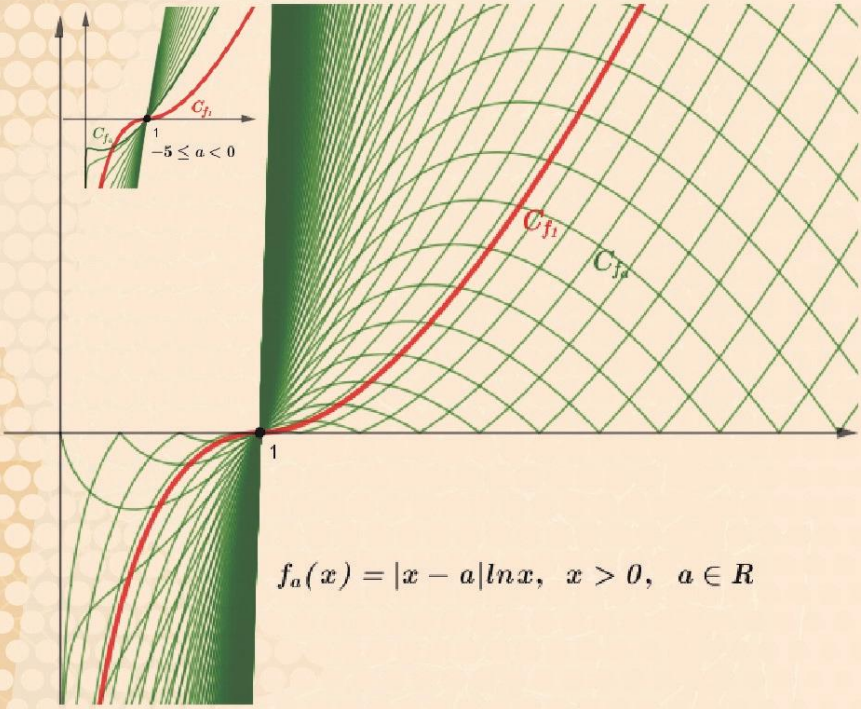
Ν. Ζανταρίδης | Ν. Καρπόζηλος

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΜΑΤΟΓΡΑΦΙΑ

(ΠΡΩΤΟΤΥΠΑ ΘΕΜΑΤΑ)



Προσανατολισμός Θετικών Σπουδών,
Σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΤ

e-mail: nikoszantar@yahoo.gr - karpozilosn@hotmail.com

Σελίδες: 620

Σχήμα 17 X 24

ISBN: 978-618-84722-2-8

© Copyright: Ιανουάριος 2020, **Εκδόσεις Ζανταρίδης Τηλέγραφος**

Απαγορεύεται σε όλα τα φυσικά ή νομικά πρόσωπα Δημοσίου ή Ιδιωτικού Δικαίου, η αναδημοσίευση, ολικά ή μερικά, η αναπαραγωγή, η μετάδοση, η παράφραση και η διασκευή, με οποιοδήποτε τρόπο (μηχανικό – ηλεκτρονικό - φωτοτυπικό κ.λπ.) του παρόντος.

Κεντρική Διάθεση:

Εκδόσεις: **Ζανταρίδης - Τηλέγραφος,** **https://zanthl.gr**

Τηλ: Κ.Τ: 6974033501 – **Ν.Ζ:** 6936269609

Για τον Μάριο.

Έζησε αθόρυβα και αθόρυβα έφυγε!

ΖΤ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται στους μαθητές της Γ΄ Λυκείου και στους καθηγητές που τους προετοιμάζουν για τις πανελλήνιες εξετάσεις. Αποτελεί μια πρόταση των συγγραφέων για μια ποιοτική επανάληψη σε όλη τη διάρκεια προετοιμασίας των υποψηφίων. Προσπαθήσαμε η διάταξη των ασκήσεων να ακολουθεί την πορεία της ύλης, σύμφωνα με τη σειρά των κεφαλαίων του σχολικού βιβλίου. Τα τελευταία θέματα συνδυάζουν τις γνώσεις που αναφέρονται στο σύνολο της εξεταστέας ύλης. Συνεπώς, το συγκεκριμένο βιβλίο μπορεί να αξιοποιηθεί από την αρχή της σχολικής χρονιάς.

