

ΑΝΤΩΝΗΣ Κ. ΚΥΡΙΑΚΟΠΟΥΛΟΣ

500 Ασκήσεις Μαθηματικών με τις λύσεις τους

- Ασκήσεις Ανάλυσης
- Ασκήσεις Άλγεβρας
- Ασκήσεις Γεωμετρίας
- Ασκήσεις Διάφορες

$\forall x, p(x) \Leftrightarrow \exists x, p(x)$

$$\int_{\alpha}^{\beta} g'(x)f(g(x))dx = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)dx$$



500 Ασκήσεις Μαθηματικών με τις λύσεις τους

Αντώνης Κ.Κυριακόπουλος

e-mail: a.kiriakopoulos@gmail.com

Σελίδες: 386

Σχήμα 17 X 24

ISBN: 978-618-84215-9-2

Επιμέλεια : Αθανάσιος Τηλέγραφος

© Copyright: Ιανουάριος 2020, Εκδόσεις Ζανταρίδης Τηλέγραφος & Αντώνης Κ.Κυριακόπουλος

Απαγορεύεται σε όλα τα φυσικά ή νομικά πρόσωπα Δημοσίου ή Ιδιωτικού Δικαίου, η αναδημοσίευση, ολικά ή μερικά, η αναπαραγωγή, η μετάδοση, η παράφραση και η διασκευή, με οποιοδήποτε τρόπο (μηχανικό – ηλεκτρονικό - φωτοτυπικό κλπ.) του παρόντος.

Κεντρική Διάθεση:

Εκδόσεις: Ζανταρίδης -Τηλέγραφος, <https://zanthl.gr>

Τηλ: Κ.Τ:6974033501 – Ν.Ζ:6936269609



Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό περιέχει σχεδόν όλες τις ασκήσεις των Μαθηματικών που έχω δημοσιεύσει κατά καιρούς στους ιστότοπους: mathematica και Face Book καθώς και στο περιοδικό της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας : «Ευκλείδης Β΄». Η συγκέντρωση όλων αυτών των ασκήσεων σε ένα βιβλίο, ώστε να μη «χαθούν» με το πέρασμα του χρόνου και να φανούν περισσότερο χρήσιμες στους ενδιαφερόμενους, ήταν ιδέα των εκδόσεων : «Ζανταρίδης – Τηλέγραφος».

Πρόκειται για 500 ασκήσεις Μαθηματικών, κυρίως από τους τομείς: Ανάλυση, Άλγεβρα, Ευκλείδεια Γεωμετρία και Θεωρία Αριθμών. Πολλές από τις ασκήσεις αυτές τις έχω φτιάξει ο ίδιος. Κάθε άσκηση συνοδεύεται από την λύση της. Όλες οι λύσεις είναι γραμμένες με λογική αυστηρότητα, αλλά αναλυτικά και με σαφήνεια, ώστε να είναι εύκολα κατανοητές.

Στις λύσεις των ασκήσεων των Μαθηματικών φαίνεται η πλοκή των συλλογισμών και η λογική αυστηρότητα που απαιτούνται σε αυτά. Μάλιστα, μερικές λύσεις περιέχουν κάποιες από αυτές τις υπέροχες μαθηματικές κινήσεις που ξαφνιάζουν και γοητεύουν. Όλα αυτά κινούν το ενδιαφέρον των μαθητών και κάνουν πολλούς από αυτούς να αγαπήσουν τα Μαθηματικά. Όλοι μας έχουμε δει τη χαρά που έχει ένας μαθητής όταν κάνει μια απόδειξη μόνος του. Αυτό συμβαίνει διότι, αντίθετα απ' ό,τι γίνεται στα άλλα μαθήματα που διδάσκεται, στα Μαθηματικά όταν κάνει μια απόδειξη μόνος του δεν αναπαράγει αποθηκευμένη γνώση, όπως συμβαίνει για παράδειγμα στην ιστορία, αλλά δημιουργεί κάτι μόνος του με σαφήνεια και με λογική αυστηρότητα που τον οδηγούν σε αυτό που θέλει να αποδείξει. Και αυτό, για ένα μαθητή και όχι μόνο, είναι πράγματι σπουδαίο, διότι σε μια απόδειξη πρέπει να ξέρει τι θα πει, τότε θα το πει και γιατί θα το πει.

Από τις ασκήσεις του βιβλίου αυτού, οι ασκήσεις της Ανάλυσης είναι κατάλληλες και για τους μαθητές της Γ΄ τάξης του Λυκείου. Οι ασκήσεις της Άλγεβρας και της Ευκλείδειας Γεωμετρίας είναι κατάλληλες και για τους μαθητές των δύο πρώτων τάξεων του Λυκείου. Πολλές από τις ασκήσεις του βιβλίου αυτού είναι κατάλληλες και για αυτούς που λαμβάνουν μέρος σε μαθηματικούς διαγωνισμούς.

Θέλω να ευχαριστήσω τον εξάιρετο μαθηματικό και φίλο μου Γιώργο Τασσόπουλο, Διδάκτορα του ΕκΚΠΑ, για τις συζητήσεις που είχαμε σχετικά με μερικές από τις ασκήσεις αυτές. Επίσης, θέλω να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον επίσης εξάιρετο μαθηματικό και φίλο μου Βαγγέλη Σταματιάδη, M.Sc Θεωρητικών Μαθηματικών, ο οποίος με υπομονή και πραγματικό ενδιαφέρον διάβασε όλο το κείμενο του βιβλίου αυτού, διόρθωσε αρκετές αβλεψίες και έκανε πολλές εύστοχες παρατηρήσεις.

Από τις εκδόσεις «Ζανταρίδης – Τηλέγραφος» κυκλοφόρησε πρόσφατα (Μάρτιος 2019) και το βιβλίο μου: « ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ», το οποίο απευθύνεται σε όλους όσους ασχολούνται με τα Μαθηματικά. Η έκδοση του βιβλίου αυτού, καθώς και του παρόντος, πραγματοποιούνται σε μεγάλη χρονική απόσταση από τα προηγούμενα βιβλία που έχω γράψει και είναι συνέπεια της μεγάλης μου αγάπης για τα μαθηματικά και της επιθυμίας μου για ανιδιοτελή προσφορά.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

	Σελίδα
ΕΝΟΤΗΤΑ 1. ΑΝΑΛΥΣΗ	1
● Σύνολο ορισμού – Αντίστροφη συνάρτηση	3
● Όρια- Συνέχεια	22
● Παράγωγοι	34
● Ολοκληρώματα	103
ΕΝΟΤΗΤΑ 2. ΑΛΓΕΒΡΑ	161
ΕΝΟΤΗΤΑ 3. ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ	251
ΕΝΟΤΗΤΑ 4. ΔΙΑΦΟΡΕΣ	327
Βιβλιογραφία	377

ΕΝΟΤΗΤΑ 1.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

- ❖ Σύνολο ορισμού – Αντίστροφη συνάρτηση
- ❖ Όρια – Συνέχεια
- ❖ Παράγωγοι
- ❖ Ολοκληρώματα

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Σύνολο ορισμού – Αντίστροφη συνάρτηση

Άσκηση 1.

