<|x-y| \ :(1) \quad (x\neq y)$ και $f(0)=f'(0)=0 \ :(2)$.

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Λόγω της (1) έχουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq x_0$ ισχύει:

$$|f'(x) - f'(x_0) - x + x_0| < |x - x_0| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -|x - x_0| < f'(x) - f'(x_0) - x + x_0 < |x - x_0|$$

$$\Rightarrow f'(x_0) + x - x_0 - |x - x_0| < f'(x) < f'(x_0) + x - x_0 + |x - x_0| \quad :(3)$$

Είναι: $\lim\limits_{x \to x_0}\left(f'(x_0) + x - x_0 - |x - x_0|\right) = f'(x_0)$ και

$\lim\limits_{x \to x_0}\left(f'(x_0) + x - x_0 + |x - x_0|\right) = f'(x_0)$, οπότε λόγω της (3) και του κριτηρίου παρεμβολής, προκύπτει ότι $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = f'(x_0)$.

Επομένως για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = f'(x_0)$, οπότε η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

β. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Λόγω της (1) έχουμε ότι ισχύει:

$$|f'(x_1) - f'(x_2) - x_1 + x_2| < |x_1 - x_2| = x_2 - x_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -(x_2 - x_1) < f'(x_1) - f'(x_2) - x_1 + x_2 < x_2 - x_1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(x_1) - f'(x_2) - x_1 + x_2 > x_1 - x_2 \\ f'(x_1) - f'(x_2) - x_1 + x_2 < x_2 - x_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(x_1) - 2x_1 > f'(x_2) - 2x_2 \\ f'(x_1) < f'(x_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g'(x_1) > g'(x_2) \\ f'(x_1) < f'(x_2) \end{cases} \quad \left(\text{είναι } g'(x) = \left(f(x) - x^2\right)' = f'(x) - 2x\right)$$

Άρα για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f'(x_1) < f'(x_2)$ και $g'(x_1) > g'(x_2)$, οπότε η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και η g' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Επομένως η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και η $g(x)=f(x)-x^2$ είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$.

Γ.2 Έχουμε:

- $x>0 \overset{(f' \nearrow \mathbb{R})}{\Rightarrow} f'(x)>f'(0) \overset{(f'(0)=0)}{\Rightarrow} f'(x)>0$
- $x<0 \overset{(f' \nearrow \mathbb{R})}{\Rightarrow} f'(x)<f'(0) \overset{(f'(0)=0)}{\Rightarrow} f'(x)<0$
  και
- $f'(0)=0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Από το πρόσημο της f' που φαίνεται στον πίνακα, προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Η f παρουσιάζει, μόνο στο $x_0=0$ ολικό ελάχιστο, το $\min f(x)=f(0)=0$.

Γ.3

α. Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)\geq \min f(x)=0 \Rightarrow f(x)\geq 0 \;:(\alpha)$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_g στο σημείο της $M(0,g(0))$ είναι: $y-g(0)=g'(0)(x-0)$.

Είναι $g(0)=f(0)-0^2=f(0)=0$ και $g'(0)=f'(0)-2\cdot 0=f'(0)=0$. Οπότε η εξίσωση της (ε) είναι:

$y-0=0\cdot x \Leftrightarrow y=0$. Άρα $(\varepsilon): y=0$.

Επειδή η g είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$, έπεται ότι η C_g βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη της ευθεία $(\varepsilon): y=0$ σ’όλο το $\mathbb{R}$ με εξαίρεση το σημείο επαφής τους $M(0,g(0))$.

Επομένως για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει: $g(x)\leq 0 \Leftrightarrow f(x)-x^2\leq 0 \Leftrightarrow f(x)\leq x^2 \;:(\beta)$.

Από τις σχέσεις (α) και (β) προκύπτει ότι $0\leq f(x)\leq x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με τις ισότητες να ισχύουν μόνο για $x=0$.

β. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει: $0\le f(x)\le x^2\ :(\gamma)$ με τις ισότητες να ισχύουν μόνο για $x=0$.

Λόγω της (γ) έχουμε ότι για κάθε $x\in[0,1]$ ισχύει:

$$\begin{cases}0\le f(2x)\le(2x)^2=4x^2\\0\le f(5x)\le(5x)^2=25x^2\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(2x)f(5x)\le 100x^4$$

$\Rightarrow -f(2x)f(5x)+100x^4\ge 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο αν $2x=5x=0\Leftrightarrow x=0$.

