Πανελλαδικές εξετάσεις 2018

Μαθηματικά προσανατολισμού θετικής κατεύθυνσης και κατεύθυνσης οικονομίας και πληροφορικής.

Ν. ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ - Κ. ΤΗΛΕΓΡΑΦΟΣ- Π.ΠΑΝΤΟΥΛΑΣ

Ιούνιος 2018

Εκδόσεις ΖΤ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_o, τότε είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

Α2. Θεωρείστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
« Κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι "$1-1$" είναι και γνησίως μονότονη.»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$ με $x\in\mathbb{R}$ έχει μία μόνο θέση ολικού μεγίστου.

β) Για κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ, η οποία είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\Delta$.

γ) Ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}=0$

δ) Αν η f είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση, τότε οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} αντίστοιχα είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$.

ε) Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.

Μονάδες 10

Ενδεικτική λύση

Α1. Για $x\neq x_0$ έχουμε

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0).$$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ,ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\in\mathbb{R},$$

οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right]$$

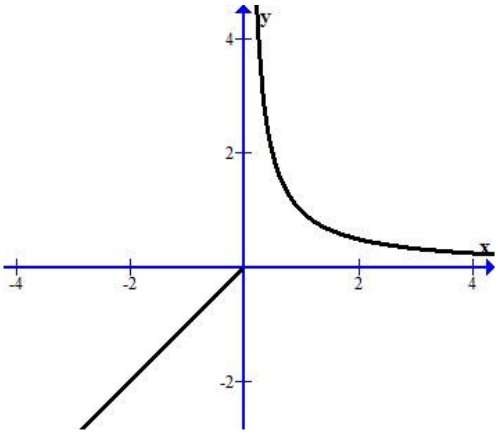
$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot \lim_{x\to x_0}(x-x_0)$$

$$= f'(x_0)\cdot 0 = 0$$

Επομένως είναι $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.

Α2. α) Ψευδής.

β) Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x\ ,\ x\le 0 \\ \dfrac{1}{x}\ ,\ x>0 \end{cases}$ είναι $1-1$ και δεν είναι γνησίως μονότονη, όπως φαίνεται και στο σχήμα.



Α3. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\beta)-G(\alpha)$

Α4. $(\alpha)\to(\Lambda)$, $(\beta)\to(\Lambda)$, $(\gamma)\to(\Sigma)$, $(\delta)\to(\Sigma)$, $(\varepsilon)\to(\Sigma)$

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x-\dfrac{4}{x^2}$, $x\in\mathbb{R}-\{0\}$.

Β1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

Μονάδες 8

Β2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 4

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

Β4. Με βάση τις απαντήσεις σας στα παραπάνω ερωτήματα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.
(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό με μελάνι που δεν σβήνει).

Μονάδες 7

Ενδεικτική λύση

Β1. Η συνάρτηση $f(x)=x-\dfrac{4}{x^2}$, $x\neq 0$ είναι παραγωγίσιμη,

με $f'(x)=1+\dfrac{8}{x^3}=\dfrac{x^3+8}{x^3}$, $x\neq 0$.

Είναι:

- $x^3+8>0 \Leftrightarrow x^3>(-2)^3 \Leftrightarrow x>-2$

- $x^3+8<0 \Leftrightarrow x<-2$
- $x^3+8=0 \Leftrightarrow x=-2$

Σύμφωνα μετά παραπάνω συντάσσουμε τον πίνακα πρόσημου του $\dfrac{x^3+8}{x^3}$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x^3+8		$-$	0	$+$	‖	$+$	
x^3		$-$		$-$	‖	$+$	
$\dfrac{x^3+8}{x^3}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

Έτσι έχουμε:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$		↗	τ.μ.	↘	‖	↗	

Από το πρόσημο της f' που φαίνεται στον παραπάνω πίνακα, για τη συνεχή στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ συνάρτηση f, προκύπτει ότι:

η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,-2]$, $(0,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[-2,0)$, οπότε η συνάρτηση f παρουσιάζει στη θέση $x_0=-2$ τοπικό μέγιστο, το $f(-2)=-3$.

