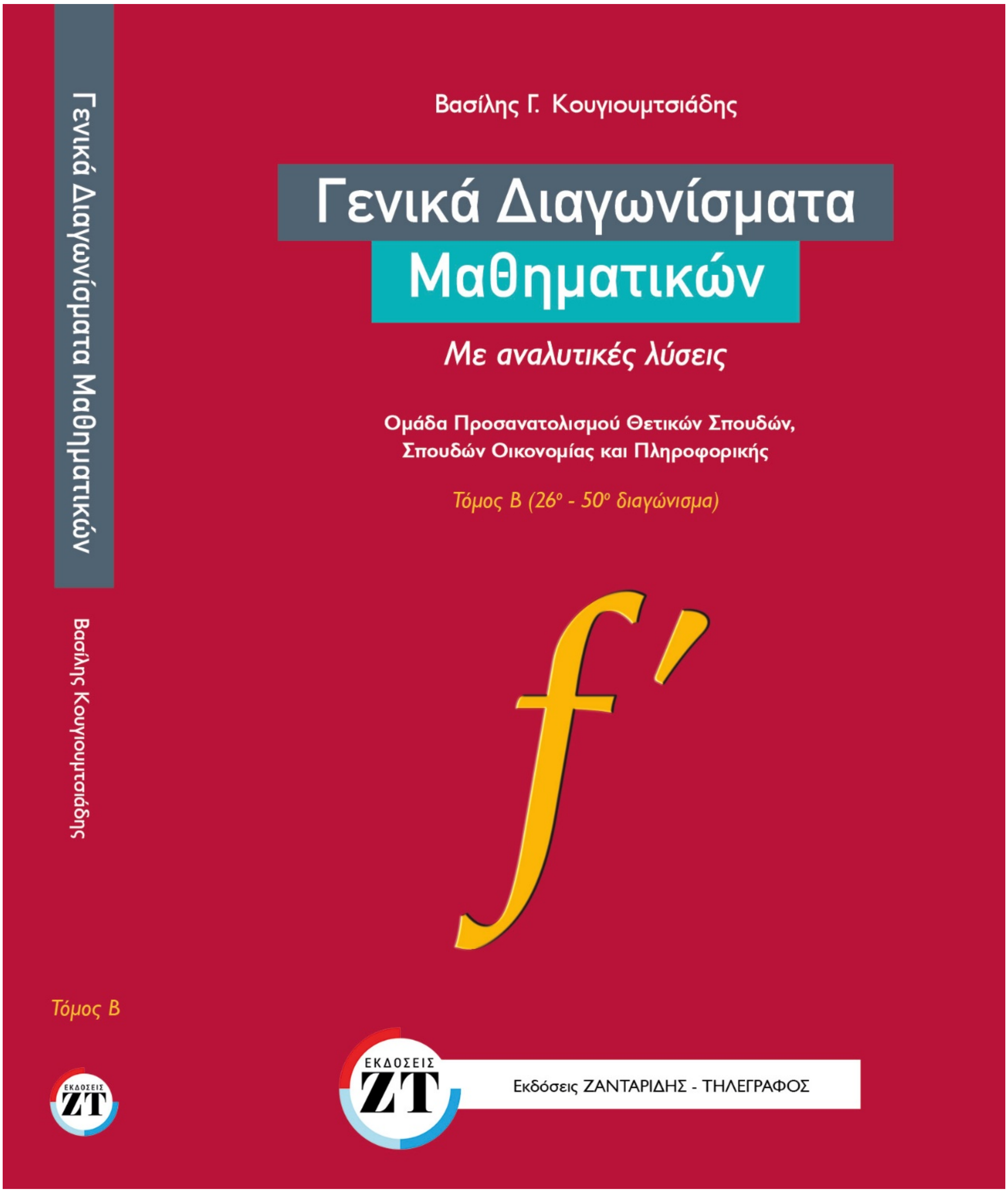


ΔΕΙΓΜΑ Β ΤΟΜΟΥ 25 Νέα Διαγωνίσματα

- **Ολοκληρωμένη Σειρά**
- **Προσαρμοσμένα στη φετινή ύλη**
- **Με συνδυαστικά ερωτήματα με ασκήσεις του σχολικού βιβλίου**
- **Για ολοκληρωμένη μελέτη και σίγουρη επιτυχία!**

$43^{\text{Ο}}$ - $47^{\text{Ο}}$ - $49^{\text{Ο}}$ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΑ

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Αν $|f(x)| \leq M$, για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ και δεν υπάρχει το όριο της f καθώς το $x \to x_0$, ενώ υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$, τότε αναγκαστικά υπάρχει το όριο του γινομένου $f \cdot g$ και μάλιστα ισχύει ότι: $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) \cdot g(x)\right) = 0$».

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα Ψ, αν είναι **ψευδής**. (μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (μονάδες 4)

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Β

Β1. Δίνονται οι συναρτήσεις: $\varphi(x) = \ell nx$, $x > 0$ και $g(x) = \sqrt{x^3}$.

α) Να δείξετε ότι η φ είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την φ^{-1}.

Μονάδες 4

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $h(x) = \varphi^{-1}(x) - \varphi(x)$, (μονάδες 3) και στη συνέχεια να εξετάσετε αν ορίζεται η σύνθεση της h με την g και εφόσον ορίζεται να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $g \circ h$. (μονάδες 5).

γ) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $G = g \circ h$, στο διάστημα στο οποίο είναι παραγωγίσιμη (μονάδες 5).

Μονάδες 13

Β2. Αν για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει ότι $\left(e^{x \cdot \ell n2} + 1\right) \cdot f(x) \geq \varphi^{-1}(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ (μονάδες 3)

ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{20f^2(x)+7f(x)+13}{4f^2(x)+5f(x)+4}$ (μονάδες 2)

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f^3(x)-3f^2(x)+1}{3f(x)+2f^4(x)-5}$ (μονάδες 2)

iv) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{f^2(x)-2f(x)+3}+f(x)\right)$ (μονάδες 2)

v) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{f^2(x)-2f(x)+3}-f(x)\right)$ (μονάδες 3)

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύουν ότι:

- $f(x)=f''(x)+x-2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)+1+\ell n(x+1)}{x}=3$.

Γ1. Να δείξετε ότι $f(0)=-1$ και $f'(0)=2$.

Μονάδες 4

Γ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $G(x)=\dfrac{f(x)+f'(x)-x+1}{e^x}$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$ και στη συνέχεια να βρείτε την f.

Μονάδες 6

Αν $f(x)=e^x+x-2$, $x\in\mathbb{R}$.

Γ3. **α)** Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται. (μονάδες 2)

β) Να προσδιορίσετε συνάρτηση g τέτοια ώστε: $\left(f^{-1}\circ g\right)(x)=\ell nx$, για κάθε $x>0$ (μονάδες 2) και στη συνέχεια:

γ) Να λύσετε την ανίσωση $(f\circ g)(x)<f(2x-3)$, $x>0$. (μονάδες 2)

δ) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{f^{-1}\left((f\circ g)(x)\right)-\left(f^{-1}\circ f\right)(2x-3)}$. (μονάδες 3)

Μονάδες 9

Γ4. **α)** Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in\mathbb{R}$: $e^{x_0}+x_0=2$. (μονάδες 3)

β) **i)** Αν $K(0,1)$ να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(x,y)$ με $x,y\in\mathbb{R}$, του επιπέδου για τους οποίους ισχύει $f\left(\left|\overrightarrow{MK}\right|+\frac{1}{2}\right)=e-1$.
(μονάδες 2)

ii) Αν M_1, M_2 δύο από τα παραπάνω σημεία, να βρείτε το όριο:
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\left|\overrightarrow{OM}_1-\overrightarrow{OM}_2\right|-\sqrt{2}\right)\left(f(x)+f(-x)\right)\right]$. (μονάδες 2)

Μονάδες 4

Γ5. **(Εναλλακτικό)**
Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την $C_{f^{-1}}$, τον $x'x$ και τις ευθείες $x=-1$ και $x=e-1$.

Μονάδες 5

Απαντήσεις

Α3. **α)** **Αληθής.**

β) **Αιτιολόγηση (Απόδειξη)**

Ισχύει η ισοδυναμία: $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}|g(x)|=0$ και προφανώς ισχύει $|g(x)|\ge 0$, κοντά στο x_0, οπότε αφού ισχύει επίσης ότι: $|f(x)|\le M$, για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, άρα κοντά στο x_0 θα ισχύει επίσης ότι:

$$\left.\begin{array}{l}|f(x)|\le M\\ |g(x)|\ge 0\end{array}\right\}\Rightarrow |f(x)|\cdot|g(x)|\le M\cdot|g(x)|\Rightarrow |f(x)\cdot g(x)|\le M\cdot|g(x)|,$$

άρα κοντά στο x_0 ισχύει ότι:

$$\left.\begin{array}{l}-M\cdot|g(x)|\le f(x)\cdot g(x)\le M\cdot|g(x)|\\ \lim\limits_{x\to x_0}\left(-M\cdot|g(x)|\right)=-M\cdot 0=0\\ \lim\limits_{x\to x_0}\left(M\cdot|g(x)|\right)=M\cdot 0=0\end{array}\right\}\overset{\kappa.\pi.}{\Rightarrow}\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=0.$$

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για τις συναρτήσεις:
$\varphi(x)=\ell nx$, $x>0$ και $g(x)=\sqrt{x^3}$ και $x\in[0,+\infty)$,

αφού $x^3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$ για κάθε $x \in [0,+\infty)$.

α) $\varphi(x) = \ell nx$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και $\varphi'(x) = (\ell nx)' = \frac{1}{x} > 0$, για κάθε $x > 0$ άρα η $\varphi(x) = \ell nx$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ και έχει σύνολο τιμών

$$\varphi(\Delta) = \left(\lim_{x\to 0^+} \varphi(x), \lim_{x\to+\infty} \varphi(x)\right) = \left(\lim_{x\to 0^+} \ell nx, \lim_{x\to+\infty} \ell nx\right) = (-\infty,+\infty)$$

άρα η $\varphi : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ είναι αντιστρέψιμη δηλαδή ορίζεται η $\varphi^{-1} : \mathbb{R} \to (0,+\infty) \subseteq \mathbb{R}$ και προφανώς ισχύει $y = \varphi(x) \Leftrightarrow x = \varphi^{-1}(y)$.

Επομένως $y = \ell nx \Leftrightarrow x = e^y, y \in \mathbb{R}$ έτσι $x = \varphi^{-1}(y) = e^y, y \in \mathbb{R}$

ή $\varphi^{-1}(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$.

β) Η συνάρτηση $h(x) = \varphi^{-1}(x) - \varphi(x)$, ορίζεται ως διαφορά στο σύνολο $D = D_\varphi \cap D_{\varphi^{-1}} = (0,+\infty)$ και έχει τύπο $h(x) = \varphi^{-1}(x) - \varphi(x) = e^x - \ell nx$, $x > 0$.

Η σύνθεση της h με την g ορίζεται στο

$$D_1 = D_{g\circ h} = \{x \in D_h \,/\, h(x) \in D_g\} =$$
$$= \{x \in (0,+\infty) \,/\, e^x - \ell nx \in [0,+\infty)\} =$$
$$= \{x \in (0,+\infty) \,/\, e^x - \ell nx \geq 0\} = (0,+\infty) \neq \varnothing.$$

Αφού όπως ξέρουμε ισχύει ότι $e^x \geq x+1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και το "$=$" μόνο για $x = 0$, οπότε $e^x > x+1$ για κάθε $x > 0$ και επίσης ισχύει ότι $\ell nx \leq x - 1$ για κάθε $x > 0$.

Έτσι για κάθε $x > 0$ ισχύουν $e^x > x+1$ και $x+1 > x > x-1 \geq \ell nx$ για κάθε $x > 0$ άρα λόγω της μεταβατικής ιδιότητας της διάταξης ισχύει ότι $e^x > \ell nx$ για κάθε $x > 0$.

