ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΛΥΣΕΙΣ
(ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ–ΟΡΙΑ-ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

Ενδεικτικές Απαντήσεις

Θέμα Α

Α.1 Θεωρία

Α.2 Θεωρία

Α.3 $(1)\to(\Lambda)$, $(2)\to(\Sigma)$, $(3)\to(\Sigma)$, $(4)\to(\Lambda)$

Θέμα Β

Β.1 Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$f^2(x)=2\lambda x f(x)+\left(4-\lambda^2\right)x^2+x+1$$

$$\Leftrightarrow f^2(x)-2\lambda x f(x)+(\lambda x)^2=4x^2+x+1$$

$$\Leftrightarrow \left(f(x)-\lambda x\right)^2=4x^2+x+1$$

$$\Leftrightarrow g^2(x)=4x^2+x+1 : (1),\text{ όπου } g(x)=f(x)-\lambda x,\ x\in\mathbb{R}.$$

Είναι $4x^2+x+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (αφού το τριώνυμο $\varphi(x)=4x^2+x+1$ έχει αρνητική διακρίνουσα $\Delta=1-16=-15<0$ και ο συντελεστής του x^2 είναι $\alpha=4>0$).

Έτσι από την (1) έχουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$|g(x)|=\sqrt{4x^2+x+1} \ :(2).$$

Από την (2) έχουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$|g(x)|=\sqrt{4x^2+x+1}>0\Rightarrow g(x)\neq 0.$$

Η συνάρτηση $g(x)=f(x)-\lambda x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $g(x)\neq 0$, οπότε η $g(x)$ διατηρεί στο $\mathbb{R}$ σταθερό πρόσημο και επειδή είναι $g(0)=f(0)-\lambda\cdot 0=f(0)>0$ συμπεραίνουμε ότι είναι $g(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Έτσι από την (2) έχουμε:

$$g(x)=\sqrt{4x^2+x+1}$$

$$\Leftrightarrow f(x)-\lambda x=\sqrt{4x^2+x+1}$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\lambda x+\sqrt{4x^2+x+1}$$

B.2 Για κάθε $x>0$ έχουμε, $f(x)=\lambda x+x\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=x\left(\lambda+\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\lambda+\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=\lambda+2$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $\lambda+2>0\Leftrightarrow\lambda>-2$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$
- Αν $\lambda+2<0\Leftrightarrow\lambda<-2$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$
- Αν $\lambda+2=0\Leftrightarrow\lambda=-2$, τότε,

  για $\lambda=-2$ και για κάθε $x>0$ έχουμε:

$$f(x)=\sqrt{4x^2+x+1}-2x=\frac{\left(4x^2+x+1\right)-4x^2}{\sqrt{4x^2+x+1}+2x}$$

$$\overset{(x>0)}{=}\frac{x+1}{x\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+2x}=\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+2\right)}=$$

$$=\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+2}$$

Οπότε είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+2}=\frac{1+0}{\sqrt{4+0+0}+2}=\frac{1}{4}$.

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\begin{cases}+\infty\ ,\ \text{αν}\ \lambda>-2\\ -\infty\ ,\ \text{αν}\ \lambda<-2\\ \frac{1}{4}\ ,\ \text{αν}\ \lambda=-2\end{cases}$.

B.3 Για $\lambda>-2$ είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Για το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{f^2(x)+4f(x)+5}-f(x)\right)$ θέτουμε $w=f(x)$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, οπότε όταν $x\to+\infty$ έχουμε $w\to+\infty$.

Άρα:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{f^2(x)+4f(x)+5}-f(x)\right)=$$

$$\overset{(w=f(x))}{=}\lim_{w\to+\infty}\left(\sqrt{w^2+4w+5}-w\right)$$

$$=\lim_{w\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{w^2+4w+5}-w\right)\left(\sqrt{w^2+4w+5}+w\right)}{\sqrt{w^2+4w+5}+w}$$

$$=\lim_{w\to+\infty}\frac{w^2+4w+5-w^2}{\sqrt{w^2+4w+5}+w}$$

$$\overset{(w>0)}{=}\lim_{w\to+\infty}\frac{4w+5}{w\sqrt{1+\frac{4}{w}+\frac{5}{w^2}}+w}$$

$$= \lim_{w\to+\infty} \frac{w\left(4+\frac{5}{w}\right)}{w\left(\sqrt{1+\frac{4}{w}+\frac{5}{w^2}}+1\right)}$$

$$= \lim_{w\to+\infty} \frac{4+\frac{5}{w}}{\sqrt{1+\frac{4}{w}+\frac{5}{w^2}}+1} = \frac{4+0}{\sqrt{1+0+0}+1} = 2$$

Θέμα Γ

Γ.1 Έχουμε $f(x)-f(y)<x-y+|x-y| \;:(1)\;\; (x,y\in\mathbb{R})$.