Να εξετάσετε αν είναι ίσες οι συναρτήσεις:

$$f(x) = |3|x-1| + 5x - 5| \quad \text{και} \quad g(x) = 5|x-1| + 3x - 3$$

Λύση. Προφανώς το σύνολο ορισμού και των δύο συναρτήσεων είναι το \mathbb{R} .

1) Έστω ότι $x \geq 1$. Τότε:

$$f(x) = |3(x-1) + 5(x-1)| = |8(x-1)| = 8(x-1) \quad \text{και}$$

$$g(x) = 5(x-1) + 3(x-1) = 8(x-1)$$

Άρα, τότε: $f(x) = g(x)$.

2) Έστω ότι $x < 1$. Τότε: $f(x) = |-3(x-1) + 5(x-1)| = |2(x-1)| = -2(x-1)$

$$\text{και} \quad g(x) = -5(x-1) + 3(x-1) = -2(x-1)$$

Άρα, τότε: $f(x) = g(x)$.

– Συνεπώς $f(x) = g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και άρα: $f = g$.

Άσκηση 2.

Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f: [5, 7] \rightarrow \mathbb{R}$ με: $f(x) = x^2 - 2x$.

Λύση. Το σύνολο ορισμού της συνάρτησης είναι: $A = [5, 7]$. Ένας αριθμός $y \in \mathbb{R}$ ανήκει στο σύνολο τιμών $f(A)$ της συνάρτησης, αν, και μόνον, η εξίσωση $f(x) = y$, (με άγνωστο το x και παράμετρο το y), έχει μία τουλάχιστον λύση $x \in A$. Έχουμε:

$$f(x) = y \Leftrightarrow x^2 - 2x - y = 0 \quad (1)$$

Η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι: $\Delta = 4 + 4y = 4(1+y)$.

1) Έστω ότι: $y < -1$. Τότε $\Delta < 0$ και άρα η εξίσωση (1) είναι αδύνατη.

2) Έστω ότι: $y = -1$. Τότε $\Delta = 0$ και η εξίσωση (1) έχει μια μοναδική λύση, την $x = 1$, η οποία απορρίπτεται γιατί δεν ανήκει στο διάστημα A .

3) Έστω ότι: $y > -1$. Τότε $\Delta > 0$ και η εξίσωση (1) έχει δύο πραγματικές και άνισες

λύσεις, τις εξής: $\frac{2 \pm \sqrt{4(1+y)}}{2} = 1 \pm \sqrt{1+y}$. Επειδή $1 - \sqrt{1+y} < 1$ η λύση αυτή

απορρίπτετε γιατί δεν ανήκει στο διάστημα A . Η άλλη λύση είναι δεκτή αν, και μόνο

$$\text{αν: } (1 + \sqrt{1+y}) \in A \Leftrightarrow 5 \leq 1 + \sqrt{1+y} \leq 7 \Leftrightarrow 4 \leq \sqrt{1+y} \leq 6 \Leftrightarrow 15 \leq y \leq 35.$$

Άρα το ζητούμενο σύνολο τιμών είναι: $f(A) = [15, 35]$.

Άσκηση 3.

Να βρείτε τους αριθμούς $\lambda \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε το σύνολο τιμών της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{x^2 - \lambda x + 1}{x^2 + 1} \text{ να είναι το διάστημα } [-1, 3].$$

Λύση. Το σύνολο ορισμού της f είναι το \mathbb{R} . Ένας αριθμός $y \in \mathbb{R}$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f αν, και μόνο αν, η εξίσωση: $f(x) = y$, ως προς x , έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο \mathbb{R} . Με $y \in \mathbb{R}$ έχουμε, για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x^2 - \lambda x + 1}{x^2 + 1} = y \Leftrightarrow x^2 - \lambda x + 1 = yx^2 + y \Leftrightarrow (y-1)x^2 + \lambda x + (y-1) = 0(1).$$

1) Έστω ότι $y=1$. Τότε: (1) $\Leftrightarrow \lambda x = 0$. Η εξίσωση αυτή έχει πάντοτε την λύση $x=0$ και άρα $1 \in f(\mathbb{R})$.

2) Έστω ότι $y \neq 1$. Τότε, για να έχει η εξίσωση (1) μία τουλάχιστον ρίζα στο \mathbb{R} ,

πρέπει και αρκεί: $\lambda^2 - 4(y-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \left(y - \frac{2-\lambda}{2}\right) \left(y - \frac{2+\lambda}{2}\right) \leq 0(2)$.

α) Έστω ότι: $\lambda = 0$. Τότε: (2) $\Leftrightarrow (y-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow (y-1)^2 = 0 \Leftrightarrow y = 1$. Άρα τότε: $f(\mathbb{R}) = \{1\}$.

β) Έστω ότι: $\lambda > 0$. Τότε: (2) $\Leftrightarrow \frac{2-\lambda}{2} \leq y \leq \frac{2+\lambda}{2}$. Άρα τότε: $f(\mathbb{R}) = \left[\frac{2-\lambda}{2}, \frac{2+\lambda}{2}\right]$.

γ) Έστω ότι: $\lambda < 0$. Τότε: (2) $\Leftrightarrow \frac{2+\lambda}{2} \leq y \leq \frac{2-\lambda}{2}$. Άρα τότε: $f(\mathbb{R}) = \left[\frac{2+\lambda}{2}, \frac{2-\lambda}{2}\right]$.

—Εξετάζουμε τώρα αν υπάρχουν αριθμοί $\lambda > 0$ με:

$$\left(\frac{2-\lambda}{2} = -1 \text{ και } \frac{2+\lambda}{2} = 3\right) \Leftrightarrow \lambda = 4.$$

Εξετάζουμε ακόμα αν υπάρχουν αριθμοί $\lambda < 0$ με:

$$\left(\frac{2+\lambda}{2} = -1 \text{ και } \frac{2-\lambda}{2} = 3\right) \Leftrightarrow \lambda = -4.$$

• Άρα οι ζητούμενοι αριθμοί είναι: $\lambda = 4$ και $\lambda = -4$.

