2-ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
(ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ)

Ενδεικτικές Απαντήσεις

Θέμα Α

Α.1 Θεωρία

Α.2 Θεωρία

Α.3 $(\alpha)\to(\Sigma)$, $(\beta)\to(\Lambda)$, $(\gamma)\to(\Sigma)$, $(\delta)\to(\Sigma)$, $(\varepsilon)\to(\Lambda)$

Θέμα Β

Β.1 Η $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}, x>0$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$f'(x)=\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)'=\left(x^{-\frac{1}{2}}\ln x\right)'=\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)'\ln x+x^{-\frac{1}{2}}(\ln x)'=$$

$$=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\ln x+x^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{x}=-\frac{\ln x}{2x^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}=\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}} \text{ για κάθε } x>0.$$

Έχουμε:

- $$\begin{cases} f'(x)>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-\ln x>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x<2 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

  $$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln x<\ln\left(e^2\right) \\ x>0 \end{cases} \overset{(\ln x \nearrow)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x<e^2 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<x<e^2$$

- $$\begin{cases} f'(x)<0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}<0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-\ln x<0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x>2 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln x > \ln\left(e^2\right) \\ x>0 \end{cases} \overset{(\ln x \nearrow)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x>e^2 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>e^2$$

- $$\begin{cases} f'(x)=0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}=0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-\ln x=0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x=2 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x=e^2$$

x	0		e^2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	$\nearrow$	max	$\searrow$	

Από το πρόσημο της f' που φαίνεται στον πίνακα, προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,e^2\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[e^2,+\infty\right)$. Η f παρουσιάζει στο $x_0=e^2$ ολικό μέγιστο, το $\max f(x)=f\left(e^2\right)=\dfrac{\ln\left(e^2\right)}{\sqrt{e^2}}=\dfrac{2}{e}$.

Επειδή η f έχει ολικό μέγιστο έπεται ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $f(x)\le \max f(x)\Rightarrow \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\le\dfrac{2}{e}\Rightarrow \ln x\le\dfrac{2}{e}\sqrt{x}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=e^2$.

B.2 Είναι $e^2<10<11\Rightarrow f(10)>f(11)$ (αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[e^2,+\infty\right)$), οπότε:

$$f(10)>f(11)\Rightarrow\frac{\ln 10}{\sqrt{10}}>\frac{\ln 11}{\sqrt{11}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sqrt{11}\ln 10>\sqrt{10}\ln 11$$

$$\Rightarrow \ln\left(10^{\sqrt{11}}\right)>\ln\left(11^{\sqrt{10}}\right)$$

$$\overset{(\ln x\nearrow)}{\Rightarrow} 10^{\sqrt{11}}>11^{\sqrt{10}}$$

B.3 Έχουμε:

$$\alpha^{\sqrt{\beta}}\beta^{\sqrt{\alpha}}=e^{\frac{4\sqrt{\alpha\beta}}{e}}\Leftrightarrow \ln\left(\alpha^{\sqrt{\beta}}\beta^{\sqrt{\alpha}}\right)=\ln\left(e^{\frac{4\sqrt{\alpha\beta}}{e}}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\alpha^{\sqrt{\beta}}\right)+\ln\left(\beta^{\sqrt{\alpha}}\right)=\frac{4\sqrt{\alpha\beta}}{e}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\beta}\ln\alpha+\sqrt{\alpha}\ln\beta=\frac{4\sqrt{\alpha\beta}}{e}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{\beta}\ln\alpha+\sqrt{\alpha}\ln\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}=\frac{4}{e}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln\alpha}{\sqrt{\alpha}}+\frac{\ln\beta}{\sqrt{\beta}}=\frac{4}{e}$$

$$\Leftrightarrow f(\alpha)+f(\beta)=\frac{4}{e} \quad :(1)$$

Επειδή η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο μόνο στη θέση $x_0=e^2$, το $\max f(x)=f\left(e^2\right)=\frac{2}{e}$, έχουμε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $f(x)\le\frac{2}{e}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=e^2$. Επομένως ισχύουν:

- $f(\alpha)\le\frac{2}{e}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $\alpha=e^2$.
- $f(\beta)\le\frac{2}{e}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $\beta=e^2$.

Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει ότι $f(\alpha)+f(\beta)\le\frac{4}{e}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο αν $\alpha=e^2$ και $\beta=e^2$. Επομένως για να ισχύει η (1) πρέπει και αρκεί να είναι $\alpha=e^2$ και $\beta=e^2$ που είναι οι ζητούμενες τιμές.

