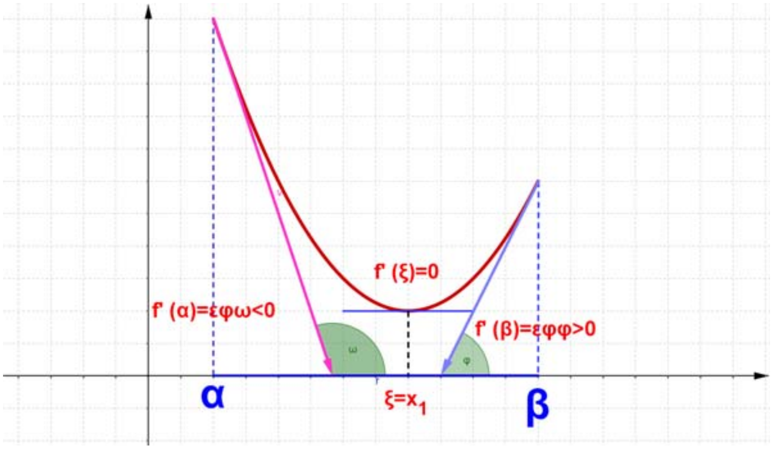

Βασίλης Κουγιουμτσιάδης
Γενικά Διαγωνίσματα
Μαθηματικών
Με αναλυτικές λύσεις
Ομάδα Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών,
Σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής
Τόμος Α
ΕΚΔΟΣΕΙΣ
ΖΤ
Εκδόσεις ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ - ΤΗΛΕΓΡΑΦΟΣ

ΔΕΙΓΜΑ

11^{o} Γενικό διαγώνισμα

Γ1. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $[\alpha,\beta]$ και τέτοια ώστε να ισχύει ότι $f'(\alpha)\cdot f'(\beta)<0$. Τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=0$.

Γ1. (Θεώρημα του Darboux) Προσοχή δεν δίνεται η παράγωγος συνεχής γιατί απλούστατα δε χρειάζεται!)



Αφού η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και ισχύει ότι: $f'(\alpha)\cdot f'(\beta)<0$.

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ θα είναι και συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ έτσι από το Θεώρημα Μέγιστης κι Ελάχιστης Τιμής θα υπάρχουν δύο τουλάχιστον $x_1,x_2\in[\alpha,\beta]$ τέτοια ώστε να ισχύει ότι $f(x_1)\le f(x)\le f(x_2)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$όπου $m=f(x_1)=\min f(x)$ η ελάχιστη τιμή της f και $M=f(x_2)=\max f(x)$, η μέγιστη τιμή της f στο $[\alpha,\beta]$.

Έχουμε από υπόθεση ότι $f'(\alpha)<0$ άρα $\lim\limits_{x\to\alpha^+}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}<0$, έτσι σε μια περιοχή δεξιά του α, η συνάρτηση $\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ θα διατηρεί τιμές ομόσημες του ορίου της, άρα θα υπάρχει $\delta_1>0$ τέτοιο ώστε:

Για κάθε $x\in(\alpha,\alpha+\delta_1)$ να ισχύει ότι: $\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}<0$.

Όμως για κάθε $x\in(\alpha,\alpha+\delta_1)$ το $x>\alpha\Leftrightarrow x-\alpha>0$ έτσι αφού

$\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}<0$, για κάθε $x\in(\alpha,\alpha+\delta_1)$ και $x-\alpha>0$ άρα $f(x)-f(\alpha)<0$ για κάθε $x\in(\alpha,\alpha+\delta_1)$, δηλαδή $f(x)<f(\alpha)$, για κάθε $x\in(\alpha,\alpha+\delta_1)$, δηλαδή η συνάρτηση f σε μια περιοχή δεξιά του α, λαμβάνει τιμές μικρότερες του $f(\alpha)$.

Άρα την ελάχιστη τιμή της $m=f(x_1)=\min f(x)$ η f δεν την λαμβάνει στο άκρο α.

Έχουμε επίσης από υπόθεση ότι $f'(\beta)>0$ άρα $\lim\limits_{x\to\beta^-}\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}>0$ έτσι σε μια περιοχή αριστερά του β η συνάρτηση $\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}$ θα διατηρεί τιμές ομόσημες του ορίου της: άρα θα υπάρχει $\delta_2>0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x\in(\beta-\delta_2,\beta)$ να ισχύει ότι: $\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}>0$. Όμως για κάθε $x\in(\beta-\delta_2,\beta)$ το $x<\beta\Leftrightarrow x-\beta<0$ έτσι αφού $f(x)-f(\beta)<0$, για κάθε $x\in(\beta-\delta_2,\beta)$ και $x-\beta<0$ άρα $f(x)-f(\beta)<0$, για κάθε $x\in(\beta-\delta_2,\beta)$, δηλαδή $f(x)<f(\beta)$, για κάθε $x\in(\beta-\delta_2,\beta)$, δηλαδή η συνάρτηση f σε μια περιοχή αριστερά του β, λαμβάνει τιμές μικρότερες του $f(\beta)$.Άρα την ελάχιστη τιμή της $m=f(x_1)=\min f(x)$ η f δεν την λαμβάνει ούτε στο άκρο β.

Άρα, αναγκαστικά την ελάχιστη τιμή της $m=f(x_1)=\min f(x)$, η f την λαμβάνει στο εσωτερικό σημείο x_1 του (α,β), στο οποίο είναι και παραγωγίσιμη, αφού είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, έτσι σύμφωνα με το Θεώρημα Fermat αναγκαστικά $f'(x_1)=0$.

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\equiv x_1\in(\alpha,\beta)$, με $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύει ότι $f'(x_0)=f'(x_1)=0$.

12$^{\text{ο}}$ Γενικό Διαγώνισμα

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αν η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και η f λαμβάνει παντού στο $[\alpha,\beta]$, ρητές τιμές, δηλαδή $f(x)\in\mathbb{Q}$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε να δείξετε ότι η f είναι σταθερή παντού στο $[\alpha,\beta]$.

Μονάδες 8

Γ2. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι: $9(f(x))^3+10(f(x))^2+1967f(x)=2020x^3+6x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο.

Μονάδες 7

Γ3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^{51}}{51}-25x^2+49x+2020$.

Γ3.1. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο δέχεται εφαπτομένη ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Γ3.2. Να δείξετε ότι σε όλα τα υπόλοιπα σημεία της C_f η εφαπτομένη ευθεία που δέχεται σχηματίζει οξεία γωνία με τον άξονα $x'x$.

Γ3.3. Να μελετήσετε την μονοτονία της.

Μονάδες 10

Απόδειξη με απαγωγή σε άτοπο:

Έστω ότι η f δεν ήταν σταθερή, τότε θα υπήρχαν τουλάχιστον δύο σημεία x_1,x_2 του $[\alpha,\beta]$ με $x_1\neq x_2$ (και έστω χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $x_1<x_2$), στα οποία η f θα ελάμβανε δύο ρητές τιμές, αλλά διαφορετικές μεταξύ τους, έστω δηλαδή ότι: $f(x_1)=\rho_1\in\mathbb{Q}$ και $f(x_2)=\rho_2\in\mathbb{Q}$ με $\rho_1\neq\rho_2$ και έστω ότι είναι $\rho_1<\rho_2$, τότε μεταξύ δύο ρητών υπάρχει πάντα ένας τουλάχιστον άρρητος (στην πραγματικότητα υπάρχουν άπειροι).