Έτσι η σύνθεση της $h(x) = \varphi^{-1}(x) - \varphi(x) = e^x - \ell nx$, $x > 0$ με την $g(x) = \sqrt{x^3}$ ορίζεται για κάθε $x \in (0,+\infty)$ και έχει τύπο

$$(g\circ h)(x)=g(h(x))=\sqrt{\left(e^x-\ell nx\right)^3},\ x>0.$$

γ) Η $G(x)=(g\circ h)(x)=\sqrt{\left(e^x-\ell nx\right)^3}$ ορίζεται για κάθε $x>0$ και επειδή $e^x-\ell nx>0$ για κάθε $x>0$, άρα γράφεται $G(x)=\left(e^x-\ell nx\right)^{\frac{3}{2}}$ και είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x>0$, ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Ισχύει ότι:

$$G'(x)=\left(\left(e^x-\ell nx\right)^{\frac{3}{2}}\right)'=\frac{3}{2}\left(e^x-\ell nx\right)^{\frac{3}{2}-1}\cdot\left(e^x-\ell nx\right)'=$$

$$=\frac{3}{2}\left(e^x-\ell nx\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(e^x-\frac{1}{x}\right),\ x>0.$$

Β2. Για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δίνεται ότι ισχύει $\left(e^{x\cdot\ell n2}+1\right)\cdot f(x)\geq\varphi^{-1}(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ή $\left(\left(e^{\ell n2}\right)^x+1\right)\cdot f(x)\geq e^x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ή $\left(2^x+1\right)\cdot f(x)\geq e^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Όμως ισχύει ότι $2^x+1>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, επομένως η παραπάνω γίνεται, διαιρώντας και τα δύο μέλη με το $2^x+1>0$, $f(x)\geq\dfrac{e^x}{2^x+1}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Όμως $J(x)=\dfrac{e^x}{2^x+1}=\dfrac{e^x}{2^x\left(1+\dfrac{1}{2^x}\right)}=\dfrac{e^x}{2^x}\cdot\dfrac{1}{1+2^{-x}}=\left(\dfrac{e}{2}\right)^x\cdot\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^x}$.

Έτσι, αφού $e>2\Leftrightarrow\dfrac{e}{2}>1$ οπότε:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e}{2}\right)^x=+\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=0$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^x}=\dfrac{1}{1+0}=1.$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}J(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(\dfrac{e}{2}\right)^x\cdot\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^x}\right)=+\infty\cdot(+1)=+\infty$.

Έτσι $f(x)\geq J(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}J(x)=+\infty$, οπότε από την γνωστή οδηγία του Π.Ι. ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

- Για το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{20f^2(x)+7f(x)+13}{4f^2(x)+5f(x)+4}$, θέτουμε $u=f(x)$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}u=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, έτσι είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{20f^2(x)+7f(x)+13}{4f^2(x)+5f(x)+4}=\lim_{u\to+\infty}\frac{20u^2+7u+13}{4u^2+5u+4}=\frac{20}{4}\lim_{u\to+\infty}\frac{u^2}{u^2}=5.$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f^3(x)-3f^2(x)+1}{3f(x)+2f^4(x)-5}=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{u^3-3u^2+1}{2u^4+3u-5}=$

$$\lim_{u\to+\infty}\frac{u^3}{2u^4}=\lim_{u\to+\infty}\frac{1}{2u}=0.$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{f^2(x)-2f(x)+3}+f(x)\right)=\lim\limits_{u\to+\infty}\left(\sqrt{u^2-2u+3}+u\right)=$

$$\lim_{u\to+\infty}\left(\sqrt{u^2\left(1-\frac{2}{u}+\frac{3}{u^2}\right)}+u\right)=\lim_{u\to+\infty}\left(\sqrt{u^2}\cdot\sqrt{1-\frac{2}{u}+\frac{3}{u^2}}+u\right)=$$

$$\lim_{u\to+\infty}\left(|u|\cdot\sqrt{1-\frac{2}{u}+\frac{3}{u^2}}+u\right)\overset{u\to+\infty}{\underset{u>0}{=}}\lim_{u\to+\infty}\left(u\cdot\sqrt{1-\frac{2}{u}+\frac{3}{u^2}}+u\right)=$$

$$\lim_{u\to+\infty}\left(u\cdot\left(\sqrt{1-\frac{2}{u}+\frac{3}{u^2}}+1\right)\right)=(+\infty)\cdot\left(\underbrace{\sqrt{1+0+0}+1}_{2}\right)=+\infty$$

- $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{f^2(x)-2f(x)+3}-f(x)\right)=\lim_{u\to+\infty}\left(\sqrt{u^2-2u+3}-u\right)=$$

$$\lim_{u\to+\infty}\left(\sqrt{u^2\left(1-\frac{2}{u}+\frac{3}{u^2}\right)}-u\right)=\lim_{u\to+\infty}\left(\sqrt{u^2}\cdot\sqrt{1-\frac{2}{u}+\frac{3}{u^2}}-u\right)=$$

$$\lim_{u\to+\infty}\left(|u|\cdot\sqrt{1-\frac{2}{u}+\frac{3}{u^2}}-u\right)\overset{u\to+\infty}{\underset{u>0}{=}}\lim_{u\to+\infty}\left(u\cdot\sqrt{1-\frac{2}{u}+\frac{3}{u^2}}-u\right)=$$

$$\lim_{u\to+\infty}\left(u\cdot\left(\underbrace{\sqrt{1-\frac{2}{u}+\frac{3}{u^2}}-1}_{0}\right)\right)\overset{(+\infty)\cdot 0}{\underset{\text{A.M}}{=}}$$

$$\lim_{u\to+\infty}\left(u\cdot\frac{\left(\sqrt{1-\frac{2}{u}+\frac{3}{u^2}}-1\right)\cdot\left(\sqrt{1-\frac{2}{u}+\frac{3}{u^2}}+1\right)}{\sqrt{1-\frac{2}{u}+\frac{3}{u^2}}+1}\right)=$$

$$\lim_{u\to+\infty}\left(u\cdot\frac{\left(\sqrt{1-\frac{2}{u}+\frac{3}{u^2}}\right)^2-1^2}{\sqrt{1-\frac{2}{u}+\frac{3}{u^2}}+1}\right)=\lim_{u\to+\infty}\left(u\cdot\frac{1-\frac{2}{u}+\frac{3}{u^2}-1}{\sqrt{1-\frac{2}{u}+\frac{3}{u^2}}+1}\right)=$$

$$\lim_{u\to+\infty}\left(\frac{u\cdot\left(-\frac{2}{u}+\frac{3}{u^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{2}{u}+\frac{3}{u^2}}+1}\right)=\lim_{u\to+\infty}\left(\frac{-2+\frac{3}{u}}{\sqrt{1-\frac{2}{u}+\frac{3}{u^2}}+1}\right)=\frac{-2+0}{\sqrt{1-0+0}+1}=-1.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για την $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+1+\ell n(x+1)}{x}=3.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=\dfrac{f(x)+1+\ell n(x+1)}{x}$, $-1<x\neq 0$, για την οποία δίνεται ότι $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=3$, οπότε $x\cdot\varphi(x)=f(x)+1+\ell n(x+1)$, για κάθε $x\neq 0$ ή ισοδύναμα $f(x)=x\cdot\varphi(x)-1-\ell n(x+1)$, για κάθε $-1<x\neq 0$.

Αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, έχουμε διαδοχικά:

- η f' παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$
- η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Έτσι η f είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$ άρα $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$, όμως

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot\varphi(x) - 1 - \ell n(x+1)\right) = 0\cdot 3 - 1 - \ell n(0+1) = -1$, άρα από τη μοναδικότητα του ορίου έχουμε ότι $f(0) = -1$.

Επίσης, αφού ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x) = 3$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ell n(x+1)}{x} = 1 \quad (*)$ είναι

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\varphi(x) - 1 - \ell n(x+1) - (-1)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\varphi(x) - \ell n(x+1)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x\cdot\varphi(x)}{x} - \frac{\ell n(x+1)}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\varphi(x) - \frac{\ell n(x+1)}{x}\right) = 3 - 1 = 2.$$

Άρα, τελικά $f'(0) = 2$ για το όριο $(*)$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ell n(x+1)}{x} = 1$.

Η εξήγηση που μπορούμε να δώσουμε με βάση τα όσα αναφέρονται στο σχολικό βιβλίο και χωρίς να πέσουμε σε φαύλο κύκλο («χρησιμοποιώντας» τον κανόνα De L' Hopital) είναι:

Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = \ell n x$, $x > 0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x > 0$ και είναι $\varphi'(x) = (\ell n x)' = \dfrac{1}{x}$, $x > 0$, άρα

$$\left.\begin{aligned}&\varphi'(1) = \frac{1}{1} = 1\\ &\varphi'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{\varphi(1+h)-\varphi(1)}{h}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \left.\begin{aligned}&\varphi'(1) = \frac{1}{1} = 1\\ &\varphi'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{\ell n(1+h) - \ell n 1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ell n(1+h)}{h}\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ell n(1+h)}{h} = 1$, έτσι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ell n(x+1)}{x} = 1$.

Γ2. Για την $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δίνεται ότι $f(x)=f''(x)+x-2$, $(**)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Η συνάρτηση $G(x)=\dfrac{f(x)+f'(x)-x+1}{e^x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο και άθροισμα παραγωγίσιμων και ισχύει ότι:

$$G'(x)=\left(\frac{f(x)+f'(x)-x+1}{e^x}\right)'=$$

$$=\frac{\left(f(x)+f'(x)-x+1\right)'\cdot e^x-\left(f(x)+f'(x)-x+1\right)\cdot\left(e^x\right)'}{\left(e^x\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(f'(x)+f''(x)-(x)'+(1)'\right)\cdot e^x-\left(f(x)+f'(x)-x+1\right)\cdot e^x}{\left(e^x\right)^2}=$$

$$=\frac{\cancel{e^x}\cdot\left(\cancel{f'(x)}+f''(x)-1-f(x)-\cancel{f'(x)}+x-1\right)}{\left(e^x\right)^{\cancel{2}}}=$$

$$=\frac{\left(f''(x)+x-1\right)-f(x)}{e^x}\overset{(**)}{=}\frac{f(x)-f(x)}{e^x}=0.$$

Άρα, $G'(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επομένως από το Θεώρημα των Συνεπειών του Θ.Μ.Τ. του Διαφορικού Λογισμού η συνάρτηση G είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$, άρα θα υπάρχει σταθερά $c\in\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $G(x)=c$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δηλαδή: $\dfrac{f(x)+f'(x)-x+1}{e^x}=c$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Για $x=0$ γίνεται $\dfrac{f(0)+f'(0)-0+1}{e^0}=c\Rightarrow c=\dfrac{-1+2+1}{1}\Rightarrow c=2$.

Επομένως θα ισχύει $\dfrac{f(x)+f'(x)-x+1}{e^x}=2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ή ισοδύναμα

$f(x)+f'(x)-x+1=2e^x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ή ισοδύναμα

$f(x)+f'(x)=2e^x+x-1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ή πολλαπλασιάζοντας με e^x

$e^x\cdot f(x)+e^x\cdot f'(x)=2e^x\cdot e^x+x\cdot e^x-1\cdot e^x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ή

$\left(e^x\right)'\cdot f(x)+e^x\cdot f'(x)=(2x)'e^{2x}+x\cdot e^x+e^x-e^x-e^x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ή

$\left(e^x\cdot f(x)\right)'=\left(e^{2x}\right)'+\left(x\cdot\left(e^x\right)'+(x)'\cdot e^x\right)-2e^x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ή

$\left(e^x\cdot f(x)\right)'=\left(e^{2x}\right)'+\left(x\cdot e^x\right)'-\left(2e^x\right)'$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ή

$\left(e^x\cdot f(x)\right)'=\left(e^{2x}+x\cdot e^x-2e^x\right)'$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Οπότε, από το πόρισμα των συνεπειών του Θ.Μ.Τ. του Διαφορικού Λογισμού, θα υπάρχει $c_1\in\mathbb{R}$, τέτοια, ώστε να ισχύει $e^x\cdot f(x)=e^{2x}+x\cdot e^x-2e^x+c_1$, $x\in\mathbb{R}$.

Για $x=0$ θα είναι:

$e^0\cdot f(0)=e^{2\cdot 0}+0\cdot e^0-2\cdot e^0+c_1\Rightarrow -1=1+0-2+c_1\Rightarrow c_1=0$, έτσι

$e^x\cdot f(x)=e^{2x}+x\cdot e^x-2e^x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ή $f(x)=\dfrac{e^{2x}+x\cdot e^x-2e^x}{e^x}$

οπότε $f(x)=e^x+x-2$, $x\in\mathbb{R}$.