Θέμα Γ

Γ.1 Είναι $e^{f(1)-1}+f(1)=2 \quad :(1)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=e^{x-1}+x, x\in\mathbb{R}$.

Έχουμε $g'(x)=\left(e^{x-1}+x\right)'=\left(e^{x-1}\right)'+\left(x\right)'=e^{x-1}\left(x-1\right)'+1=e^{x-1}+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Επομένως η g είναι $1-1$. Παρατηρούμε ότι $g(1)=e^{1-1}+1=1+1=2$. Έτσι έχουμε:

$$e^{f(1)-1}+f(1)=2\Leftrightarrow g\left(f(1)\right)=g(1)\overset{(g:1-1)}{\Leftrightarrow} f(1)=1$$

Γ.2 Για κάθε $x>0$ έχουμε:

$$f'(x)=\frac{f(x)}{x+f^2(x)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow xf'(x)+f'(x)f^2(x)=f(x)$$

$$\Rightarrow f'(x)f^2(x)=f(x)-xf'(x)$$

$$\overset{(f(x)\neq 0)}{\Rightarrow} f'(x)=\frac{(x)'f(x)-xf'(x)}{f^2(x)}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\left(\frac{x}{f(x)}\right)'$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{x}{f(x)}+c$$

Για $x=1$ έχουμε: $f(1)=\dfrac{1}{f(1)}+c \overset{(f(1)=1)}{\Leftrightarrow} 1=1+c\Leftrightarrow c=0$.

Άρα για κάθε $x>0$ ισχύει $f(x)=\dfrac{x}{f(x)}\Leftrightarrow\left(f(x)\right)^2=x\Leftrightarrow\left|f(x)\right|=\sqrt{x}\ :(2)$.

Η συνάρτηση f , ως παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και επειδή ισχύει $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, έπεται ότι η f διατηρεί στο $(0,+\infty)$ σταθερό πρόσημο.

Είναι $f(1)=1>0$ και επειδή η f διατηρεί στο $(0,+\infty)$ σταθερό πρόσημο, συμπεραίνουμε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x>0$.

Έτσι από την (2) προκύπτει ότι $f(x)=\sqrt{x}$ για κάθε $x>0$ (ικανοποιεί την υπόθεση).

Γ.3 Για κάθε $x>0$ είναι:

$$f\left(x^2+4x+5\right)-\lambda f\left(x^2\right)=$$

$$=\sqrt{x^2+4x+5}-\lambda\sqrt{x^2}$$

$$\overset{(x>0)}{=} \sqrt{x^2+4x+5}-\lambda x=\varphi(x)$$

Για κάθε $x>0$ έχουμε:

$$\varphi(x)=\sqrt{x^2+4x+5}-\lambda x=x\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}-\lambda x=x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}-\lambda\right)$$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}-\lambda\right)=\sqrt{1+0+0}-\lambda=1-\lambda$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $1-\lambda>0 \Leftrightarrow \lambda<1$, τότε
$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}-\lambda\right)\right)\underset{(1-\lambda>0)}{\overset{((+\infty)(1-\lambda))}{=}}+\infty$$
- Αν $1-\lambda<0 \Leftrightarrow \lambda>1$, τότε
$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}-\lambda\right)\right)\underset{(1-\lambda<0)}{\overset{((+\infty)(1-\lambda))}{=}}-\infty$$
- Αν $1-\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=1$, τότε, για $\lambda=1$ και για κάθε $x>0$ είναι:

$$\varphi(x)=\sqrt{x^2+4x+5}-x=\frac{x^2+4x+5-x^2}{\sqrt{x^2+4x+5}+x}\overset{(x>0)}{=}\frac{4x+5}{x\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}+x}=$$

$$=\frac{x\left(4+\frac{5}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}+1\right)}=\frac{4+\frac{5}{x}}{\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}+1},$$

οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4+\frac{5}{x}}{\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}+1}=\dfrac{4+0}{\sqrt{1+0+0}+1}=2$.

Άρα είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f\left(x^2+4x+5\right)-\lambda f\left(x^2\right)\right)=\begin{cases}+\infty, \text{αν } \lambda<1\\ -\infty, \text{αν } \lambda>1\\ 2, \text{αν } \lambda=1\end{cases}$.