Β2. Η συνάρτηση $f'(x)=1+\dfrac{8}{x^3}, x\neq 0$ είναι παραγωγίσιμη , με $f''(x)=\left(1+8x^{-3}\right)'=-24x^{-4}=\dfrac{-24}{x^4}<0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Άρα η f είναι κοίλη σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ και η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

Β3.

- Η συνάρτηση $f(x)=x-\dfrac{4}{x^2}$, $x\neq 0$ είναι συνεχής , οπότε για κάθε $x_0\in\mathbb{R}-\{0\}$ ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\in\mathbb{R}$. Επομένως οι ευθείες (η) με εξίσωση της μορφής $x=x_0, x_0\in\mathbb{R}-\{0\}$ **δεν** είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες της C_f .

  Ακόμη είναι:

  ❖ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x-\dfrac{4}{x^2}\right)=-\infty$ (γιατί $\lim\limits_{x\to 0^+} x=0$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\dfrac{4}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left((-4)\cdot\dfrac{1}{x^2}\right)\overset{((-4)\cdot(+\infty))}{=}-\infty$).

  ❖ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x-\dfrac{4}{x^2}\right)=-\infty$ (γιατί $\lim\limits_{x\to 0^-} x=0$ και $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-\dfrac{4}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left((-4)\cdot\dfrac{1}{x^2}\right)\overset{((-4)\cdot(+\infty))}{=}-\infty$).

  Άρα η C_f έχει μία μόνο κατακόρυφη ασύμπτωτη, την ευθεία (δ) με εξίσωση $x=0$.

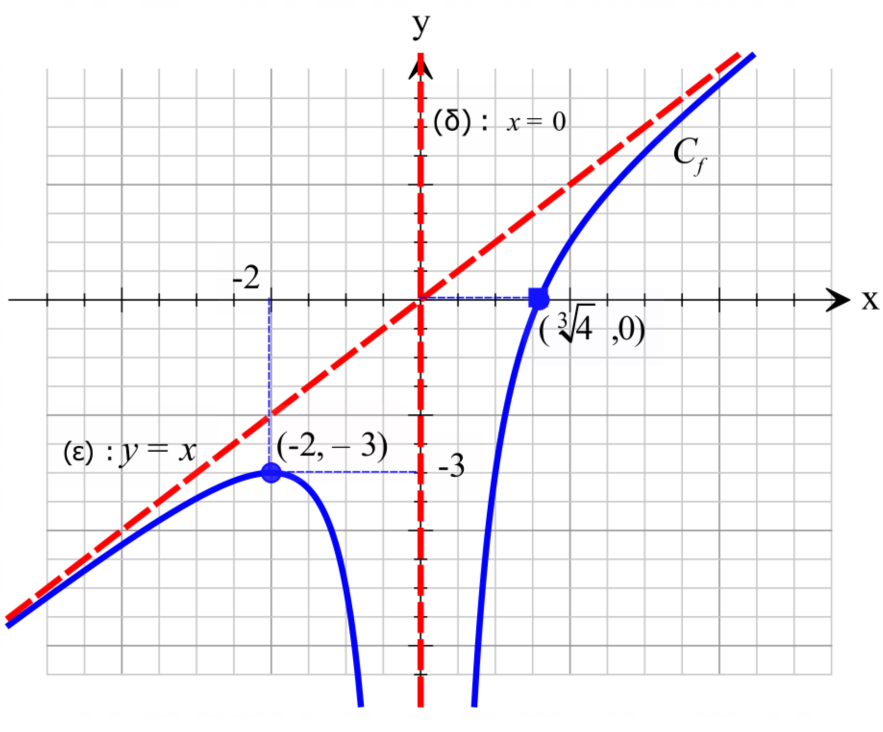
- Αναζητούμε ασύμπτωτες στο $+\infty$ με εξίσωση μορφής $y=\lambda x+\beta,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$.
  Είναι
  ❖ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{4}{x^2}\right)=0$
  Επομένως η ευθεία με εξίσωση $(\varepsilon): y=x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

