$$= 4x^{\ln x}\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 + 2x^{\ln x}\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$= \frac{x^{\ln x}\left(4\ln^2 x - 2\ln x + 2\right)}{x^2}$$

$$= x^{\ln x - 2}\left(3\ln^2 x + 1 + \ln^2 x - 2\ln x + 1\right)$$

$$= x^{\ln x - 2}\left(3\ln^2 x + 1 + (\ln x - 1)^2\right) > 0$$

Επειδή ισχύει: $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in (0,+\infty)$ έπεται ότι η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

γ. Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο της $A(e, f(e))$, είναι η:

$$y - f(e) = f'(e)(x-e) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y - e^{\ln e} = 2e^{\ln e}\cdot\frac{\ln e}{e}(x-e)$$
$$\Leftrightarrow y - e = 2(x-e)$$
$$\Leftrightarrow y = 2x - e$$

Άρα είναι $(\varepsilon): y = 2x - e$.

Επειδή η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$, η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της ευθεία $(\varepsilon): y = 2x - e$, σε κάθε σημείο της, με εξαίρεση το κοινό σημείο επαφής τους $A(e, f(e))$. Δηλαδή για κάθε $x \in (0,+\infty)$, ισχύει $f(x) \geq 2x - e : (1)$, με την ισότητα να ισχύει μόνο, όταν $x = e$.

δ. Η συνάρτηση $g(x) = f(x) - 2x + e$, $x \in [1, e]$, είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων και λόγω της (1) έπεται ότι είναι μη αρνητική και μηδενίζεται μόνο όταν $x = e$.

Οπότε:

$$\int_1^e g(x)dx > 0 \Rightarrow \int_1^e f(x)dx > \int_1^e (2x-e)dx$$

$$\Rightarrow \int_1^e f(x)dx > \left[x^2 - ex\right]_1^e$$

$$\Rightarrow \int_1^e f(x)dx > \left(e^2 - e\cdot e\right) - \left(1^2 - e\cdot 1\right)$$

$$\Rightarrow \int_1^e f(x)dx > e - 1$$

Για κάθε $x \in [1,e]$ ισχύει $f(x) \le x$, με την ισότητα να ισχύει, μόνο όταν $x \in \{1,e\}$ και οι συναρτήσεις $f(x)$ και $f_1(x) = x$ είναι συνεχείς στο $[1,e]$, οπότε:

$$\int_1^e f(x)dx < \int_1^e xdx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_1^e f(x)dx < \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e$$

$$\Rightarrow \int_1^e f(x)dx < \frac{e^2}{2} - \frac{1^2}{2}$$

$$\Rightarrow \int_1^e f(x)dx < \frac{e^2 - 1}{2}$$

Τελικά είναι $e - 1 < \int_1^e x^{\ln x}dx < \frac{e^2-1}{2}$.

ε. Με $x > 0$, η εξίσωση $(x+2017)^{\ln(x+2017)} - x^{\ln x} + 1 = 2018^{\ln 2018}$, γράφεται ισοδύναμα:

$$(x+2017)^{\ln(x+2017)} - x^{\ln x} + 1 = 2018^{\ln 2018} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+2017)^{\ln(x+2017)} - x^{\ln x} = 2018^{\ln 2018} - 1$$

$$\Leftrightarrow (x+2017)^{\ln(x+2017)} - x^{\ln x} = (1+2017)^{\ln 2018} - 1^{\ln 1} : (E)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = f(x+2017) - f(x), x>0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη ως διαφορά παραγωγίσιμων, με:

$$\varphi'(x) = f'(x+2017)(x+2017)' - f'(x) = f'(x+2017) - f'(x), x>0.$$

Επειδή η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Για κάθε $x \in (0,+\infty)$, έχουμε:

$$x+2017 > x \overset{(f' \nearrow (0,+\infty))}{\Rightarrow} f'(x+2017) > f'(x) \Rightarrow \varphi'(x) > 0.$$

Επειδή για κάθε $x \in (0,+\infty)$ ισχύει $\varphi'(x) > 0$, έπεται ότι η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, οπότε είναι συνάρτηση $1-1$.

Η (E) ισοδύναμα γράφεται: $\varphi(x) = \varphi(1) \overset{(\varphi : 1-1)}{\Leftrightarrow} x = 1.$

Επομένως η δοθείσα εξίσωση έχει μοναδική λύση στο $(0,+\infty)$,τον αριθμό $x_0 = 1$.