Γ.4 Είναι $f(x)=\sqrt{x}, x>0$ και $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}, x>0$. Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο της $M(x_0, f(x_0)), x_0>0$ είναι:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow y-\sqrt{x_0}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0) \Leftrightarrow y=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}x+\frac{\sqrt{x_0}}{2}$$

Για να διέρχεται η ευθεία $(\varepsilon): y=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}x+\dfrac{\sqrt{x_0}}{2}$ από το σημείο $A(3,2)$ πρέπει και αρκεί να ισχύει:

$$2=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}\cdot 3+\frac{\sqrt{x_0}}{2} \Leftrightarrow 4\sqrt{x_0}=3+x_0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x_0}\right)^2-4\sqrt{x_0}+3=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x_0}=1 \\ \text{ή} \\ \sqrt{x_0}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=1 \\ \text{ή} \\ x_0=9 \end{cases}$$

- Για $x_0=1$ η εξίσωση της (ε) γίνεται $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$
- Για $x_0=9$ η εξίσωση της (ε) γίνεται $y=\dfrac{1}{6}x+\dfrac{3}{2}$

Άρα $\varepsilon_1: y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$ και $\varepsilon_2: y=\dfrac{1}{6}x+\dfrac{3}{2}$ είναι οι ζητούμενες ευθείες.

Θέμα Δ

Δ.1 Επειδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ έπεται ότι $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x+h)-f'(x)}{h}=f''(x)$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $h\neq 0$ έχουμε:

$$\frac{f'(x+2h)-f'(x-h)}{h}=\frac{f'(x+2h)-f'(x)-f'(x-h)+f'(x)}{h}=$$

$$=2\frac{f'(x+2h)-f'(x)}{2h}+\frac{f'(x-h)-f'(x)}{-h}$$

Είναι:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+2h)-f'(x)}{2h}\underset{\left(\lim\limits_{h\to 0}(2h)=0\right)}{\overset{(h_1=2h)}{=}}\lim_{h_1\to 0}\frac{f'(x+h_1)-f'(x)}{h_1}=f''(x) \text{ και}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(x-h)-f'(x)}{-h}\underset{\left(\lim\limits_{h\to 0}(-h)=0\right)}{\overset{(h_2=-h)}{=}}\lim_{h_2\to 0}\frac{f'(x+h_2)-f'(x)}{h_2}=f''(x), \text{ οπότε:}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+2h)-f'(x-h)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(2\frac{f'(x+2h)-f'(x)}{2h}+\frac{f'(x-h)-f'(x)}{-h}\right)=$$

$$=2f''(x)+f''(x)=3f''(x)$$

Έτσι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+2h)-f'(x-h)}{h}>2f''(x)\Rightarrow 3f''(x)>2f''(x)\Rightarrow f''(x)>0.$$

Επομένως η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ.2 Είναι $g'(x)=\left(f(x+1)-f(x)\right)'=f'(x+1)(x+1)'-f'(x)=f'(x+1)-f'(x)$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$x+1>x\overset{(f''\nearrow\mathbb{R})}{\Rightarrow}f'(x+1)>f'(x)\Rightarrow f'(x+1)-f'(x)>0\Rightarrow g'(x)>0.$$

Επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ.3 Η $g(x)=f(x+1)-f(x), x\in\mathbb{R}$ ως γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ είναι συνάρτηση $1-1$.

Είναι $f(x\ln x+1)+f(e)=f(e+1)+f(x\ln x) :(E)\ (x>0)$.

Με $x>0$ έχουμε:

$$(E)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x\ln x+1)-f(x\ln x)=f(e+1)-f(e)\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}g(x\ln x)=g(e)\\ x>0\end{cases}\overset{(g\ 1-1)}{\Leftrightarrow}\begin{cases}x\ln x=e\\ x>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\ln x=\dfrac{e}{x}\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\ln x-\dfrac{e}{x}=0\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\varphi(x)=0\\ x>0\end{cases}$$

όπου $\varphi(x)=\ln x-\dfrac{e}{x}, x>0$.

Άρα η εξίσωση (E) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $\varphi(x)=0$.

Είναι $\varphi'(x)=\left(\ln x-\frac{e}{x}\right)'=\frac{1}{x}+\frac{e}{x^2}>0$ για κάθε $x>0$, οπότε η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Επομένως η φ είναι $1-1$.

Παρατηρούμε ότι $\varphi(e)=\ln e-\frac{e}{e}=1-1=0$. Έτσι έχουμε:

$$(E)\Leftrightarrow\begin{cases}\varphi(x)=0\\ x>0\end{cases}\overset{(\varphi(e)=0)}{\Leftrightarrow}\begin{cases}\varphi(x)=\varphi(e)\\ x>0\end{cases}\overset{(\varphi:1-1)}{\Leftrightarrow}x=e$$

Επομένως η εξίσωση (E) έχει ακριβώς μία λύση στο $(0,+\infty)$, τον αριθμό $x_0=e$

Δ.4 Επειδή το $x_0\in\mathbb{R}$ είναι κρίσιμο σημείο της f και η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, έπεται ότι $f'(x_0)=0$.