Από την (1) με εναλλαγή των γραμμάτων x και y έχουμε ότι για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(y)-f(x)<y-x+|y-x|$$

$$\Rightarrow -\left(f(x)-f(y)\right)<-\left(x-y-\left|-(x-y)\right|\right)$$

$$\Rightarrow f(x)-f(y)>x-y-|x-y| \quad :(2)$$

Από τις (1) και (2) έχουμε ότι για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ με $x\neq y$ ισχύει:

$$x-y-|x-y|<f(x)-f(y)<x-y+|x-y|$$

$$\Rightarrow -|x-y|<f(x)-f(y)-x+y<|x-y|$$

$$\Rightarrow |f(x)-f(y)-x+y|<|x-y| \quad :(3).$$

Γ.2 Έστω $x_0\in\mathbb{R}$. Λόγω της (3) έχουμε ότι για κάθε $x\neq x_0$ ισχύει:

$$|f(x)-f(x_0)-x+x_0|<|x-x_0|$$

$$\Rightarrow -|x-x_0|<f(x)-f(x_0)-x+x_0<|x-x_0|$$

$$\Rightarrow x-x_0-|x-x_0|+f(x_0)<f(x)<x-x_0+|x-x_0|+f(x_0)\ :(4).$$

Είναι $\lim\limits_{x\to x_0}\left(x-x_0-|x-x_0|+f(x_0)\right)=f(x_0)$ και

$\lim\limits_{x\to x_0}\left(x-x_0+|x-x_0|+f(x_0)\right)=f(x_0)$, οπότε λόγω της (4) και του κριτηρίου παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

Επομένως για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$ ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, οπότε η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Γ.3 Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$. Λόγω της (3) έχουμε ότι ισχύει:

$$|f(x_1)-f(x_2)-x_1+x_2|<|x_1-x_2|\overset{(x_1-x_2<0)}{=}x_2-x_1$$

$$\Rightarrow -x_2+x_1<f(x_1)-f(x_2)-x_1+x_2<x_2-x_1$$

$$\Rightarrow\begin{cases}f(x_1)-f(x_2)-x_1+x_2>-x_2+x_1\\ f(x_1)-f(x_2)-x_1+x_2<x_2-x_1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}f(x_1)-2x_1>f(x_2)-2x_2\\ f(x_1)<f(x_2)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}g(x_1)>g(x_2)\\ f(x_1)<f(x_2)\end{cases}$$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Γ.4 Η $g(x)=f(x)-2x$, ως γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ είναι $1-1$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$f(3f(x))+2x=7f(x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(3f(x))-2(3f(x))=f(x)-2x$$

$$\Leftrightarrow g\left(3f(x)\right)=g(x)$$

$$\overset{(g:1-1)}{\Leftrightarrow} 3f(x)=x$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\frac{x}{3} \text{ (ικανοποιεί την υπόθεση)}$$

Άρα είναι $f(x)=\frac{x}{3}$, $x\in\mathbb{R}$

Θέμα Δ

Δ.1

α. Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=3\ :(1)$ και $2f(0)+f(1)=2f(3)+f(4)\ \ :(2)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\frac{2f(0)+f(1)}{3}$. Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Ακόμη είναι $g(0)=f(0)-\frac{2f(0)+f(1)}{3}=\frac{1}{3}\left(f(0)-f(1)\right)$ και

$$g(1)=f(1)-\frac{2f(0)+f(1)}{3}=\frac{2\left(f(1)-f(0)\right)}{3}=-\frac{2}{3}\left(f(0)-f(1)\right)$$

οπότε $g(0)g(1)=-\frac{2}{9}\left(f(0)-f(1)\right)^2\le 0$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $g(0)g(1)=0$, τότε θα είναι $g(0)=0$ ή $g(1)=0$.
- Αν $g(0)g(1)<0$, τότε η g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[0,1]$, οπότε υπάρχει $\xi\in(0,1)$ ώστε $g(\xi)=0$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι υπάρχει $x_1\in[0,1]$ (είναι $x_1=0$ ή $x_1=1$ ή $x_1=\xi\in(0,1)$) ώστε:

$$g(x_1)=0\Rightarrow f(x_1)-\frac{2f(0)+f(1)}{3}=0\Rightarrow f(x_1)=\frac{2f(0)+f(1)}{3}.$$

β. Από το $1^{ο}$ ερώτημα έχουμε ότι υπάρχει $x_1 \in [0,1]$ με $f(x_1) = \frac{2f(0)+f(1)}{3}$.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι υπάρχει $x_2 \in [3,4]$ ώστε $f(x_2) = \frac{2f(3)+f(4)}{3}$.