Ευχαριστούμε θερμά:

- τους φίλους μαθηματικούς Ιορδάνη Κόσογλου και Σάκη Μίσκο που επιμελήθηκαν τις διορθώσεις των κειμένων,
- τον φίλο μαθηματικό Κώστα Δόρτσιο για την επιμέλεια του εξωφύλλου,
- τη φιλόλογο Σοφία Μιμιλίδου για τη φιλολογική επιμέλεια των κειμένων.

Ευχόμαστε η προσπάθεια αυτή να αποτελέσει έναν χρήσιμο οδηγό στη γνώση και την επιτυχία για τους μαθητές και τους συναδέλφους εκπαιδευτικούς.

Οι συγγραφείς:

Ν. Ζανταρίδης

Ν. Καρπόζηλος

ΖΤ

ZT

ΘΕΜΑ 47

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Να μελετηθεί η f ως προς την κυρτότητα.

γ) Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της C_f.

δ) Να λυθεί η εξίσωση: $(1-x)\sqrt{x^2-2x+2}+1=\sqrt{x^4+x^2}+2x$.

ε) Να λυθεί η ανίσωση:

$$f\left(x^2\right)\cdot f\left(e^x\right)+f(6x-8)f(2e-ex)<f\left(x^2\right)f(2e-ex)+f\left(e^x\right)f(6x-8).$$

στ) Να παρασταθεί γραφικά η f.

ΘΕΜΑ 48

Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$\left(f'(x)-1\right)\left(f(x)-x\right)=x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Ακόμη, ισχύει: $e^{f(0)x}\geq\sqrt{2}\cdot x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι: i) $f(0)=\sqrt{2}$.

ii) $f(x)=\sqrt{x^2+2x+2}+x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και να δείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

δ) Να βρείτε τη σχετική θέση της C_f με τις ασύμπτωτές της, στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

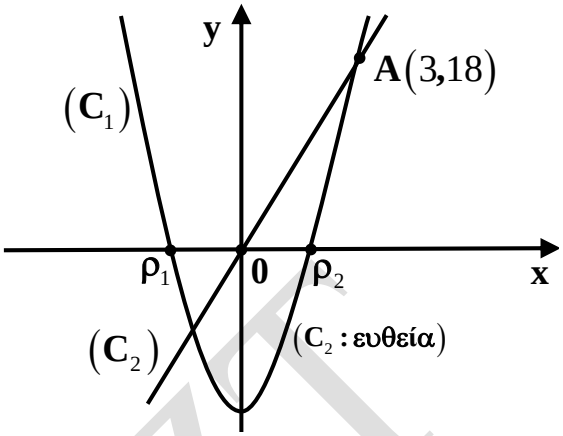
ε) Να παρασταθεί η f γραφικά.

στ) Να οριστεί η αντίστροφη συνάρτηση της f.

ΘΕΜΑ 95*

Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f' και f''.



Δίνεται ακόμη ότι $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$.

α) Να δείξετε ότι η C_1 είναι η γραφική παράσταση της f' και η C_2 είναι η γραφική παράσταση της f''.

β) Να δείξετε ότι: $f(x) = x^3 - 9x,\ x\in\mathbb{R}$.

γ) Να παρασταθεί γραφικά η f.

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις $C_{f'}$ και $C_{f''}$.

«Ο μεγάλος Αρχιτέκτονας του Σύμπαντος αρχίζει να μοιάζει τώρα σαν ένας γνήσιος μαθηματικός.»

