1-ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
(ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ)

Ενδεικτικές Απαντήσεις

Θέμα Α

Α.1 Θεωρία

Α.2 Θεωρία

Α.3 $(1)\to(\Sigma)$, $(2)\to(\Lambda)$, $(3)\to(\Lambda)$, $(4)\to(\Sigma)$, $(5)\to(\Lambda)$

Θέμα Β

Β.1 θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x, x\in\mathbb{R}$. Η f, ως παραγωγίσιμη , είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων. Έτσι η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Ακόμη είναι $g(\alpha)=f(\alpha)-\alpha=\beta-\alpha>0$ και $g(\beta)=f(\beta)-\beta=\alpha-\beta<0$.

Άρα είναι $g(\alpha)g(\beta)<0$, οπότε η g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[\alpha,\beta]$. Επομένως υπάρχει $x_1\in(\alpha,\beta)$ ώστε $g(x_1)=0 \Leftrightarrow f(x_1)-x_1=0 \Leftrightarrow \boxed{f(x_1)=x_1}$.

Β.2 Επειδή η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, έπεται ότι ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο $[x_1,\gamma]$, οπότε υπάρχει $x_2\in(x_1,\gamma)\subseteq(\alpha,\gamma)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(x_2)=\frac{f(\gamma)-f(x_1)}{\gamma-x_1}=\frac{\gamma-x_1}{\gamma-x_1}=1.$$

Άρα υπάρχει $x_2\in(\alpha,\gamma)$, ώστε $f'(x_2)=1$.

Β.3 Επειδή η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, έπεται ότι ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha,x_1]$ και $[x_1,\beta]$, οπότε υπάρχουν $\xi_1\in(\alpha,x_1)$ και $\xi_2\in(x_1,\beta)$, ώστε:

- $f'(\xi_1)=\dfrac{f(x_1)-f(\alpha)}{x_1-\alpha}=\dfrac{x_1-\beta}{x_1-\alpha}$ και
- $f'(\xi_2)=\dfrac{f(\beta)-f(x_1)}{\beta-x_1}=\dfrac{\alpha-x_1}{\beta-x_1}=\dfrac{x_1-\alpha}{x_1-\beta}$

Είναι $f'(\xi_1)f'(\xi_2)=\dfrac{x_1-\beta}{x_1-\alpha}\cdot\dfrac{x_1-\alpha}{x_1-\beta}=1$.

Άρα υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2)=1$.

B.4 Επειδή η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, έπεται ότι ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha,\beta]$ και $[\beta,\gamma]$, οπότε υπάρχουν $\rho_1\in(\alpha,\beta)$ και $\rho_2\in(\beta,\gamma)$ ώστε:

- $f'(\rho_1)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\dfrac{\alpha-\beta}{\beta-\alpha}=-1<0$ και
- $f'(\rho_2)=\dfrac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta}=\dfrac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}>0$ (αφού $\gamma>\beta>\alpha\Rightarrow\begin{cases}\gamma-\alpha>0\\ \gamma-\beta>0\end{cases}\Rightarrow\dfrac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}>0$)

Η f' ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$. Ακόμη είναι $f'(\rho_1)=-1<0$ και $f'(\rho_2)=\dfrac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}>0$, οπότε $f'(\rho_1)f'(\rho_2)<0$.

Άρα η f' ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[\rho_1,\rho_2]$, οπότε υπάρχει $x_0\in(\rho_1,\rho_2)\subseteq(\alpha,\gamma)$, ώστε $f'(x_0)=0$. Δηλαδή υπάρχει $x_0\in(\alpha,\gamma)$, ώστε $\boxed{f'(x_0)=0}$.

Επειδή είναι $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, έπεται ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

- $x>x_0 \overset{(f'\nearrow)}{\Rightarrow} f'(x)>f'(x_0)\Rightarrow f'(x)>0$
- $x<x_0 \overset{(f'\nearrow)}{\Rightarrow} f'(x)<f'(x_0)\Rightarrow f'(x)<0$

Από το πρόσημο της $f'(x)$ που φαίνεται στον πίνακα, προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, x_0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[x_0, +\infty)$, οπότε η f παρουσιάζει στο x_0 ολικό ελάχιστο.

Θέμα Γ

Είναι $f'\left(\dfrac{f'(x)}{2}\right) = 2x \ :(1)$.

Γ.1 Επειδή η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, έπεται ότι ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο διάστημα $[0,1]$, οπότε υπάρχει $\xi \in (0,1)$, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(1)-f(0)}{1-0} = \dfrac{1-0}{1} = 1$.