Μια απλή απόδειξη για αυτό είναι η παρακάτω:

Ξέρουμε ότι ο αριθμός $\sqrt{2}>1$ άρα

$$\left.\begin{aligned}&0<\frac{1}{\sqrt{2}}<1\\&\rho_1<\rho_2\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}&0<\frac{1}{\sqrt{2}}<1\\&\rho_2-\rho_1>0\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}&0\cdot(\rho_2-\rho_1)<\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(\rho_2-\rho_1)<1\cdot(\rho_2-\rho_1)\\&\rho_2-\rho_1>0\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0<\frac{\rho_2-\rho_1}{\sqrt{2}}<\rho_2-\rho_1\overset{+\rho_1}{\Leftrightarrow}\rho_1<\rho_1+\frac{\rho_2-\rho_1}{\sqrt{2}}<\rho_2\cancel{-\rho_1}+\cancel{\rho_1}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \rho_1 < \rho_1 + \dfrac{\rho_2 - \rho_1}{\sqrt{2}} < \rho_2$.

Άρα ο αριθμός $q = \rho_1 + \dfrac{\rho_2 - \rho_1}{\sqrt{2}}$ που είναι άρρητος (αφού: το άθροισμα ενός ρητού του ρ_1 και ενός άρρητου, του $\dfrac{\rho_1 + \rho_2}{\sqrt{2}}$, είναι άρρητος. (Βλέπε Άλγεβρα Α΄ Λυκείου) βρίσκεται ανάμεσα στους ρητούς $\rho_1 < \rho_2$. Δηλαδή, υπάρχει $q \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, άρρητος, τέτοιος ώστε $\rho_1 < q < \rho_2$ ή $f(x_1) < q < f(x_2)$, δηλαδή ο αριθμός q είναι (μια άρρητη) ενδιάμεση τιμή μεταξύ των $f(x_1), f(x_2)$ και η f σαν συνεχής, έχει την ιδιότητα των ενδιαμέσων τιμών, δηλαδή υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (x_1, x_2) \subseteq (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = q$, το οποίο είναι άτοπο, αφού η f στο $[\alpha, \beta]$ λαμβάνει μόνο ρητές τιμές.

Άρα τέτοια $x_1 \neq x_2$ δεν υπάρχουν στο $[\alpha, \beta]$, έτσι εφόσον η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και λαμβάνει μόνο ρητές τιμές, αναγκαστικά θα πρέπει να λαμβάνει την ίδια (ρητή) τιμή παντού στο $[\alpha, \beta]$, δηλαδή να είναι σταθερή στο $[\alpha, \beta]$.

Γ3. (Απαιτεί γνώση θεωρίας πολυωνύμων από το $4^{\text{ο}}$ κεφάλαιο της Άλγεβρας Β Λυκείου)

Για τη συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^{51}}{51} - 25x^2 + 49x + 2020$ παρατηρούμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική $51^{\text{ου}}$ βαθμού και

$$f'(x) = \left(\frac{x^{51}}{51} - 25x^2 + 49x + 2020 \right)' = \frac{51 \cdot x^{50}}{51} - 25 \cdot 2x + 49 \cdot 1 + 0 =$$
$$= x^{50} - 50x + 49.$$

Άρα $f'(x) = x^{50} - 50x + 49$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι το άθροισμα των συντελεστών του πολυωνύμου της παραγώγου είναι μηδέν αυτό σημαίνει ότι η $f'(x)$ έχει για παράγοντα το διώνυμο $x - 1$, άρα θα γράφεται $f'(x) = (x-1) \cdot \pi(x)$. Για τον προσδιορισμό του πηλίκου $\pi(x)$ κάνουμε Horner στην παράγωγο με το $x - 1$,

x^{50}	x^{49}	x^{48}	…	x^4	x^3	x^2	x	σταθερός	$x-\rho$
1	0	0	…	0	0	0	−50	49	
↓	1	1	⋯	1	1	1	1	−49	$\rho=1$
1	1	1	…	1	1	1	−49	0	

$\pi(x)$: 49ου βαθμού

όπου $\pi(x)=x^{49}+x^{48}+x^{47}+\ldots+x^3+x^2+x-49.$

Επίσης για το πολυώνυμο

$\pi(x)=x^{49}+x^{48}+x^{47}+\ldots+x^3+x^2+x-49$ παρατηρούμε ότι το άθροισμα των συντελεστών του πολυωνύμου $\pi(x)$ είναι

επίσης ίσο με μηδέν αυτό σημαίνει ότι και το $\pi(x)$ έχει για παράγοντα το διώνυμο $x-1$, άρα και αυτό θα γράφεται $\pi(x)=(x-1)\cdot R(x)$. Για τον προσδιορισμό του πηλίκου $R(x)$ κάνουμε Horner στο $\pi(x)$ με το $x-1$

x^{49}	x^{48}	x^{47}	…	x^4	x^3	x^2	x	σταθερός	$x-\rho$
1	1	1	…	1	1	1	1	−49	
↓	1	2	⋯	45	46	47	48	49	$\rho=1$
1	2	3	⋯	46	47	48	49	0	

R(x): 48ου βαθμού

όπου $R(x)=x^{48}+2x^{47}+3x^{46}+\ldots+46x^3+47x^2+48x+49$.

Έτσι το πολυώνυμο $R(x)$ θα είναι:

$R(x)=x^{48}+2x^{47}+3x^{46}+\ldots+46x^3+47x^2+48x+49$ άρα τότε η παράγωγος της συνάρτησης f

$$f'(x)=(x-1)\cdot\pi(x)=(x-1)\left(x^{49}+x^{48}+x^{47}+\ldots+x^3+x^2+x-49\right)=$$

$$=(x-1)(x-1)\left(x^{48}+2x^{47}+3x^{46}+\ldots+46x^3+47x^2+48x+49\right)=$$

$$=(x-1)^2\cdot\left(x^{48}+2x^{47}+3x^{46}+\ldots+46x^3+47x^2+48x+49\right)$$

άρα

$$f'(x)=(x-1)^2\cdot\left(x^{48}+2x^{47}+3x^{46}+\ldots+46x^3+47x^2+48x+49\right),\ x\in\mathbb{R}.$$

- Είναι προφανές ότι $f'(1)=0$, δηλαδή το $x_0=1$, είναι ρίζα της παραγώγου (και μάλιστα διπλή) άρα στο σημείο $A(1,f(1))$ η γραφική παράσταση της f δέχεται εφαπτομένη ευθεία παράλληλη με τον άξονα $x'x$. Τώρα παρατηρούμε επίσης ότι το πολυώνυμο

$R(x)=x^{48}+2x^{47}+3x^{46}+...+46x^3+47x^2+48x+49$ έχει θετικούς συντελεστές άρα αποκλείεται να έχει θετικές ρίζες. Έτσι η $f'(x)=(x-1)^2\cdot R(x)$, εκτός από τη διπλή θετική ρίζα $x_0=1$, δεν έχει άλλη θετική ρίζα. Όμως $f'(x)=x^{50}-50x+49$.

