Θέμα Β2

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε: $x^2 f(x)=e^{2x}+\alpha x+\beta$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, όπου α,β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί.

α. Να βρεθούν οι α, β και η τιμή $f(0)$.

β. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και να βρεθεί η $f'(0)$.

γ. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που δημιουργείται από την εφαπτομένη της C_f στο $(0,f(0))$ και τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Ενδεικτική λύση

α. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει: $x^2 f(x)=e^{2x}+\alpha x+\beta \quad :(1)$.

Από τη σχέση (1) για $x=0$ έχουμε: $0\cdot f(0)=1+0+\beta \Leftrightarrow \boxed{\beta=-1}$.

Επομένως η (1) γίνεται $x^2 f(x)=e^{2x}+\alpha x-1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

<u>1ος Τρόπος</u>

Για $x\neq 0$ ισχύει: $x^2 f(x)=e^{2x}+\alpha x-1 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{e^{2x}+\alpha x-1}{x^2}$

Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, είναι συνεχής και στο $x_0=0$, δηλαδή ισχύει: $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x) \Leftrightarrow f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

Αν $2+\alpha\neq 0$, τότε θα έχουμε:

$$f(0)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{2x}+\alpha x-1}{x^2}\underset{(\text{D.L.H})}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{2e^{2x}+\alpha}{2x}\overset{\left(\frac{2+\alpha}{0^+}\right)}{=}\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{2x}\left(2e^{2x}+\alpha\right)\right]=$$

$$\overset{(+\infty)(2+\alpha)}{=}\begin{cases}+\infty \ , & \text{αν } 2+\alpha>0\\ -\infty \ , & \text{αν } 2+\alpha<0\end{cases}=\begin{cases}+\infty \ , & \text{αν } \alpha>-2\\ -\infty \ , & \text{αν } \alpha<-2\end{cases}$$

άτοπο, αφού το $f(0)$ είναι πραγματικός αριθμός, οπότε αναγκαία

$2+\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=-2$

2ος Τρόπος

Για κάθε $x\neq 0$ ισχύει: $x^2f(x)=e^{2x}+\alpha x-1 \Leftrightarrow xf(x)=\dfrac{e^{2x}+\alpha x-1}{x}$ και αφού η f είναι συνεχής έχουμε:

- ✓ $\lim\limits_{x\to 0^+}(xf(x))=0\cdot f(0)=0$
- ✓ Ακόμη $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{2x}+\alpha x-1}{x}\underset{(D.L.H)}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2e^{2x}+\alpha}{1}=2+\alpha$

  οπότε $0=2+\alpha \Rightarrow \alpha=-2$.

Για $\alpha=-2$ έχουμε:

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-2x-1}{x^2}\underset{(D.L.H)}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{2x}-2x-1\right)'}{\left(x^2\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}-2}{2x}\underset{(D.L.H)}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\left(2e^{2x}-2\right)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{4e^{2x}}{2}=2$$

Επομένως $\boxed{f(0)=2}$

Για $\alpha=-2$, $\beta=-1$, $f(0)=2$ είναι $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{2x}-2x-1}{x^2}, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$ η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, επομένως $\alpha=-2$, $\beta=-1$, $f(0)=2$ είναι οι ζητούμενες τιμές.

β. Ισχύει από τα προηγούμενα ότι $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{2x}-2x-1}{x^2}, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$

Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{e^{2x}-2x-1}{x^2}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{e^{2x}-2x-1-2x^2}{x^2}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-2x-1-2x^2}{x^3}\underset{(D.L.H)}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{2x}-2x-1-2x^2\right)'}{\left(x^3\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}-2-4x}{3x^2}\underset{(D.L.H)}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}$$

$$\underset{(D.L.H)}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\left(2e^{2x}-2-4x\right)'}{\left(3x^2\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{4e^{2x}-4}{6x}\underset{(D.L.H)}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\left(4e^{2x}-4\right)'}{(6x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{8e^{2x}}{6}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}\in\mathbb{R}$$

Δηλαδή ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{4}{3}\in\mathbb{R}$ και συνεπώς η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=\dfrac{4}{3}$.

γ. Επειδή η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=\dfrac{4}{3}$, η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο της $(0,f(0))$ είναι η ευθεία με εξίσωση:

$$y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y-2=\frac{4}{3}x\Leftrightarrow y=\frac{4}{3}x+2$$

Άρα είναι $(\varepsilon): y=\dfrac{4}{3}x+2$.

Θα βρούμε τα σημεία τομής της (ε) με τους άξονες $x'x$, $y'y$.

- Από την εξίσωση της (ε) για $x=0$ είναι $y=2$, οπότε η (ε) τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0,2)$.
- Από την εξίσωση της (ε) για $y=0$ είναι $x=-\dfrac{3}{2}$, έτσι η (ε) τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A\left(-\dfrac{3}{2},0\right)$.

Το ζητούμενο εμβαδόν, είναι το εμβαδό του τριγώνου OAB, το οποίο είναι:

$$(OAB)=\frac{1}{2}\cdot(OA)\cdot(OB)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 2=\frac{3}{2}\ \text{τ.μ.}.$$