Άλλη λύση. Το σύνολο ορισμού της f είναι το \mathbb{R} , για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

1) Έστω ότι για έναν αριθμό $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει: $f(\mathbb{R}) = [-1, 3]$. Τότε:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq 3 \\ \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 3 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \frac{x^2 - \lambda x + 1}{x^2 + 1} \leq 3 \\ \exists x \in \mathbb{R}, \frac{x^2 - \lambda x + 1}{x^2 + 1} = 3 \end{cases} \\ \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, 2x^2 + \lambda x + 2 \geq 0 \\ \exists x \in \mathbb{R}, 2x^2 + \lambda x + 2 = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \lambda^2 - 16 \leq 0 \\ \lambda^2 - 16 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 16 = 0 \Rightarrow (\lambda = 4 \text{ ή } \lambda = -4).$$

2) **Αντιστρόφως. α)** Έστω ότι $\lambda = 4$. Εξετάζουμε αν το σύνολο τιμών της

συνάρτησης: $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 1}{x^2 + 1}$ είναι το διάστημα $[-1, 3]$. Ένας αριθμός

$y \in \mathbb{R}$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f αν, και μόνο αν, η εξίσωση: $f(x) = y$, ως προς x , έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο \mathbb{R} . Με $y \in \mathbb{R}$ έχουμε, για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x + 1}{x^2 + 1} = y \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (y-1)x^2 + 4x + (y-1) = 0(1).$$

— Έστω ότι $y = 1$. Τότε η εξίσωση (1) έχει την λύση $x = 0$ και άρα $1 \in f(\mathbb{R})$.

— Έστω ότι $y \neq 1$. Τότε η εξίσωση (1) έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο \mathbb{R} , αν, και μόνο αν: $16 - 4(y-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow -1 \leq y \leq 3$.

Άρα τότε: $f(\mathbb{R}) = [-1, 3] \cup \{1\} = [-1, 3]$.

β) Έστω ότι $\lambda = -4$. Τότε, όπως προηγουμένως, βρίσκουμε ότι: $f(\mathbb{R}) = [-1, 3]$.

— Συμπεραίνουμε ότι οι ζητούμενες τιμές του λ είναι: $\lambda = 4$ και $\lambda = -4$.

Άσκηση 4.

Για μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει: $f(3x - 2y) = f(2x - y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξει ότι η συνάρτηση αυτή είναι σταθερή.

Λύση. Θεωρούμε δύο πραγματικούς αριθμούς α και β . Αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$f(\alpha) = f(\beta)$. Εξετάζουμε αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί x και y για τους οποίους ισχύουν: $3x - 2y = \alpha$ και $2x - y = \beta$. Έχουμε:

$$\begin{cases} 3x - 2y = \alpha \\ 2x - y = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = \alpha \\ -4x + 2y = -2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\beta - \alpha \\ y = 3\beta - 2\alpha \end{cases}$$

Άρα, θέτοντας στη δοσμένη ισότητα $x = 2\beta - \alpha$ και $y = 3\beta - 2\alpha$ βρίσκουμε ότι

$f(\alpha) = f(\beta)$. Συνεπώς η συνάρτηση f είναι σταθερή.

Άσκηση 5.

Να βρείτε τις συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, έτσι ώστε να ισχύει:

$$f(x^3) = x^2 + x + 2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Λύση. Έστω ότι μία συνάρτηση f πληροί τις δοσμένες συνθήκες.

1) **α)** Έστω ότι $x \geq 0$. Τότε, θέτουμε στην (1), όπου x το $\sqrt[3]{x}$ και βρίσκουμε:

$$f\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^3\right) = \left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + \sqrt[3]{x} + 2 \Rightarrow f(x) = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 2.$$

β) Έστω ότι $x < 0$. Τότε, θέτουμε στην (1), όπου x το $-\sqrt[3]{-x}$ και βρίσκουμε:

$$f\left(\left(-\sqrt[3]{-x}\right)^3\right) = \left(-\sqrt[3]{-x}\right)^2 - \sqrt[3]{-x} + 2 \Rightarrow f(x) = \left(\sqrt[3]{-x}\right)^2 - \sqrt[3]{-x} + 2 = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{-x} + 2.$$

$$\text{Ωστε τότε: } f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 2, & \text{αν } x \geq 0 \\ \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{-x} + 2, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

2) Αντιστρόφως. Όπως βρίσκουμε εύκολα, η συνάρτηση που βρήκαμε πληροί τις δοσμένες συνθήκες και άρα είναι η μοναδική ζητούμενη.

Άσκηση 6.

Έστω ότι A είναι ένα μη κενό υποσύνολο του \mathbb{R} , το οποίο περιέχει τουλάχιστον τρία στοιχεία. Θεωρούμε δύο συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) > 0$ και $g(x) > 0$ για κάθε $x \in A$ και υποθέτουμε ότι για κάθε $x, y \in A$ με $x \neq y$ ισχύει: $f(x)f(y) = g(x)g(y)$. Να αποδείξετε ότι: $f = g$.

Λύση. Έστω ένας αριθμός $x \in A$. Θεωρούμε δύο αριθμούς $\alpha, \beta \in A$ με: $x \neq \alpha, x \neq \beta$ και $\alpha \neq \beta$. Σύμφωνα με την υπόθεση έχουμε:

$$f(x)f(\alpha) = g(x)g(\alpha) (> 0), \quad f(x)f(\beta) = g(x)g(\beta) (> 0) \quad \text{και} \quad f(\alpha)f(\beta) = g(\alpha)g(\beta) (> 0).$$

Πολλαπλασιάζοντας αυτές κατά μέλη, βρίσκουμε:

$$\left[f(x)f(\alpha)f(\beta)\right]^2 = \left[g(x)g(\alpha)g(\beta)\right]^2 \Rightarrow f(x)f(\alpha)f(\beta) = g(x)g(\alpha)g(\beta).$$

Και λόγω της τρίτης από τις τρεις παραπάνω ισότητες, έπεται ότι: $f(x) = g(x)$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι: $f(x) = g(x)$, για κάθε $x \in A$. Και επειδή οι συναρτήσεις αυτές έχουν και το ίδιο σύνολο ορισμού, έπεται ότι: $f = g$.

Άσκηση 7.

Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης:

$$f(x) = (x + \alpha + \beta)(x + \alpha - \beta)(x - \alpha + \beta)(x - \alpha - \beta), \quad \text{όπου } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Λύση. Το σύνολο ορισμού της συνάρτησης είναι το \mathbb{R} . Έχουμε για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= (\alpha + \beta + x)(\alpha + \beta - x)(\alpha - \beta + x)(\alpha - \beta - x) = \left[(\alpha + \beta)^2 - x^2\right] \left[(\alpha - \beta)^2 - x^2\right] \\ &= (\alpha^2 + \beta^2 - x^2 + 2\alpha\beta)(\alpha^2 + \beta^2 - x^2 - 2\alpha\beta) = (\alpha^2 + \beta^2 - x^2)^2 - 4\alpha^2\beta^2 \geq -4\alpha^2\beta^2. \end{aligned}$$

Άρα, η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης είναι $-4\alpha^2\beta^2$ και τη λαμβάνει όταν:

$$x^2 = \alpha^2 + \beta^2, \quad \text{δηλαδή με: } x = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \text{όπως και με: } x = -\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Άσκηση 8.