- Προφανώς δεν έχει ρίζα ούτε το μηδέν αφού $f'(0)=0^{50}-50\cdot 0+49=49\neq 0$.
- Δεν έχει ούτε αρνητική ρίζα αφού για κάθε

$$x<0\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x^{50}>0 \\ -50x>0 \\ 49>0 \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{r} x^{50}-50x+49>0 \\ x<0 \end{array}\right\}, \text{άρα}\, f'(x)>0, \text{για κάθε}\, x<0.$$

Γ3.1. Άρα εκτός του $x_0=1$ η παράγωγος δεν έχει άλλη πραγματική ρίζα. Άρα υπάρχει μοναδικό σημείο της γραφικής παράστασης της f, το $A(1,f(1))$ στο οποίο δέχεται εφαπτομένη ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Γ3.2. Από τη μελέτη των ριζών της παραγώγου διαπιστώσαμε ότι:

- $f'(x)>0$, για κάθε $x<0$.
- $f'(x)=(x-1)^2\cdot\left(x^{48}+2x^{47}+3x^{46}+...+46x^3+47x^2+48x+49\right)$ και $R(x)=x^{48}+2x^{47}+3x^{46}+...+46x^3+47x^2+48x+49>0$, για κάθε $x>0$ και με δεδομένο ότι $(x-1)^2\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και το "=" να ισχύει μόνο για $x=1$, άρα $f'(x)>0$, για κάθε $x>0\,\text{και}\,x\neq 1$.
- $f'(0)=49>0$.

Άρα σε όλα τα υπόλοιπα σημεία της C_f, εκτός του $A(1,f(1))$, ισχύει ότι $f'(x)>0$, άρα η εφαπτομένη ευθεία που δέχεται, σε οποιοδήποτε άλλο σημείο εκτός του $A(1,f(1))$ σχηματίζει οξεία γωνία με τον άξονα $x'x$.

Γ3.3. Για την μονοτονία της, παρατηρούμε ότι $f'(x)>0$, για κάθε $x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ και η f είναι συνεχής στο $x_0=1$, άρα το $f(1)$, δεν είναι ακρότατο της f και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

(βλέπε Θέμα Δ επαναληπτικές 2019)

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	+	
$f(x)$		↗		↗	

17^ο Γενικό Διαγώνισμα

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η Αξία $f(t)$ μιας μηχανής που εκτυπώνει βιβλία μειώνεται με τη πάροδο του χρόνου, με ρυθμό ανάλογο της αξίας της την κάθε χρονική στιγμή. Αν $f(t)$ είναι η αξία της μηχανής, σε χιλιάδες ευρώ (€), με την συμπλήρωση t μηνών από την ημερομηνία αγοράς της και είναι γνωστό ότι η αρχική αξία της ήταν $\frac{7A}{2e^2}$ χιλιάδες €, ενώ μετά από 14 μήνες η αξία της έχει πέσει στις $\frac{7A}{2e^3}$ χιλιάδες €, όπου A θετική σταθερά:

Γ1.1. Να δείξετε ότι: $f(t)=\frac{7A}{2}\cdot e^{-\frac{t+28}{14}}$ με $t\geq 0$.

Μονάδες 10

Γ1.2. Αν ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους $K(t)$ από την πώληση των βιβλίων που εκτυπώνει η συγκεκριμένη μηχανή δίνεται από την συνάρτηση $K'(t)=\frac{A}{4}\cdot e^{-\frac{t}{7}}$, με $t\geq 0$ και υποθέτουμε ότι $K(0)=0$, να βρείτε τη χρονική στιγμή κατά την οποία πρέπει να πωληθεί η συγκεκριμένη μηχανή , έτσι ώστε το συνολικό κέρδος $P(t)$ από τα βιβλία που πουλήθηκαν συν την αξία της μηχανής να γίνει μέγιστο.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. **Σημείωση:** Το παράδειγμα που ακολουθεί δίνει το γενικό τρόπο αντιμετώπισης σε προβλήματα που αφορούν στα μεγέθη, που η τιμή τους μεταβάλλεται ως προς το χρόνο, με ρυθμό ανάλογο της τιμής τους, την κάθε χρονική στιγμή: Δηλαδή, $Q'(t)=k\cdot Q(t)$.

Είναι τα γνωστά προβλήματα πληθυσμών, αλλά και προβλήματα που συναντιόνται στη Φυσική (κυκλώματα R-C εκφόρτηση πυκνωτή κ.ο.κ.).
Επιλέγουμε εδώ ένα πρόβλημα πιο πρακτικό που άλλωστε έχει δοθεί παλαιότερα σε Πανελλαδικές εξετάσεις
Υπάρχει σχετική αναφορά στο $5^{ο}$ κεφάλαιο της Άλγεβρας της Β΄ Λυκείου στο Νόμο της εκθετικής μεταβολής, κι εδώ στην πραγματικότητα εξηγούμε πως προκύπτει ο τύπος $Q(t)=Q_0\cdot e^{kt}$, για $t\geq 0$, όπου Q_0, η ποσότητα του μεγέθους κατά τη χρονική στιγμή $t=0$, δηλαδή $Q_0=Q(0)$.
Έχουμε ότι $Q'(t)=k\cdot Q(t)$, για $t\geq 0$

$$Q'(t)=k\cdot Q(t)\Leftrightarrow e^{kt}\cdot Q'(t)=e^{kt}\cdot k\cdot Q(t)\Leftrightarrow$$

$$e^{kt}\cdot Q'(t)=e^{kt}\cdot(kt)'\cdot Q(t)\Leftrightarrow e^{kt}\cdot Q'(t)=\left(e^{kt}\right)'\cdot Q(t)\Leftrightarrow$$

$$e^{kt}\cdot Q'(t)-\left(e^{kt}\right)'\cdot Q(t)=0\Leftrightarrow \frac{e^{kt}\cdot Q'(t)-\left(e^{kt}\right)'\cdot Q(t)}{\left(e^{kt}\right)^2}=0\Leftrightarrow$$

$\left(\dfrac{Q(t)}{e^{kt}}\right)'=0$, για κάθε $t\geq 0$, οπότε από το Θεώρημα των συνεπειών του Θ.Μ.Τ. προκύπτει ότι η συνάρτηση $Q(t)$, είναι σταθερή, δηλαδή θα υπάρχει σταθερά $\alpha\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\dfrac{Q(t)}{e^{kt}}=\alpha,\ \text{για κάθε}\ t\geq 0$.

Άρα $Q(t)=\alpha\cdot e^{kt},\ \text{για κάθε}\ t\geq 0$ (*).

Έτσι για $t=0$ θα έχουμε $Q(0)=\alpha\cdot e^{k\cdot 0}\Leftrightarrow Q_0=\alpha\cdot e^0\Leftrightarrow \alpha=Q_0$.

Άρα $Q(t)=Q_0\cdot e^{kt},\ \text{για κάθε}\ t\geq 0$.

- Αν $k>0$, ο ρυθμός μεταβολής του μεγέθους είναι θετικός οπότε έχουμε εκθετική αύξηση.
- Αν $k<0$, ο ρυθμός μεταβολής του μεγέθους είναι αρνητικός οπότε έχουμε εκθετική μείωση.

Οπότε για το συγκεκριμένο πρόβλημα της μηχανής:
Αφού η Αξία $f(t)$ μιας μηχανής που εκτυπώνει βιβλία μειώνεται με τη πάροδο του χρόνου, με ρυθμό ανάλογο της αξίας της την κάθε χρονική στιγμή και $f(t)$

είναι η αξία της μηχανής σε χιλιάδες ευρώ (€) με την συμπλήρωση t μηνών από την ημερομηνία αγοράς της έχουμε ότι:

$f'(t)=k\cdot f(t)$, για κάθε $t\geq 0$ με $k<0$ άρα

$$e^{kt}\cdot f'(t)=e^{kt}\cdot k\cdot f(t)\Leftrightarrow e^{kt}\cdot f'(t)=e^{kt}\cdot (kt)'\cdot f(t)\Leftrightarrow$$

$$e^{kt}\cdot f'(t)=\left(e^{kt}\right)'\cdot f(t)\Leftrightarrow e^{kt}\cdot f'(t)-\left(e^{kt}\right)'\cdot f(t)=0\Leftrightarrow$$

$$\frac{e^{kt}\cdot f'(t)-\left(e^{kt}\right)'\cdot f(t)}{\left(e^{kt}\right)^2}=0\Leftrightarrow\left(\frac{f(t)}{e^{kt}}\right)'=0,\ \text{για κάθε}\ t\geq 0$$

Άρα $\left(\frac{f(t)}{e^{kt}}\right)'=0,\ \text{για κάθε}\ t\geq 0$, οπότε από το Θεώρημα των συνεπειών του Θ.Μ.Τ. θα υπάρχει σταθερά $c_0\in\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $\frac{f(t)}{e^{kt}}=c_0,\ \text{για κάθε}\ t\geq 0$.

