ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8. Εφαρμογές της Ανάλυσης

ΕΝΟΤΗΤΑ 8.1 Επίλυση Προβλημάτων

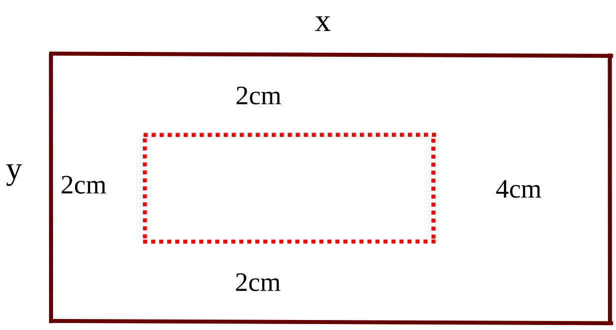
● ΘΕΜΑ 8.1.1

Ένα κείμενο πρόκειται να χαραχθεί πάνω σε μια ορθογώνια πλακέτα από χρυσό, η οποία έχει επιφάνεια 400 cm^2. Το κείμενο θα καλύπτει μια ορθογώνια επιφάνεια με περιθώρια 2cm από επάνω, κάτω και αριστερά και 4cm από δεξιά. Ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις της πλακέτας έτσι ώστε το χαραγμένο κείμενο να καλύπτει τη μέγιστη δυνατή ορθογώνια επιφάνεια πάνω σε αυτήν;

Λύση

Το **<u>πρώτο</u>** και αυτονόητο βήμα της επίλυσης κάθε προβλήματος είναι να διαβάσουμε προσεκτικά την εκφώνηση ώστε να κατανοήσουμε ποια είναι τα δεδομένα και ποια τα ζητούμενα.

Το **<u>δεύτερο</u>** βήμα που έχουμε να κάνουμε για την επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος είναι η κατασκευή ενός πρόχειρου σχήματος (πρόχειρο με την έννοια ότι δεν γνωρίζουμε ποιες θα είναι οι τελικές διαστάσεις και αναλογίες):



Το **<u>τρίτο</u>** βήμα είναι να εισάγουμε κατάλληλους συμβολισμούς που θα μας επιτρέψουν να διατυπώσουμε τις διάφορες σχέσεις ανάμεσα στα δεδομένα και τα ζητούμενα με τη βοήθεια εξισώσεων και συναρτήσεων. Αν συμβολίσουμε με x το πλάτος και με y το μήκος της ορθογώνιας πλακέτας, τότε θα ισχύουν τα εξής:

Λόγω της φύσης του προβλήματος, οι δύο μεταβλητές x και y είναι θετικοί αριθμοί.

Το εμβαδόν της πλακέτας θα είναι $xy = 400 \text{ cm}^2$. (1)

Το πλάτος και το μήκος της ορθογώνιας επιφάνειας του κειμένου θα είναι αντίστοιχα $x-6$ και $y-4$ και το εμβαδόν της $E=(x-6)(y-4)$ (2)

Εφόσον ζητείται η μέγιστη τιμή του E θα πρέπει να το εκφράσουμε ως συνάρτηση της μιας από τις δύο μεταβλητές.

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι $y=\dfrac{400}{x}$, οπότε αντικαθιστώντας στην (2) βρίσκουμε το ζητούμενο εμβαδόν στη μορφή μιας ρητής συνάρτησης:

$$E(x)=(x-6)\left(\frac{400}{x}-4\right)=400-4x-\frac{2400}{x}+24=424-4x-\frac{2400}{x} \qquad (3)$$

Το **τέταρτο** βήμα είναι να προσδιορίσουμε τις δυνατές τιμές που μπορεί να λάβει η ανεξάρτητη μεταβλητή x, δηλαδή να βρούμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης εμβαδού. Για το σκοπό αυτό εξετάζουμε προσεκτικά τους περιορισμούς που υπάρχουν το πρόβλημα.

Επειδή το άθροισμα των περιθωρίων αριστερά και δεξιά του κειμένου είναι 6cm, συμπεραίνουμε ότι για το πλάτος x της πλακέτας πρέπει να ισχύει $x>6$. Αντίστοιχα, για το μήκος y πρέπει να ισχύει $y>4$. Από την ανισότητα αυτή προκύπτει $xy>4x$, η οποία λόγω της (1) γίνεται $4x<400 \Leftrightarrow x<100$.

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης εμβαδού E είναι το διάστημα $(6,100)$.