(James Jeans)

ΘΕΜΑ 48

Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$\left(f'(x)-1\right)\left(f(x)-x\right)=x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Ακόμη, ισχύει: $e^{f(0)x}\geq\sqrt{2}\cdot x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι: i) $f(0)=\sqrt{2}$.

ii) $f(x)=\sqrt{x^2+2x+2}+x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και να δείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

δ) Να βρείτε τη σχετική θέση της C_f με τις ασύμπτωτές της, στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

ε) Να παρασταθεί η f γραφικά.

στ) Να οριστεί η αντίστροφη συνάρτηση της f.

Λύση

α) i) Από την υπόθεση, έχουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$e^{f(0)x}-\sqrt{2}x-1\geq 0:\ (1).$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=e^{f(0)x}-\sqrt{2}x-1,\ x\in\mathbb{R},$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R},$ με

$$g'(x)=\left(e^{f(0)x}-\sqrt{2}\cdot x-1\right)'=e^{f(0)x}\cdot\left(f(0)x\right)'-\sqrt{2}=$$
$$=f(0)e^{f(0)x}-\sqrt{2}.$$

Παρατηρούμε ότι είναι:

$g(0)=e^{f(0)\cdot 0}-\sqrt{2}\cdot 0-1=e^0-1=1-1=0,$ οπότε από την (1) προκύπτει ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $g(x)\geq g(0).$

Άρα, η g παρουσιάζει στο σημείο $x_0 = 0$ (εσωτερικό σημείο του $D_g = \mathbb{R}$) ελάχιστο, οπότε, σύμφωνα με το Θ. Fermat, ισχύει:

$$g'(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) \cdot e^{f(0) \cdot 0} - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow f(0) = \sqrt{2}.$$

ii) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\left(f'(x) - 1\right)\left(f(x) - x\right) = x + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\left(f(x) - x\right)\left(f'(x) - 1\right) = 2(x+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\left(f(x) - x\right)\left(f(x) - x\right)' = 2x + 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\left(f(x) - x\right)^2\right]' = \left(x^2 + 2x\right)' \Rightarrow \left(f(x) - x\right)^2 = x^2 + 2x + c.$$

Για $x = 0$ έχουμε:

$$\left(f(0) - 0\right)^2 = 0^2 + 2 \cdot 0 + c \Leftrightarrow \left(f(0)\right)^2 = c \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\right)^2 = c \Leftrightarrow c = 2.$$

Άρα, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\left(f(x) - x\right)^2 = x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|f(x) - x\right| = \sqrt{x^2 + 2x + 2} \Leftrightarrow \left|h(x)\right| = \sqrt{x^2 + 2x + 2} : (2),$$

όπου $h(x) = f(x) - x.$

Η συνάρτηση $h(x) = f(x) - x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων (η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$).

Ακόμη, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 2x + 2} > 0 \Rightarrow$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} \left|h(x)\right| > 0 \Rightarrow h(x) \neq 0.$$

ΖΤ

Επειδή η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $h(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έπεται ότι η h διατηρεί στο $\mathbb{R}$ σταθερό πρόσημο και επειδή είναι $h(0) = f(0) - 0 = \sqrt{2} > 0$ συμπεραίνουμε ότι είναι $h(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έτσι, από τη (2), προκύπτει ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$h(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2} \Leftrightarrow f(x) - x = \sqrt{x^2 + 2x + 2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2} + x.$$

Άρα, είναι: $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2} + x,\ x \in \mathbb{R}$.