Άρα $f(t)=c_0\cdot e^{kt},\ \text{για κάθε}\ t\geq 0$ (*).

Αφού είναι γνωστό ότι η αρχική αξία της ήταν $\frac{7A}{2e^2}$ χιλιάδες € άρα για $t=0$ η (*) γίνεται: $f(0)=c_0\cdot e^{k\cdot 0}\Leftrightarrow\frac{7A}{2e^2}=c_0\cdot e^0\Leftrightarrow c_0=\frac{7A}{2e^2}$.

Άρα $f(t)=\frac{7A}{2e^2}\cdot e^{kt}$, για κάθε $t\geq 0$ (**).

Αφού μετά από 14 μήνες η αξία της έχει πέσει στις $\frac{7A}{2e^3}$ χιλιάδες €, όπου A θετική σταθερά, η (**) γίνεται για $t=14$

$$f(14)=\frac{7A}{2e^2}\cdot e^{k\cdot 14}\Leftrightarrow\frac{\cancel{7A}}{\cancel{2}e^3}=\frac{\cancel{7A}}{\cancel{2}e^2}\cdot e^{14k}\Leftrightarrow\frac{e^2}{e^3}=e^{14k}\Leftrightarrow e^{14k}=\frac{1}{e}$$

άρα έχουμε ότι $e^{14k}=\frac{1}{e}$, οπότε ο τύπος της συνάρτησης γίνεται:

$$f(t)=\frac{7A}{2e^2}\cdot e^{kt}=\frac{7A}{2e^2}\cdot\left(e^{14k}\right)^{\frac{t}{14}}=\frac{7A}{2e^2}\cdot\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{t}{14}}=\frac{7A}{2e^2}\cdot(e)^{-\frac{t}{14}}=$$

$$=\frac{7A}{2}\cdot\frac{e^{-\frac{t}{14}}}{e^2}=\frac{7A}{2}\cdot e^{-\frac{t}{14}-2}=\frac{7A}{2}\cdot e^{-\frac{t}{14}-\frac{28}{14}}=\frac{7A}{2}\cdot e^{-\frac{t+28}{14}}$$

άρα $f(t)=\frac{7A}{2}\cdot e^{-\frac{t+28}{14}}$ με $t\geq 0$.

Γ1.2. Έχουμε ότι ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους $K(t)$ από την πώληση των βιβλίων που εκτυπώνει η συγκεκριμένη μηχανή δίνεται από την συνάρτηση:

$K'(t)=\frac{A}{4}\cdot e^{-\frac{t}{7}}$, με $t\geq 0$ και υποθέτουμε ότι $K(0)=0$.

Έτσι η συνάρτηση που υπολογίζει το συνολικό κέρδος $P(t)$ από τα βιβλία που πουλήθηκαν συν την αξία της μηχανής, δίνεται από τον τύπο

$P(t)=K(t)+f(t),\ t\geq 0$

Οπότε ο ρυθμός μεταβολής του συνολικού κέρδους

$$P'(t)=K'(t)+f'(t)=\frac{A}{4}\cdot e^{-\frac{t}{7}}+\left(\frac{7A}{2}\cdot e^{-\frac{t+28}{14}}\right)'=$$

$$=\frac{A}{4}\cdot e^{-\frac{t}{7}}+\frac{7A}{2}\cdot e^{-\frac{t+28}{14}}\cdot\left(-\frac{t+28}{14}\right)'=$$

$$=\frac{A}{4}\cdot e^{-\frac{t}{7}}+\frac{7A}{2}\cdot e^{-\frac{t+28}{14}}\cdot\left(-\frac{1}{14}\right)=$$

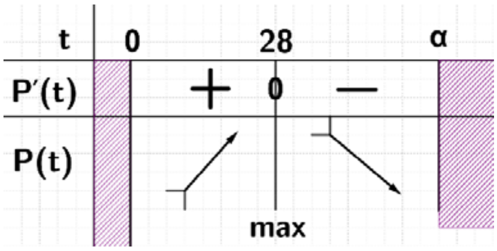
$$=\frac{A}{4}\cdot e^{-\frac{t}{7}}-\frac{\cancel{7}A}{2\cdot\cancel{14}\,2}\cdot e^{-\frac{t+28}{14}}=\frac{A}{4}\cdot e^{-\frac{t}{7}}-\frac{A}{4}\cdot e^{-\frac{t+28}{14}}$$

Άρα $P'(t)=K'(t)+f'(t)=\frac{A}{4}\cdot\left(e^{-\frac{t}{7}}-e^{-\frac{t+28}{14}}\right)$. Έτσι

$$P'(t)>0\Leftrightarrow\frac{A}{4}\cdot\left(e^{-\frac{t}{7}}-e^{-\frac{t+28}{14}}\right)>0\overset{A>0}{\Leftrightarrow}e^{-\frac{t}{7}}-e^{-\frac{t+28}{14}}>0\Leftrightarrow e^{-\frac{t}{7}}>e^{-\frac{t+28}{14}}$$

$$\underset{\text{γν.αύξουσα}}{\overset{e^x}{\Leftrightarrow}}-\frac{t}{7}>-\frac{t+28}{14}\Leftrightarrow\frac{t}{7}<\frac{t+28}{14}\Leftrightarrow 2t<t+28\Leftrightarrow 0\leq t<28$$

- $P'(t) > 0 \Leftrightarrow 0 \le t < 28$.
- $P'(t) < 0 \Leftrightarrow t > 28$.
- $P'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 28$ οπότε η ρίζα της P' είναι το $t_0 = 28$ και το πρόσημο της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα από όπου προκύπτουν τα διαστήματα μονοτονίας της και το ακρότατο:



- Άρα η συνάρτηση $P(t) = K(t) + f(t)$ συνεχής στο $[0,28]$ και $P'(t) > 0$, για κάθε $0 \le t < 28$ άρα η $P(t)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,28]$ άρα για κάθε $t \in [0,28] \Rightarrow P(0) \le P(t) \le P(28)$.
- Η συνάρτηση $P(t) = K(t) + f(t)$ συνεχής στο $[28,\alpha]$ όπου α κάποια χρονική στιγμή στο μέλλον με $\alpha >> 28$ και $P'(t) < 0$, για κάθε $t > 28$ άρα η $P(t)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[28,\alpha]$ άρα για κάθε $t \in [28,\alpha] \Rightarrow P(\alpha) \le P(t) \le P(28)$.

  Άρα για κάθε $t \ge 0$ παρατηρούμε ότι $P(t) \le P(28)$, οπότε η χρονική στιγμή κατά την οποία πρέπει να πωληθεί η συγκεκριμένη μηχανή, έτσι ώστε το συνολικό κέρδος $P(t)$ από τα βιβλία που πουλήθηκαν συν την αξία της μηχανής να γίνει μέγιστο είναι με τη συμπλήρωση 28 μηνών από την ημερομηνία αγοράς της.