Γ3. **α)** Η $f(x)=e^x+x-2$ είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και ισχύει ότι

$f'(x)=\left(e^x+x-2\right)'=e^x+1>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και $1-1$ και το σύνολο τιμών της είναι $f(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)$. Όπου:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x+x-2\right)=0+(-\infty)-2=-\infty$, ενώ
- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x+x-2\right)=(+\infty)+(+\infty)-2=+\infty$.

Έτσι το σύνολο τιμών της είναι το $f(\mathbb{R})=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$.

Άρα η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ αντιστρέφεται οπότε ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}:f(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ ή $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και γενικά ισχύει ότι

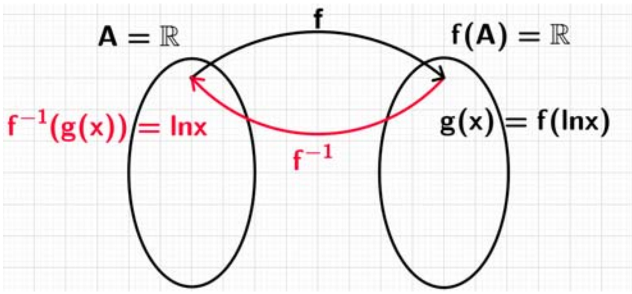
$y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και για κάθε $y\in\mathbb{R}$ και ισχύουν επίσης ότι:

- $f^{-1}(f(x))=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και
- $f\left(f^{-1}(y)\right)=y$, για κάθε $y\in\mathbb{R}$.

β) Για τη συνάρτηση g τέτοια ώστε: $\left(f^{-1}\circ g\right)(x)=\ell nx$, για κάθε $x>0$

έχουμε ότι $f^{-1}(g(x))=\ell nx, x>0 \Leftrightarrow g(x)=f(\ell nx), x>0$, άρα

$g(x)=e^{\ell nx}+\ell nx-2=x+\ell nx-2$, άρα $g(x)=x+\ell nx-2, x>0$.



γ) Για την ανίσωση έχουμε διαδοχικά:

$$(f\circ g)(x)<f(2x-3),\ x>0 \Leftrightarrow$$
$$f(g(x))<f(2x-3),\ x>0 \underset{\gamma\nu.\alpha\upsilon\xi o\upsilon\sigma\alpha}{\overset{f}{\Leftrightarrow}}$$
$$g(x)<2x-3,\ x>0 \Leftrightarrow$$
$$x+\ell nx-2<2x-3,\ x>0 \Leftrightarrow$$
$$\ell nx<2x-3-x+2,\ x>0 \Leftrightarrow$$
$$\ell nx<x-1,\ x>0 \Leftrightarrow x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$$

(αφού όπως ξέρουμε για κάθε $x>0$ ισχύει ότι $\ell nx\le x-1$ και το "$=$" μόνο για $x=1$, οπότε $\ell nx<x-1 \Leftrightarrow 0<x\neq 1$).

δ) Για το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{f^{-1}((f\circ g)(x))-\left(f^{-1}\circ f\right)(2x-3)}$ ξέρουμε ότι

$f^{-1}(f(x))=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα, $f^{-1}((f\circ g)(x))=f^{-1}(f(g(x)))=g(x)$, για κάθε $x>0$ και

$\left(f^{-1}\circ f\right)(2x-3)=f^{-1}(f(2x-3))=2x-3$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Έτσι η συνάρτηση $F(x)=f^{-1}((f\circ g)(x))-\left(f^{-1}\circ f\right)(2x-3)$, ορίζεται ως διαφορά στην τομή $(0,+\infty)\bigcap\mathbb{R}=(0,+\infty)$ και έχει τύπο

$$F(x)=f^{-1}((f\circ g)(x))-\left(f^{-1}\circ f\right)(2x-3)=$$
$$=g(x)-(2x-3)=x+\ell nx-2-2x+3=\ell nx-x+1.$$

Οπότε η $\dfrac{1}{F(x)}=\dfrac{1}{f^{-1}((f\circ g)(x))-\left(f^{-1}\circ f\right)(2x-3)}$, ορίζεται για κάθε

$0<x\neq1$ άρα το $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{f^{-1}((f\circ g)(x))-\left(f^{-1}\circ f\right)(2x-3)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{\ell nx-x+1}$.

Όμως $\lim\limits_{x\to1}(\ell nx-x+1)=0$ και $\ell nx<x-1$, για κάθε $x\in(0,1)\bigcup(1,+\infty)$

άρα $\ell nx-x+1<0$ κοντά στο $x_0=1$ οπότε

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1}(\ell nx-x+1)=0\\ \ell nx-x+1<0\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{x\to1}\frac{1}{\ell nx-x+1}=-\infty.$$

Τελικά: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{f^{-1}((f\circ g)(x))-\left(f^{-1}\circ f\right)(2x-3)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{\ell nx-x+1}=-\infty$.

Γ4. α) Αναζητούμε $x_0\in\mathbb{R}$: $e^{x_0}+x_0=2$.

Δηλαδή το $x_0\in\mathbb{R}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $e^x+x=2$ ή ισοδύναμα της εξίσωσης $e^x+x-2=0$ ή της $f(x)=0$.

Θεωρούμε την $f(x)=e^x+x-2$ στο διάστημα $[0,1]$.

- Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $[0,1]$
- $f(0)=e^0+0-2=-1<0$, και $f(1)=e^1+1-2=e-1>0$.

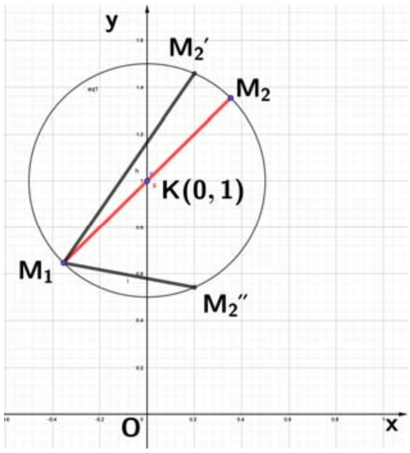
Παρατηρούμε ότι $f(0)\cdot f(1)<0$, άρα από το Θεώρημα του Bolzano υπάρχει $x_0\in(0,1)$, μοναδικό στο $\mathbb{R}$, λόγω μονοτονίας της f, τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$, ή υπάρχει μοναδικό $x_0\in(0,1)$, τέτοιο ώστε $e^{x_0}+x_0-2=0$, ή υπάρχει μοναδικό $x_0\in(0,1)$, τέτοιο ώστε $e^{x_0}+x_0=2$.

β) Είναι $K(0,1)$ και για τα σημεία $M(x,y)$ με $x,y\in\mathbb{R}$, του επιπέδου έχουμε ότι ισχύει:

$$f\left(\left|\overrightarrow{MK}\right|+\frac{1}{2}\right)=e-1\Leftrightarrow f\left(\left|\overrightarrow{MK}\right|+\frac{1}{2}\right)=f(1)\underset{1-1}{\overset{f}{\Leftrightarrow}}$$

$$\left|\overrightarrow{MK}\right|+\frac{1}{2}=1\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{MK}\right|=1-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{MK}\right|=\frac{1}{2}.$$

Το τυχαίο σημείο $M(x,y)$ του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου έχει την χαρακτηριστική ιδιότητα να απέχει από το σταθερό σημείο $K(0,1)$, σταθερή απόσταση $\rho=\frac{1}{2}$, άρα το $M(x,y)$ ανήκει στον κύκλο κέντρου $K(0,1)$ και ακτίνας $\rho=\frac{1}{2}$.



(Ο οποίος έχει εξίσωση $x^2+(y-1)^2=\frac{1}{4}$).

γ) Αν M_1,M_2 δύο από τα παραπάνω σημεία, τότε $\left|\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM_2}\right|=\left|\overrightarrow{M_2M_1}\right|$ τότε προφανώς η μεγαλύτερη δυνατή απόσταση μεταξύ των δύο σημείων του παραπάνω κύκλου θα καταγραφεί όταν τα σημεία αυτά θα είναι αντιδιαμετρικά δηλαδή είναι

$$\left|\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM_2}\right|=\left|\overrightarrow{M_2M_1}\right|\le 2\rho\Rightarrow\left|\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM_2}\right|=\left|\overrightarrow{M_2M_1}\right|\le 2\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$\left|\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM_2}\right|=\left|\overrightarrow{M_2M_1}\right|\le 1\Rightarrow\left|\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM_2}\right|-\sqrt{2}=$$

$$=\left|\overrightarrow{M_2M_1}\right|-\sqrt{2}\le 1-\sqrt{2}<0$$

$$\alpha=\left|\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM_2}\right|-\sqrt{2}<0$$

και είναι

$$f(x)+f(-x)=e^x+x-2+\left(e^{-x}+(-x)-2\right)=$$

$$=e^x+x-2+e^{-x}-x-2=e^x+e^{-x}-4.$$

Προφανώς είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+f(-x)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^x+e^{-x}-4\right)=(+\infty)+0-4=+\infty$$

έτσι το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\left|\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM_2}\right|-\sqrt{2}\right)\left(f(x)+f(-x)\right)\right]=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\underbrace{\alpha}_{<0}\cdot\left(f(x)+f(-x)\right)\right]=\alpha\cdot(+\infty)=-\infty.$$

Γ5. (Εναλλακτικό)

Για το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την $C_{f^{-1}}$ τον $x'x$ και τις ευθείες $x=-1$ και $x=e-1$. Το πρόσημο της f^{-1} θα καθοριστεί από τη μονοτονία της, η οποία είναι ίδια με τη μονοτονία της f και τη ρίζα της. Πράγματι.

Θα αποδείξουμε αρχικά ότι: αναγκαστικά η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Με απαγωγή σε άτοπο.

Έστω ότι η f^{-1} δεν είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Τότε θα υπήρχαν $y_1,y_2\in\mathbb{R}$ με $y_1<y_2$ αλλά με

$$f^{-1}(y_1)\nless f^{-1}(y_2)\Rightarrow$$

$$f^{-1}(y_1)\geq f^{-1}(y_2)\Rightarrow x_1\geq x_2 \underset{\gamma\nu.\alpha\upsilon\xi o\upsilon\sigma\alpha}{\overset{f}{\Rightarrow}} f(x_1)\geq f(x_2)\Rightarrow y_1\geq y_2$$

το οποίο είναι άτοπο αφού είχαμε υποθέσει ότι $y_1<y_2$.

Έτσι τέτοια $y_1,y_2\in\mathbb{R}$ δεν υπάρχουν άρα για κάθε $y_1,y_2\in\mathbb{R}$ με

$y_1<y_2\Rightarrow f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2)$, η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Αναζητούμε την μοναδική ρίζα της f^{-1}. Δηλαδή

$f^{-1}(y_0)=0\Leftrightarrow y_0=f(0)\Leftrightarrow y_0=-1$, άρα $f^{-1}(-1)=0$.

Επομένως:

- $x>-1 \underset{\gamma\nu.\alpha\upsilon\xi o\upsilon\sigma\alpha}{\overset{f^{-1}}{\Rightarrow}} f^{-1}(x)>f^{-1}(-1)\Rightarrow f^{-1}(x)>0$
- $x<-1 \underset{\gamma\nu.\alpha\upsilon\xi o\upsilon\sigma\alpha}{\overset{f^{-1}}{\Rightarrow}} f^{-1}(x)<f^{-1}(-1)\Rightarrow f^{-1}(x)<0$

Άρα $f^{-1}(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[-1,e-1]$.

x	$-\infty$		-1		$e-1$	$+\infty$
$f^{-1}(x)$		$-$	0		$+$	

Θα δείξουμε πρώτα ότι η f^{-1} είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Θεωρούμε τυχαίο $y_0 \in \mathbb{R}$, αφού το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$, και η f είναι $1-1$ και συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα θα υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε

$$f(x_0) = y_0 \Leftrightarrow x_0 = f^{-1}(y_0).$$

Τότε για το όριο: $\lim\limits_{y \to y_0} f^{-1}(y)$ θέτουμε όπου $y = f(x)$ και έστω ότι όταν $y \to y_0$, το $x \to \alpha$ δηλαδή $\lim\limits_{x \to \alpha} y = y_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = y_0 = f(x_0)$.