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

Έχουμε:

- $f'(x_0)=0$
- $x>x_0\overset{(f'\nearrow\mathbb{R})}{\Rightarrow}f'(x)>f'(x_0)=0$
- $x<x_0\overset{(f'\nearrow\mathbb{R})}{\Rightarrow}f'(x)<f'(x_0)=0$

Από το πρόσημο της f' που φαίνεται στον παραπάνω πίνακα, προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,x_0]$, οπότε η f παρουσιάζει στο x_0 ολικό ελάχιστο.

Δ.5 Έχουμε $0<\alpha<\beta$ και $f(1)>f(0)$. Είναι:

$$\frac{f(x+1)-f(\alpha)}{x-\alpha}+\frac{f(\beta+1)-f(x)}{x-\beta}=f(x)\ :(\Sigma)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$H(x)=(x-\beta)\big(f(x+1)-f(\alpha)\big)+(x-\alpha)\big(f(\beta+1)-f(x)\big)-(x-\alpha)(x-\beta)f(x)$$

Η συνάρτηση $H(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (προκύπτει από πράξεις και σύνθεση μεταξύ συνεχών συναρτήσεων), οπότε η $H(x)$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Ακόμη είναι:

- $H(\alpha)=(\alpha-\beta)\big(f(\alpha+1)-f(\alpha)\big)+(\alpha-\alpha)\big(f(\beta+1)-f(\alpha)\big)-(\alpha-\alpha)(\alpha-\beta)f(\alpha)=$
  $=(\alpha-\beta)\big(f(\alpha+1)-f(\alpha)\big)$
- $H(\beta)=(\beta-\beta)\big(f(\beta+1)-f(\alpha)\big)+(\beta-\alpha)\big(f(\beta+1)-f(\beta)\big)-(\beta-\alpha)(\beta-\beta)f(\beta)=$
  $=(\beta-\alpha)\big(f(\beta+1)-f(\beta)\big)$

Είναι:

$$0<\alpha<\beta \overset{(g\nearrow\mathbb{R})}{\Rightarrow} \begin{cases} \alpha-\beta<0 \\ g(\alpha)>g(0) \\ \beta-\alpha>0 \\ g(\beta)>g(0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha-\beta<0 \\ f(\alpha+1)-f(\alpha)>f(1)-f(0) \\ \beta-\alpha>0 \\ f(\beta+1)-f(\beta)>f(1)-f(0) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\underset{(f(1)-f(0)>0)}{\overset{(f(1)>f(0))}{\Rightarrow}} \begin{cases} \alpha-\beta<0 \\ f(\alpha+1)-f(\alpha)>0 \\ \beta-\alpha>0 \\ f(\beta+1)-f(\beta)>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\alpha-\beta)\big(f(\alpha+1)-f(\alpha)\big)<0 \\ (\beta-\alpha)\big(f(\beta+1)-f(\beta)\big)>0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} H(\alpha)<0 \\ H(\beta)>0 \end{cases} \Rightarrow H(\alpha)H(\beta)<0$$

Άρα η $H(x)$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[\alpha,\beta]$, οπότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε:

$$H(\xi)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(\xi-\beta)\big(f(\xi+1)-f(\alpha)\big)+(\xi-\alpha)\big(f(\beta+1)-f(\xi)\big)-(\xi-\alpha)(\xi-\beta)f(\xi)=0$$

$$\Rightarrow(\xi-\beta)\big(f(\xi+1)-f(\alpha)\big)+(\xi-\alpha)\big(f(\beta+1)-f(\xi)\big)=(\xi-\alpha)(\xi-\beta)f(\xi)$$

$$\underset{(\xi\neq\alpha,\beta)}{\overset{(\xi\in(\alpha,\beta))}{\Rightarrow}} \frac{(\xi-\beta)\big(f(\xi+1)-f(\alpha)\big)}{(\xi-\alpha)(\xi-\beta)}+\frac{(\xi-\alpha)\big(f(\beta+1)-f(\xi)\big)}{(\xi-\alpha)(\xi-\beta)}=f(\xi)$$

$$\Rightarrow\frac{f(\xi+1)-f(\alpha)}{\xi-\alpha}+\frac{f(\beta+1)-f(\xi)}{\xi-\beta}=f(\xi)$$

Επομένως η εξίσωση (Σ) έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α,β), τον αριθμό $\xi\in(\alpha,\beta)$.