Το **πέμπτο** βήμα στην επίλυση του προβλήματος είναι η επιλογή της μεθόδου με την οποία θα μελετήσουμε τη συνάρτηση. Αυτή η μελέτη μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους αλλά στο πλαίσιο της Ανάλυσης, λαμβάνοντας υπόψη και τη μορφή της συνάρτησης (3), θα χρησιμοποιήσουμε τις μεθόδους του Διαφορικού Λογισμού.

Η παράγωγος της συνάρτησης E είναι:

$$E'(x)=\frac{2400}{x^2}-4=\frac{2400-4x^2}{x^2}=\frac{4\left(600-x^2\right)}{x^2}$$

Ισχύει $E'(x)=0 \Leftrightarrow 600-x^2=0 \Leftrightarrow x^2=600 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x=\sqrt{600}=10\sqrt{6}$.

Με τα στοιχεία αυτά κατασκευάζουμε τον επόμενο πίνακα μεταβολών.

Πίνακας Μεταβολών

x	6		$10\sqrt{6}$		100
$E'(x)$		$+$	0	$-$	
$E(x)$		$\nearrow$	max	$\searrow$	

Επειδή το πεδίο ορισμού είναι ανοικτό διάστημα, εξετάζουμε τις αντίστοιχες οριακές τιμές της συνάρτησης χρησιμοποιώντας βασικές ιδιότητες των ορίων:

$$\lim_{x\to 6^+} E(x) = \lim_{x\to 6^+}\left(424 - 4x - \frac{2400}{x}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to 100^-} E(x) = \lim_{x\to 100^-}\left(424 - 4x - \frac{2400}{x}\right) = 0$$

Από όλα τα παραπάνω προκύπτει ότι η συνάρτηση εμβαδού παρουσιάζει μέγιστη τιμή για $x = 10\sqrt{6}$ ίση με

$$E\left(10\sqrt{6}\right) = 424 - \frac{2400}{10\sqrt{6}} - 40\sqrt{6} = \frac{80\left(53\sqrt{6}-60\right)}{10\sqrt{6}} = 8\left(53-10\sqrt{6}\right)$$

Το **<u>έκτο</u>** και τελευταίο βήμα της επίλυσης είναι να μεταφέρουμε τα αποτελέσματα της μαθηματικής μελέτης της συνάρτησης εμβαδού στις πραγματικές συνθήκες του προβλήματος. Η πλακέτα χρυσού πάνω στην οποία δημιουργείται η μέγιστη δυνατή ορθογώνια επιφάνεια για τη χάραξη του κειμένου πρέπει να έχει τις εξής διαστάσεις (με στρογγυλοποίηση στο πλησιέστερο δεκαδικό)

Πλάτος: $x = 10\sqrt{6} \simeq 24,5$ cm

Μήκος: $y = \dfrac{400}{10\sqrt{6}} = \dfrac{20\sqrt{6}}{3} \simeq 16,3$ cm

Οι αντίστοιχες διαστάσεις και το εμβαδόν της ορθογώνιας επιφάνειας θα είναι:

Πλάτος: $x - 6 \simeq 24,5 - 6 = 18,5$ cm

Μήκος: $y - 4 \simeq 16,3 - 4 = 12,3$ cm

Εμβαδόν: $(x-6)(y-4) = 18,5 \cdot 12,3 = 227,55$ cm^2

Αυτή είναι μια πολύ ικανοποιητική προσέγγιση της λύσης του προβλήματος, αν λάβουμε υπόψη ότι η μελέτη της συνάρτησης εμβαδού με χρήση των παραγώγων μας έδωσε την καθόλου πρακτική απάντηση

$$E\left(10\sqrt{6}\right) = 8\left(53-10\sqrt{6}\right).$$

Ο τελευταίος είναι ένας άρρητος αριθμός, με απειροψήφια και μη περιοδική δεκαδική αναπαράσταση 228,04082057734575214421 7 …

<u>Σχόλιο 8.1.1.</u>: Στην προηγούμενη λύση εκθέσαμε αναλυτικά όλα τα βήματα της μεθόδου επίλυσης προβλημάτων που είναι γνωστή με το όνομα «διαδικασία της μοντελοποίησης». Στα θέματα που ακολουθούν θα εφαρμόσουμε τα βήματα αυτής της διαδικασίας αρκετές φορές στην επίλυση διαφόρων προβλημάτων, και θα έχουμε την ευκαιρία να σχολιάσουμε ορισμένα βασικά χαρακτηριστικά της.