β) • Είναι: $f'(x) = \left(\sqrt{x^2 + 2x + 2} + x\right)' =$

$$= \left(\sqrt{x^2 + 2x + 2}\right)' + (x)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 2x + 2}}\left(x^2 + 2x + 2\right)' + 1 =$$

$$= \frac{2x + 2}{2\sqrt{x^2 + 2x + 2}} + 1 = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} + 1 = \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 2} + x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}.$$

• Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι: $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 > (x+1)^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + 2x + 2} > \sqrt{(x+1)^2} \Rightarrow \sqrt{x^2 + 2x + 2} > |x+1| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |x+1| < \sqrt{x^2 + 2x + 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\sqrt{x^2 + 2x + 2} < x + 1 < \sqrt{x^2 + 2x + 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + 2x + 2} + x + 1 > 0: \ (\alpha) \\ \sqrt{x^2 + 2x + 2} - (x+1) > 0: \ (\beta) \end{cases}.$$

• Έτσι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι: $\sqrt{x^2 + 2x + 2} + x + 1 > 0 \overset{\left(\sqrt{x^2+2x+2} > 0\right)}{\Rightarrow}$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 2} + x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} > 0 \Rightarrow f'(x) > 0.$$

Επομένως, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Είναι:

$$f''(x)=\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}+1\right)'=\left[(x+1)\cdot\left(x^2+2x+2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]'+0=$$

$$=(x+1)'\cdot\left(x^2+2x+2\right)^{-\frac{1}{2}}+(x+1)\left[\left(x^2+2x+2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]'=$$

$$=\left(x^2+2x+2\right)^{-\frac{1}{2}}+(x+1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x^2+2x+2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(x^2+2x+2\right)'=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}-\frac{1}{2}(x+1)\cdot 2(x+1)\cdot\frac{1}{\left(x^2+2x+2\right)\cdot\sqrt{x^2+2x+2}}=$$

$$=\frac{\left(x^2+2x+2\right)-(x+1)^2}{\left(x^2+2x+2\right)\cdot\sqrt{x^2+2x+2}}=\frac{1}{\left(x^2+2x+2\right)\cdot\sqrt{x^2+2x+2}}>0,$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

γ) • Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε η C_f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη (αφού για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\in\mathbb{R}$).

• Στο $+\infty$ είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x+2}+x}{x}\overset{(x>0)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+x}{x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+1\right)=\sqrt{1+0+0}+1=2\in\mathbb{R}\quad\text{και}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+2}+x-2x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+2}-x\right)=$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+2x+2}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2x+2}+x\right)}{\sqrt{x^2+2x+2}+x} =$$

$$\overset{(x>0)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x+2-x^2}{x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(2+\frac{2}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+1} = \frac{2+0}{\sqrt{1+0+0}+1} = 1 \in \mathbb{R}.$$

Επομένως, η ευθεία $\varepsilon_1 : y = 2x+1$ είναι (πλάγια) ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

- Στο $-\infty$ είναι:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+2}+x\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+2x+2}+x\right)\left(\sqrt{x^2+2x+2}-x\right)}{\sqrt{x^2+2x+2}-x} =$$

$$\overset{(x<0)}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2x+2-x^2}{-x\cdot\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(2+\frac{2}{x}\right)}{x\left(-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}-1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2+\frac{2}{x}}{-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}-1} = \frac{2+0}{-\sqrt{1+0+0}-1} = -1 \in \mathbb{R},$$

οπότε η ευθεία $\varepsilon_2 : y = -1$ είναι (οριζόντια) ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Επομένως, η C_f έχει ακριβώς δύο ασύμπτωτες, οι οποίες είναι:

$\varepsilon_1 : y = 2x+1$ (πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$).

$\varepsilon_2 : y = -1$ (οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$).

δ) Από το (β) ερώτημα έχουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$\sqrt{x^2+2x+2}+x+1>0: \quad (\alpha).$

$\sqrt{x^2+2x+2}-(x+1)>0: \ (\beta).$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f(x)-(2x+1)=\sqrt{x^2+2x+2}+x-2x-1=$$

$$=\sqrt{x^2+2x+2}-(x+1) \overset{((\beta))}{>} 0 \Rightarrow f(x)-(2x+1)>0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(x)>2x+1,$ οπότε η C_f βρίσκεται πάνω από την ασύμπτωτή της, ευθεία $\varepsilon_1: y=2x+1$ σε όλο το $\mathbb{R}$.