- Αναζητούμε ασύμπτωτες στο $-\infty$ με εξίσωση μορφής $y=\lambda x+\beta,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$.
  Είναι
  ❖ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{4}{x^2}\right)=0$.
  Επομένως η ευθεία με εξίσωση $(\varepsilon): y=x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

B4. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\left(-\frac{4}{x^2}\right)\right)\overset{((+\infty)+0)}{=}+\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\left(-\frac{4}{x^2}\right)\right)\overset{((-\infty)+0)}{=}-\infty$.

Σύμφωνα μετά παραπάνω συντάσσουμε τον πίνακα μεταβολών της f και χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της f.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
$f''(x)$		$-$		$-$	$\Vert$	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\infty \ \Vert\ -\infty$	$\nearrow$	$+\infty$



ΘΕΜΑ Γ

Έχουμε ένα σύρμα μήκους 8m, το οποίο κόβουμε σε δύο τμήματα. Με το ένα από αυτά, μήκους $x\,\text{m}$, κατασκευάζουμε τετράγωνο και με το άλλο κύκλο.

Γ1. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων σε τετραγωνικά μέτρα, συναρτήσει του x, είναι

$$E(x)=\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi}\ ,\ x\in(0,8)$$

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ελαχιστοποιείται, όταν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με την διάμετρο του κύκλου.

Μονάδες 10

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας μόνο τρόπος με τον οποίο μπορεί να κοπεί το σύρμα μήκους 8m, ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων να ισούται με 5m^2.

Μονάδες 10

Ενδεικτική λύση

Γ1. Η περίμετρος του τετραγώνου είναι $x\ \text{m}, x\in(0,8)$ οπότε το μήκος της πλευράς του είναι $\alpha=\frac{x}{4}\ \text{m}$, $x\in(0,8)$.

Το μήκος του κύκλου είναι $L=(8-x)\ \text{m}$, $x\in(0,8)$ οπότε αν ρ είναι η ακτίνα του, τότε έχουμε:

$2\pi\rho=8-x\Leftrightarrow\rho=\frac{8-x}{2\pi}\ \text{m}$, $x\in(0,8)$.

Το εμβαδόν του τετραγώνου είναι $E_T(x)=\left(\frac{x}{4}\right)^2=\frac{x^2}{16}\ \text{m}^2, x\in(0,8)$ και το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου είναι $E_\delta(x)=\pi\rho^2=\pi\left(\frac{8-x}{2\pi}\right)^2=\frac{(8-x)^2}{4\pi}\ \text{m}^2, x\in(0,8)$.

Επομένως το άθροισμα των εμβαδών τους είναι:

$$E(x)=E_T(x)+E_\delta(x)=\frac{x^2}{16}+\frac{(8-x)^2}{4\pi}=\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi}\ \text{m}^2,\ x\in(0,8).$$

Γ2. Είναι $E'(x)=\frac{1}{16\pi}\big(2(\pi+4)x-64\big)=\frac{1}{8\pi}\big((\pi+4)x-32\big)$. Έχουμε:

- $\begin{cases}E'(x)>0\\0<x<8\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left(\frac{32}{\pi+4},8\right)$ (Ισχύει $0<\frac{32}{\pi+4}<\frac{32}{0+4}=8$)
- $\begin{cases}E'(x)<0\\0<x<8\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left(0,\frac{32}{\pi+4}\right)$
- $\begin{cases}E'(x)=0\\0<x<8\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{32}{\pi+4}$

Σύμφωνα μετά παραπάνω συντάσσουμε τον πίνακα πρόσημου της E' και μονοτονίας της E.

x	0	$\frac{32}{\pi+4}$	8
$E'(x)$	$-$	0	$+$
$E(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

Από το πρόσημο της $E'(x)$ που φαίνεται στον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η συνεχής στο $(0,8)$ συνάρτηση E είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\frac{32}{\pi+4}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{32}{\pi+4},8\right)$, οπότε η συνάρτηση E παρουσιάζει στο $x_0=\frac{32}{\pi+4}$ ολικό ελάχιστο.