Όμως η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο α, οπότε

$$\lim_{x \to \alpha} y = y_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to \alpha} f(x) = f(\alpha).$$

Επομένως:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \alpha} y = y_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = y_0 = f(x_0) \\ \lim\limits_{x \to \alpha} y = y_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = f(\alpha) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x_0) = f(\alpha) \underset{1-1}{\overset{f}{\Rightarrow}} \alpha = x_0.$$

Άρα, όταν $y \to y_0 = f(x_0)$, τότε αναγκαστικά $x \to \alpha = x_0$, οπότε

$$\lim_{y \to y_0} f^{-1}(y) = \lim_{x \to x_0} f^{-1}(f(x)) = \lim_{x \to x_0} x = x_0 = f^{-1}(y_0),$$

έτσι για το τυχαίο $y_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $\lim\limits_{y \to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0)$, άρα η f^{-1} είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Άρα και στο $[-1, e-1]$ και $f^{-1}(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [-1, e-1]$.

Έτσι το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την $C_{f^{-1}}$, τον $x'x$ και τις Ευθείες $x = -1$ και $x = e-1$, δίνεται από τον τύπο:

$$E(\Omega) = \int_{-1}^{e-1} f^{-1}(x)dx = \int_{-1}^{e-1} f^{-1}(y)dy.$$

Θέτουμε όπου $y = f(x)$.

Άκρα:

- Όταν $y=-1 \Leftrightarrow f(x)=-1 \Leftrightarrow f(x)=f(0) \underset{1-1}{\overset{f}{\Leftrightarrow}} x=0$.
- Όταν $y=e-1 \Leftrightarrow f(x)=e-1 \Leftrightarrow f(x)=f(1) \underset{1-1}{\overset{f}{\Leftrightarrow}} x=1$.

Διαφορικό:

$y=f(x) \Rightarrow dy=df(x) \Rightarrow dy=f'(x)dx$ άρα:

$$E(\Omega)=\int_{-1}^{e-1} f^{-1}(x)dx=\int_{-1}^{e-1} f^{-1}(y)dy=\int_{0}^{1} f^{-1}(f(x))f'(x)dx=$$

$$=\int_0^1 x\cdot f'(x)dx=\left[x\cdot f(x)\right]_0^1-\int_0^1 (x)'\cdot f(x)dx=$$

$$=1\cdot f(1)-\int_0^1 f(x)dx=e-1-\int_0^1 \left(e^x+x-2\right)dx=$$

$$=e-1-\left[e^x+\frac{x^2}{2}-2x\right]_0^1=$$

$$=e-1-\left[\left(e^1+\frac{1^2}{2}-2\right)-\left(e^0+\frac{0^2}{2}-2\cdot 0\right)\right]=$$

$$=e-1-e-\frac{1}{2}+2+1=\frac{3}{2}\ \tau.\mu.$$

B3. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\ell n\left(e^{x+1}+4^x\right)-\ell n\left(e^x+4^{x+3}\right)\right].$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\ell n\left(e^{x+1}+4^x\right)-\ell n\left(e^x+4^{x+3}\right)\right].$$

Μονάδες 10

B3. Για το όριο: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\ell n\left(e^{x+1}+4^x\right)-\ell n\left(e^x+4^{x+3}\right)\right]$.

Χρησιμοποιούμε αρχικά τις ιδιότητες των λογαρίθμων και έχουμε ότι

$$\ell n\left(e^{x+1}+4^x\right)-\ell n\left(e^x+4^{x+3}\right)=\ell n\frac{e^{x+1}+4^x}{e^x+4^{x+3}}.$$

Προφανώς, η συνάρτηση ορίζεται σε μια περιοχή του $-\infty$, αφού το πεδίο ορισμού της είναι το $\mathbb{R}$, αφού $e^{x+1}+4^x>0$ και $e^x+4^{x+3}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Έτσι:

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\ell n\left(e^{x+1}+4^x\right)-\ell n\left(e^x+4^{x+3}\right)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\ell n\left(\frac{e^{x+1}+4^x}{e^x+4^{x+3}}\right)\right]=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\ell n\left(\frac{e^x\cdot e+4^x}{e^x+4^x\cdot 4^3}\right)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\ell n\left(\frac{\cancel{e^x}\cdot\left(e+\frac{4^x}{e^x}\right)}{\cancel{e^x}\cdot\left(1+\frac{4^x}{e^x}\cdot 4^3\right)}\right)\right]=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\ell n\left(\frac{e+\left(\frac{4}{e}\right)^x}{1+\left(\frac{4}{e}\right)^x\cdot 4^3}\right)\right]\overset{(*)}{=}\lim_{u\to e}\ell nu=\ell ne=1.$$

Ξέρουμε ότι $e<4\Leftrightarrow\frac{4}{e}>1\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4}{e}\right)^x=0$, οπότε θέτουμε όπου

$$(*)\quad u=\frac{e+\left(\frac{4}{e}\right)^x}{1+\left(\frac{4}{e}\right)^x\cdot 4^3},\text{ τότε }\lim_{x\to-\infty}u=\lim_{x\to-\infty}\frac{e+\left(\frac{4}{e}\right)^x}{1+\left(\frac{4}{e}\right)^x\cdot 4^3}=\frac{e+0}{1+0\cdot 64}=e$$

ενώ, για το όριο

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\ell n\left(e^{x+1}+4^x\right)-\ell n\left(e^x+4^{x+3}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\ell n\left(\frac{e^{x+1}+4^x}{e^x+4^{x+3}}\right)\right]=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\ell n\left(\frac{e^x\cdot e+4^x}{e^x+4^x\cdot 4^3}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\ell n\left(\frac{\cancel{4^x}\cdot\left(\frac{e^x}{4^x}\cdot e+1\right)}{\cancel{4^x}\cdot\left(\frac{e^x}{4^x}+4^3\right)}\right)\right]=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\ell n\left(\frac{\left(\frac{e}{4}\right)^x\cdot e+1}{\left(\frac{e}{4}\right)^x+4^3}\right)\right]\overset{(**)}{=}\lim_{u\to\frac{1}{64}}\ell nu=\ell n\frac{1}{64}=-\ell n2^6=-6\ell n2.$$

Ξέρουμε ότι $e<4\Leftrightarrow 0<\frac{e}{4}<1\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e}{4}\right)^x=0$, οπότε θέτουμε όπου

$$(**)\quad u=\frac{\left(\frac{e}{4}\right)^x\cdot e+1}{\left(\frac{e}{4}\right)^x+4^3},\ \text{τότε}\ \lim_{x\to+\infty}u=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{e}{4}\right)^x\cdot e+1}{\left(\frac{e}{4}\right)^x+4^3}=\frac{0\cdot e+1}{0+64}=\frac{1}{64}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x)>1$, για κάθε $x>0$ και $f(1)=e$ και
- $f(x)\cdot\ell n(f(x))+2x\cdot f'(x)=0$, για κάθε $x>0$.

Δ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $G(x)=\ell n(\ell nf(x))+\ell n\sqrt{x}$ είναι σταθερή στο $(0,+\infty)$ και στη συνέχεια, να βρείτε τη συνάρτηση f.

Μονάδες 7

Αν $f(x)=e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$, $x\in(0,+\infty)$.

Δ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της και στη συνέχεια να δείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}.

Μονάδες 6

Δ3. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και συνέχεια:

α) Να δείξετε ότι $2\cdot e^{\frac{1}{\sqrt{x}}-1}\geq 3-x$, για κάθε $x>0$ (μονάδες 5)

β) (Εναλλακτικό θέμα). Να δείξετε ότι: $\int_1^2 f(x)dx>\frac{3e}{4}$. (μονάδες 3)

Μονάδες 8

Δ4. Να αποδείξετε ότι $e^{\frac{1}{\sqrt{e+\sqrt[7]{e}}}} < e^{\frac{1}{\sqrt{2\cdot\sqrt[5]{e}}}}$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση $G(x)=\ell n(\ell nf(x))+\ell n\sqrt{x}$, $x>0$, ορίζεται για κάθε $x>0$, αφού από υπόθεση έχουμε ότι $f(x)>1$, για κάθε $x>0$ και εφόσον η ℓnx είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ έχουμε ότι:

$$f(x)>1 \underset{\gamma\nu.\alpha\upsilon\xi o\upsilon\sigma\alpha}{\overset{\ell nx}{\Rightarrow}} \ell nf(x)>\ell n1 \Rightarrow \ell nf(x)>0, \text{ για κάθε } x>0.$$

Επομένως η G είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x>0$, ως άθροισμα και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων και είναι:

$$G'(x)=\left(\ell n(\ell nf(x))+\ell n\sqrt{x}\right)'=\left(\ell n(\ell nf(x))\right)'+\left(\ell n\sqrt{x}\right)'=$$

$$=\frac{(\ell nf(x))'}{\ell nf(x)}+\frac{(\sqrt{x})'}{\sqrt{x}}=\frac{\frac{f'(x)}{f(x)}}{\ell nf(x)}+\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{f'(x)}{f(x)\cdot\ell nf(x)}+\frac{1}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}=\frac{f'(x)}{f(x)\cdot\ell nf(x)}+\frac{1}{2x}=$$

$$=\frac{2x\cdot f'(x)+f(x)\cdot\ell nf(x)}{2x\cdot f(x)\cdot\ell nf(x)}=\frac{0}{2x\cdot f(x)\cdot\ell nf(x)}=0.$$

Αφού για τη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, ισχύει ότι

$$f(x)\cdot\ell n(f(x))+2x\cdot f'(x)=0 \text{ για κάθε } x>0.$$

Άρα η G είναι σταθερή στο $(0,+\infty)$ και έτσι από το Θεώρημα των Συνεπειών του Θ.Μ.Τ. θα υπάρχει σταθερά $c\in\mathbb{R}$, τέτοια ώστε να ισχύει $G(x)=c$, για κάθε $x>0$ ή ισοδύναμα $\ell n(\ell nf(x))+\ell n\sqrt{x}=c$, για κάθε $x>0$.

Έτσι, για $x=1$, η παραπάνω γίνεται:

$$\ell n(\ell nf(1))+\ell n\sqrt{1}=c\Rightarrow\ell n(\ell ne)+\ell n1=c\Rightarrow\ell n1+0=c\Rightarrow c=0.$$

Επομένως, $\ell n(\ell nf(x))+\ell n\sqrt{x}=0$, για κάθε $x>0$ ή ισοδύναμα

$\ell n(\ell n f(x)) = -\ell n\sqrt{x}$, για κάθε $x>0$ ή ισοδύναμα

$\ell n(\ell n f(x)) = \ell n\left(\sqrt{x}\right)^{-1}$, για κάθε $x>0$.

Όμως η ℓnx σαν γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, είναι και $1-1$ στο $(0,+\infty)$, οπότε ισχύει η ισοδυναμία

$$\ell n(\ell n f(x)) = \ell n\left(\left(\sqrt{x}\right)^{-1}\right) \underset{1-1}{\overset{\ell nx}{\Leftrightarrow}} \ell n f(x) = \left(\sqrt{x}\right)^{-1} \Leftrightarrow f(x) = e^{\left(\sqrt{x}\right)^{-1}}$$

για κάθε $x>0$, δηλαδή $f(x) = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$, $x \in (0,+\infty)$.

Δ2. Η $f(x) = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$, έχει παράγωγο:

$$f'(x) = \left(e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)' = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot \left(-\frac{\left(\sqrt{x}\right)'}{\left(\sqrt{x}\right)^2}\right) =$$

$$= e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot \left(-\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}\right) = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot \left(-\frac{1}{2x\cdot\sqrt{x}}\right) < 0.$$

Έτσι $f'(x) = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot \left(-\frac{1}{2x\cdot\sqrt{x}}\right)$, για κάθε $x>0$.

Είναι $f'(x)<0$, για κάθε $x>0$, οπότε η f σαν συνεχής στο $(0,+\infty)$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$, και το σύνολο τιμών της είναι

$$f(\Delta) = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to0^+} f(x)\right).$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$, θέτω $u = \frac{1}{\sqrt{x}}$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} u = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$, έτσι

  $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim\limits_{u\to0^+} e^u = e^0 = 1$, αφού η e^u είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $u_0 = 0$.

