Ενδεικτικές Απαντήσεις

Θέμα Α

Α.1 Θεωρία

Α.2 $(1)\to \Lambda$, $(2)\to \Sigma$, $(3)\to \Lambda$, $(4)\to \Lambda$, $(5)\to \Lambda$

$(6)\to \Lambda$, $(7)\to \Lambda$, $(8)\to \Lambda$, $(9)\to \Sigma$, $(10)\to \Sigma$

Θέμα Β

Β.1 Έχουμε $f(x)=\begin{cases} x(\ln x)^2 & , \ x\in(0,+\infty) \\ 0 & , \ x=0 \end{cases}$

- Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι $f(x)=x(\ln x)^2$, οπότε η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων. $\left(x(\ln x)^2 = x\cdot \ln x\cdot \ln x\right)$
- Στο $x_0=0$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(x(\ln x)^2\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)^2}{\frac{1}{x}} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\left((\ln x)^2\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{2\ln x}{-\frac{1}{x}}$$

$$\overset{\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{(2\ln x)'}{\left(-\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{2}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(2x) = 0$$

Ακόμη είναι $f(0)=0$. Άρα ισχύει $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$, οπότε η f είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η f είναι συνεχής $[0,+\infty)$.

B.2 Στο $(0,+\infty)$ η f είναι παραγωγίσιμη (προκύπτει από πράξεις μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με:

$$f'(x) = \left(x(\ln x)^2\right)' =$$

$$= (x)'(\ln x)^2 + x\left((\ln x)^2\right)'$$

$$= (\ln x)^2 + x \cdot 2(\ln x) \cdot \frac{1}{x}$$

$$= (\ln x)^2 + 2\ln x \text{, για κάθε } x > 0.$$

Στο $x_0 = 0$, έχουμε:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x(\ln x)^2 - 0}{x} = \lim_{x\to 0^+}\left[(\ln x)^2\right] = +\infty$$

Επομένως η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Έτσι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x) = (\ln x)^2 + 2\ln x$ για κάθε $x > 0$ και δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

B.3 Η f είναι συνεχής στο $[1,e]$ και για κάθε $x \in [1,e]$ είναι $f(x) = x(\ln x)^2 \geq 0$, οπότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E=\int_1^e f(x)dx=\int_1^e x(\ln x)^2dx=\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}\right)'(\ln x)^2dx=$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}(\ln x)^2\right]_1^e-\int_1^e\frac{x^2}{2}\left((\ln x)^2\right)'dx$$

$$=\left(\frac{e^2}{2}\cdot 1^2-\frac{1^2}{2}\cdot 0^2\right)-\int_1^e\frac{x^2}{2}\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=\frac{e^2}{2}-\int_1^e x\ln x dx$$

$$=\frac{e^2}{2}-\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln x dx$$

$$=\frac{e^2}{2}-\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e+\int_1^e\frac{x^2}{2}(\ln x)'dx$$

$$=\frac{e^2}{2}-\left(\frac{e^2}{2}\cdot 1-\frac{1^2}{2}\cdot 0\right)+\int_1^e\frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx$$

$$=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{2}+\frac{1}{2}\int_1^e xdx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e=\frac{1}{4}\left(e^2-1\right)\text{ τ.μ.}$$

Θέμα Γ

Γ.1 Έχουμε $f(x)=\left(\int_0^1\left(2tf(t)-t^2e^t\right)dt\right)\cdot e^{x^2}\quad :(1)$.

Το ολοκλήρωμα $\int_0^1\left(2tf(t)-t^2e^t\right)dt$ είναι σταθερός αριθμός.

Έστω $\alpha=\int_0^1\left(2tf(t)-t^2e^t\right)dt$. Τότε από την (1) έχουμε $f(x)=\alpha\cdot e^{x^2}$.

Για $f(x) = \alpha \cdot e^{x^2}$ έχουμε :

$$\int_0^1 \left(2tf(t) - t^2 e^t\right) dt =$$

$$= \int_0^1 \left(2t\alpha e^{t^2} - t^2 e^t\right) dt$$

$$= \alpha \int_0^1 2te^{t^2} dt - \int_0^1 t^2 e^t dt$$

$$= \alpha \int_0^1 \left(e^{t^2}\right)' dt - \int_0^1 t^2 \left(e^t\right)' dt$$

$$= \alpha \left[e^{t^2}\right]_0^1 - \left[t^2 e^t\right]_0^1 + \int_0^1 \left(t^2\right)' e^t dt$$