Για $x=x_0=\frac{32}{\pi+4}$ η πλευρά του τετραγώνου είναι $\alpha_0=\frac{1}{4}x_0=\frac{8}{\pi+4}$ m και η ακτίνα του κύκλου είναι $\rho_0=\frac{8-x_0}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\left(8-\frac{32}{\pi+4}\right)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{8\pi}{\pi+4}=\frac{4}{\pi+4}$ m.

Επομένως η διάμετρος του κύκλου είναι $\delta_0=2\rho_0=2\cdot\frac{4}{\pi+4}=\frac{8}{\pi+4}$ m, δηλαδή είναι $\alpha_0=\delta_0$.

Άρα το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ελαχιστοποιείται, όταν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με τη διάμετρο του κύκλου.

Γ3. Αρκεί να δειχθεί ότι η εξίσωση $E(x)=5$ έχει ακριβώς μία λύση στο $(0,8)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}E(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{x^2}{16}+\frac{(8-x)^2}{4\pi}\right)=\frac{16}{\pi}>5$ (αφού είναι $5<\frac{16}{\pi}\Leftrightarrow5\pi<16\Leftrightarrow\pi<\frac{16}{5}=3{,}2$)

Ακόμη είναι $\lim\limits_{x\to8^-}E(x)=\lim\limits_{x\to8^-}\left(\frac{x^2}{16}+\frac{(8-x)^2}{4\pi}\right)=4$.

Επειδή η συνάρτηση E είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(0,x_0]$ έπεται ότι

$$E((0,x_0])=\left[E(x_0),\lim_{x\to0^+}E(x)\right)=\left[E(x_0),\frac{16}{\pi}\right).$$

Επειδή η συνάρτηση E είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[x_0,8)$ έπεται ότι

$$E([x_0,8))=\left[E(x_0),\lim_{x\to8^-}E(x)\right)=[E(x_0),4).$$

Από το σύνολο $E([x_0,8))=[E(x_0),4)$ γίνεται φανερό ότι $E(x_0)<4$.

Έχουμε $5\in E((0,x_0])=\left[E(x_0),\frac{16}{\pi}\right)$ (αφού $E(x_0)<4$ και $\frac{16}{\pi}>5$) και η συνάρτηση E είναι γνησίως μονότονη στο $(0,x_0]$, οπότε η εξίσωση $E(x)=5$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0,x_0]$.

Ακόμη $5\notin E([x_0,8))=[E(x_0),4)$, οπότε στο διάστημα $[x_0,8)$ η εξίσωση $E(x)=5$ δεν έχει λύση.

Άρα η εξίσωση $E(x)=5$ έχει τελικά μία μόνο λύση στο $(0,8)$.

Επομένως υπάρχει ένας μόνο τρόπος με τον οποίο μπορεί να κοπεί το σύρμα μήκους $8\,m$, ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων να ισούται με $5\,m^2$.

- **Διαφορετικά**

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=E(x)-5=\frac{\pi+4}{16\pi}x^2-\frac{4}{\pi}x+\frac{256-80\pi}{16\pi}$ η οποία είναι πολυωνυμική 2^ου^ βαθμού. Είναι:

- $h(0)=\frac{256-80\pi}{16\pi}>0$, αφού

  $\frac{256-80\pi}{16\pi}>0\Rightarrow 256-80\pi>0\Rightarrow -80\pi>-256\Rightarrow \pi<\frac{256}{80}\Rightarrow \pi<3{,}2$ που ισχύει και

- $h(1)=-1<0$.

Επειδή οι τιμές $h(0)$ και $h(8)$ είναι ετερόσημες, έπεται ότι το τριώνυμο $h(x)$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες (διαφορετικά θα έπρεπε να είναι $h(0)h(8)\geq 0$).