Ακόμη, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f(x)-(-1)=\sqrt{x^2+2x+2}+x+1 \overset{((\alpha))}{>} 0 \Rightarrow f(x)+1>0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(x)>-1,$ οπότε η C_f βρίσκεται πάνω από την ασύμπτωτή της, ευθεία $\varepsilon_2: y=-1$ σε όλο το $\mathbb{R}$.

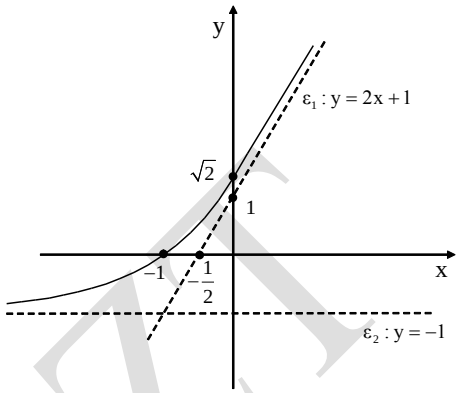
ε)
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1.$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+2}+x\right) \overset{((+\infty)+(+\infty))}{=} +\infty.$
- $f(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x+2}+x=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x+2}=-x \Leftrightarrow$

  $$\Leftrightarrow \begin{cases} -x \ge 0 \\ x^2+2x+2=(-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0 \\ 2x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-1.$$

  Άρα, η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(-1,0)$.
- Είναι: $f(0)=\sqrt{2},$ οπότε η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0,\sqrt{2})$.

Ο πίνακας μεταβολών και η γραφική παράσταση της f φαίνονται παρακάτω:

x	$-\infty$			$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	-1	↗		$+\infty$



στ) Η συνάρτηση f, ως γνησίως μονότονη στο $D_f = \mathbb{R}$, είναι συνάρτηση "$1-1$", οπότε η f είναι αντιστρέψιμη και το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών $f(\mathbb{R})$ της f.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $D_f = \mathbb{R}$, έπεται ότι το σύνολο τιμών της f είναι το

$f(\mathbb{R}) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = (-1, +\infty)$, αφού

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Άρα, το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το $D_{f^{-1}} = f(\mathbb{R}) = (-1, +\infty)$.

Θεωρούμε την εξίσωση $f(x) = y$, με $x \in D_f = \mathbb{R}$ και $y \in D_{f^{-1}} = (-1, +\infty)$ και τη λύνουμε ως προς x.

Έχουμε:

$$\begin{cases} f(x)=y \\ y>-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+2x+2}+x=y \\ y>-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+2x+2}=y-x \\ y>-1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y-x\geq 0 \\ y>-1 \\ x^2+2x+2=y^2-2xy+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\geq x \\ y>-1 \\ 2(y+1)x=y^2-2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y\geq x \\ y>-1 \\ x=\dfrac{y^2-2}{2(y+1)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y^2-2}{2(y+1)}\leq y \\ y>-1 \\ x=\dfrac{y^2-2}{2(y+1)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2-2\leq 2y^2+2y \\ y>-1 \\ x=\dfrac{y^2-2}{2(y+1)} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2+2y+2>0 \ (\text{ισχύει για κάθε } y>-1) \\ y>-1 \\ x=\dfrac{y^2-2}{2(y+1)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{y^2-2}{2(y+1)} \\ y>-1 \end{cases}.$$

Άρα: $f^{-1}(y)=\dfrac{y^2-2}{2(y+1)},\ y>-1.$

Επομένως, η αντίστροφη συνάρτηση της f ορίζεται ως εξής:

$$f^{-1}:(-1,+\infty)\to\mathbb{R},\ \text{με } f^{-1}(x)=\frac{x^2-2}{2(x+1)}.$$

«Τα καθαρά Μαθηματικά είναι το καλύτερο παιχνίδι του κόσμου. Σε καθηλώνει πιο πολύ από το σκάκι, έχει μεγαλύτερο ρίσκο από το πόκερ και διαρκεί περισσότερο από τη Μονόπολη. Και είναι δωρεάν, μπορείς να το παίξεις παντού -ο Αρχιμήδης το έπαιζε στη μπανιέρα του.»