21ι Γενικό Διαγώνισμα

ΘΕΜΑ Β

Αν για την συνάρτηση f ισχύει ότι : $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x > 0$ και για κάθε $y > 0$, να δείξετε ότι :

Β1. $f(1) = 0$. Και $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = -f(x)$ για κάθε $x > 0$. **Μονάδες 3**

B2. Αν δίνεται επιπλέον ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική λύση να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι $1-1$στο $(0,+\infty)$.

Μονάδες 4

B3. Αν επιπλέον δίνεται ότι για κάθε $x>1$ ισχύει ότι $f(x)>0$ να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα (μ. 3) και να λύσετε την ανίσωση $f\left(e^{x^2}\cdot\ln|x|\right)>f(\ln|x|)+f\left(x^2+1\right)$. (μ. 3)

Μονάδες 6

B4. Αν επιπλέον δίνεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ και $f'(1)=1$, να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x>0$ και να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση της f δηλαδή την $f'(x)$ και στη συνέχεια την f και την f^{-1}.

Μονάδες 6

B5. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(1,e)$ τέτοιο ώστε να ισχύει: $\int_1^e e^x\cdot\ln x\,dx=\left(e^e-e\right)\cdot\ln\xi$ (μ. 3) και μοναδικό $\xi_1\in(1,e)$ τέτοιο ώστε να ισχύει: $\int_1^e e^x\cdot\ln x\,dx=e^{\xi_1}$ (μ. 3)

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύει ότι $f^3(x)+2f(x)=x+1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

Γ1. Να δείξετε ότι η f είναι $1-1$ στο και να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 3

Γ2. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της f Στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 7

Γ3. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και στη συνέχεια ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και να εκφράσετε την παράγωγο συνάρτηση: $f'(x)$ σαν συνάρτηση της f.

Μονάδες 6

Γ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=-1$ και $x=2$.

Μονάδες 4

Γ5. Να μελετήσετε την κυρτότητα της f και να δείξετε ότι:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(\eta\mu x)dx < \frac{\pi+2\sqrt{2}-4}{8}.$$

Μονάδες 5

Β5. Για τη συνάρτηση $f(x)=\ln x$ με $x\in[1,e]$.

$$1\le x\le e \underset{\gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha}{\overset{\ln x}{\Rightarrow}} \ln 1\le \ln x\le \ln e \Rightarrow 0\le \ln x\le 1$$

$$\left.\begin{matrix} 0\le \ln x\le 1 \\ x\in[1,e] \\ e^x>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0\cdot e^x \le e^x\cdot \ln x\le e^x \Rightarrow 0\le e^x\cdot\ln x\le e^x, \text{ για κάθε } x\in[1,e].$$

Έτσι:

$$\left.\begin{matrix} e^x\ge e^x\cdot\ln x, \text{για κάθε } x\in[1,e] \\ \text{το}"="\text{μόνο για } x=e \\ e^x\cdot\ln x\ge 0, \text{για κάθε } x\in[1,e] \\ \text{το}"="\text{μόνο για } x=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} e^x-e^x\cdot\ln x\ge 0, \text{για κάθε } x\in[1,e] \\ \text{το}"="\text{μόνο για } x=e \\ e^x\cdot\ln x\ge 0, \text{για κάθε } x\in[1,e] \\ \text{το}"="\text{μόνο για } x=1 \end{matrix}\right\}.$$

Έτσι η συνάρτηση $\varphi(x)=e^x-e^x\cdot\ln x$, $x\in[1,e]$ είναι συνεχής, μη αρνητική στο $[1,e]$ και όχι παντού μηδέν αφού το $"="$ ισχύει μόνο για $x=e$, άρα

$\varphi(x)=e^x-e^x\cdot\ln x\ge 0,$ για κάθε $x\in[1,e]$ και το $"="$ μόνο για $x=1$, Οπότε από το Θεώρημα 3 των ιδιοτήτων του ορισμένου ολοκληρώματος έχουμε

$$\int_1^e \varphi(x)dx>0 \text{ άρα}$$

$$\int_1^e \varphi(x)dx > 0 \Rightarrow \int_1^e \left(e^x - e^x \cdot \ln x\right)dx > 0 \Rightarrow \int_1^e e^x dx - \int_1^e e^x \cdot \ln x dx > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_1^e e^x dx > \int_1^e e^x \cdot \ln x dx \Rightarrow \left[e^x\right]_1^e > \int_1^e e^x \cdot \ln x dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^e - e^1 > \int_1^e e^x \cdot \ln x dx \Rightarrow \int_1^e e^x \cdot \ln x dx < e^e - e.$$

Έτσι: $\int_1^e e^x \cdot \ln x dx < e^e - e$ (σχέση 1).

Όμοια για τη συνάρτηση $h(x) = e^x \cdot \ln x$, $x \in [1, e]$ είναι συνεχής, μη αρνητική στο $[1, e]$ και όχι παντού μηδέν αφού το "$=$" ισχύει μόνο για $x = 1$, άρα $e^x \cdot \ln x \geq 0$, για κάθε $x \in [1, e]$ και το "$=$" μόνο για $x = 1$. Οπότε από το Θεώρημα 3 των ιδιοτήτων του ορισμένου ολοκληρώματος έχουμε:

$$\int_1^e h(x)dx > 0 \text{ άρα } \int_1^e h(x)dx > 0 \Rightarrow \int_1^e \left(e^x \cdot \ln x\right)dx > 0 \Rightarrow 0 < \int_1^e e^x \cdot \ln x dx \quad (2).$$

Οπότε από τις σχέσεις 1 και 2 έχουμε:

$$0 < \int_1^e e^x \cdot \ln x dx < e^e - e \overset{e^e - e > 0}{\Leftrightarrow} \frac{0}{e^e - e} < \frac{\int_1^e e^x \cdot \ln x dx}{e^e - e} < \frac{e^e - e}{e^e - e} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{e^e - e} \cdot \int_1^e e^x \cdot \ln x dx < 1 \Leftrightarrow \ln 1 < \frac{1}{e^e - e} \cdot \int_1^e e^x \cdot \ln x dx < \ln e.$$

Έτσι, ο αριθμός $\eta = \frac{1}{e^e - e} \cdot \int_1^e e^x \cdot \ln x dx$, είναι μια ενδιάμεση τιμή μεταξύ των τιμών $f(1) = \ln 1 = 0$ και $f(e) = \ln e = 1$. Όμως, η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ είναι συνεχής στο $[1, e]$, και γνησίως αύξουσα στο $[1, e]$, άρα έχει την ιδιότητα των ενδιαμέσων τιμών άρα από το Θ.Ε.Τ. θα υπάρχει μοναδικό (λόγω μονοτονίας)

$\xi \in (1,e)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \eta$ δηλαδή θα υπάρχει μοναδικό (λόγω μονοτονίας) $\xi \in (1,e)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \eta \Leftrightarrow \ln\xi = \frac{1}{e^e - e} \cdot \int_1^e e^x \cdot \ln x\, dx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_1^e e^x \cdot \ln x\, dx = \left(e^e - e\right) \cdot \ln\xi$, άρα θα υπάρχει μοναδικό (λόγω μονοτονίας) $\xi \in (1,e)$ τέτοιο ώστε $\int_1^e e^x \cdot \ln x\, dx = \left(e^e - e\right) \cdot \ln\xi$.