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ οι ρίζες της $h(x)$. Τότε θα έχουμε:

- $h(x)=\frac{\pi+4}{16\pi}(x-x_1)(x-x_2)$

- $\begin{cases} h(0)>0 \\ h(8)<0 \\ x_1<x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi+4}{16\pi}x_1x_2>0 \\ \frac{\pi+4}{16\pi}(8-x_1)(8-x_2)<0 \\ x_1<x_2 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} (8-x_1)(8-x_2)<0 \\ x_1<x_2\ (\Rightarrow 8-x_2<8-x_1) \\ x_1x_2>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8-x_2<0<8-x_1 \\ x_1x_2>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1<8<x_2 \\ x_1x_2>0 \end{cases} \Rightarrow 0<x_1<8<x_2,$$

οπότε η εξίσωση $h(x)=0$,άρα και η εξίσωση $E(x)=5$, έχει τελικά μία μόνο λύση στο $(0,8)$.

Επομένως υπάρχει ένας μόνο τρόπος με τον οποίο μπορεί να κοπεί το σύρμα μήκους $8\,m$, ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων να ισούται με $5\,m^2$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2e^{x-\alpha}-x^2$, $x\in\mathbb{R}$ με $\alpha>1$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του $\alpha>1$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής

Μονάδες 3

Δ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικά $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$, τέτοια ώστε η συνάρτηση f να παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2.

Μονάδες 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=f(1)$ είναι αδύνατη στο (α,x_2).

Μονάδες 6

Δ4. Αν $\alpha=2$ να αποδείξετε ότι:

$$\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx>-\frac{32}{15}$$

Μονάδες 9

Ενδεικτική λύση

Δ1. Η συνάρτηση $f(x)=2e^{x-\alpha}-x^2$, $x\in\mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$$f'(x)=\left(2e^{x-\alpha}-x^2\right)'=2\left(e^{x-\alpha}\right)'-\left(x^2\right)'=2e^{x-\alpha}(x-\alpha)'-2x=2e^{x-\alpha}-2x \text{ και}$$

$$f''(x)=\left(2e^{x-\alpha}-2x\right)'=2e^{x-\alpha}(x-\alpha)'-(2x)'=2e^{x-\alpha}-2.$$

Έχουμε:

- $f''(x)>0\Leftrightarrow 2e^{x-\alpha}-2>0\Leftrightarrow 2e^{x-\alpha}>2\Leftrightarrow e^{x-\alpha}>1\Leftrightarrow e^{x-\alpha}>e^0 \overset{(e^x\nearrow\mathbb{R})}{\Leftrightarrow} x-\alpha>0\Leftrightarrow x>\alpha$
- $f''(x)<0\Leftrightarrow 2e^{x-\alpha}-2<0\Leftrightarrow 2e^{x-\alpha}<2\Leftrightarrow e^{x-\alpha}<1\Leftrightarrow e^{x-\alpha}<e^0 \overset{(e^x\nearrow\mathbb{R})}{\Leftrightarrow} x-\alpha<0\Leftrightarrow x<\alpha$
- $f''(x)=0\Leftrightarrow 2e^{x-\alpha}-2=0\Leftrightarrow 2e^{x-\alpha}=2\Leftrightarrow e^{x-\alpha}=1\Leftrightarrow e^{x-\alpha}=e^0 \overset{(e^x\ 1-1)}{\Leftrightarrow} x-\alpha=0\Leftrightarrow x=\alpha$

Σύμφωνα μετά παραπάνω συντάσσουμε τον πίνακα πρόσημου της $f''(x)$ και κυρτότητας της f.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		∩	σ.κ.	∪	

Από το πρόσημο της $f''(x)$ που φαίνεται στον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι, η συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f είναι κοίλη στο $(-\infty,\alpha]$, κυρτή στο $[\alpha,+\infty)$ και παρουσιάζει καμπή μόνο στο $x_0=\alpha$, αφού η $f''(x)$ (που ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$) μηδενίζεται μόνο στο $x_0=\alpha$ και αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν αυτού.