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$, θέτω $u = \frac{1}{\sqrt{x}}$, τότε $\lim\limits_{x\to 0^+} u = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$, έτσι

  $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim\limits_{u\to +\infty} e^{u} = +\infty$.

Οπότε το σύνολο τιμών της f είναι $f(\Delta) = \left(\lim\limits_{x\to +\infty} f(x), \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\right) = (1,+\infty)$.

Έτσι η $f:(0,+\infty)\to(1,+\infty)\subseteq\mathbb{R}$ σαν γνησίως φθίνουσα είναι και $1-1$, άρα η συνάρτηση f αντιστρέφεται και ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}: f(\Delta)\to\Delta=(0,+\infty)\subseteq\mathbb{R}$, δηλαδή $f^{-1}:(1,+\infty)\to(0,+\infty)\subseteq\mathbb{R}$ και γενικά ισχύει ότι $y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$, ενώ στην περίπτωση μας είναι:

$$y = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}, x>0, y>1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = \ell ny, x>0, y>1 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x} = \frac{1}{\ell ny}, x>0, y>1 \Leftrightarrow x = \left(\frac{1}{\ell ny}\right)^2, x>0, y>1.$$

Άρα $x = f^{-1}(y) = \left(\frac{1}{\ell ny}\right)^2, y>1$ ή $y = f^{-1}(x) = \left(\frac{1}{\ell nx}\right)^2, x>1$ οπότε η αντίστροφη συνάρτηση είναι $f^{-1}(x) = \left(\frac{1}{\ell nx}\right)^2, x>1$.

Δ3. Η $f'(x) = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\cdot\left(-\frac{1}{2x\cdot\sqrt{x}}\right)$, είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x>0$, ως γινόμενο, σύνθεση και πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων και είναι:

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = \left(e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\cdot\left(-\frac{1}{2x\cdot\sqrt{x}}\right)\right)' =$$

$$= \left(e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)'\cdot\left(-\frac{1}{2x\cdot\sqrt{x}}\right) + e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\cdot\left(-\frac{1}{2x\cdot\sqrt{x}}\right)' =$$

$$= e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\cdot\left(-\frac{1}{2x\cdot\sqrt{x}}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2x\cdot\sqrt{x}}\right) + e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\cdot\left(\frac{\left(2x\cdot\sqrt{x}\right)'}{\left(2x\cdot\sqrt{x}\right)^2}\right) =$$

$$= e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot \left(-\frac{1}{2x \cdot \sqrt{x}}\right)^2 + e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot \frac{2\sqrt{x} + \cancel{2}x \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}}}{4x^2 \cdot x} =$$

$$= e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot \left(\frac{1}{4x^2 \cdot x} + \frac{2\sqrt{x} + \frac{x}{\sqrt{x}}}{4x^3} \right) = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot \frac{1 + 3\sqrt{x}}{4x^3} > 0.$$

Άρα $f''(x) = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot \frac{1+3\sqrt{x}}{4x^3} > 0$, για κάθε $x > 0$.

Έτσι, αφού η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και $f''(x) > 0$, για κάθε $x > 0$, άρα η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

Έτσι η εφαπτομένη ευθεία σε κάθε σημείο της γραφικής παράστασης της f, θα βρίσκεται από κάτω από την C_f με εξαίρεση το σημείο επαφής.

Παρατηρούμε ότι η ζητούμενη ανίσωση μπορεί να μετασχηματιστεί με τέτοιο τρόπο ώστε να μας «υποδείξει» το σημείο στο οποίο πρέπει να βρούμε την εφαπτομένη της C_f. Έτσι έχουμε:

- $2 \cdot e^{\frac{1}{\sqrt{x}}-1} \geq 3 - x$, για κάθε $x > 0$ ή ισοδύναμα
- $2 \cdot \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}}{e} \geq 3 - x$, για κάθε $x > 0$ ή ισοδύναμα
- $2 \cdot e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \geq 3e - ex$, για κάθε $x > 0$ ή ισοδύναμα
- $e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \geq -\frac{e}{2}x + \frac{3e}{2}$, για κάθε $x > 0$ ή ισοδύναμα
- $f(x) \geq -\frac{e}{2}x + \frac{3e}{2}$, για κάθε $x > 0$.

Οπότε, στην πραγματικότητα αναζητούμε σε ποιο σημείο του $(0,+\infty)$, η παράγωγος της f, ισούται με $f'(x_0) = -\frac{e}{2}$.

Άρα αναζητούμε λύση στην εξίσωση $f'(x) = -\frac{e}{2} \Leftrightarrow e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot \left(-\frac{1}{2x \cdot \sqrt{x}}\right) = -\frac{e}{2}$, η οποία θα είναι μοναδική, αφού η $f''(x)>0$ για κάθε $x>0$, οπότε αναγκαστικά η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, άρα και $1-1$.

Είναι προφανές ότι $f'(1)=e^{\frac{1}{\sqrt{1}}}\cdot\left(-\frac{1}{2\cdot 1\cdot\sqrt{1}}\right)=e\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{e}{2}$. οπότε η εξίσωση $f'(x_0)=-\frac{e}{2}\Leftrightarrow f'(x_0)=f'(1)\underset{1-1}{\overset{f'}{\Leftrightarrow}}\Leftrightarrow x_0=1$ και $f(1)=e^{\frac{1}{\sqrt{1}}}=e$.

Έτσι η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας προς την C_f στο σημείο $A(1,f(1))$, είναι η $y-f(1)=f'(1)(x-1)$ ή $y-e=-\frac{e}{2}(x-1)$ ή $y=-\frac{e}{2}x+e+\frac{e}{2}$ ή $y=-\frac{e}{2}x+\frac{3e}{2}$.

Τότε όμως η εφαπτομένη ευθεία στο σημείο $A(1,f(1))$ θα βρίσκεται από κάτω από την C_f με εξαίρεση το σημείο επαφής, άρα $f(x)\geq -\frac{e}{2}x+\frac{3e}{2}$, για κάθε $x>0$ και το "=" μόνο για $x=1$ ή

- $e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\geq -\frac{e}{2}x+\frac{3e}{2}$, για κάθε $x>0$ και το "=" μόνο για $x=1$.
- $2\cdot e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\geq 3e-ex$, για κάθε $x>0$ και το "=" μόνο για $x=1$.
- $2\cdot\frac{e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}}{e}\geq 3-x$, για κάθε $x>0$ και το "=" μόνο για $x=1$.
- $2\cdot e^{\frac{1}{\sqrt{x}}-1}\geq 3-x$, για κάθε $x>0$ και το "=" μόνο για $x=1$.

Δ3. β) (Εναλλακτικό θέμα)

Έχουμε δείξει ότι $2\cdot e^{\frac{1}{\sqrt{x}}-1}\geq 3-x$, για κάθε $x>0$ και το "=" μόνο για $x=1$.

Οπότε η συνάρτηση $\varphi(x)=2\cdot e^{\frac{1}{\sqrt{x}}-1}-(3-x)\geq 0$, είναι συνεχής στο $[1,2]$, μη αρνητική και όχι παντού μηδέν αφού το "=" μόνο για $x=1$, άρα από το Θεώρημα 3 των ιδιοτήτων του ορισμένου ολοκληρώματος θα είναι:

$$\int_1^2 \varphi(x)dx>0 \Rightarrow \int_1^2\left(2\cdot e^{\frac{1}{\sqrt{x}}-1}-(3-x)\right)dx>0 \Rightarrow \int_1^2 2\cdot e^{\frac{1}{\sqrt{x}}-1}dx->0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}}{e}dx>\int_1^2(3-x)dx \Rightarrow \frac{2}{e}\int_1^2 e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}dx>\left[3x-\frac{x^2}{2}\right]_1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{e}\int_1^2 f(x)dx>\left[3\cdot 2-\frac{2^2}{2}\right]-\left[3\cdot 1-\frac{1^2}{2}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{e}\int_1^2 f(x)dx>4-3+\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{e}\int_1^2 f(x)dx>\frac{3}{2} \Rightarrow \int_1^2 f(x)dx>\frac{3e}{4}$$

Άρα $\int_1^2 f(x)dx>\frac{3e}{4}$.

Δ4. Η ανισοτική σχέση $e^{\frac{1}{\sqrt{e+\sqrt[7]{e}}}}<e^{\frac{1}{\sqrt{2\cdot\sqrt[5]{e}}}}$, εμπλέκει την f και είναι προφανώς $f\left(e+\sqrt[7]{e}\right)<f\left(2\cdot\sqrt[5]{e}\right) \underset{\gamma\nu.\varphi\theta\iota\nu o\upsilon\sigma\alpha}{\overset{f}{\Leftrightarrow}} e+\sqrt[7]{e}>2\cdot\sqrt[5]{e}$. οπότε αρκεί να δείξουμε ότι $e+\sqrt[7]{e}>2\cdot\sqrt[5]{e}$ παρατηρούμε ότι η τελευταία μετασχηματίζεται με τη βοήθεια της f ως εξής:

$e+\sqrt[7]{e}>2\cdot\sqrt[5]{e}\Leftrightarrow$

$e^{\frac{1}{\sqrt{1}}}+e^{\frac{1}{7}}>2\cdot e^{\frac{1}{5}}\Leftrightarrow f(1)+e^{\frac{1}{\sqrt{49}}}>2\cdot e^{\frac{1}{\sqrt{25}}}\Leftrightarrow$

$f(1)+f(49)>2\cdot f(25)\Leftrightarrow f(49)-f(25)>f(25)-f(1)\Leftrightarrow$

$\frac{f(49)-f(25)}{24}>\frac{f(25)-f(1)}{24}\Leftrightarrow$

$\frac{f(49)-f(25)}{49-25}>\frac{f(25)-f(1)}{25-1}$.

Η τελευταία ανισότητα είναι ανισότητα Jensen για την f η οποία προκύπτει από εφαρμογή του Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $[1,25]$ και $[25,49]$, με δεδομένο ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Έτσι έχουμε διαδοχικά:

- η f συνεχής στο $(0,+\infty)$, άρα και στα $[1,25]$, $[25,49]$,
- η f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, άρα και στα $(1,25)$ και $(25,49)$.

Οπότε, από το Θ.Μ.Τ. του διαφορικού Λογισμού, θα υπάρχουν $\xi_1\in(1,25)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1)=\frac{f(25)-f(1)}{25-1}=\frac{f(25)-f(1)}{24}$ και $\xi_2\in(25,49)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2)=\frac{f(49)-f(25)}{49-25}=\frac{f(49)-f(25)}{24}.$$

Όμως, $1<\xi_1<25<\xi_2<49 \underset{\text{γν.αυξουσα}}{\overset{f'}{\Rightarrow}} f'(\xi_1)<f'(\xi_2)\Rightarrow$

$$\Rightarrow\frac{f(25)-f(1)}{24}<\frac{f(49)-f(25)}{24}\Rightarrow f(25)-f(1)<f(49)-f(25)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot f(25)<f(1)+f(49)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot\sqrt[5]{e}<e+\sqrt[7]{e}\Rightarrow e+\sqrt[7]{e}>2\cdot\sqrt[5]{e}\Rightarrow 2\cdot e^{\frac{1}{\sqrt{25}}}<e^{\frac{1}{\sqrt{1}}}+e^{\frac{1}{\sqrt{49}}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow e+\sqrt[7]{e}>2\cdot\sqrt[5]{e}>0 \underset{\text{γν.φθινουσα}}{\overset{f}{\Rightarrow}}$$

$$\Rightarrow f\left(e+\sqrt[7]{e}\right)<f\left(2\cdot\sqrt[5]{e}\right)\Rightarrow e^{\frac{1}{\sqrt{e+\sqrt[7]{e}}}}<e^{\frac{1}{\sqrt{2\cdot\sqrt[5]{e}}}}$$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι

$$g^2(x)+2g(x)\cdot ημx = x^2+συν^2x,\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R} \text{ και } g(0)=1.$$

Γ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=g(x)+ημx$ διατηρεί πρόσημο για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και να βρείτε την g.

Μονάδες 4

Αν η $g(x)=\sqrt{x^2+1}-ημx$, $x\in\mathbb{R}$:

Γ2. Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)+συνx-2}{x}$ (μονάδες 4).

β) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ (μονάδες 4).

Μονάδες 8

Γ3. Αν $f(x)=\dfrac{x}{g(x)+ημx}$, $x\in\mathbb{R}$:

α) Να δείξετε ότι η f είναι $1-1$ (μονάδες 4).

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της και να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση (μονάδες 4).

γ) Να βρείτε συνάρτηση $φ(x)$ τέτοια ώστε $(f\circ φ)(x)=ημx$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. (μονάδες 2).

δ) Να βρείτε συνάρτηση $K(x)$, τέτοια ώστε $(K\circ f)(x)=\ell n\left(1-x^2\right)$ για κάθε $x\in(-1,1)$ (μονάδες 3).

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού η $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση, και ισχύει ότι:

$$g^2(x)+2g(x)\cdot ημx = x^2+συν^2x \Leftrightarrow g^2(x)+2g(x)\cdot ημx = x^2+1-ημ^2x \Leftrightarrow$$
$$g^2(x)+2g(x)\cdot ημx+ημ^2x = x^2+1 \Leftrightarrow$$
$$\left(g(x)+ημx\right)^2 = x^2+1\ ,\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R} \text{ σχέση (1).}$$

Όμως $x^2+1>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έτσι $\left(g(x)+ημx\right)^2=x^2+1\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα $h(x)=g(x)+ημx\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Όμως η συνάρτηση $h(x)=g(x)+\eta\mu x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα συνεχών και διάφορη του μηδενός για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα διατηρεί πρόσημο για κάθε $x\in\mathbb{R}$, δηλαδή:

- ή $h(x)=g(x)+\eta\mu x>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$,
- ή $h(x)=g(x)+\eta\mu x<0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Όμως, έχουμε ότι $g(0)=1$, άρα $h(0)=g(0)+\eta\mu 0=1+0=1>0$

άρα η συνάρτηση $h(x)=g(x)+\eta\mu x$ διατηρεί πρόσημο για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και μάλιστα $h(x)=g(x)+\eta\mu x>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, έτσι η σχέση (1) γίνεται:

$$\left(g(x)+\eta\mu x\right)^2=x^2+1\Leftrightarrow\sqrt{\left(g(x)+\eta\mu x\right)^2}=\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow$$

$$\left|g(x)+\eta\mu x\right|=\sqrt{x^2+1}\underset{x\in\mathbb{R}}{\overset{g(x)+\eta\mu x>0}{\Leftrightarrow}}g(x)+\eta\mu x=\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow$$

$$g(x)=\sqrt{x^2+1}-\eta\mu x\quad ,x\in\mathbb{R}.$$

Γ2. Για τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)+\sigma\upsilon\nu x-2}{x}$ για $x\neq 0$,

$$\frac{g(x)+\sigma\upsilon\nu x-2}{x}=\frac{g(x)-1+\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=\frac{g(x)-1}{x}+\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}$$ όμως η

$g(x)=\sqrt{x^2+1}-\eta\mu x$ είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ως διαφορά και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, της $\eta\mu x$, της $x^2+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και της $\sqrt{x}$ που είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x>0$ και είναι:

$$g'(x)=\left(\sqrt{x^2+1}-\eta\mu x\right)'=\left(\sqrt{x^2+1}\right)'-(\eta\mu x)'=$$

$$=\frac{\left(x^2+1\right)'}{2\sqrt{x^2+1}}-\sigma\upsilon\nu x=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}-\sigma\upsilon\nu x$$

άρα $g'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-\sigma\upsilon\nu x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε

$g'(0)=\dfrac{0}{\sqrt{0^2+1}}-\sigma\upsilon\nu 0=-1$, άρα

$g'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-1}{x}=-1$ και από τη θεωρία μας ξέρουμε $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$ άρα

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)+\sigma\upsilon\nu x-2}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{g(x)-1}{x}+\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\right)=g'(0)+0=-1.$$

Β΄ τρόπος

Για $x\neq 0$, είναι:

$$\frac{g(x)+\sigma\upsilon\nu x-2}{x}=\frac{\sqrt{x^2+1}-\eta\mu x-1+\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}-\frac{\eta\mu x}{x}+\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}$$

- $$\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-1^2}{x\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=$$

$$=\frac{x^2\cancel{+1}\cancel{-1}}{x\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}$$

- $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}=\frac{0}{\sqrt{0^2+1}+1}=0.$$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1.$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0.$

Άρα:

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)+\sigma\upsilon\nu x-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-\eta\mu x-1+\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}-\frac{\eta\mu x}{x}+\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\right)=$$

$$=0-1+0=-1.$$

β) Για το $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$ έχουμε διαδοχικά:

$$g(x)=\sqrt{x^2+1}-\eta\mu x=\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}-\eta\mu x=$$

$$=\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\eta\mu x=|x|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\eta\mu x\overset{x\to+\infty}{\underset{x>0}{=}}$$

$$=x\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\eta\mu x=x\cdot\underbrace{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{\eta\mu x}{x}\right)}_{A(x)}$$

Όμως $\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right|=\frac{|\eta\mu x|}{|x|}\leq\frac{1}{|x|}\Rightarrow-\frac{1}{|x|}\leq\frac{\eta\mu x}{x}\leq\frac{1}{|x|}$ και έτσι

$$\left.\begin{array}{l}-\frac{1}{|x|}\leq\frac{\eta\mu x}{x}\leq\frac{1}{|x|}\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{|x|}\right)=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{|x|}=0\end{array}\right\}\overset{\kappa.\pi.}{\Rightarrow}\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0 \text{ άρα}$$

$$\lim_{x\to+\infty}A(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{\eta\mu x}{x}\right)=\sqrt{1+0}-0=1, \text{ οπότε}$$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}x\cdot A(x)=(+\infty)\cdot 1=+\infty.$$

Γ3. Αφού $f(x)=\frac{x}{g(x)+\eta\mu x}$, $x\in\mathbb{R}$, άρα $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων: της x που είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και της x^2+1 που είναι παραγωγίσιμη και θετική για κάθε $x\in\mathbb{R}$, και της $\sqrt{x}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x>0$ και

$$f'(x)=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)'=\frac{(x)'\cdot\sqrt{x^2+1}-x\cdot\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+1}-x\cdot\frac{\left(x^2+1\right)'}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{\sqrt{x^2+1}-x\cdot\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=$$

$$=\frac{\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{x^2+1-x^2}{\left(x^2+1\right)\cdot\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\left(x^2+1\right)\cdot\sqrt{x^2+1}}.$$

Άρα, $f'(x)=\frac{1}{\left(x^2+1\right)\cdot\sqrt{x^2+1}}>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και $1-1$ στο $\mathbb{R}$.

β) Το σύνολο τιμών της είναι $f(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)$ έτσι

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\overset{x\to-\infty}{\underset{x<0}{=}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{1+0}}=-1$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\overset{x\to+\infty}{\underset{x>0}{=}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1+0}}=1.$$

Οπότε το σύνολο τιμών της f είναι:

$$f(\mathbb{R})=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\ \lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-1,1).$$

Άρα η $f:\mathbb{R}\to(-1,1)\subseteq\mathbb{R}$ σαν γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ είναι και $1-1$ στο $\mathbb{R}$ άρα αντιστρέφεται, δηλαδή ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση δηλαδή η $f^{-1}:(-1,1)\to\mathbb{R}$ και γενικά ισχύει ότι $y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$.

Οπότε $y=f(x)\Leftrightarrow y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}},x\in\mathbb{R},y\in(-1,1)$ και x,y ομόσημοι $\Leftrightarrow$

$y\cdot\sqrt{x^2+1}=x,\ x\in\mathbb{R},y\in(-1,1)$ και x,y ομόσημοι $\Leftrightarrow$

$y^2\cdot\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2=x^2,\ x\in\mathbb{R},y\in(-1,1)$ και x,y ομόσημοι $\Leftrightarrow$

$y^2\cdot\left(x^2+1\right)=x^2,\ x\in\mathbb{R},y\in(-1,1)$ και x,y ομόσημοι $\Leftrightarrow$

$y^2\cdot x^2+y^2=x^2,\ x\in\mathbb{R},y\in(-1,1)$ και x,y ομόσημοι $\Leftrightarrow$

$y^2=x^2-y^2\cdot x^2,\ x\in\mathbb{R},y\in(-1,1)$ και x,y ομόσημοι $\Leftrightarrow$

$\left(1-y^2\right)\cdot x^2=y^2,\ x\in\mathbb{R},y\in(-1,1)$ και x,y ομόσημοι.

Όμως για κάθε $y\in(-1,1)$ είναι $1-y^2\neq0$, οπότε

$x^2=\dfrac{y^2}{1-y^2},\ x\in\mathbb{R},y\in(-1,1)$, και x,y ομόσημοι $\Leftrightarrow$

$\sqrt{x^2}=\sqrt{\dfrac{y^2}{1-y^2}},\ x\in\mathbb{R},y\in(-1,1)$, και x,y ομόσημοι $\Leftrightarrow$

(όμως για κάθε $y\in(-1,1)$ είναι $y^2\geq0$ και $1-y^2>0$) άρα

$|x|=\dfrac{\sqrt{y^2}}{\sqrt{1-y^2}},\ x\in\mathbb{R},y\in(-1,1)$, και x,y ομόσημοι $\Leftrightarrow$

$|x|=\dfrac{|y|}{\sqrt{1-y^2}},\ x\in\mathbb{R},y\in(-1,1)$, και x,y ομόσημοι.

- Αν $x \in [0,+\infty)$, τότε και $\left.\begin{array}{l} y \geq 0 \\ y \in (-1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow y \in [0,1)$, οπότε

$$|x| = \frac{|y|}{\sqrt{1-y^2}} \Rightarrow x = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}, \ x \in [0,+\infty), y \in [0,1).$$

- Αν $x \in (-\infty,0)$, τότε και $\left.\begin{array}{l} y < 0 \\ y \in (-1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow y \in (-1,0)$, οπότε

$$|x| = \frac{|y|}{\sqrt{1-y^2}} \Rightarrow -x = \frac{-y}{\sqrt{1-y^2}}, \ x \in (-\infty,0), y \in (-1,0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}, \ x \in (-\infty,0), y \in (-1,0)$$

Άρα σε κάθε περίπτωση $x = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}, \ x \in \mathbb{R}, y \in (-1,1)$.

Οπότε η αντίστροφη συνάρτηση της $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ είναι

$$x = f^{-1}(y) = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}, \ y \in (-1,1)$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$y = f^{-1}(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \ x \in (-1,1)$$

Άρα $f^{-1}(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \ x \in (-1,1)$.

γ) Για τη συνάρτηση $\varphi(x)$ τέτοια ώστε $(f \circ \varphi)(x) = \eta\mu x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

έχουμε $(f \circ \varphi)(x) = \eta\mu x \Leftrightarrow f(\varphi(x)) = \eta\mu x \Leftrightarrow \varphi(x) = f^{-1}(\eta\mu x)$, άρα

$$\varphi(x) = f^{-1}(\eta\mu x) = \frac{\eta\mu x}{\sqrt{1-\eta\mu^2 x}}, -1 < \eta\mu x < 1, \text{ δηλαδή}$$

$$\varphi(x) = f^{-1}(\eta\mu x) = \frac{\eta\mu x}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2 x}}, x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \text{ ή}$$

$$\varphi(x) = \frac{\eta\mu x}{|\sigma\upsilon\nu x|}, x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

δ) Για τη συνάρτηση $K(x)$, τέτοια ώστε $(K\circ f)(x)=\ell n\left(1-x^2\right)$ για κάθε $x\in(-1,1)$, έχουμε $(K\circ f)(x)=\ell n\left(1-x^2\right)\Leftrightarrow K(f(x))=\ell n\left(1-x^2\right)$ σχέση (1) για κάθε $x\in(-1,1)$.