Επειδή η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, έπεται ότι η f' ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο διάστημα $[\xi, 2]$, οπότε υπάρχει $x_0 \in (\xi, 2)$, ώστε:

$$f''(x_0) = \frac{f'(2)-f'(\xi)}{2-\xi} = \frac{f'(2)-1}{2-\xi} > 0, \text{ αφού}$$

$$\begin{cases} f'(2) > 1 \\ \xi < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(2)-1 > 0 \\ 2-\xi > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{f'(2)-1}{2-\xi} > 0.$$

Άρα υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $f''(x_0) > 0$.

Γ.2 Από την (1) παραγωγίζοντας τα μέλη της ως προς x έχουμε:

$$\left(f'\left(\frac{f'(x)}{2}\right)\right)' = (2x)' \Rightarrow f''\left(\frac{f'(x)}{2}\right)\frac{f''(x)}{x} = 2 \neq 0 \Rightarrow f''(x) \neq 0$$

Η f'' ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ είναι και συνεχής στο $\mathbb{R}$ και επειδή ισχύει $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έπεται ότι η f'' διατηρεί στο $\mathbb{R}$ σταθερό πρόσημο και επειδή είναι $f''(x_0) > 0$, συμπεραίνουμε ότι ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Γ.3

α. Είναι $g'(x)=\left(f'(x)+2x\right)'=\left(f'(x)\right)'+\left(2x\right)'=f''(x)+2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (αφού $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $2>0$). Επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β. Η g, ως γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$, είναι συνάρτηση $1-1$.

Είναι:

$$g\left(\frac{f'(x)}{2}\right)=f'\left(\frac{f'(x)}{2}\right)+2\frac{f'(x)}{2}=$$

$$\overset{(1)}{=}2x+f'(x)=f'(x)+2x=g(x)$$

Έτσι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $g\left(\frac{f'(x)}{2}\right)=g(x)$ και επειδή η g είναι συνάρτηση $1-1$ προκύπτει ότι $\frac{f'(x)}{2}=x\Leftrightarrow\boxed{f'(x)=2x}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$f'(x)=2x\Leftrightarrow\left(f(x)\right)'=\left(x^2\right)'\Leftrightarrow f(x)=x^2+c,\text{ όπου } c\in\mathbb{R}\text{ σταθερά.}$$

Έχουμε $f(0)=0\Leftrightarrow 0^2+c=0\Leftrightarrow c=0$. Άρα $f(x)=x^2$, $x\in\mathbb{R}$ (ικανοποιεί την υπόθεση).

γ. Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο της $M\left(x_0,f(x_0)\right)$ είναι:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).$$

Όμως είναι $f(x)=x^2$, $f(x_0)={x_0}^2$, $f'(x)=2x$, $f'(x_0)=2x_0$. οπότε:

$$(\varepsilon):y-{x_0}^2=2x_0(x-x_0)\Leftrightarrow(\varepsilon):y=(2x_0)\cdot x-{x_0}^2$$

Για να διέρχεται η ευθεία (ε) από το σημείο $A(0,-1)$ πρέπει και αρκεί να ισχύει:

$$-1=(2x_0)\cdot 0-x_0{}^2 \Leftrightarrow x_0{}^2=1 \Leftrightarrow x_0=\pm 1$$

- Για $x_0=1$ η εξίσωση της (ε) γίνεται: $y=2x-1$.
- Για $x_0=-1$ η εξίσωση της (ε) γίνεται: $y=-2x-1$.

Άρα $(\varepsilon_1): y=2x-1$ και $(\varepsilon_2): y=-2x-1$ είναι οι ζητούμενες ευθείες.

Θέμα Δ

Είναι $f(x)f''(x)-(f'(x))^2=2e^x \quad :(1)$.

Δ.1

α. Έστω ότι υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$, ώστε $f(x_0)=0$, τότε από την (1) για $x=x_0$ έχουμε:

$$f(x_0)f''(x_0)-(f'(x_0))^2=2e^{x_0} \Rightarrow$$

$$\overset{(f(x_0)=0)}{\Rightarrow} 0\cdot f''(x_0)-(f'(x_0))^2=2e^{x_0}$$

$$\Rightarrow 2e^{x_0}+(f'(x_0))^2=0,$$

το οποίο είναι άτοπο, αφού $\begin{cases} 2e^{x_0}>0 \\ (f'(x_0))^2\geq 0 \end{cases} \Rightarrow 2e^{x_0}+(f'(x_0))^2>0$.