Είναι $f(\alpha)=2-\alpha^2$, οπότε το σημείο καμπής είναι το $M\left(\alpha,2-\alpha^2\right)$.

Δ2. Είναι

- $f'(\alpha)=2e^{\alpha-\alpha}-2\alpha=2(1-\alpha)<0$, αφού $\alpha>1$.
- Ακόμη $f'(0)=2e^{-\alpha}>0$ και
- $f'(2\alpha)=2e^{\alpha}-4\alpha=2\cdot e\cdot e^{\alpha-1}-4\alpha>2e((\alpha-1)+1)-4\alpha=2e\alpha-4\alpha=(2e-4)\alpha>0$ (αφού $2e>4$ και $\alpha>1$).
  - **Διαφορετικά**

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\ldots=+\infty$ οπότε είναι $f'(x)>0$ κοντά στο $+\infty$. Άρα υπάρχει $\beta>\alpha$ ώστε $f'(\beta)>0$.

Η f' είναι συνεχής στα διαστήματα $[0,\alpha]$ και $[\alpha,2\alpha]$.

Ακόμη είναι $f'(0)>0$, $f'(\alpha)<0$ και $f'(2\alpha)>0$, οπότε $f'(0)f'(\alpha)<0$ και $f'(\alpha)f'(2\alpha)<0$.

Επομένως η f' ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano σε καθένα από τα διαστήματα $[0,\alpha]$ και $[\alpha,2\alpha]$, οπότε υπάρχουν $x_1\in(0,\alpha)$ και $x_2\in(\alpha,2\alpha)$, ώστε $f'(x_1)=0$ και $f'(x_2)=0$.

- **Διαφορετικά**

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$.

Από τη μονοτονία της f' και επειδή η f' είναι συνεχής έχουμε:

- $f'((-\infty,\alpha))\overset{(f'\searrow(-\infty,\alpha))}{\underset{(f'\text{ συνεχής})}{=}}\left(\lim\limits_{x\to\alpha^-}f'(x),\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)\right)=(f'(\alpha),+\infty)$
- $f'((\alpha,+\infty))\overset{(f'\nearrow(\alpha,+\infty))}{\underset{(f'\text{ συνεχής})}{=}}\left(\lim\limits_{x\to\alpha^+}f'(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)\right)=(f'(\alpha),+\infty)$

Επειδή $f'(\alpha)<0$, προκύπτει ότι $0\in f'((-\infty,\alpha))$, οπότε υπάρχει $x_1\in(-\infty,\alpha)$ ώστε $f'(x_1)=0$.

Ακόμη $0\in f'((\alpha,+\infty))$, οπότε υπάρχει $x_2\in(\alpha,+\infty)$ ώστε $f'(x_2)=0$.

x	$-\infty$	x_1		α		x_2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$ ↘	0	↘ $-$		$-$ ↗	0	↗ $+$
$f(x)$	↗	τ.μ.	↘		↘	τ.ε.	↗

Έχουμε:

- Για κάθε $x\in(-\infty,x_1)$ είναι $x<x_1<\alpha\overset{(f'\searrow(-\infty,\alpha])}{\Rightarrow}f'(x)>f'(x_1)=0$
- Για κάθε $x\in(x_1,\alpha]$ είναι, $x_1<x\le\alpha\overset{(f'\searrow(-\infty,\alpha])}{\Rightarrow}f'(x)<f'(x_1)=0$
- Για κάθε $x\in[\alpha,x_2)$ είναι, $\alpha\le x<x_2\overset{(f'\nearrow[\alpha,+\infty))}{\Rightarrow}f'(x)<f'(x_2)=0$
- Για κάθε $x\in(x_2,+\infty)$ είναι, $\alpha<x_2<x\overset{(f'\nearrow[\alpha,+\infty))}{\Rightarrow}f'(x)>f'(x_2)=0$

Άρα ισχύουν:

- $f'(x)>0$, για κάθε $x\in(-\infty,x_1)$
- $f'(x)<0$, για κάθε $x\in(x_1,x_2)$
- $f'(x)>0$, για κάθε $x\in(x_2,+\infty)$
- $f'(x_1)=f'(x_2)=0$

Επομένως η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο μόνο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο μόνο στο x_2.