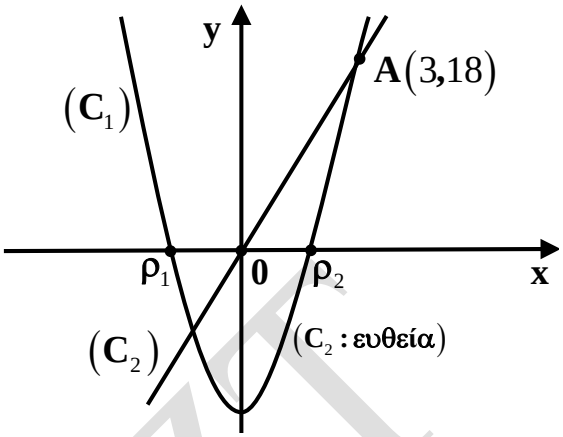
(Richard J. Trudeau)

ZT

ΘΕΜΑ 95*

Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f' και f''.



Δίνεται ακόμη ότι $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$.

α) Να δείξετε ότι η C_1 είναι η γραφική παράσταση της f' και η C_2 είναι η γραφική παράσταση της f''.

β) Να δείξετε ότι: $f(x) = x^3 - 9x,\ x\in\mathbb{R}$.

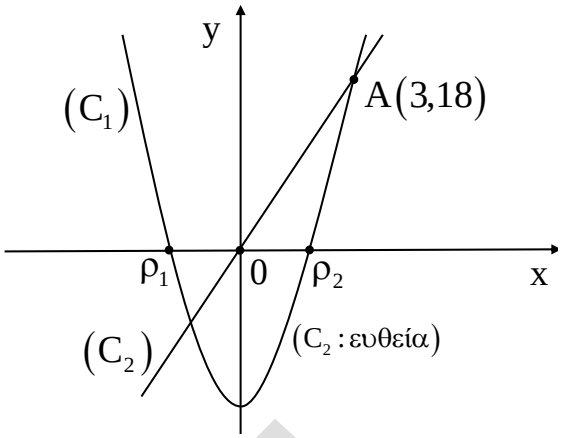
γ) Να παρασταθεί γραφικά η f.

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις $C_{f'}$ και $C_{f''}$.

Λύση

α) Έστω ότι C_2 είναι η γραφική παράσταση της f' και C_1 η γραφική παράσταση της f''.

Από τη γραφική παράσταση C_1 της f'' προκύπτει ότι για κάθε $x \in (\rho_1, \rho_2)$ ισχύει $f''(x) < 0$, οπότε η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο



(ρ_1, ρ_2), άτοπο, αφού από τη γραφική παράσταση C_2 της f', προκύπτει ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Επομένως, η C_1 είναι η γραφική παράσταση της f' και η C_2 η γραφική παράσταση της f''.

β) Η γραφική παράσταση της f'' είναι η C_2, δηλαδή είναι μια ευθεία που διέρχεται από το $O(0,0)$ και το $A(3,18)$. Επειδή η C_2 διέρχεται από το $O(0,0)$, έχει εξίσωση της μορφής $y = \alpha x$ και επειδή διέρχεται από το $A(3,18)$ ισχύει:

$18 = \alpha \cdot 3 \Leftrightarrow \alpha = 6$. Άρα $c_2 : y = 6x$.

Επομένως, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$f''(x) = 6x \Leftrightarrow (f'(x))' = (3x^2)' \Leftrightarrow f'(x) = 3x^2 + c_1$.