Να βρείτε την μεγαλύτερη δυνατή τιμή της συνάρτησης: $f(x) = 4\sqrt{x-3} - 4x + 13$.

Λύση. Το σύνολο ορισμού της συνάρτησης f είναι: $A = [3, +\infty)$. Έχουμε για κάθε $x \in A$:

$$f(x) = 4\sqrt{x-3} - (4x-11) + 2 \quad (\text{ισχύει: } 4x-11 > 0) = \frac{16(x-3) - (4x-11)^2}{4\sqrt{x-3} + (4x-11)} + 2 = \dots$$

$$= -\frac{(4x-13)^2}{4\sqrt{x-3} + 4x-11} + 2 \leq 2.$$

Το ίσον προφανώς ισχύει (μόνο) για $x = \frac{13}{4}$ (ανήκει στο A , δηλαδή το 2 είναι τιμή της f). Άρα, η συνάρτηση αυτή έχει μέγιστη τιμή το 2, την οποία λαμβάνει (μόνο) για $x = \frac{13}{4}$.

Άσκηση 9.

Να βρείτε τις συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, έτσι ώστε να ισχύει:

$$f(x+y) = f^2(x) + f^2(y), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Λύση. Έστω ότι μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ πληροί την σχέση (1). Από αυτή με $x = y = 0$ βρίσκουμε: $f(0) = f^2(0) + f^2(0) \Rightarrow f(0)[2f(0) - 1] = 0$

$$\Rightarrow \left[f(0) = 0 \text{ ή } f(0) = \frac{1}{2} \right].$$

α) Έστω ότι: $f(0) = 0$. Από την (1) με $y = -x$ έχουμε, για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

$$f(0) = f^2(x) + f^2(-x) \Rightarrow f^2(x) + f^2(-x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0.$$

β) Έστω ότι: $f(0) = \frac{1}{2}$. Από την (1) με $y = 0$ έχουμε, για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = f^2(x) + f^2(0) \Rightarrow f^2(x) - f(x) + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \left[f(x) - \frac{1}{2} \right]^2 = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}.$$

Άρα, τότε: $f(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (2) ή $f(x) = \frac{1}{2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (3).

Αντιστρόφως. Όπως βρίσκουμε εύκολα, οι συναρτήσεις (2) και (3) πληρούν τις δοσμένες συνθήκες και άρα είναι οι μοναδικές ζητούμενες.

Άσκηση 10.

Να βρείτε τις συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, έτσι ώστε να ισχύουν:

$$f(x) \geq x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (1) \text{ και } f(x - y) \leq f(x) - f(y) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R} \quad (2).$$

Λύση. Έστω ότι μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ πληροί τις δοσμένες σχέσεις. Από την (1) με $x = 0$ και από την (2) με $x = y = 0$, βρίσκουμε αντίστοιχα:

$$\begin{cases} f(0) \geq 0 \\ f(0) \leq f(0) - f(0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) \geq 0 \\ f(0) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow f(0) = 0.$$

Θεωρούμε έναν αριθμό $x \in \mathbb{R}$. Θέτοντας στην (1) όπου x το $-x$ βρίσκουμε: $f(-x) \geq -x$ (3). Από την (2) με $x = 0$, βρίσκουμε: $f(-y) \leq f(0) - f(y)$. Θέτοντας σε αυτή όπου y το x και επειδή $f(0) = 0$ βρίσκουμε: $-f(x) \geq f(-x)$ (4). Προσθέτοντας κατά μέλη τις (3) και (4) βρίσκουμε τελικά: $f(x) \leq x$. Και επειδή από την (1) έχουμε: $f(x) \geq x$, έπεται ότι $f(x) = x$. Άρα τότε: $f(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

• Όπως βρίσκουμε εύκολα η συνάρτηση $f(x) = x$ πληροί τις δοσμένες συνθήκες και άρα είναι η μοναδική ζητούμενη.

Άσκηση 11.

Να βρείτε τις συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοιες ώστε να ισχύουν: $f(1) = 2$ και

$$(1) \quad (x - y)f(x + y) - (x + y)f(x - y) = 4xy(x^2 - y^2), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Λύση. Έστω ότι μια συνάρτηση f πληροί τις δοσμένες συνθήκες. Από την (1) με $x = y = 1$, βρίσκουμε: $f(0) = 0$. Θεωρούμε δύο αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Από την (1) με:

$$x = \frac{\alpha + \beta}{2} \text{ και } y = \frac{\alpha - \beta}{2} \text{ βρίσκουμε: } \beta f(\alpha) - \alpha f(\beta) = \alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2). \text{ Συνεπώς με } \alpha\beta \neq 0$$

$$\text{έχουμε: } \frac{f(\alpha)}{\alpha} - \frac{f(\beta)}{\beta} = \alpha^2 - \beta^2 \text{ και άρα: } \frac{f(\alpha)}{\alpha} - \alpha^2 = \frac{f(\beta)}{\beta} - \beta^2. \text{ Συμπεραίνουμε ότι η}$$

συνάρτηση: $g(x) = \frac{f(x)}{x} - x^2$ είναι σταθερή στο \mathbb{R}^* . Έστω ότι: $g(x) = \lambda, x \in \mathbb{R}^*$, όπου

$$\lambda \in \mathbb{R}. \text{ Έτσι έχουμε για κάθε } x \neq 0: \frac{f(x)}{x} - x^2 = \lambda \text{ και άρα: } f(x) = x^3 + \lambda x \quad (2).$$

Από την (2), έχουμε: $f(1) = 1 + \lambda$ και επειδή $f(1) = 2$, έπεται ότι: $1 + \lambda = 2$ και άρα $\lambda = 1$. Αντικαθιστώντας στην (2) βρίσκουμε: $f(x) = x^3 + x, x \in \mathbb{R}^*$. Και επειδή, όπως είδαμε παραπάνω: $f(0) = 0$, έπεται ότι: $f(x) = x^3 + x, x \in \mathbb{R}$ (3).

Όπως βρίσκουμε εύκολα με πράξεις, η συνάρτηση (3) πληροί τις δοσμένες συνθήκες και άρα είναι η μοναδική ζητούμενη.

Άσκηση 12.