Ενώ για την συνάρτηση $g(x) = f^{-1}(x) = e^x$ με $x \in [1,e]$

$$1 \le x \le e \underset{\gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha}{\overset{e^x}{\Rightarrow}} e^1 \le e^x \le e^e \Rightarrow e \le e^x \le e^e$$

$$\left.\begin{array}{l} e \le e^x \le e^e \\ x \in [1,e] \\ \ln x \ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow e \cdot \ln x \le e^x \cdot \ln x \le e^e \cdot \ln x,$$ για κάθε $x \in [1,e]$.

Έτσι: $$\left.\begin{array}{l} e^e \cdot \ln x \ge e^x \cdot \ln x, \text{για κάθε}\; x \in [1,e] \\ \text{το}\; "=" \;\text{για}\; x = e \\ e^x \cdot \ln x \ge e \cdot \ln x, \text{για κάθε}\; x \in [1,e] \\ \text{το}\; "=" \;\text{για}\; x = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} e^e \cdot \ln x - e^x \cdot \ln x \ge 0, \text{για κάθε}\; x \in [1,e] \\ \text{το}\; "=" \;\text{για}\; x = e \\ e^x \cdot \ln x - e \cdot \ln x \ge 0, \text{για κάθε}\; x \in [1,e] \\ \text{το}\; "=" \;\text{για}\; x = 1 \end{array}\right\}.$$

Έτσι, η συνάρτηση $d(x) = e^e \cdot \ln x - e^x \cdot \ln x$, $x \in [1,e]$ είναι συνεχής, μη αρνητική στο $[1,e]$ και όχι παντού μηδέν αφού το $"="$ ισχύει μόνο για $x = e$,

άρα $d(x) = e^x \cdot \ln x - e^x \cdot \ln x \ge 0$, για κάθε $x \in [1,e]$ και το $"="$ για $x = 1$.

Οπότε από το Θεώρημα 3 των ιδιοτήτων του ορισμένου ολοκληρώματος

έχουμε: $\int_1^e d(x)dx > 0$ άρα $\int_1^e d(x)dx > 0 \Rightarrow \int_1^e \left(e^e \cdot \ln x - e^x \cdot \ln x\right)dx > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_1^e e^e \cdot \ln x dx - \int_1^e e^x \cdot \ln x dx > 0 \Rightarrow e^e \cdot \int_1^e \ln x dx > \int_1^e e^x \cdot \ln x dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^e [x\ln x - x]_1^e > \int_1^e e^x \cdot \ln x dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^e \left[(e\ln e - e) - (1\ln 1 - 1) \right] > \int_1^e e^x \cdot \ln x dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^e \left[\cancel{(e \cdot 1 - e)} - (0-1) \right] > \int_1^e e^x \cdot \ln x dx \Rightarrow e^e > \int_1^e e^x \cdot \ln x dx \Rightarrow \int_1^e e^x \cdot \ln x dx < e^e.$$

Έτσι $\int_1^e e^x \cdot \ln x dx < e^e$ (σχέση 3).

Όμοια για τη συνάρτηση $b(x) = e^x \cdot \ln x - e \cdot \ln x$, $x \in [1,e]$ είναι συνεχής, μη αρνητική στο $[1,e]$ και όχι παντού μηδέν αφού το "$=$" ισχύει μόνο για $x = 1$,

άρα: $e^x \cdot \ln x - e \cdot \ln x \geq 0$, για κάθε $x \in [1,e]$ και το "$=$" μόνο για $x = 1$. Οπότε από το Θεώρημα 3 των ιδιοτήτων του ορισμένου ολοκληρώματος έχουμε

$$\int_1^e b(x) dx > 0 \Rightarrow \int_1^e \left(e^x \cdot \ln x - e \cdot \ln x\right) dx > 0 \Rightarrow \int_1^e e^x \cdot \ln x dx - \int_1^e e \cdot \ln x dx > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_1^e e^x \cdot \ln x dx > \int_1^e e \cdot \ln x dx \Rightarrow \int_1^e e^x \cdot \ln x dx > e \cdot \int_1^e \ln x dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_1^e e^x \cdot \ln x dx > e \cdot [x\ln x - x]_1^e \Rightarrow \int_1^e e^x \cdot \ln x dx > e \cdot \left[(e \cdot \ln e - e) - (1 \cdot \ln 1 - 1) \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_1^e e^x \cdot \ln x dx > e \cdot \left[\cancel{(e - e)} - (0-1) \right] \Rightarrow \int_1^e e^x \cdot \ln x dx > e \cdot 1 \Rightarrow e < \int_1^e e^x \cdot \ln x dx.$$

Άρα $e < \int_1^e e^x \cdot \ln x\,dx$ (σχέση 4). Οπότε από τις σχέσεις 3 και 4 έχουμε:

$$e < \int_1^e e^x \cdot \ln x\,dx < e^e \Leftrightarrow g(1) < \int_1^e e^x \cdot \ln x\,dx < g(e).$$

Έτσι ο αριθμός $\eta_1 = \int_1^e e^x \cdot \ln x\,dx$, είναι μια ενδιάμεση τιμή μεταξύ των τιμών $g(1) = e$ και $g(e) = e^e$. Η συνάρτηση $g(x) = f^{-1}(x) = e^x$ είναι συνεχής στο $[1,e]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,e]$, άρα έχει την ιδιότητα των ενδιαμέσων τιμών άρα από το Θ.Ε.Τ. θα υπάρχει μοναδικό (λόγω μονοτονίας) μοναδικό $\xi_1 \in (1,e)$ τέτοιο ώστε να ισχύει: $g(\xi_1) = \eta_1 \Leftrightarrow e^{\xi_1} = \int_1^e e^x \cdot \ln x\,dx$.

Δηλαδή θα υπάρχει μοναδικό $\xi_1 \in (1,e)$ τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$\int_1^e e^x \cdot \ln x\,dx = e^{\xi_1}.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f^3(x) + 2f(x) = x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (f(x_1))^3 = (f(x_2))^3 \\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2f(x_1) = 2f(x_2) \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow (f(x_1))^3 + 2f(x_1) = (f(x_2))^3 + 2f(x_2) \Rightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Άρα για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, άρα η f είναι $1-1$ στο $\mathbb{R}$.

Αν $(x_0, f(x_0))$ είναι το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$, τότε $f(x_0) = 0$, οπότε

$f^3(x_0)+2f(x_0)=x_0+1 \Rightarrow 0^3+2\cdot 0=x_0+1 \Rightarrow x_0=-1$. Έτσι $f(-1)=0$.

Γ2. Έστω ότι η f δεν ήταν γνησίως αύξουσα, τότε θα υπήρχαν $x_1,x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1<x_2$, για τα οποία όμως το $f(x_1) \nless f(x_2)$, τότε είναι:

$$\left.\begin{array}{r} f(x_1)\nless f(x_2) \Rightarrow f(x_1)\ge f(x_2) \Rightarrow f^3(x_1)\ge f^3(x_2) \\ f(x_1)\ge f(x_2) \Rightarrow 2f(x_1)\ge 2f(x_2) \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow f^3(x_1)+2f(x_1)\ge f^3(x_2)+2f(x_2) \Rightarrow x_1+1\ge x_2+1 \Rightarrow x_1\ge x_2.$$

Το οποίο είναι άτοπο, γιατί από υπόθεση είχαμε ότι $x_1<x_2$, έτσι τέτοια $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΟΥΝ, οπότε για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και το σύνολο τιμών της θα είναι $f(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$.

Άρα η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ αντιστρέφεται, ορίζεται η $f^{-1}:f(\mathbb{R})=\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και γενικά ισχύει ότι $y=f(x) \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$.