$$= \alpha(e-1) - (e-0) + 2\int_0^1 te^t dt$$

$$= \alpha(e-1) - e + 2\int_0^1 t\left(e^t\right)' dt$$

$$= \alpha(e-1) - e + 2\left[te^t\right]_0^1 - 2\int_0^1 (t)' e^t dt$$

$$= \alpha(e-1) - e + 2(e-0) - 2\int_0^1 e^t dt$$

$$= \alpha(e-1) - e + 2e - 2\left[e^t\right]_0^1$$

$$= \alpha(e-1) + e - 2(e-1)$$

$$= \alpha(e-1) + e - 2e + 2$$

$$= \alpha(e-1) - e + 2$$

Πρέπει η $f(x) = \alpha e^{x^2}$ να ικανοποιεί την (1), δηλαδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει:

$$f(x) = \left(\int_0^1 \left(2tf(t) - t^2 e^t\right) dt\right) \cdot e^{x^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha e^{x^2} = (\alpha(e-1)-e+2)e^{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \alpha(e-1)-e+2$$

$$\Leftrightarrow \alpha(e-2) = e-2$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 1$$

Άρα είναι $f(x) = 1 \cdot e^{x^2} = e^{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Γ.2 Η συνάρτηση F ως παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ακόμη η F ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ είναι και συνεχής στο $\mathbb{R}$.

α. Από την υπόθεση έχουμε ότι για κάθε $x \neq 0$ ισχύει:

$$F(1+x)F(1-x) < 0 \quad :(2)$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0} F(1+x) \underset{\left(\lim\limits_{x\to 0}(1+x)=1\right)}{\overset{(w=1+x)}{=}} \lim\limits_{w\to 1} F(w) \overset{\left(\substack{F \text{ συνεχής} \\ \text{στο } x_o=1}\right)}{=} F(1)$ και

$$\lim_{x\to 0} F(1-x) \underset{\left(\lim\limits_{x\to 0}(1-x)=1\right)}{\overset{(y=1-x)}{=}} \lim_{y\to 1} F(y) \overset{\left(\substack{F \text{ συνεχής} \\ \text{στο } x_o=1}\right)}{=} F(1)$$

Έτσι από την (2) έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\left(F(1+x)F(1-x)\right) \leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(1)F(1) \leq 0$$

$$\Rightarrow \left(F(1)\right)^2 \leq 0$$

$$\overset{\left(\left(F(1)\right)^2 \geq 0\right)}{\Rightarrow} F^2(1) = 0$$

$$\Rightarrow F(1) = 0$$

β. Είναι $F'(x)=f(x)=e^{x^2}>0$, οπότε η F είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Έτσι έχουμε:

$$x\in[0,1]\Rightarrow 0\le x\le 1 \overset{(F\ \text{γν.αύξουσα})}{\Rightarrow} F(0)\le F(x)\le F(1)\Rightarrow$$

$$\overset{(F(1)=0)}{\Rightarrow} F(0)\le F(x)\le 0$$

Επομένως για κάθε $x\in[0,1]$ ισχύει $F(x)\le 0$.

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E(\Omega)=\int_0^1|F(x)|dx=$$

$$=\int_0^1(-F(x))dx$$

$$=-\int_0^1(x)'F(x)dx$$

$$=-[xF(x)]_0^1+\int_0^1 xF'(x)dx$$

$$=-(1\cdot F(1)-0\cdot F(0))+\int_0^1 xe^{x^2}dx$$

$$\overset{(F(1)=0)}{=}-(0-0)+\frac{1}{2}\int_0^1\left(e^{x^2}\right)'dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_0^1=\frac{1}{2}(e-1)\ \text{τ.μ.}$$

Γ.3 Κοντά στο $x_0=0$ είναι:

$$\frac{f(x)-f(\eta\mu x)}{x^4}=\frac{e^{x^2}-e^{\eta\mu^2 x}}{x^4}=$$

$$=\frac{e^{\eta\mu^2 x}\left(e^{x^2-\eta\mu^2 x}-1\right)}{x^4}$$

$$= e^{\eta\mu^2 x}\cdot\frac{e^{x^2-\eta\mu^2 x}-1}{x^2-\eta\mu^2 x}\cdot\frac{x^2-\eta\mu^2 x}{x^4}$$

$$= e^{\eta\mu^2 x}\cdot\frac{e^{x^2-\eta\mu^2 x}-1}{x^2-\eta\mu^2 x}\cdot\frac{(x-\eta\mu x)(x+\eta\mu x)}{x^4}$$

$$= e^{\eta\mu^2 x}\cdot\frac{e^{x^2-\eta\mu^2 x}-1}{x^2-\eta\mu^2 x}\cdot\frac{x-\eta\mu x}{x^3}\cdot\left(1+\frac{\eta\mu x}{x}\right)$$