Για μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύουν, για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x+3) \leq f(x)+3 \text{ (1) και } f(x+5) \geq f(x)+5 \text{ (2).}$$

Να αποδείξετε ότι: $f(x+1) = f(x)+1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση. Στις (1) και (2) θέτουμε όπου x το $x+1$, οπότε θα έχουμε για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x+4)-3 \leq f(x+1) \leq f(x+6)-5 \text{ (3).}$$

Στην (1) θέτουμε όπου x το $x+3$ και στην (2) θέτουμε όπου x το $x-1$, οπότε θα έχουμε αντιστοίχως: $f(x+6) \leq f(x+3)+3 \Rightarrow f(x+6)-5 \leq f(x+3)-2$ και

$$f(x+4) \geq f(x-1)+5 \Rightarrow f(x+4)-3 \geq f(x-1)+2. \text{ Έτσι από τις (3), έχουμε:}$$

$$f(x-1)+2 \leq f(x+1) \leq f(x+3)-2 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} f(x-1)+2 \leq f(x+1) \leq f(x)+1 \text{ (4).}$$

Στην δεξιά σχέση, από τις (4), θέτουμε όπου x το $x-1$ και βρίσκουμε:

$$f(x) \leq f(x-1)+1 \Rightarrow f(x-1)+2 \geq f(x)+1. \text{ Έτσι, από τις (4), έχουμε:}$$

$$f(x)+1 \leq f(x+1) \leq f(x)+1 \Rightarrow f(x+1) = f(x)+1.$$

Άσκηση 13.

Να βρείτε τις συναρτήσεις $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, για τις οποίες, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$, ισχύει:

$$3f\left(\frac{1}{x}\right) - 2f(x) = \frac{1}{x^2} \text{ (1)}$$

Λύση. Έστω ότι μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ πληροί την (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

Θεωρούμε έναν αριθμό $x \in \mathbb{R}^*$. Τότε $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}^*$ και θέτοντας στην (1) όπου x το $\frac{1}{x}$,

βρίσκουμε: $3f(x) - 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$. Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη αυτής με το 3

και της (1) με το 2 και προσθέτοντας κατά μέλη τις προκύπτουσες, βρίσκουμε:

$$5f(x) = \frac{2}{x^2} + 3x^2 \text{ και συνεπώς: } f(x) = \frac{3x^4 + 2}{5x^2} \text{ (2).}$$

• Όπως βρίσκουμε εύκολα η συνάρτηση (2) πληροί τις δοσμένες συνθήκες και άρα είναι η μοναδική ζητούμενη.

Άσκηση 14.

Να βρείτε τους αριθμούς $\lambda \in \mathbb{R}$, για τους οποίους είναι γνησίως αύξουσα η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} (2-\lambda)x + \lambda - 5, & \text{αν } x < 1 \\ (\lambda+1)x - 2, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$$

Λύση. Το σύνολο ορισμού της συνάρτησης f είναι το \mathbb{R} , για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

1) Έστω ότι $f \uparrow \mathbb{R}$. Τότε θα έχουμε:

$$\begin{cases} f(-1) < f(0) \\ f(1) < f(2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2-\lambda)(-1) + \lambda - 5 < \lambda - 5 \\ (\lambda+1) \cdot 1 - 2 < (\lambda+1) \cdot 2 - 2 \end{cases} \Rightarrow -1 < \lambda < 2.$$

2) **Αντιστρόφως.** Έστω ότι: $-1 < \lambda < 2$. Θεωρούμε δύο αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$.

i) Έστω ότι: $\alpha < \beta < 1$. Τότε:

$$f(\beta) - f(\alpha) = [(2-\lambda)\beta + \lambda - 5] - [(2-\lambda)\alpha + \lambda - 5] = (2-\lambda)(\beta - \alpha) > 0 \Rightarrow f(\alpha) < f(\beta).$$

ii) Έστω ότι: $1 \leq \alpha < \beta$. Τότε:

$$f(\beta) - f(\alpha) = [(\lambda+1)\beta - 2] - [(\lambda+1)\alpha - 2] = (\lambda+1)(\beta - \alpha) > 0 \Rightarrow f(\alpha) < f(\beta).$$

iii) Έστω ότι: $\alpha < 1 \leq \beta$. Τότε:

$$f(\beta) = (\lambda+1)\beta - 2 \geq (\lambda+1) - 2 \Rightarrow f(\beta) \geq \lambda - 1 \quad (1) \text{ και}$$

$$f(\alpha) = (2-\lambda)\alpha + \lambda - 5 < (2-\lambda) + \lambda - 5 = -3 \Rightarrow -f(\alpha) > 3 \quad (2).$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2), βρίσκουμε ότι:

$$f(\beta) - f(\alpha) > \lambda - 1 + 3 = \lambda + 2 > 0 \Rightarrow f(\alpha) < f(\beta).$$

Ωστε σε κάθε περίπτωση ισχύει: $f(\alpha) < f(\beta)$ και συνεπώς $f \uparrow \mathbb{R}$.

—Άρα, οι ζητούμενοι αριθμοί λ είναι: $-1 < \lambda < 2$.

Άσκηση 15.

Για μια συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει:

$$2f^5(x) + 3f(x) = 3x^2 + 2x - 5, \text{ για κάθε } x \geq 0.$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Λύση. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι:

$$\text{Για κάθε } x_1, x_2 \in [0, +\infty), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad (1)$$

Έστω ότι δεν ισχύει. Τότε θα ισχύει η άρνηση της (1), που είναι:

Υπάρχουν $x_1, x_2 \in [0, +\infty), x_1 < x_2$ και $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Για τους αριθμούς αυτούς x_1 και x_2 έχουμε:

$$f(x_1) \geq f(x_2) \Rightarrow \begin{cases} 2f^5(x_1) \geq 2f^5(x_2) \\ 3f(x_1) \geq 3f(x_2) \end{cases} \Rightarrow 2f^5(x_1) + 3f(x_1) \geq 2f^5(x_2) + 3f(x_2) \Rightarrow$$

$$3x_1^2 + 2x_1 - 5 \geq 3x_2^2 + 2x_2 - 5 \Rightarrow (x_1 - x_2)[3(x_1 + x_2) + 2] \geq 0, \text{ άτοπο.}$$

Άρα, η (1) ισχύει και συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα.

Άσκηση 16.

Να βρείτε τις συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, έτσι ώστε να ισχύει:

$$f^3(x) + 4f(x) \cdot x^2 = 3f^2(x) \cdot x + 4x^3, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Λύση. Έστω ότι μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ πληροί την υπόθεση. Έτσι, έχουμε για κάθε $x \in \mathbb{R}$: $f^3(x) - 3f^2(x) \cdot x + 3f(x) \cdot x^2 - x^3 + f(x) \cdot x^2 = 3x^3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow [f(x) - x]^3 + f(x) \cdot x^2 = 3x^3 \quad (1)$$

Από την (1) με $x = 0$, βρίσκουμε: $f(0) = 0$ και για κάθε $x \neq 0$, έχουμε:

$$\left[\frac{f(x)}{x} - 1 \right]^3 + \frac{f(x)}{x} = 3 \quad (2)$$

Θεωρούμε την συνάρτηση: $g(t) = (t-1)^3 + t$. Η συνάρτηση αυτή είναι ορισμένη στο \mathbb{R} και όπως βρίσκουμε εύκολα (με τον ορισμό ή με παραγώγους): $g \uparrow \mathbb{R}$. Συνεπώς η g είναι 1-1. Λόγω της (2) και επειδή $g(2) = 3$, έχουμε, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$:

$$g\left[\frac{f(x)}{x}\right] = g(2), \text{ οπότε: } \frac{f(x)}{x} = 2 \text{ και συνεπώς: } f(x) = 2x. \text{ Έτσι, επειδή και } f(0) = 0,$$

έχουμε: $f(x) = 2x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αντιστρόφως. Όπως βρίσκουμε εύκολα η συνάρτηση: $f(x) = 2x$ πληροί τις δοσμένες συνθήκες και άρα είναι η μοναδική ζητούμενη.