Επειδή η γραφική παράσταση της f' διέρχεται από το σημείο $A(3,18)$, έχουμε: $f'(3) = 18 \Leftrightarrow 3 \cdot 3^2 + c_1 = 18 \Leftrightarrow c_1 = -9$.

Άρα, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$f'(x) = 3x^2 - 9 \Leftrightarrow (f(x))' = (x^3 - 9x)' \Leftrightarrow f(x) = x^3 - 9x + c_2$.

Έχουμε, όμως:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0 \Leftrightarrow \int_{-1}^{1}\left(x^3 - 9x + c_2\right)dx = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^{1} x^3 dx - 9\int_{-1}^{1} x dx + \int_{-1}^{1} c_2 dx = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} - 9\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} + c_2\left(1-(-1)\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) - \frac{9}{2}(1-1) + 2c_2 = 0 \Leftrightarrow 2c_2 = 0 \Leftrightarrow c_2 = 0.$$

Άρα, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $f(x) = x^3 - 9x$.

γ)
- Το πεδίο ορισμού της f είναι το $D_f = \mathbb{R}$.
- Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (ως πολυωνυμική).
- Είναι $f'(x) = \left(x^3 - 9x\right)' = 3x^2 - 9 = 3\left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{3}\right)$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	TM	$\searrow$	TE	$\nearrow$	

Από το πρόσημο της $f'(x)$ που φαίνεται στον πίνακα, προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right], \left[\sqrt{3}, +\infty\right)$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right]$.

Η f παρουσιάζει:

- Στο $x_1 = -\sqrt{3}$ τοπικό μέγιστο, το

$$f\left(-\sqrt{3}\right) = \left(-\sqrt{3}\right)^3 - 9\left(-\sqrt{3}\right) = -3\sqrt{3} + 9\sqrt{3} = 6\sqrt{3}.$$

- Στο $x_2 = \sqrt{3}$ τοπικό ελάχιστο, το

  $f\left(\sqrt{3}\right) = \left(\sqrt{3}\right)^3 - 9\sqrt{3} = 3\sqrt{3} - 9\sqrt{3} = -6\sqrt{3}$.

Είναι: $f''(x) = 6x$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\cap$	σ.κ.	$\cup$	

Από το πρόσημο της $f''(x)$, που φαίνεται στον παραπάνω πίνακα, προκύπτει ότι:

- Η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$ και κυρτή στο $[0, +\infty)$.
- Η f παρουσιάζει καμπή στο $x_0 = 0$.

Είναι: $f(0) = 0^3 - 9 \cdot 0 = 0$.

Άρα, το σημείο καμπής της C_f είναι το $O(0,0)$.

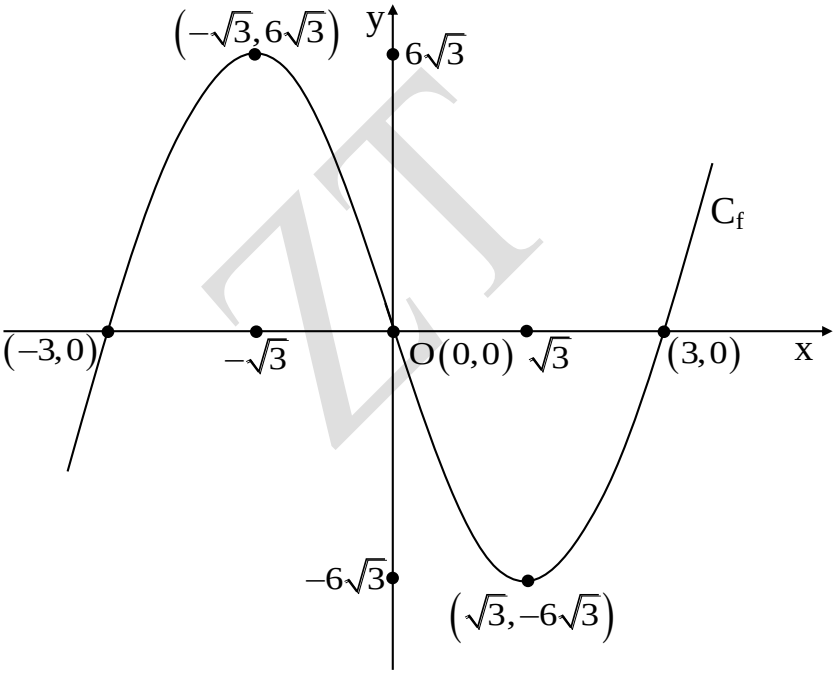
- Επειδή η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική $3^{ου}$ βαθμού, έπεται ότι η C_f δεν έχει ασύμπτωτες.
- Είναι $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^3 - 9x\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^3\right) = -\infty$