Δηλαδή υπάρχουν μοναδικά $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$, τέτοια ώστε η f να παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2.

Δ3. Παρατηρούμε ότι $f'(1)=2e^{1-\alpha}-2\cdot1=2\left(e^{1-\alpha}-1\right)$.

Έχουμε $\alpha>1\Rightarrow1-\alpha<0\overset{e^x\nearrow\mathbb{R}}{\Rightarrow}e^{1-\alpha}<e^0=1\Rightarrow e^{1-\alpha}-1<0\Rightarrow2\left(e^{1-\alpha}-1\right)<0\Rightarrow f'(1)<0$ και επειδή η $f'(x)$ είναι αρνητική μόνο στο διάστημα (x_1,x_2) έπεται ότι $1\in(x_1,x_2)$.

Για κάθε $x\in(\alpha,x_2)$ έχουμε:

$$x_1<1<\alpha<x<x_2\Rightarrow x_1<1<x<x_2\overset{(f\searrow[x_1,x_2])}{\Rightarrow}f(1)>f(x).$$

Άρα για κάθε $x\in(\alpha,x_2)$ ισχύει $f(x)<f(1)$, οπότε η εξίσωση $f(x)=f(1)$ είναι αδύνατη στο (α,x_2).

- **Διαφορετικά**

Για κάθε $x\in(\alpha,x_2)$ έχουμε:

$$\alpha<x<x_2\underset{(x_1<\alpha<x<x_2)}{\overset{(f\searrow[x_1,x_2])}{\Rightarrow}}f(x)<f(\alpha)\Rightarrow\boxed{f(x)<2-\alpha^2}:(\Sigma_1).$$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $e^x\ge x+1$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$ και επειδή είναι $1-\alpha<0$ έπεται ότι:

$$e^{1-\alpha}>(1-\alpha)+1=2-\alpha\Rightarrow2e^{1-\alpha}>4-2\alpha\Rightarrow$$

$$\Rightarrow2e^{1-\alpha}-1>3-2\alpha\Rightarrow\boxed{f(1)>3-2\alpha}:(\Sigma_2)$$

Έχουμε όμως: $\left(2-\alpha^2\right)-(3-2\alpha)=-\alpha^2+2\alpha-1=-(\alpha-1)^2<0$ (αφού $\alpha>1$)

Έτσι για κάθε $x\in(\alpha,x_2)$ ισχύει $f(x)<2-\alpha^2<3-2\alpha<f(1)\Rightarrow f(x)<f(1)$.

Επομένως η εξίσωση $f(x)=f(1)$ δεν έχει λύση στο (α,x_2).

Δ4. Για $\alpha=2$ είναι $f(x)=2e^{x-2}-x^2$ και $f'(x)=2e^{x-2}-2x$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο της $(2,f(2))$ είναι:’

$$y-f(2)=f'(2)(x-2)\Leftrightarrow y-(-2)=-2(x-2)\Leftrightarrow y=-2x+2$$

Άρα $(\varepsilon):y=-2x+2$.

Επειδή η f είναι κυρτή στο $[2,+\infty)$ (η f είναι κυρτή στο $[2,+\infty)$ και είναι $\alpha=2$), έπεται ότι η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της ευθεία $(\varepsilon): y=-2x+2$ με εξαίρεση το κοινό σημείο επαφής τους $(2,f(2))$.

Δηλαδή για κάθε $x\in[2,+\infty)$ ισχύει $f(x)\ge -2x+2 \Rightarrow f(x)\sqrt{x-2}\ge(-2x+2)\sqrt{x-2}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=2$.

Έτσι για κάθε $x\in[2,3]$ ισχύει $f(x)\sqrt{x-2}\ge(-2x+2)\sqrt{x-2}$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=2$,οπότε είναι : $\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx > \int_2^3(-2x+2)\sqrt{x-2}\,dx$:(E_1).