Άσκηση 17.

Για μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει: $f(f(x)) = ax + \beta$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (1),

όπου a και β είναι δύο δοσμένοι πραγματικοί αριθμοί με $a + \beta = 1$ και $\beta \neq 0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μια μοναδική ρίζα στο \mathbb{R} .

Λύση. Έστω ένας αριθμός $x \in \mathbb{R}$. Τότε $f(x) \in \mathbb{R}$. Θέτοντας στην (1) όπου x το $f(x)$ βρίσκουμε: $f(f(f(x))) = af(x) + \beta \Rightarrow f(ax + \beta) = af(x) + \beta$. Άρα, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει:

$$f(ax + \beta) = af(x) + \beta \quad (2).$$

Θέτοντας στην (2) $x = 1$, βρίσκουμε:

$$f(a + \beta) = af(1) + \beta \Rightarrow f(1) = (1 - \beta)f(1) + \beta \Rightarrow \beta f(1) = \beta \Rightarrow f(1) = 1.$$

Άρα η εξίσωση: $f(x) = x$ έχει ρίζα τον αριθμό 1.

• Έστω τώρα ότι η εξίσωση $f(x) = x$ έχει και άλλη μια ρίζα $\rho \in \mathbb{R}$ με $\rho \neq 1$, οπότε $f(\rho) = \rho$. Από την (1) με $x = \rho$ βρίσκουμε:

$$f(f(\rho)) = a\rho + \beta \Rightarrow f(\rho) = a\rho + \beta \Rightarrow \rho = (1 - \beta)\rho + \beta \Rightarrow \beta\rho = \beta \Rightarrow \rho = 1, \text{ άτοπο.}$$

— Άρα, η εξίσωση: $f(x) = x$ έχει μια μοναδική ρίζα, το 1.

Άσκηση 18.

Να βρείτε τις συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, έτσι ώστε να ισχύει:

$$\left[f(x) - x^2 - 1 \right]^{2v+1} = (x^2 + 1)^{2v} \left[3(x^2 + 1) - f(x) \right], \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ όπου } v \in \mathbb{N}^*.$$

Λύση. Έστω ότι μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ πληροί την δοσμένη συνθήκη. Από αυτή έχουμε, για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\left[f(x) - x^2 - 1 \right]^{2v+1}}{(x^2 + 1)^{2v+1}} = \frac{3(x^2 + 1) - f(x)}{x^2 + 1} \Rightarrow \left[\frac{f(x)}{x^2 + 1} - 1 \right]^{2v+1} + \frac{f(x)}{x^2 + 1} = 3 \quad (1)$$

Τώρα, θεωρούμε τη συνάρτηση: $g(x) = (x - 1)^{2v+1} + x$, οπότε από την (1), έχουμε για

κάθε $x \in \mathbb{R}$: $g\left(\frac{f(x)}{x^2 + 1}\right) = g(2) \quad (2).$

Η συνάρτηση g είναι ορισμένη στο \mathbb{R} . Με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, έχουμε:

$$\alpha < \beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha - 1 < \beta - 1 \\ \alpha < \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\alpha - 1)^{2v+1} < (\beta - 1)^{2v+1} \\ \alpha < \beta \end{cases} \quad (\text{πρόσθεση}) \Rightarrow g(\alpha) < g(\beta).$$

Συνεπώς, $g \uparrow \mathbb{R}$ [με παραγώγους: $g'(x) = (2v + 1)(x - 1)^{2v} + 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$].

Άρα η g είναι 1-1. Έτσι, έχουμε: $(2) \Rightarrow \frac{f(x)}{x^2 + 1} = 2 \Rightarrow f(x) = 2x^2 + 2.$

• Όπως βρίσκουμε εύκολα, η συνάρτηση: $f(x) = 2x^2 + 2$ πληροί τις δοσμένες συνθήκες και άρα είναι η μοναδική ζητούμενη.

Άσκηση 19.

Έστω η συνάρτηση: $f(x) = x|x| + 2x.$

α) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = y$, με άγνωστο το x και παράμετρο το $y \in \mathbb{R}$

β) Με τη βοήθεια των αποτελεσμάτων που θα βρείτε από τη λύση της εξίσωσης $f(x) = y$:

i) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f . ii) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

γ) Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f .

Λύση. Το σύνολο ορισμού της f είναι το \mathbb{R} .

α) Με $x < 0$, έχουμε: $f(x) = y \Leftrightarrow x(-x) + 2x = y \Leftrightarrow x^2 - 2x + y = 0 \quad (1).$

Η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι: $\Delta = 4 - 4y = 4(1 - y).$

- Αν $y > 1$, τότε $\Delta < 0$ και άρα η εξίσωση (1) είναι αδύνατη.
- Αν $y = 1$, τότε $\Delta = 0$ και άρα: $(1) \Leftrightarrow x = 1 > 0$, απορρίπτεται.

- Αν $y < 1$, τότε $\Delta > 0$ και άρα η εξίσωση (1) έχει δύο λύσεις, τις:

$$x = 1 + \sqrt{1-y} \text{ και } x = 1 - \sqrt{1-y}.$$

Η πρώτη είναι θετική και άρα απορρίπτεται. Η δεύτερη είναι δεκτή αν, και μόνο αν:

$$1 - \sqrt{1-y} < 0 \Leftrightarrow 1 < \sqrt{1-y} \Leftrightarrow 1 < 1-y \Leftrightarrow y < 0$$

— Με $x \geq 0$, έχουμε:

$$f(x) = y \Leftrightarrow x \cdot x + 2x = y \Leftrightarrow x^2 + 2x - y = 0 \quad (2).$$

Η διακρίνουσα της εξίσωσης (2) είναι: $\Delta' = 4 + 4y = 4(1+y)$.