Θέτουμε $y=f(x)$, οπότε

$$y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)=\frac{y}{\sqrt{1-y^2}},\ x\in\mathbb{R},y\in(-1,1),$$

οπότε η σχέση (1) γίνεται

$$K(f(x))=\ell n\left(1-x^2\right)\Rightarrow K(y)=\ell n\left(1-\left(f^{-1}(y)\right)^2\right) \text{ με}$$

$$\left.\begin{array}{l} x=f^{-1}(y)\in(-1,1) \\ \quad\text{και} \\ y\in(-1,1) \end{array}\right\},\ \text{άρα } K(y)=\ell n\left(1-\left(\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\right)^2\right),\ \text{με}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\in(-1,1) \\ \quad\text{και} \\ y\in(-1,1) \end{array}\right\}$$

$$K(y)=\ell n\left(1-\left(\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\right)^2\right),\ \text{με}\ \left.\begin{array}{c} -1<\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}<1 \\ \text{και} \\ y\in(-1,1) \end{array}\right\}$$

$$K(y)=\ell n\left(1-\frac{y^2}{1-y^2}\right)=\ell n\left(\frac{1-y^2}{1-y^2}-\frac{y^2}{1-y^2}\right)=\ell n\left(\frac{1-2y^2}{1-y^2}\right),\ \text{με}$$

$$\left.\begin{array}{c} -1<\dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}<1 \\ \text{και} \\ y\in(-1,1) \\ \text{και} \\ \dfrac{1-2y^2}{1-y^2}>0 \end{array}\right\} \overset{1-y^2>0}{\underset{y\in(-1,1)}{\Leftrightarrow}} \left.\begin{array}{c} \left|\dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}\right|<1 \\ \text{και} \\ y\in(-1,1) \\ \text{και} \\ 1-2y^2>0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} \dfrac{|y|}{\left|\sqrt{1-y^2}\right|}<1 \\ \text{και} \\ y\in(-1,1) \\ \text{και} \\ y\in\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{|y|}{\sqrt{1-y^2}}<1 \\ \text{και} \\ y\in(-1,1) \\ \text{και} \\ y\in\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} 0\le|y|<\sqrt{1-y^2} \\ \text{και} \\ y\in(-1,1) \\ \text{και} \\ y\in\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} 0\le|y|^2<\left(\sqrt{1-y^2}\right)^2 \\ \text{και} \\ y\in(-1,1) \\ \text{και} \\ y\in\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c} 0\le y^2<1-y^2 \\ \text{και} \\ y\in(-1,1) \\ \text{και} \\ y\in\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} 2y^2-1<0 \\ \text{και} \\ y\in(-1,1) \\ \text{και} \\ y\in\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$y\in\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, άρα $K(y)=\ell n\left(\dfrac{1-2y^2}{1-y^2}\right), y\in\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Δηλαδή $K(x)=\ell n\left(\dfrac{1-2x^2}{1-x^2}\right),\quad x\in\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και τέτοια ώστε να ισχύουν

- $f''(x)+f(x)=0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με $f(0)>0$

- $\ell nf(0)+1=f(0)$
- $3^{f(0)+f'(0)}+4^{f(0)+f'(0)}=5^{f(0)+f'(0)}$

Δ1. Να δείξετε ότι $f(0)=f'(0)=1$ και η συνάρτηση $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$G(x)=\left(f(x)-\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x\right)^2+\left(f'(x)-\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x\right)^2$$

είναι σταθερή στο πεδίο ορισμού της και να βρείτε την f

Μονάδες 5

Δ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα στο διάστημα $[-2\pi,0]$ βρείτε το πρόσημο της f στο διάστημα $[-2\pi,0]$

Μονάδες 5

Δ3. Να δείξετε ότι $e^{f(x)}\le e^{\sqrt{2}}$. για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Για ποιες τιμές του x στο διάστημα $[-2\pi,0]$ ισχύει η ισότητα;

Μονάδες 5

Δ4. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=e^x\cdot f(x)$, έχει στο $-\infty$, για οριζόντια ασύμπτωτη τον άξονα $x'x$ και τον τέμνει σε άπειρα σημεία.

Μονάδες 5

Δ5. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=e^x-x^2$. Να δείξετε ότι τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα ακριβώς σημείο και η γραφική της παράσταση στο σημείο τομής της με τον άξονα $y'y$ δέχεται κοινή εφαπτομένη με την γραφική παράσταση της f στο ίδιο σημείο.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε ότι $\ell nf(0)+1=f(0)\Leftrightarrow \ell nf(0)=f(0)-1$ και ξέρουμε ότι $\ell nt\le t-1$, για κάθε $t>0$ και το "=" μόνο για $t=1$ οπότε για να ισχύει ότι $\ell nf(0)=f(0)-1\Leftrightarrow f(0)=1$

Έχουμε επίσης ότι ισχύει $3^{f(0)+f'(0)}+4^{f(0)+f'(0)}=5^{f(0)+f'(0)}$

και έστω ότι $f(0)+f'(0)=\alpha$, οπότε η παραπάνω γίνεται

$$3^{f(0)+f'(0)}+4^{f(0)+f'(0)}=5^{f(0)+f'(0)}\Leftrightarrow 3^\alpha+4^\alpha=5^\alpha \overset{5^\alpha>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{3^\alpha+4^\alpha}{5^\alpha}=1\Leftrightarrow \frac{3^\alpha}{5^\alpha}+\frac{4^\alpha}{5^\alpha}=1\Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^\alpha+\left(\frac{4}{5}\right)^\alpha-1=0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x-1,\ x\in\mathbb{R}$

η οποία είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ αφού $0<\frac{3}{5}<1$ και $0<\frac{4}{5}<1$ ή και με τη βοήθεια της παραγώγου της, ισχύει ότι

$$F'(x)=\left(\left(\frac{3}{5}\right)^x\right)'+\left(\left(\frac{4}{5}\right)^x\right)'-(1)'=\left(\frac{3}{5}\right)^x\cdot\underbrace{\ell n\left(\frac{3}{5}\right)}_{<0}+\left(\frac{4}{5}\right)^x\cdot\underbrace{\ell n\left(\frac{4}{5}\right)}_{<0}-0\Rightarrow$$

$$F'(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x\cdot\ell n\left(\frac{3}{5}\right)+\left(\frac{4}{5}\right)^x\cdot\ell n\left(\frac{4}{5}\right)<0$$

άρα η συνάρτηση F είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και $1-1$ και είναι

$$F(2)=\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2-1=\frac{9}{25}+\frac{16}{25}-1=0$$

οπότε

$$\left(\frac{3}{5}\right)^\alpha+\left(\frac{4}{5}\right)^\alpha-1=0\Leftrightarrow F(\alpha)=F(2)\underset{1-1}{\overset{F}{\Leftrightarrow}}\alpha=0\Leftrightarrow f(0)+f'(0)=2\Rightarrow f'(0)=1$$

Άρα πράγματι $f(0)=f'(0)=1$.

Η συνάρτηση $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$G(x)=\left(f(x)-\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x\right)^2+\left(f'(x)-\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x\right)^2$, είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ως άθροισμα, σύνθεση και διαφορά παραγωγίσιμων και ισχύει ότι

$G'(x)=$

$$\left(\left(f(x)-\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x\right)^2\right)'+\left(\left(f'(x)-\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x\right)^2\right)'=$$

$$2\left(f(x)-\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x\right)\left(f(x)-\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x\right)'+2\left(f'(x)-\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x\right)\left(f'(x)-\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x\right)'=$$

$$2\left(f(x)-\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x\right)\left(f'(x)-\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x\right)+2\left(f'(x)-\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x\right)\left(f''(x)+\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\right)=$$

$$2\left(f'(x)-\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x\right)\left(f(x)-\cancel{\eta\mu x}-\cancel{\sigma\upsilon\nu x}+f''(x)+\cancel{\eta\mu x}+\cancel{\sigma\upsilon\nu x}\right)=$$

Άρα

$$G'(x)=2\left(f'(x)-\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x\right)\left(f(x)+f''(x)\right)=2\left(f'(x)-\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x\right)\cdot 0=0$$

- αφού από υπόθεση έχουμε ότι ισχύει $f''(x)+f(x)=0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Άρα $G'(x)=0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα από το Θεώρημα των Συνεπειών του Θ.Μ.Τ. του Διαφορικού Λογισμού η G είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$, επομένως θα υπάρχει σταθερά $c\in\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $G(x)=c$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δηλαδή $\left(f(x)-\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x\right)^2+\left(f'(x)-\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x\right)^2=c$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Έτσι για $x=0$ η παραπάνω γίνεται

$$\left(f(0)-\cancel{\eta\mu 0}-\sigma\upsilon\nu 0\right)^2+\left(f'(0)-\sigma\upsilon\nu+\cancel{\eta\mu 0}\right)^2=c\Rightarrow$$

$$(1-1)^2+(1-1)^2=c\Rightarrow c=0$$

οπότε $\underbrace{\left(f(x)-\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x\right)^2}_{\geq 0}+\underbrace{\left(f'(x)-\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x\right)^2}_{\geq 0}=0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

αναγκαστικά θα ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$$\left.\begin{matrix} f(x)-\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x=0 \\ \kappa\alpha\iota \\ f'(x)-\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x=0 \\ x\in\mathbb{R}\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix} f(x)=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x \\ \kappa\alpha\iota \\ f'(x)=\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x\end{matrix}\right\}$$ άρα $f(x)=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$,

Δ2. **Έχουμε ότι** $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$. Άρα η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα και για κάθε $x\in[-2\pi,0]$, έτσι τα μοναδικά κρίσιμα σημεία της είναι μόνο οι ρίζες της παραγώγου της στο αντίστοιχο διάστημα.

- $$\left.\begin{matrix} f'(x)=0 \\ x\in[-2\pi,0]\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix} \sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x=0 \\ x\in[-2\pi,0]\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix} \sigma\upsilon\nu x=\eta\mu x \\ x\in[-2\pi,0]\end{matrix}\right\}\overset{(*)}{\Leftrightarrow}\left.\begin{matrix} \dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=1 \\ x\in[-2\pi,0]\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left.\begin{matrix} \varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{4} \\ x\in[-2\pi,0]\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix} x=\kappa\pi+\dfrac{\pi}{4},\kappa\in\mathbb{Z} \\ x\in[-2\pi,0]\end{matrix}\right\}$$

(αν $(*)$ $\left.\begin{matrix} \sigma\upsilon\nu x=0 \\ \sigma\upsilon\nu x=\eta\mu x\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix} \sigma\upsilon\nu x=0 \\ \eta\mu x=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x=0$. **Άτοπο)**

οπότε αναζητούμε τις ακέραιες τιμές του $\kappa\in\mathbb{Z}$ για τις οποίες οι λύσεις $x=\kappa\pi+\dfrac{\pi}{4},\kappa\in\mathbb{Z}$, ανήκουν στο διάστημα $[-2\pi,0]$. Οπότε

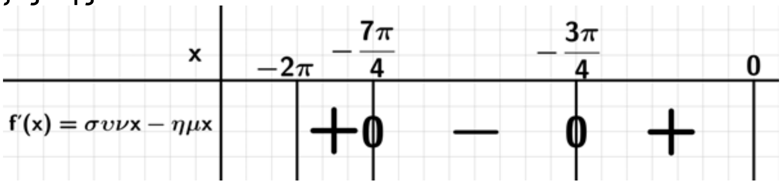
$$\left.\begin{matrix} -2\pi\leq x\leq 0 \\ \kappa\in\mathbb{Z}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix} -2\pi\leq\kappa\pi+\dfrac{\pi}{4}\leq 0 \\ \kappa\in\mathbb{Z}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix} -2\leq\kappa+\dfrac{1}{4}\leq 0 \\ \kappa\in\mathbb{Z}\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} -2-\dfrac{1}{4}\leq\kappa\leq-\dfrac{1}{4} \\ \kappa\in\mathbb{Z}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix} \text{ή } \kappa=-2 \\ \text{ή } \kappa=-1\end{matrix}\right\}$$

Άρα οι ρίζες της παραγώγου στο διάστημα $[-2\pi,0]$ είναι οι $x_1=-2\pi+\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{7\pi}{4}$

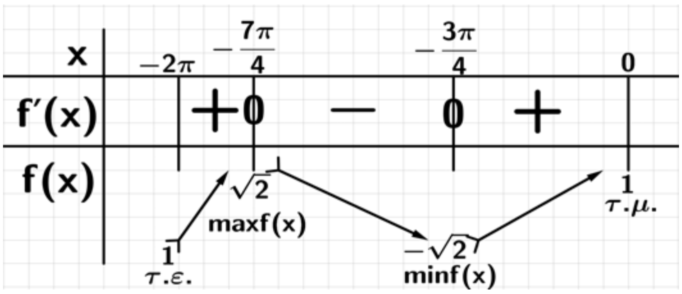
και $x_2=-1\cdot\pi+\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{3\pi}{4}$