Έχουμε όμως ότι

$f^3(x)+2f(x)=x+1 \Leftrightarrow x=f^3(x)+2f(x)-1 \Leftrightarrow x=y^3+2y-1$. Άρα

$x=f^{-1}(y)=y^3+2y-1 \quad ,y\in\mathbb{R}$

$\downarrow \qquad \downarrow \quad \downarrow$

$y=f^{-1}(x)=x^3+2x-1,\ x\in\mathbb{R}$

Οπότε $f^{-1}(y)=y^3+2y-1 \quad ,y\in\mathbb{R}$ ή $f^{-1}(x)=x^3+2x-1,\ x\in\mathbb{R}$.

Και ξέρουμε ότι ισχύουν:

$f^{-1}(f(x))=x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f\left(f^{-1}(y)\right)=y$, για κάθε $y\in f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

Γ3. Προφανώς η $f^{-1}(x)=x^3+2x-1,\ x\in\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως πολυωνυμική 3ου βαθμού, άρα $\lim\limits_{y\to y_0} f^{-1}(y)=f^{-1}(y_0)$, για το τυχαίο $y_0\in\mathbb{R}$.

Για να είναι η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ αρκεί να δείξουμε ότι για το τυχαίο $x_0\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Πράγματι στο όριο $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, θέτουμε όπου $x=f^{-1}(y)$ και έστω ότι:

όταν $x \to x_0$ τότε το $y \to \alpha$, οπότε θα έχουμε:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{y\to\alpha} f\left(f^{-1}(y)\right)=\lim\limits_{y\to\alpha} y=\alpha$ (*) (αφού η ταυτοτική συνάρτηση $g(y)=y$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $y_0=\alpha$).

Όμως $x=f^{-1}(y)$ και έχουμε ότι $x\to x_0$ δηλαδή $f^{-1}(y)\to x_0$, όταν $y\to\alpha$.

Άρα: $\lim\limits_{y\to\alpha} f^{-1}(y)=x_0$.

Όμως η αντίστροφη είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα συνεχής και στο $y_0=\alpha$, έτσι

$\lim\limits_{y\to\alpha} f^{-1}(y)=f^{-1}(\alpha)$, οπότε:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{y\to\alpha} f^{-1}(y)=x_0\\ \lim\limits_{y\to\alpha} f^{-1}(y)=f^{-1}(\alpha)\end{array}\right\}\Rightarrow f^{-1}(\alpha)=x_0 \Leftrightarrow \alpha=f(x_0).$$

Έτσι η (*) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{y\to\alpha} f\left(f^{-1}(y)\right)=\lim\limits_{y\to\alpha} y=\alpha=f(x_0)$.

Άρα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, για το τυχαίο $x_0\in\mathbb{R}$, οπότε η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής στο τυχαίο $x_0\in\mathbb{R}$, άρα η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Η $f^{-1}(y)=y^3+2y-1$,$y\in\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη για κάθε $y\in\mathbb{R}$ και

$\left(f^{-1}(y)\right)'=\left(y^3+2y-1\right)'=3y^2+2,\ y\in\mathbb{R}$.

Άρα για το τυχαίο $y_0\in\mathbb{R}$, υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός το όριο του λόγου μεταβολής της $x=f^{-1}(y)$, έτσι για $y\neq y_0$:

$\left(f^{-1}\right)'(y_0)=3y_0^2+2>0 \Leftrightarrow \lim\limits_{y\to y_0}\dfrac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=3y_0^2+2>0$ (Σχέση (1))

Έτσι για $x\neq x_0$: Για το όριο: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$:

Θέτω όπου $x = f^{-1}(y)$, τότε όταν $x \to x_0$, λόγω της συνέχειας της f έχουμε

ότι $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή $f(x) \to f(x_0)$, άρα $y = f(x) \to f(x_0) = y_0$,

δηλαδή όταν $x \to x_0$, τότε $y \to y_0$, όπου $f(x_0) = y_0$ έτσι:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{f\left(f^{-1}(y)\right) - f\left(f^{-1}(y_0)\right)}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)} =$$

$$= \lim_{y \to y_0} \frac{y - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)} = \lim_{y \to y_0} \frac{1}{\dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}} \overset{(1)}{=} \frac{1}{3y_0^2 + 2} \in \mathbb{R}.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο τυχαίο $x_0 \in \mathbb{R}$ και

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{3y_0^2 + 2} = \frac{1}{3f^2(x_0) + 2} \in \mathbb{R}.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f'(x) = \dfrac{1}{3f^2(x) + 2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Είναι $f'(x) = \dfrac{1}{3f^2(x) + 2} > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ4. Για το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = -1$ και $x = 2$.

Έχουμε ότι η f συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο διάστημα $[-1, 2]$ και σχετικά με το πρόσημο της f, ήδη γνωρίζουμε ότι $f(-1) = 0$ οπότε

- Για κάθε $x > -1 \underset{\gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha}{\overset{f}{\Rightarrow}} f(x) > f(-1) \Rightarrow f(x) > 0$.
- Για κάθε $x < -1 \underset{\gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha}{\overset{f}{\Rightarrow}} f(x) < f(-1) \Rightarrow f(x) < 0$ οπότε έχουμε τον

  παρακάτω πίνακα για το πρόσημο της f.

x	$-\infty$		-1		2	$+\infty$
f(x)		$-$	0		$+$	

Έτσι η f συνεχής στο $[-1, 2]$ και $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [-1, 2]$ έτσι

$E(\Omega)=\int_{-1}^{2} f(x)dxg'(x)$, επειδή δεν γνωρίζουμε τον τύπο της f, θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα αυτό με αλλαγή μεταβλητής θέτοντας όπου $x=f^{-1}(y)$. Για τα άκρα έχουμε:

- Όταν $x=-1 \Rightarrow f^{-1}(y)=-1 \Rightarrow y=f(-1) \Rightarrow y=0$.
- Όταν $x=2 \Rightarrow f^{-1}(y)=2 \Rightarrow y^3+2y-1=2 \Rightarrow y=1$.

Ενώ $dx=d\left(f^{-1}(y)\right)=\left(f^{-1}(y)\right)'dy=\left(y^3+2y-1\right)'dy=\left(3y^2+2\right)dy$.

Άρα $dx=\left(3y^2+2\right)dy$. Οπότε έχουμε:

$$E(\Omega)=\int_{-1}^{2} f(x)dx=\int_{0}^{1} f\left(f^{-1}(y)\right)\left(3y^2+2\right)dy=\int_{0}^{1} y\cdot\left(3y^2+2\right)dy=$$

$$=\int_{0}^{1}\left(3y^3+2\cdot y\right)dy=\left[3\frac{y^4}{4}+y^2\right]_0^1=\frac{3\cdot 1^4}{4}+1^2+\cancel{\left(3\frac{0^4}{4}+0^2\right)}=$$

$$=\frac{3}{4}+\frac{4}{4}=\frac{7}{4}\text{τ.μ..}$$

Γ5. Για την κυρτότητα της f, έχουμε ότι η $f'(x)=\dfrac{1}{3f^2(x)+2}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η $f'(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων και είναι

$$f''(x)=\left(f'(x)\right)'=\left(\frac{1}{3f^2(x)+2}\right)'=\frac{(1)'\cdot\left(3f^2(x)+2\right)-1\cdot\left(3f^2(x)+2\right)'}{\left(3f^2(x)+2\right)^2}=$$

$$=\frac{\cancel{0\cdot\left(3f^2(x)+2\right)}-\left(\left(3f^2(x)\right)'+(2)'\right)}{\left(3f^2(x)+2\right)^2}=-\frac{3\cdot 2f(x)\cdot f'(x)+0}{\left(3f^2(x)+2\right)^2}=$$

$$=-\frac{6f(x)\cdot f'(x)}{\left(3f^2(x)+2\right)^2}.$$

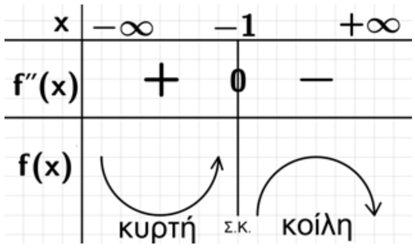
Άρα $f''(x)=-\dfrac{6f(x)\cdot f'(x)}{\left(3f^2(x)+2\right)^2}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Όμως $f'(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Και $\left(3f^2(x)+2\right)^2>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έτσι για το πρόσημο της $f''(x)$ έχουμε:

- $f''(x)>0\Leftrightarrow -6f(x)>0\Leftrightarrow f(x)<0\Leftrightarrow x<-1.$
- $f''(x)<0\Leftrightarrow -6f(x)<0\Leftrightarrow f(x)>0\Leftrightarrow x>-1.$
- $f''(x)=0\Leftrightarrow x=-1$.

Έτσι η ρίζα της $f''(x)$ είναι η $x_0=-1$ και το πρόσημο της φαίνεται στον παραπάνω πίνακα, από όπου προκύπτουν και τα διαστήματα κυρτότητας της και το μοναδικό σημείο καμπής της.



Έτσι:

- Η f συνεχής στο $(-\infty,-1]$ και $f''(x)>0$ για κάθε $x<-1$ άρα η f είναι κυρτή στο $(-\infty,-1]$.
- Η f συνεχής στο $[-1,+\infty)$ και $f''(x)<0$ για κάθε $x>-1$ άρα η f είναι κοίλη στο $[-1,+\infty)$.
- Εκατέρωθεν του $x_0=-1$ η f μεταβάλλει την κυρτότητα της και είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=-1$ και $f'(-1)=\dfrac{1}{3f^2(-1)+2}=\dfrac{1}{3\cdot0^2+2}=\dfrac{1}{2}$ άρα δέχεται εφαπτομένη ευθεία στο $A(-1,f(-1))=A(-1,0)$ την

  $(\varepsilon): y-f(-1)=f'(-1)(x+1)\Leftrightarrow y-0=\frac{1}{2}(x+1)\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$,

  άρα το $A(-1,0)$ είναι το μοναδικό σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

Έτσι στο διάστημα $[-1,0]$, επειδή η f είναι κοίλη, άρα η εφαπτομένη ευθεία στο $A(-1,0)$, δηλαδή η $(\varepsilon): y=g(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$, βρίσκεται από πάνω από την C_f σε κάθε σημείο του $[-1,0]$, με εξαίρεση το σημείο επαφής.

Άρα για κάθε $x \in [-1,0]$ ισχύει $g(x) \geq f(x)$ και το $"="$ μόνο για $x=-1$, οπότε έχουμε διαδοχικά:

$g(x) \geq f(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \geq f(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}-f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [-1,0]$ και το $"="$ μόνο για $x=-1$, άρα ισχύει $\frac{1}{2}t+\frac{1}{2} \geq f(t)$, για κάθε $t \in [-1,0]$ και το $"="$ μόνο για $t=-1$ (**)

όμως για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{4},0\right]$, επειδή

$\pi < 4 \Rightarrow \frac{\pi}{4} < 1 \Rightarrow -\frac{\pi}{4} > -1$ άρα για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{4},0\right] \subseteq [-1,0]$ και η συνάρτηση $h(x) = ημx$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ και ισχύει ότι

για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2},0\right] \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0 \underset{γν.αυξουσα}{\overset{ημx}{\Rightarrow}} ημ\left(-\frac{\pi}{2}\right) \leq ημx \leq ημ0$,

άρα για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2},0\right] \Rightarrow -1 \leq ημx \leq 0 \Rightarrow -1 \leq t \leq 0$ οπότε για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ ισχύει ότι $t = ημx \in [-1,0]$, άρα από την (**) έχουμε:

$\frac{1}{2}t+\frac{1}{2} \geq f(t)$, για κάθε $t \in [-1,0]$ και το $"="$ μόνο για $t=-1$ ή

$\frac{1}{2}ημx+\frac{1}{2} \geq f(ημx)$, για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ και το $"="$ μόνο για $t = ημx = -1$.

Δηλαδή

$\frac{1}{2}ημx+\frac{1}{2} \geq f(ημx)$, για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ και το $"="$ μόνο για $x = -\frac{\pi}{2}$.

Άρα για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{4},0\right] \subseteq \left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ ισχύει ότι : $\frac{1}{2}ημx+\frac{1}{2} > f(ημx)$.

Άρα από τη γνωστή οδηγία της παραγράφου 3.4 έχουμε:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\left(\frac{1}{2}\eta\mu x+\frac{1}{2}\right)dx > \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(\eta\mu x)dx \Leftrightarrow \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}(\eta\mu x+1)dx > \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(\eta\mu x)dx \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}\left[-\sigma\upsilon\nu x+x\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{0} > \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(\eta\mu x)dx \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}\left[(-\sigma\upsilon\nu 0+0)-\left(-\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right] > \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(\eta\mu x)dx \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}\left(-1+\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{4}\right) > \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(\eta\mu x)dx \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}\left(-1+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{4}\right) > \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(x)dx \Leftrightarrow \frac{\pi+2\sqrt{2}-4}{8} > \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(\eta\mu x)dx.$$

Άρα $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(\eta\mu x)dx < \frac{\pi+2\sqrt{2}-4}{8}$.

Ή χωρίς τη χρήση της οδηγίας: Θεωρούμε τη συνάρτηση

$\varphi(x)=\frac{1}{2}\eta\mu x+\frac{1}{2}-f(\eta\mu x)$ στο $\left[-\frac{\pi}{4},0\right]$. Έχουμε ότι:

- Η $\varphi(x)=\frac{1}{2}\eta\mu x+\frac{1}{2}-f(\eta\mu x)$ συνεχής στο $\left[-\frac{\pi}{4},0\right]$.
- $\varphi(x)>0$, για κάθε $x\in\left[-\frac{\pi}{4},0\right]$.

Έτσι από το θεώρημα 3 των ιδιοτήτων του ορισμένου ολοκληρώματος θα έχουμε ότι:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \varphi(x)dx > 0 \Leftrightarrow \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \left(\frac{1}{2}\eta\mu x + \frac{1}{2} - f(\eta\mu x)\right)dx > 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \left(\frac{1}{2}\eta\mu x + \frac{1}{2}\right)dx - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(\eta\mu x)dx > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} (\eta\mu x + 1)dx > \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(\eta\mu x)dx \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}\left[-\sigma\upsilon\nu x + x\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{0} > \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(\eta\mu x)dx \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}\left[\left(-\sigma\upsilon\nu 0 + 0\right) - \left(-\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right] > \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(\eta\mu x)dx \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}\left(-1 + \sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4}\right) > \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(\eta\mu x)dx \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}\left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4}\right) > \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(x)dx \Leftrightarrow \frac{\pi + 2\sqrt{2} - 4}{8} > \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(\eta\mu x)dx.$$

Άρα: $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(\eta\mu x)dx < \frac{\pi + 2\sqrt{2} - 4}{8}$.