- Αν $y < -1$, τότε $\Delta' < 0$ και άρα η εξίσωση (2) είναι αδύνατη.
- Αν $y = -1$, τότε $\Delta' = 0$ και άρα: $(2) \Leftrightarrow x = -1 < 0$, απορρίπτεται.
- Αν $y > -1$, τότε $\Delta' > 0$ και άρα η εξίσωση (2) έχει δύο λύσεις, τις:

$$x = -1 + \sqrt{1+y} \text{ και } x = -1 - \sqrt{1+y}.$$

Η δεύτερη είναι αρνητική και άρα απορρίπτεται. Η πρώτη είναι δεκτή αν, και μόνο αν: $-1 + \sqrt{1+y} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{1+y} \geq 1 \Leftrightarrow 1+y \geq 1 \Leftrightarrow y \geq 0$.

— Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι:

Η εξίσωση $f(x) = y$ με $x \in \mathbb{R}$, για κάθε $y \in \mathbb{R}$, έχει μία μοναδική λύση, την εξής:

$$x = \begin{cases} 1 - \sqrt{1-y}, & \text{αν } y < 0 \\ -1 + \sqrt{1+y}, & \text{αν } y \geq 0 \end{cases}$$

- β) i)** Το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο των αριθμών $y \in \mathbb{R}$, για τους οποίους η εξίσωση $f(x) = y$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα $x \in \mathbb{R}$. Αυτό, όπως είδαμε παραπάνω, συμβαίνει για κάθε $y \in \mathbb{R}$. Άρα, το σύνολο τιμών της f είναι το \mathbb{R} .
- ii)** Έστω ότι $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ και ότι $f(x_1) = f(x_2)$. Θέτουμε $f(x_1) = y$, οπότε και $f(x_2) = y$. Έτσι, οι αριθμοί x_1 και x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = y$. Επειδή, όπως είδαμε παραπάνω, η εξίσωση αυτή για κάθε $y \in \mathbb{R}$ έχει μία μοναδική λύση, έπεται ότι $x_1 = x_2$. Άρα, η συνάρτηση f είναι 1-1.
- γ)** Η συνάρτηση f αντιστρέφεται, αφού είναι 1-1. Σύμφωνα με τα παραπάνω, η αντίστροφη συνάρτηση είναι:

$$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f^{-1}(y) = \begin{cases} 1 - \sqrt{1-y}, & \text{αν } y < 0 \\ -1 + \sqrt{1+y}, & \text{αν } y \geq 0 \end{cases}.$$

Άσκηση 20.

Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη και ισχύουν: $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και

$$f(f(x)) = x^5 - x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 6x - 5, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Να αποδείξετε ότι οι}$$

γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} έχουν ένα μοναδικό κοινό σημείο. Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου αυτού;

Λύση. 1) Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη, έπεται ότι είναι 1-1 και άρα αντιστρέφεται. Και επειδή: $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, έπεται ότι: $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων f και f^{-1} είναι οι πραγματικές λύσεις της εξίσωσης: $f(x) = f^{-1}(x)$. Επειδή η f είναι 1-1, έχουμε:

$$\begin{aligned} f(x) = f^{-1}(x) &\Leftrightarrow f(f(x)) = f(f^{-1}(x)) \Leftrightarrow (f \circ f)(x) = x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^5 - x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 6x - 5 = x \Leftrightarrow x^4(x-1) - 4x^2(x-1) + 5(x-1) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x-1)(x^4 - 4x^2 + 5) = 0 \Leftrightarrow (x-1)\left[(x^2 - 2)^2 + 1\right] = 0 \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Άρα, οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} έχουν ένα μοναδικό κοινό σημείο, με τετμημένη $\xi = 1$.

2) Θα βρούμε το $f(1)$. Από την δοσμένη σχέση, με $x = 1$, βρίσκουμε: $f(f(1)) = 1$ και άρα: $f(f(f(1))) = f(1)$ (1). Επίσης, από την δοσμένη σχέση, θέτοντας όπου x το $f(x)$, βρίσκουμε:

$$f(f(f(x))) = f^5(x) - f^4(x) - 4f^3(x) + 4f^2(x) + 6f(x) - 5$$

και από αυτή, με $x = 1$, βρίσκουμε:

$$f(f(f(1))) = f^5(1) - f^4(1) - 4f^3(1) + 4f^2(1) + 6f(1) - 5. \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) έπεται ότι:

$$\begin{aligned} f^5(1) - f^4(1) - 4f^3(1) + 4f^2(1) + 6f(1) - 5 &= f(1). \\ \Rightarrow f^5(1) - f^4(1) - 4f^3(1) + 4f^2(1) + 5f(1) - 5 &= 0 \\ \Rightarrow [f(1) - 1][f^4(1) - 4f^2(1) + 5] &= 0 \\ \Rightarrow [f(1) - 1]\left[(f^2(1) - 2)^2 + 1\right] &= 0 \Rightarrow f(1) = 1 \end{aligned}$$

Άρα, οι συντεταγμένες του κοινού σημείου είναι: $(1, 1)$.

Άσκηση 21.

Να εξετάσετε αν υπάρχει συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και

$$(f \circ f)(x) = f^2(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Λύση. Έστω ότι υπάρχει μια τέτοια συνάρτηση f . Επειδή $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, έπεται ότι υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ με $f(\alpha) = -1$. Επίσης υπάρχει $\beta \in \mathbb{R}$ με $f(\beta) = \alpha$. Έτσι, λόγω και των υποθέσεων, έχουμε: $\alpha^2 = f^2(\beta) = f(f(\beta)) = f(\alpha) = -1 \Rightarrow \alpha^2 = -1$, άτοπο. Άρα, τέτοια συνάρτηση δεν υπάρχει.

Άσκηση 22.

Για μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(f(x)) = x^3 - 5x^2 + 10x - 6 \quad (1), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Ζητείται να λυθεί η εξίσωση: $f(x) = x$ (2).

Λύση. α) Έστω ότι $\rho \in \mathbb{R}$ είναι μια ρίζα της εξίσωσης (2), οπότε: $f(\rho) = \rho$. Έτσι θα

$$\text{έχουμε: } f(f(\rho)) = f(\rho) = \rho \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \rho^3 - 5\rho^2 + 10\rho - 6 = \rho \Rightarrow \dots \Rightarrow (\rho - 2)(\rho^2 - 3\rho + 3) = 0 \\ \Rightarrow \rho = 2$$

β) Εξετάζουμε αν ο αριθμός 2 είναι λύση της εξίσωσης (2). Από την (1) με $x = 2$ βρίσκουμε: $f(f(2)) = 2^3 - 5 \cdot 2^2 + 10 \cdot 2 - 6 \Rightarrow f(f(2)) = 2$ (3). Επίσης, από την (1) με

$$x = f(2), \text{ βρίσκουμε: } f(f(f(2))) = f^3(2) - 5f^2(2) + 10f(2) - 6 \stackrel{(3)}{\Rightarrow}$$

$$f(2) = f^3(2) - 5f^2(2) + 10f(2) - 6 \Rightarrow \dots \Rightarrow [f(2) - 2][f^2(2) - 3f(2) + 3] = 0 \Rightarrow f(2) = 2$$

Άρα, ο αριθμός 2 είναι λύση της εξίσωσης (2).

—Συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση (2) έχει την μοναδική λύση $x = 1$.

Άσκηση 23.

Θεωρούμε τις συναρτήσεις: $f(x) = \sqrt{x-2}$ και $g(x) = \sqrt{e^x + x^2 + x + 1}$. Να βρείτε (όλες) τις συναρτήσεις $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, έτσι ώστε να ισχύει: $f \circ h = g$.

Λύση. Το σύνολο ορισμού της συνάρτησης f είναι: $A = [2, +\infty)$, της g είναι το \mathbb{R} και της h είναι το \mathbb{R} . Το σύνολο ορισμού της συνάρτησης $f \circ h$, είναι:

$\{x \in \mathbb{R} \mid h(x) \in A\}$. Συνεπώς, για να ισχύει: $f \circ h = g$, πρέπει και αρκεί:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid h(x) \in A\} = \mathbb{R} \text{ και } (f \circ h)(x) = g(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Προς τούτο, πρέπει και αρκεί, για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \begin{cases} h(x) \in A \\ f(h(x)) = g(x) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} h(x) \geq 2 \\ \sqrt{h(x)-2} = \sqrt{e^x + x^2 + x + 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h(x) \geq 2 \\ h(x) = e^x + x^2 + x + 3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} e^x + x^2 + x + 3 \geq 2 \\ h(x) = e^x + x^2 + x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x + x^2 + x + 1 \geq 0 \\ h(x) = e^x + x^2 + x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow h(x) = e^x + x^2 + x + 3. \end{aligned}$$

— Άρα, η συνάρτηση: $h(x) = e^x + x^2 + x + 3$ είναι η μοναδική ζητούμενη.

Άσκηση 24.

Μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα και η αντιστροφή της είναι η ίδια η f . Να αποδείξετε ότι: $f(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση. Έχουμε $f^{-1} = f$. Έτσι, έχουμε για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = f^{-1}(x) \Rightarrow f(f(x)) = f(f^{-1}(x)) \Rightarrow f(f(x)) = x.$$

- Έστω ότι για έναν αριθμό $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) < x$. Τότε:

$$f(f(x)) < f(x) \text{ και συνεπώς: } x < f(x), \text{ άτοπο.}$$

- Έστω ότι για έναν αριθμό $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) > x$. Τότε:

$$f(f(x)) > f(x) \text{ και συνεπώς: } x > f(x), \text{ άτοπο.}$$

Άρα, τότε: $f(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Σημείωση. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα και $f = f^{-1}$, δεν έπεται αναγκάτως ότι: $f(x) = x$. Παράδειγμα: $f(x) = 1 - x$.

Άσκηση 25.

Έστω η συνάρτηση: $f(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})$.

1) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το σύνολο ορισμού της f^{-1} .

2) Να λυθούν οι εξισώσεις: α) $f^{-1}(x) = 64$ και β) $f(x) \cdot f^{-1}(x) = 6f^{-1}(f^{-1}(6))$.

Λύση. 1) Το σύνολο ορισμού της f είναι $A = [0, +\infty)$. Η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$

και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με: $f'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \right) > 0$. Άρα: $f \uparrow [0, +\infty)$.

Συνεπώς, η f είναι 1-1 και άρα αντιστρέφεται.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ και $f(0) = 0$ και

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, έπεται ότι: $f(A) = [0, +\infty)$. Αυτό είναι το σύνολο ορισμού της συνάρτησης f^{-1} .

2) α) Με $x \in [0, +\infty)$, έχουμε:

$$f^{-1}(x) = 64 \Leftrightarrow f(64) = x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(\sqrt{64} + \sqrt[3]{64}) \Leftrightarrow x = 6.$$

β) Από την προηγούμενη εξίσωση έχουμε: $f^{-1}(6) = 64$ και συνεπώς: $f(64) = 6$. Έτσι, με $x \in [0, +\infty)$, έχουμε:

$$f(x) \cdot f^{-1}(x) = 6f^{-1}(f^{-1}(6)) \Leftrightarrow f(x) \cdot f^{-1}(x) = f(64) \cdot f^{-1}(64) \quad (1).$$

Θεωρούμε την συνάρτηση: $g(x) = f(x) \cdot f^{-1}(x)$. Το σύνολο ορισμού αυτής προφανώς είναι το $[0, +\infty)$. Επειδή: $f \uparrow [0, +\infty)$, έπεται ότι: $f^{-1} \uparrow [0, +\infty)$. Και επειδή οι τιμές των f και f^{-1} είναι θετικές ή 0, με τον ορισμό της μονοτονίας, βρίσκουμε εύκολα ότι: $g \uparrow [0, +\infty)$. Συνεπώς, η g είναι 1-1 στο $[0, +\infty)$. Έτσι έχουμε:

$$(1) \Leftrightarrow g(x) = g(64) \Leftrightarrow x = 64.$$

Άσκηση 26.

Να βρείτε τις συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για τις οποίες, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει:

$$2f\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \leq 2x \leq e^{f(x)} - e^{-f(x)} \quad (1)$$

Λύση. Θεωρούμε τη συνάρτηση: $g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$. Έτσι, από τις σχέσεις

$$(1), \text{ έχουμε για κάθε } x \in \mathbb{R} : f(g(x)) \leq x \leq g(f(x)). \quad (2)$$

Εξετάζουμε αν η συνάρτηση g αντιστρέφεται. Προς τούτο, λύνουμε την εξίσωση: $g(x) = y$, με άγνωστο το $x \in \mathbb{R}$ και παράμετρο το $y \in \mathbb{R}$. Έχουμε στο \mathbb{R} :

$$g(x) = y \Leftrightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right) \quad (3).$$

Άρα, για κάθε $y \in \mathbb{R}$, η εξίσωση $g(x) = y$ έχει μια μοναδική λύση, την (3). Τώρα συμπεραίνουμε εύκολα ότι: $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ (γιατί ;). Επίσης, ότι η g είναι 1-1 (γιατί ;). Άρα η g αντιστρέφεται και η αντίστροφη της είναι:

$$g^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με: } g^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right).$$

— Έστω τώρα ότι μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ πληροί τις σχέσεις (2), για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε έναν αριθμό $x \in \mathbb{R}$ και θέτουμε στην αριστερή σχέση από τις (2), όπου x το $g^{-1}(x)$, οπότε έχουμε:

$$f\left(g\left(g^{-1}(x)\right)\right) \leq g^{-1}(x) \Rightarrow f(x) \leq g^{-1}(x) \quad (4).$$