  και $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^3 - 9x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^3\right) = +\infty$.
- $-$ Για $x = 0$ έχουμε $y = f(0) = 0^3 - 9 \cdot 0 = 0$, οπότε η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $(0,0)$.
- $-$ Για $y = 0$ έχουμε $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 9x = 0 \Leftrightarrow x\left(x^2 - 9\right) = 0 \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow x(x-3)(x+3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 3$ ή $x = -3$.

Άρα, η C_f έχει τρία κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$, τα οποία είναι: $(0,0),(3,0),(-3,0)$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\boxed{0}$	$-$		$-$	$\boxed{0}$	$+$	
$f''(x)$		$-$		$-$	$\boxed{0}$	$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\boxed{6\sqrt{3}}$	↘	$\boxed{0}$	↘	$\boxed{-6\sqrt{3}}$	↗	$+\infty$



δ) Είναι: $f'(x)=3x^2-9$ και $f''(x)=6x$.

Έχουμε: $f'(x)=f''(x)\Leftrightarrow 3x^2-9=6x\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3x^2-6x-9=0\Leftrightarrow 3\left(x^2-2x-3\right)=0\Leftrightarrow x=-1 \text{ ή } x=3.$$

Άρα, οι $C_{f'}$ και $C_{f''}$ έχουν δύο κοινά σημεία, τα οποία είναι: $(-1,-6),(3,18)$.

Επομένως, το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E=\int_{-1}^{3}\left|f'(x)-f''(x)\right|dx=\int_{-1}^{3}\left|3x^2-9-6x\right|dx=\int_{-1}^{3}\left|3x^2-6x-9\right|dx.$$

Είναι $3x^2-6x-9=3\left(x^2-2x-3\right)=$

$$=3(x+1)(x-3)\le 0 \text{ για κάθε } x\in[-1,3].$$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$3x^2-6x-9$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα, είναι:

$$E=\int_{-1}^{3}\left(-3x^2+6x+9\right)dx=-\int_{-1}^{3}3x^2dx+\int_{-1}^{3}6xdx+\int_{-1}^{3}9dx=$$

$$=-\left[x^3\right]_{-1}^{3}+\left[3x^2\right]_{-1}^{3}+9\left(3-(-1)\right)=-\left(27-(-1)\right)+(27-3)+36=$$

$$=-28+24+36=32 \text{ τ.μ..}$$

ΘΕΜΑ 96

Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ ισχύουν:

i) $f(1)=0.$

ii) $f\left(f'(x)+f(x)\right)=0,$ **για κάθε** $x>0.$

α) **Να δείξετε ότι η συνάρτηση** $g(x)=f(x)e^x,\ x>0$ **είναι γνησίως αύξουσα στο** $(0,+\infty).$

β) **Να βρεθεί το πρόσημο της** $f.$

γ) **Να δείξετε ότι:** $f(x)=1-e^{1-x},\ x\in(0,+\infty).$

δ) **Να οριστεί η αντίστροφη συνάρτηση της** $f.$

ε) **Να βρείτε το** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)f\left(x^2\right)f\left(x^3\right)}{(x-1)^3}.$

Λύση