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 0} e^{\eta\mu^2 x} \underset{\left(\lim\limits_{x\to 0}(\eta\mu^2 x)=0\right)}{\overset{(w=\eta\mu^2 x)}{=}} \lim\limits_{w\to 0} e^{w} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2-\eta\mu^2 x}-1}{x^2-\eta\mu^2 x} \underset{\left(\lim\limits_{x\to 0}(x^2-\eta\mu^2 x)=0\right)}{\overset{(y=x^2-\eta\mu^2 x)}{=}} \lim\limits_{y\to 0}\frac{e^{y}-1}{y} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

  $= \lim\limits_{y\to 0}\frac{(e^{y}-1)'}{(y)'} = \lim\limits_{y\to 0} e^{y} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\eta\mu x}{x^3} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{(x-\eta\mu x)'}{(x^3)'} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{3x^2} =$

  $\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\sigma\upsilon\nu x)'}{(3x^2)'} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{6x} = \frac{1}{6}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x} = \frac{1}{6}\cdot 1 = \frac{1}{6}$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x} = 1$

Οπότε είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(\eta\mu x)}{x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(e^{\eta\mu^2 x}\cdot\frac{e^{x^2-\eta\mu^2 x}-1}{x^2-\eta\mu^2 x}\cdot\frac{x-\eta\mu x}{x^3}\cdot\left(1+\frac{\eta\mu x}{x}\right)\right)$$

$$=1\cdot 1\cdot \frac{1}{6}\cdot (1+1)=\frac{1}{3}$$

Θέμα Δ

Δ.1 Είναι $f(x)(1-G(x))=1\ :(1)$ και $g(x)(1-F(x))=1\ :(2)$

Από την (1) για $x=0$ έχουμε:

$$f(0)(1-G(0))=1\Rightarrow f(0)(1-0)=1\Rightarrow f(0)=1$$

Από την (2) για $x=0$ έχουμε:

$$g(0)(1-F(0))=1\Rightarrow g(0)(1-0)=1\Rightarrow g(0)=1$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (αφού το σύνολο άφιξης της f είναι το $\mathbb{R}-\{0\}$) , έπεται ότι η f διατηρεί στο $\mathbb{R}$ σταθερό πρόσημο και επειδή είναι $f(0)=1>0$ συμπεραίνουμε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Ομοίως συμπεραίνουμε ότι $g(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ.2 Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$\begin{cases} f(x)(1-G(x))=1\neq 0 \\ g(x)(1-F(x))=1\neq 0 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} 1-G(x)\neq 0 \\ 1-F(x)\neq 0 \\ f(x)=\dfrac{1}{1-G(x)}\ :(\alpha) \\ g(x)=\dfrac{1}{1-F(x)}\ :(\beta) \end{cases}$$

Οι συναρτήσεις F και G είναι παράγουσες των $\frac{1}{f}$ και $\frac{1}{g}$ αντίστοιχα, οπότε είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και ισχύουν $F'(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ και $G'(x)=\dfrac{1}{g(x)}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Έτσι από τις (α) και (β) προκύπτει ότι οι f,g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων η κάθε μία.

Δ.3 Έχουμε:

$$\begin{cases} f(x)(1-G(x))=1\neq 0 \\ g(x)(1-F(x))=1\neq 0 \end{cases} \overset{(f(x)\neq 0)}{\underset{(g(x)\neq 0)}{\Rightarrow}} \begin{cases} 1-G(x)=\dfrac{1}{f(x)} \\ 1-F(x)=\dfrac{1}{g(x)} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1-G(x))'=\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)' \\ (1-F(x))'=\left(\dfrac{1}{g(x)}\right)' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0-G'(x)=-\dfrac{f'(x)}{f^2(x)} \\ 0-F'(x)=-\dfrac{g'(x)}{g^2(x)} \end{cases}$$

$$\overset{\left(F'(x)=\frac{1}{f(x)}\right)}{\underset{\left(G'(x)=\frac{1}{g(x)}\right)}{\Rightarrow}} \begin{cases} \dfrac{1}{g(x)}=\dfrac{f'(x)}{f^2(x)} \\ \dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{g'(x)}{g^2(x)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x)g(x)=f^2(x) \ :(\gamma) \\ g'(x)f(x)=g^2(x) \ :(\delta) \end{cases}$$

Δ.4 Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$\begin{cases} f'(x)g(x)=f^2(x) \ :(\gamma) \\ g'(x)f(x)=g^2(x) \ :(\delta) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(x)g^3(x)=f^2(x)g^2(x) \\ g'(x)f^3(x)=f^2(x)g^2(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x)g^3(x)=g'(x)f^3(x)$$

$$\Rightarrow (f(x))^{-3}f'(x)=(g(x))^{-3}g'(x)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{(f(x))^{-2}}{-2} \right)' = \left(\frac{(g(x))^{-2}}{-2} \right)'$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{f^2(x)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{g^2(x)} + c$$

Για $x=0$ έχουμε, $-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{f^2(0)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{g^2(0)} + c \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1^2} + c \Leftrightarrow c = 0$.

Επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{f^2(x)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{g^2(x)} \Leftrightarrow f^2(x) = g^2(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |f(x)| = |g(x)| \underset{(g(x)>0)}{\overset{(f(x)>0)}{\Leftrightarrow}} f(x) = g(x)$$

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) = g(x)$. Από την (γ) και επειδή είναι $f(x) = g(x)$ έχουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f'(x)f(x) = f^2(x) \overset{(f(x)\neq 0)}{\Leftrightarrow} f'(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = c_1 e^x .$$

Είναι $f(0) = 1 \Leftrightarrow c_1 e^0 = 1 \Leftrightarrow c_1 = 1$.

Άρα $f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$. Επομένως είναι $f(x) = g(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$. (ικανοποιούν την υπόθεση).

Δ.5 Είναι γνωστό ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $\ln x \le x - 1 \; :(\varepsilon)$ με την ισότητα να ισχύει μόνο αν $x = 1$.

Από την (ε) θέτοντας όπου x το e^{x^2} (είναι $e^{x^2} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$) έχουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$\ln\left(e^{x^2}\right) \le e^{x^2} - 1 \Rightarrow x^2 \le e^{x^2} - 1 \Rightarrow e^{x^2} \ge x^2 + 1 \; :(\sigma\tau)$ με την ισότητα να ισχύει μόνο αν $e^{x^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Από την $(\sigma\tau)$ προκύπτει ότι για κάθε $x\in[0,1]$ ισχύει $e^{x^2}-\left(x^2+1\right)\geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο αν $x=0$. Επομένως:

$$\int_0^1\left(e^{x^2}-\left(x^2+1\right)\right)dx>0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int_0^1 e^{x^2}\,dx-\int_0^1\left(x^2+1\right)dx>0$$

$$\Rightarrow\int_0^1 e^{x^2}\,dx-\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_0^1>0$$

$$\Rightarrow\int_0^1 e^{x^2}\,dx-\left(\left(\frac{1}{3}+1\right)-\left(\frac{0^3}{3}+0\right)\right)>0$$

$$\Rightarrow\int_0^1 e^{x^2}\,dx>\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow\int_0^1 f\left(x^2\right)dx>\frac{4}{3}$$

Δ.6 Έστω $M\left(x,f(x)\right)$ σημείο της C_f. Είναι:

$$(AM)=\sqrt{(x-1)^2+\left(f(x)-0\right)^2}=\sqrt{(x-1)^2+e^{2x}}=\varphi(x)\,,\ x\in\mathbb{R}$$

Είναι:

$$\varphi'(x)=\left(\sqrt{(x-1)^2+e^{2x}}\right)'=\frac{\left((x-1)^2+e^{2x}\right)'}{2\sqrt{(x-1)^2+e^{2x}}}=$$

$$=\frac{2x-2+2e^{2x}}{2\sqrt{(x-1)^2+e^{2x}}}=\frac{e^{2x}+x-1}{\sqrt{(x-1)^2+e^{2x}}}=\frac{h(x)}{\sqrt{(x-1)^2+e^{2x}}}\,,$$

όπου $h(x)=e^{2x}+x-1$. Είναι $h'(x)=2e^{2x}+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Έχουμε:

- $x>0 \overset{\left(\substack{h\ \gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha \\ \sigma\tau o\ \mathbb{R}}\right)}{\Rightarrow} h(x)>h(0)=0 \Rightarrow \dfrac{h(x)}{\sqrt{(x-1)^2+e^{2x}}}>0 \Rightarrow \varphi'(x)>0$
- $x<0 \overset{\left(\substack{h\ \gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha \\ \sigma\tau o\ \mathbb{R}}\right)}{\Rightarrow} h(x)<h(0)=0 \Rightarrow \dfrac{h(x)}{\sqrt{(x-1)^2+e^{2x}}}<0 \Rightarrow \varphi'(x)<0$
- $\varphi'(0)=0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$	$-$	0	$+$
$\varphi(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

Από το πρόσημο της $\varphi'(x)$ που φαίνεται στον πίνακα προκύπτει ότι η φ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=0$, το οποίο είναι το $\min\varphi(x)=\varphi(0)=\sqrt{2}$. Επομένως το σημείο της C_f το οποίο απέχει από το $A(1,0)$ τη μικρότερη απόσταση είναι το $M_0(0,1)$.