Για το ολοκλήρωμα $I=\int_2^3(-2x+2)\sqrt{x-2}\,dx$ θέτουμε $u=\sqrt{x-2}$, οπότε είναι $x=u^2+2$ και $dx=2udu$.

Για $x=2$ είναι $u=0$.

Για $x=3$ είναι $u=1$.

Άρα,

$$\begin{aligned}
I&=\int_0^1\left(-2\left(u^2+2\right)+2\right)u2udu=\\
&=\int_0^1\left(-2u^2-2\right)2u^2du=\int_0^1\left(-4u^4-4u^2\right)du\\
&=-4\int_0^1\left(u^4+u^2\right)du\\
&=-4\left[\frac{u^5}{5}+\frac{u^3}{3}\right]_0^1\\
&=-4\left[\left(\frac{1^5}{5}+\frac{1^3}{3}\right)-\left(\frac{0^5}{5}+\frac{0^3}{3}\right)\right]=-\frac{32}{15}
\end{aligned}$$

Άρα ισχύει $\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}dx>-\frac{32}{15}$.

- **Διαφορετικά**

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)\sqrt{x-2},x\ge 2$.

Είναι $g(x+2)=f(x+2)\sqrt{x+2-2}=\left(2e^x-(x+2)^2\right)\sqrt{x},x\ge 0$.

Για κάθε $x\in[0,+\infty)$ ισχύει $e^x\ge 1+x+\frac{x^2}{2}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$. Επομένως για κάθε $x\in[0,1]$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
&e^x\ge 1+x+\frac{x^2}{2}\Rightarrow 2e^x\ge 2+2x+x^2\Rightarrow\\
&\Rightarrow 2e^x-(x+2)^2\ge 2+2x+x^2-(x+2)^2\\
&\Rightarrow 2e^x-(x+2)^2\ge 2+2x+x^2-x^2-4x-4\\
&\Rightarrow 2e^x-(x+2)^2\ge -2x-2\\
&\Rightarrow\left(2e^x-(x+2)^2\right)\sqrt{x}\ge(-2x-2)\sqrt{x}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow g(x+2) \geq -2x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}}$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$.

Άρα,

$$\int_0^1 g(x+2)dx > \int_0^1 \left(-2x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}}\right)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^1 g(x+2)dx > -2\left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_0^1 - 2\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = -\frac{4}{5}(1-0) - \frac{4}{3}(1-0) = -\frac{4}{5} - \frac{4}{3} = -\frac{32}{15}$$

Για το ολοκλήρωμα $\int_0^1 g(x+2)dx$ θέτουμε $u = x+2$, οπότε $du = dx$.

Για $x=0$ είναι $u=2$.
Για $x=1$ είναι $u=3$.

Άρα $\int_0^1 g(x+2)dx = \int_2^3 g(u)du = \int_2^3 g(x)dx = \int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}dx$.

Επομένως $\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}dx > -\dfrac{32}{15}$.

•• Απόδειξη της $\boxed{e^x \geq 1+x+\frac{x^2}{2}, x \geq 0}$.

Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ισχύει $e^t \geq t+1$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $t=0$, οπότε για κάθε $x>0$ και για κάθε $t \in [0,x]$ ισχύει $e^t \geq t+1$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $t=0$.

Επομένως είναι :

$$\int_0^x e^t dt > \int_0^x (t+1)\,dt \Rightarrow \left[e^t\right]_0^x > \left[\frac{t^2}{2}+t\right]_0^x \Rightarrow e^x - e^0 > \left(\frac{x^2}{2}+x\right) - \left(\frac{0^2}{2}+0\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^x - 1 > \frac{x^2}{2} + x \Rightarrow e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

Ακόμη είναι $e^0 = 1+0+\dfrac{0^2}{2}$, οπότε ισχύει

$e^x \geq 1+x+\dfrac{x^2}{2}$ για κάθε $x \geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$.