Επομένως είναι $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (ως παραγωγίσιμη) έπεται ότι η f διατηρεί στο $\mathbb{R}$ σταθερό πρόσημο. Είναι $f(0)=3>0$ και επειδή η f διατηρεί στο $\mathbb{R}$ σταθερό πρόσημο, συμπεραίνουμε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x)f''(x)-(f'(x))^2=2e^x \Rightarrow f''(x)=\frac{2e^x+(f'(x))^2}{f(x)}>0$$

αφού είναι $2e^x+(f'(x))^2>0$ και $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επομένως η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

γ. Είναι $g(x)=\ln(f(x))$, $x\in\mathbb{R}$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$g'(x)=\left(\ln(f(x))\right)'=\frac{f'(x)}{f(x)},\ x\in\mathbb{R}$$

Η g' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$g''(x)=\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)'=\frac{f''(x)f(x)-(f'(x))^2}{(f(x))^2}\overset{(1)}{=}\frac{2e^x}{(f(x))^2}>0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R},$$

αφού $2e^x>0$ και $(f(x))^2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επομένως η g είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Δ.2 Είναι $g(0)=\ln(f(0))=\ln 3$ και $g'(0)=\dfrac{f'(0)}{f(0)}=\dfrac{1}{3}$, οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο σημείο της $M(0,g(0))$ είναι:

$$y-g(0)=g'(0)(x-0)\Leftrightarrow y-\ln 3=\frac{1}{3}x\Leftrightarrow y=\frac{1}{3}x+\ln 3$$

Άρα $(\varepsilon): y=\frac{1}{3}x+\ln 3$.

Επειδή η g είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, έπεται ότι η C_g βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της ευθεία $(\varepsilon): y=\frac{1}{3}x+\ln 3$ σ'όλο το $\mathbb{R}$ με εξαίρεση το κοινό σημείο επαφής τους $M(0,g(0))$.

Επομένως για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$g(x)\geq\frac{1}{3}x+\ln 3\Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \ln(f(x)) \geq \frac{1}{3}x + \ln 3$$

$$\Rightarrow \ln(f(x)) \geq \ln\left(e^{\frac{1}{3}x+\ln 3}\right)$$

$$\overset{(\ln x \nearrow)}{\Rightarrow} f(x) \geq e^{\frac{1}{3}x+\ln 3} = e^{\frac{x}{3}}e^{\ln 3} = 3e^{\frac{x}{3}}$$

Άρα ισχύει $f(x) \geq 3e^{\frac{x}{3}} \quad :(2)$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$.

Δ.3 Από το (Δ2) έχουμε ότι ισχύει $f(x) \geq 3e^{\frac{x}{3}} \quad :(2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε έχουμε:

$$\begin{cases} f(\alpha) \geq 3e^{\frac{\alpha}{3}} > 0 \\ f(\beta) \geq 3e^{\frac{\beta}{3}} > 0 \\ f(\gamma) \geq 3e^{\frac{\gamma}{3}} > 0 \end{cases} \Rightarrow f(\alpha)f(\beta)f(\gamma) \geq 27e^{\frac{\alpha}{3}+\frac{\beta}{3}+\frac{\gamma}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\alpha)f(\beta)f(\gamma) \geq 27e^{\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}} = 27e^{\frac{0}{3}} = 27 \cdot 1 = 27$$

$$\Rightarrow f(\alpha)f(\beta)f(\gamma) \geq 27$$

Δ.4 Από το (Δ2) έχουμε ότι ισχύει $f(x) \geq 3e^{\frac{x}{3}}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$.

Έτσι έχουμε:

- $f(3\alpha - 3) \geq 3e^{\frac{3\alpha-3}{3}} = 3e^{\alpha-1} \quad :(3)$, με την ισότητα να ισχύει μόνο αν $3\alpha - 3 = 0$.
- $f(3\beta + 3) \geq 3e^{\frac{3\beta+3}{3}} = 3e^{\beta+1} \quad :(4)$, με την ισότητα να ισχύει μόνο αν $3\beta + 3 = 0$.

Από τις (3) και (4) προκύπτει ότι:

$$f(3\alpha - 3)f(3\beta + 3) \geq 3e^{\alpha-1} \cdot 3e^{\beta+1} = 9e^{\alpha+\beta}$$

Δηλαδή $f\left(3\alpha-3\right)f\left(3\beta+3\right)\geq 9e^{\alpha+\beta}$, με την ισότητα να ισχύει μόνο αν:

$\left(3\alpha-3=0 \text{ και } 3\beta+3=0\right)\Leftrightarrow\left(\alpha=1 \text{ και } \beta=-1\right)$

Επομένως για να ισχύει $f\left(3\alpha-3\right)f\left(3\beta+3\right)=9e^{\alpha+\beta}$ πρέπει και αρκεί να είναι $\alpha=1$ και $\beta=-1$.