Στη συνέχεια μελετούμε το πρόσημο της f', σύμφωνα με το σχόλιο στο θεώρημα Bolzano, αφού η $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$ **σαν συνεχής συνάρτηση θα διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα που χωρίζουν το** $[-2\pi,0]$ οι διαδοχικές ρίζες της



- αν $x=-2\pi\in\left[-2\pi,-\frac{7\pi}{4}\right)\Rightarrow f'(-2\pi)=\sigma\upsilon\nu(-2\pi)-\cancel{\eta\mu(-2\pi)}=1>0$ άρα $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\left[-2\pi,-\frac{7\pi}{4}\right)$
- αν $x=-\pi\in\left(-\frac{7\pi}{4},-\frac{3\pi}{4}\right)\Rightarrow f'(-\pi)=\sigma\upsilon\nu(-\pi)-\cancel{\eta\mu(-\pi)}=-1<0$ άρα $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\left(-\frac{7\pi}{4},-\frac{3\pi}{4}\right)$
- αν $x=0\in\left(-\frac{3\pi}{4},0\right]\Rightarrow f'(0)=\sigma\upsilon\nu(0)-\cancel{\eta\mu(0)}=1>0$ άρα $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\left(-\frac{3\pi}{4},0\right]$

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι ρίζες της παραγώγου στο διάστημα $[-2\pi,0]$ και το πρόσημο της από όπου προκύπτουν τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της



- η f συνεχής στο $\left[-2\pi,-\frac{7\pi}{4}\right]$ και $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\left[-2\pi,-\frac{7\pi}{4}\right)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[-2\pi,-\frac{7\pi}{4}\right]$ και για κάθε

$$x\in\left[-2\pi,-\frac{7\pi}{4}\right]\Rightarrow f(-2\pi)\le f(x)\le f\left(-\frac{7\pi}{4}\right)\Rightarrow 1\le f(x)\le\sqrt{2}$$

- η f συνεχής στο $\left[-\frac{7\pi}{4},-\frac{3\pi}{4}\right]$ και $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\left(-\frac{7\pi}{4},-\frac{3\pi}{4}\right)$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[-\frac{7\pi}{4},-\frac{3\pi}{4}\right]$ και για κάθε
$x\in\left[-\frac{7\pi}{4},-\frac{3\pi}{4}\right]\Rightarrow f\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\le f(x)\le f\left(-\frac{7\pi}{4}\right)\Rightarrow -\sqrt{2}\le f(x)\le\sqrt{2}$
- η f συνεχής στο $\left[-\frac{3\pi}{4},0\right]$ και $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\left(-\frac{3\pi}{4},0\right]$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{3\pi}{4},0\right]$ και για κάθε
$x\in\left[-\frac{3\pi}{4}\right]\Rightarrow f\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\le f(x)\le f(0)\Rightarrow -\sqrt{2}\le f(x)\le 1$
- Η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[-2\pi,0]$, άρα λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο διάστημα αυτό. έτσι
- η f στο εσωτερικό σημείο $x_1=-\frac{7\pi}{4}$, λαμβάνει (ολικό) μέγιστο το $\max f(x)=f\left(-\frac{7\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$
- η f στο εσωτερικό σημείο $x_2=-\frac{3\pi}{4}$, λαμβάνει (ολικό) ελάχιστο το $\min f(x)=f\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$
- η f στο άκρο $x_3=-2\pi$, λαμβάνει τοπικό ελάχιστο το $f(-2\pi)=1$
- η f στο άκρο $x_4=0$, λαμβάνει τοπικό μέγιστο το $f(0)=1$

Δ3. Θα δείξουμε ότι $f(x)=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\le\sqrt{2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

- **α τρόπος με διανύσματα!!!**
Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,1)$ και $\vec{\beta}=(\sigma\upsilon\nu x,\eta\mu x)$ προφανώς $|\vec{\alpha}|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ και $|\vec{\beta}|=\sqrt{\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x}=\sqrt{1}=1$ και τότε το εσωτερικό γινόμενο των δύο διανυσμάτων είναι
$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=(1,1)\cdot(\sigma\upsilon\nu x,\eta\mu x)=1\cdot\sigma\upsilon\nu x+1\cdot\eta\mu x=f(x)$
Όμως από τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου γνωρίζουμε ότι
$|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|\le|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\Rightarrow|\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x|\le\sqrt{2}\cdot 1$
άρα $|\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x|\le\sqrt{2}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ή $-\sqrt{2}\le\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\le\sqrt{2}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- Β τρόπος με τριγωνομετρία

$$f(x)=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=\eta\mu x+1\cdot\sigma\upsilon\nu x=$$

$$=\eta\mu x+\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}\cdot\sigma\upsilon\nu x=\eta\mu x+\frac{\eta\mu\frac{\pi}{4}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}}\sigma\upsilon\nu x=$$

$$=\frac{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}+\eta\mu\frac{\pi}{4}\cdot\sigma\upsilon\nu x}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}\cdot\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

οπότε $-1\le\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\le 1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ επομένως

$-\sqrt{2}\le\sqrt{2}\cdot\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\le\sqrt{2}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Έτσι αφού η συνάρτηση $d(x)=e^x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα $e^{-\sqrt{2}}\le e^{f(x)}\le e^{\sqrt{2}}$. **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$. οι τιμές του x στο διάστημα $[-2\pi,0]$ για τις οποίες ισχύει $\left.\begin{matrix}e^{f(x)}=e^{\sqrt{2}}\\ x\in[-2\pi,0]\end{matrix}\right\}\underset{1-1}{\overset{e^x}{\Leftrightarrow}}\left.\begin{matrix}f(x)=\sqrt{2}\\ x\in[-2\pi,0]\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow x=-\frac{7\pi}{4}$

Δ4. Η συνάρτηση $g(x)=e^x\cdot f(x)=e^x\cdot(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)$.

Παρατηρούμε ότι

$|g(x)|=|e^x\cdot f(x)|=|e^x\cdot(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)|=e^x\cdot|\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x|\le\sqrt{2}\cdot e^x$ άρα

$-\sqrt{2}\cdot e^x\le g(x)\le\sqrt{2}\cdot e^x$

επομένως επειδή

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2}\cdot e^x\right)=\sqrt{2}\cdot 0=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{2}\cdot e^x\right)=-\sqrt{2}\cdot 0=0$

άρα $\left.\begin{matrix}-\sqrt{2}\cdot e^x\le g(x)\le\sqrt{2}\cdot e^x\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2}\cdot e^x\right)=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{2}\cdot e^x\right)=0\end{matrix}\right\}\overset{\kappa.\pi.}{\Rightarrow}\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=0$

Άρα η γραφική παράσταση της g έχει την ευθεία $y=0$, δηλαδή τον άξονα $x'x$, για οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ και τον τέμνει σε άπειρα σημεία, της μορφής $M\left(\kappa\cdot\pi-\frac{\pi}{4},0\right)$ με $\kappa\in\mathbb{Z}$ αφού η εξίσωση έχει άπειρες λύσεις:

$$g(x)=0 \Leftrightarrow e^{x}\cdot(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)=0 \overset{e^{x}>0}{\Leftrightarrow}$$

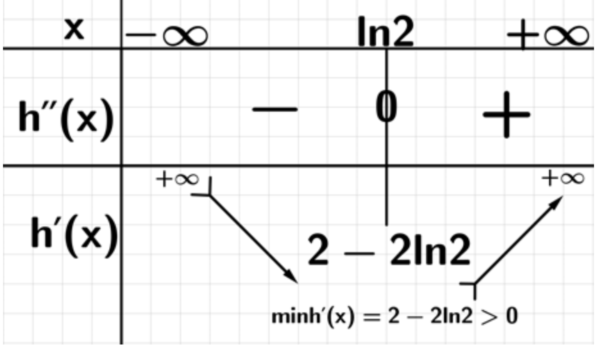
$$\Leftrightarrow \eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cdot\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=\kappa\pi,\kappa\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=\kappa\pi-\frac{\pi}{4},\kappa\in\mathbb{Z}$$

Δ5. Η συνάρτηση $h(x)=e^{x}-x^{2}$, είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και ισχύει ότι $h'(x)=\left(e^{x}-x^{2}\right)'=e^{x}-2x$, $x\in\mathbb{R}$. Για το πρόσημο της h', παρατηρούμε ότι και η $h'(x)=e^{x}-2x$, είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και ισχύει ότι $h''(x)=\left(e^{x}-2x\right)'=e^{x}-2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

- $h''(x)>0 \Leftrightarrow e^{x}-2>0 \Leftrightarrow e^{x}>2 \Leftrightarrow x>\ell n2$
- $h''(x)<0 \Leftrightarrow e^{x}-2<0 \Leftrightarrow e^{x}<2 \Leftrightarrow x<\ell n2$
- $h''(x)=0 \Leftrightarrow e^{x}-2=0 \Leftrightarrow e^{x}=2 \Leftrightarrow x=\ell n2$

παρακάτω φαίνεται η μοναδική ρίζα της h'' και το πρόσημο της από όπου προκύπτει η μονοτονία της h' και το ελάχιστο της το οποίο είναι θετικό με αποτέλεσμα η h' να είναι θετική για κάθε $x\in\mathbb{R}$



- η h' είναι συνεχής στο $(-\infty,\ell n2]$ και $h''(x)<0$, για κάθε $x<\ell n2$ άρα η h' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,\ell n2]$, άρα για κάθε $x\le\ell n2 \Rightarrow h'(x)\ge h'(\ell n2)$ (σχέση 1)
- η h' είναι συνεχής στο $[\ell n2,+\infty)$ και $h''(x)>0$, για κάθε $x>\ell n2$ άρα η h' είναι γνησίως αύξουσα στο $[\ell n2,+\infty)$, άρα για κάθε $x\ge\ell n2 \Rightarrow h'(x)\ge h'(\ell n2)$(σχέση 2)
- Από τις 1 και 2 προκύπτει ότι $h'(x)\ge h'(\ell n2)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Δηλαδή $h'(x)\ge e^{\ell n2}-2\ell n2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, δηλαδή $h'(x)\ge 2-2\ell n2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. $h'(x)\ge 2(1-\ell n2)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

- Άρα η συνάρτηση $h(x)=e^x-x^2$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. άρα και $1-1$, οπότε αν έχει ρίζα αυτή θα είναι μοναδική. Παρατηρούμε ότι $h(-1)=e^{-1}-(-1)^2=\frac{1}{e}-1<0$, ενώ $h(0)=e^0-0^2=1>0$.

  Έτσι η $h(x)=e^x-x^2$ είναι συνεχής στο $[-1,0]$ ως διαφορά συνεχών και $h(-1)\cdot h(0)<0$, Άρα από το Θεώρημα Bolzano θα υπάρχει $x_0\in(-1,0)$ μοναδικό στο $\mathbb{R}$, λόγο μονοτονίας της h τέτοιο ώστε $h(x_0)=0$.

  Δηλαδή η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0\in(-1,0)$. Επομένως υπάρχει μοναδικό $x_0\in(-1,0)$, τέτοιο ώστε $e^{x_0}=x_0^2$.
- η γραφική της παράσταση της $h(x)=e^x-x^2$ στο σημείο τομής της με τον άξονα $y'y$, δηλαδή στο $A(0,1)$ αφού $h(0)=e^0-0^2=1>0$, δέχεται εφαπτομένη με συντελεστή διεύθυνσης $h'(0)=e^0-2\cdot 0=1$ άρα έχει εξίσωση $y-h(0)=h'(0)(x-0)$ ή $y-1=x$, δηλαδή την $y=x+1$
- Η $f(x)=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$ για $x=0$ είναι $f(0)=1$ και $f'(0)=1$ άρα στο σημείο $A(0,1)$ δέχεται εφαπτομένη την $y-f(0)=f'(0)(x-0)$ δηλαδή την $y=x+1$ άρα η γραφική της παράσταση της $h(x)=e^x-x^2$ στο $A(0,1)$ δέχεται κοινή εφαπτομένη με την γραφική παράσταση της f στο ίδιο σημείο.