Άρα:

$$\int_0^1\left(-f(2x)f(5x)+100x^4\right)dx>0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\int_0^1 f(2x)f(5x)dx+100\int_0^1 x^4\,dx>0$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(2x)f(5x)dx<100\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(2x)f(5x)dx<100\left(\frac{1^5}{5}-\frac{0^5}{5}\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(2x)f(5x)dx<20$$

Γ.4 Θα δειχθεί ότι $f(x)\le x\ :(\delta)$ για κάθε $x\in[0,2]$. Επειδή είναι $f(0)=0$ και $f(2)=2$, έπεται ότι η (δ) ισχύει ως ισότητα στις θέσεις 0 και 2. Έστω $x\in(0,2)$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής σε καθένα από τα διαστήματα $[0,x]$ και $[x,2]$, οπότε υπάρχουν $\xi_1\in(0,x)$ και $\xi_2\in(x,2)$ ώστε:

- $f'(\xi_1)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{f(x)-0}{x}=\dfrac{f(x)}{x}$ και

- $f'(\xi_2)=\frac{f(2)-f(x)}{2-x}=\frac{2-f(x)}{2-x}$

Έχουμε όμως:

$$0<\xi_1<x<\xi_2<2 \overset{(f' \nearrow \mathbb{R})}{\Rightarrow} f'(\xi_1)<f'(\xi_2) \Rightarrow \frac{f(x)}{x}<\frac{2-f(x)}{2-x} \Rightarrow$$

$$\underset{(2-x>0)}{\overset{(x>0)}{\Rightarrow}} (2-x)f(x)<x(2-f(x))$$

$$\Rightarrow 2f(x)-xf(x)<2x-xf(x)$$

$$\Rightarrow 2f(x)<2x \Rightarrow \boxed{f(x)<x}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι για κάθε $x\in[0,2]$ ισχύει $f(x)\le x$ με την ισότητα να ισχύει μόνο στις θέσεις 0 και 2.

Θέμα Δ

Έχουμε $f'(x)=3x^2+\left(\int_{-1}^{1} f(t)dt-f(0)\right)e^{f(x)}$ $:(1)$ και $f(2)=f(1)+7$ $:(2)$

Δ.1

α. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x^3$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με $g'(x)=f'(x)-3x^2$, οπότε

- η g είναι συνεχής στο $[1,2]$ και
- παραγωγίσιμη στο $(1,2)$.

Ακόμη είναι:

$$g(1)=f(1)-1^3=f(1)-1 \text{ και}$$

$$g(2)=f(2)-2^3=f(2)-8\overset{(2)}{=}f(1)+7-8=f(1)-1, \text{ οπότε είναι}$$

- $g(1)=g(2)$.

Άρα η g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[1,2]$, οπότε υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε:

$$g'(\xi)=0 \Rightarrow f'(\xi)-3\xi^2=0 \Rightarrow \boxed{f'(\xi)=3\xi^2}.$$

β. Από τη σχέση (1) για $x=\xi$ έχουμε:

$$f'(\xi)=3\xi^2+\left(\int_{-1}^{1} f(t)dt-f(0)\right)e^{f(\xi)} \Leftrightarrow$$

$$\overset{\left(f'(\xi)=3\xi^2\right)}{\Leftrightarrow} 3\xi^2=3\xi^2+\left(\int_{-1}^{1} f(t)dt-f(0)\right)e^{f(\xi)}$$

$$\Leftrightarrow \left(\int_{-1}^{1} f(t)dt-f(0)\right)e^{f(\xi)}=0$$

$$\overset{\left(e^{f(\xi)}\neq 0\right)}{\Leftrightarrow} \int_{-1}^{1} f(t)dt-f(0)=0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\int_{-1}^{1} f(t)dt=f(0)} \ :(3)$$

γ. Από τη σχέση (1), λόγω της (3), έχουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$f'(x)=3x^2+0\cdot e^{f(x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=3x^2 \Leftrightarrow \left(f(x)\right)'=\left(x^3\right)'$$

$$\Rightarrow f(x)=x^3+c.$$

Έχουμε όμως:

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt=f(0) \Leftrightarrow \int_{-1}^{1}\left(t^3+c\right)dt=0^3+c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{t^4}{4}+ct\right]_{-1}^{1}=c \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}+c\right)-\left(\frac{1}{4}-c\right)=c$$

$$\Leftrightarrow 2c=c \Leftrightarrow c=0$$

Άρα είναι $f(x)=x^3+0 \Leftrightarrow \boxed{f(x)=x^3}, x\in\mathbb{R}$. (ικανοποιεί την υπόθεση).