Από την (2) έχουμε:

$$2f(0)+f(1) = 2f(3)+f(4)$$

$$\Rightarrow \frac{2f(0)+f(1)}{3} = \frac{2f(3)+f(4)}{3}$$

$$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

Επειδή $x_1 \in [0,1]$ και $x_2 \in [3,4]$ είναι $x_1 \neq x_2$. Έτσι υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2$ και $f(x_1) = f(x_2)$, οπότε η f δεν είναι $1-1$.

γ. Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει $x_0 \in [0,2]$ με $f(x_0) = \frac{1}{2}\left(f(x_0+1)+f(x_0+2)\right)$.

Τότε για κάθε $x \in [0,2]$ ισχύει:

$$f(x) \neq \frac{1}{2}\left(f(x+1)+f(x+2)\right) \Rightarrow 2f(x)-f(x+1)-f(x+2) \neq 0 \Rightarrow h(x) \neq 0,$$

όπου $h(x) = 2f(x)-f(x+1)-f(x+2)$, $x \in \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα συνεχών, στο $\mathbb{R}$, συναρτήσεων (οι συναρτήσεις $\varphi_1(x) = f(x+1)$ και $\varphi_2(x) = f(x+2)$ είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων η καθεμία).

Άρα η h είναι συνεχής στο $[0,2]$ και επειδή ισχύει $h(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [0,2]$, έπεται ότι η h διατηρεί στο $[0,2]$ σταθερό πρόσημο. Δηλαδή είναι $h(x) > 0$ για κάθε $x \in [0,2]$ ή $h(x) < 0$ για κάθε $x \in [0,2]$.

Έστω ότι είναι $h(x) > 0$ για κάθε $x \in [0,2]$. Τότε για κάθε $x \in [0,2]$ ισχύει:

$$h(x)>0 \Rightarrow 2f(x)-f(x+1)-f(x+2)>0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2f(x)>f(x+1)+f(x+2) \quad :(\alpha)$$

Λόγω της (α) έχουμε ότι ισχύουν:

- $2f(0)>f(1)+f(2)$, (για $x=0$)
- $2f(1)>f(2)+f(3)$, (για $x=1$)
- $2f(2)>f(3)+f(4)$, (για $x=2$)

Με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε:

$2f(0)+2f(1)+2f(2)>f(1)+2f(2)+2f(3)+f(4)$
$\Rightarrow 2f(0)+f(1)>2f(3)+f(4)$, άτοπο, αφού δόθηκε ότι ισχύει
$2f(0)+f(1)=2f(3)+f(4)$.

Ομοίως σε άτοπο καταλήγουμε και στην περίπτωση $h(x)<0$ για κάθε $x\in[0,2]$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι υπάρχει $x_0\in[0,2]$ ώστε
$f(x_0)=\frac{1}{2}\left(f(x_0+1)+f(x_0+2)\right)$.

Δ.2

α. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(2x)-2f(x)=\left[f(2x)-2(2x)\right]-2\left(f(x)-2x\right).$$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=3$ και

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(2x)-2(2x)\right)\underset{\left(\lim\limits_{x\to+\infty}(2x)=+\infty\right)}{\overset{(w=2x)}{=}}\lim_{w\to+\infty}\left(f(w)-2w\right)=3.$$

Οπότε έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(2x)-2f(x)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(f(2x)-2(2x)\right)-2\left(f(x)-2x\right)\right]=3-2\cdot3=-3.$$

Άρα $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(2x)-2f(x)\right)=-3}$.

β. Για κάθε $x>0$ είναι $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{f(x)-2x+2x}{x}=\left(f(x)-2x\right)\dfrac{1}{x}+2$. οπότε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(f(x)-2x\right)\frac{1}{x}+2\right]=3\cdot 0+2=2.$$

Άρα $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2}$.

γ. Είναι

$$\frac{f^2(x)}{x}-4x=\frac{f^2(x)-4x^2}{x}=\frac{\left(f(x)-2x\right)\left(f(x)+2x\right)}{x}=\left(f(x)-2x\right)\left(\frac{f(x)}{x}+2\right).$$

Οπότε, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f^2(x)}{x}-4x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(f(x)-2x\right)\left(\dfrac{f(x)}{x}+2\right)\right]=3\cdot(2+2)=12$.

Άρα $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f^2(x)}{x}-4x\right)=12}$.