Δ.2

α. Είναι $f(x)=x^3$, $x\in\mathbb{R}$ και $f'(x)=3x^2$, $x\in\mathbb{R}$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο της $M(\alpha, f(\alpha))$ είναι:

$$y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)\Leftrightarrow y-\alpha^3=3\alpha^2(x-\alpha)\Leftrightarrow y=3\alpha^2x-2\alpha^3$$

Άρα (ε): $\boxed{y=3\alpha^2x-2\alpha^3}$

β. Βρίσκουμε τις τετμημένες των κοινών σημείων της C_f και της εφαπτομένης (ε).

Έχουμε:

$$f(x)=3\alpha^2x-2\alpha^3\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^3=3\alpha^2x-2\alpha^3\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^3-3\alpha^2x+2\alpha^3=0$$
$$\overset{\text{(Horner)}}{\Leftrightarrow}(x-\alpha)(x^2+\alpha x-2\alpha^2)=0$$
$$\Leftrightarrow(x-\alpha)(x-\alpha)(x+2\alpha)=0$$
$$\Leftrightarrow(x-\alpha)^2(x+2\alpha)=0$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\alpha\\ \text{ή}\\ x=-2\alpha\end{cases}$$

Σχήμα Horner

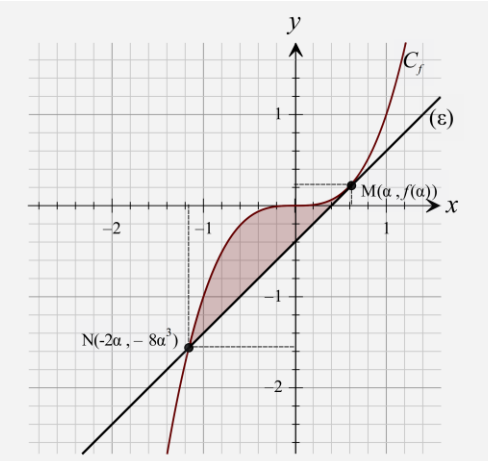
x^3	x^2	x	Στ.Όρος	ρίζα
1	0	$-3\alpha^2$	$2\alpha^3$	α
	α	α^2	$-2\alpha^3$	
1	α	$-2\alpha^2$	0	

- $x^3-3\alpha^2x+2\alpha^3=(x-\alpha)(x^2+\alpha x-2\alpha^2)$
- $\varphi(x)=x^2+\alpha x-2\alpha^2$ με $\Delta=9\alpha^2$ και ρίζες $x_{1,2}=\dfrac{-\alpha\pm3\alpha}{2}=\begin{cases}x_1=\alpha\\ x_2=-2\alpha\end{cases}$

Επομένως η (ε) και η C_f έχουν δύο κοινά σημεία, το σημείο επαφής $M(\alpha,\alpha^3)$ και το σημείο $N(-2\alpha,-8\alpha^3)$.

Το εμβαδόν του χωρίου Ω είναι:

$$E(\Omega)=\int_{-2\alpha}^{\alpha}\left|f(x)-3\alpha^2x+2\alpha^3\right|dx=\int_{-2\alpha}^{\alpha}\left|x^3-3\alpha^2x+2\alpha^3\right|dx.$$



Είναι: $x^3-3\alpha^2x+2\alpha^3=(x-\alpha)^2(x+2\alpha)\geq 0$ για κάθε $x\in[-2\alpha,\alpha]$.

Επομένως είναι:

$$E(\Omega)=\int_{-2\alpha}^{\alpha}\left(x^3-3\alpha^2x+2\alpha^3\right)dx=$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{3\alpha^2x^2}{2}+2\alpha^3x\right]_{-2\alpha}^{\alpha}$$

$$=\left(\frac{\alpha^4}{4}-\frac{3\alpha^4}{2}+2\alpha^4\right)-\left(\frac{16\alpha^4}{4}-\frac{12\alpha^4}{2}-4\alpha^4\right)$$

$$=\left(\frac{\alpha^4}{4}-\frac{6\alpha^4}{4}+\frac{8\alpha^4}{4}\right)-\left(-\frac{12\alpha^4}{2}\right)$$

$$=\frac{3\alpha^4}{4}+\frac{24\alpha^4}{4}=\frac{27\alpha^4}{4}\ \text{τ.μ.}$$

Έχουμε:

$$E(\Omega)=108\Leftrightarrow\frac{27}{4}\alpha^4=108\Leftrightarrow\alpha^4=16\Leftrightarrow\alpha^4=2^4\overset{(\alpha>0)}{\Leftrightarrow}\boxed{\alpha=2}$$

Άρα η ζητούμενη τιμή είναι η $\alpha=2$.