Επομένως $\left(f^{-1}\right)'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}, & x>1\\ \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}}, & x<1\end{cases}$.

ε. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης:

$$\boxed{f^{-1}(x)=f(x), x\in(\mathbb{R}\cap f(\mathbb{R}))=\mathbb{R}}$$

Με $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$f^{-1}(x)=f(x)\Leftrightarrow f\left(f^{-1}(x)\right)=f\left(f(x)\right)\Leftrightarrow x=f\left(f(x)\right)$$

$$\Leftrightarrow x+f(x)=f(x)+f\left(f(x)\right)\overset{(G(x)=x+f(x),\ x\in\mathbb{R})}{\Leftrightarrow} G(x)=G\left(f(x)\right)\overset{(G:1-1)}{\Leftrightarrow} f(x)=x$$

Όπου G η συνάρτηση $G(x)=x+f(x)$, $x\in\mathbb{R}$ είναι $1-1$, ως γνησίως αύξουσα συνάρτηση, αφού για

κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ έχουμε:

$$x_1<x_2\overset{(f\nearrow\mathbb{R})}{\Rightarrow}\begin{cases}f(x_1)<f(x_2)\\ x_1<x_2\end{cases}\overset{(+)}{\Rightarrow} x_1+f(x_1)<x_2+f(x_2)\Rightarrow G(x_1)<G(x_2)$$

Οπότε με $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$f^{-1}(x)=f(x)\Leftrightarrow f(x)=x\Leftrightarrow x^3-3x^2+3x=x\Leftrightarrow x^3-3x^2+2x=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x\left(x^2-3x+2\right)=0\Leftrightarrow\{x=0 \text{ ή } x=1 \text{ ή } x=2\}$$

Είναι $f(0)=0$, $f(1)=1, f(2)=2$, οπότε τα σημεία τομής των C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι τα $(0,0)$, $(1,1)$ και $(2,2)$.

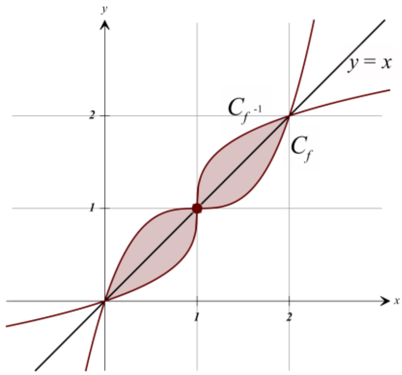
Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E=\int_0^2\left|f(x)-f^{-1}(x)\right|dx$. Λόγω συμμετρίας των C_f και $C_{f^{-1}}$ ως προς την ευθεία $y=x$ το εμβαδόν είναι

$$E=2\int_0^2\left|f(x)-x\right|dx=2\int_0^2\left|x^3-3x^2+2x\right|dx\ .$$

Όμως, για το πολυώνυμο $x^3-3x^2+2x=x\left(x^2-3x+2\right)$ έχουμε:

x	$-\infty$ 0 1 2 $+\infty$
x	$-$ 0 $+$ | $+$ | $+$
x^2-3x+2	$+$ | $+$ 0 $-$ 0 $+$
$x\left(x^2-3x+2\right)$	$-$ 0 $+$ 0 $-$ 0 $+$

Επομένως,



$$E=2\int_0^2\left|x^3-3x^2+2x\right|dx=$$

$$=2\left(\int_0^1\left(x^3-3x^2+2x\right)dx-\int_1^2\left(x^3-3x^2+2x\right)dx\right)$$

$$=2\left(\left[\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\right]_0^1-\left[\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\right]_1^2\right)=$$

$$=2\left(\left[\frac{1^4}{4}-1^3+1^2\right]-0-\left(\left[\frac{2^4}{4}-2^3+2^2\right]-\left[\frac{1^4}{4}-1^3+1^2\right]\right)\right)=$$

$$=2\left(\frac{1}{4}-\left((4-8+4)-\frac{1}{4}\right)\right)=2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=1 \text{ τετραγωνική μονάδα.}$$

στ. Είναι $f(x)=(x-1)^3+1, x\in\mathbb{R}$. Επειδή $f'(x)=3(x-1)^2$ η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο της $M(\alpha,f(\alpha))$ είναι η:

$$(\varepsilon): y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)\Leftrightarrow y=f'(\alpha)x-\alpha f'(\alpha)+f(\alpha)$$

Έστω ότι κατά τη χρονική στιγμή t sec η τετμημένη του σημείου $M(\alpha,f(\alpha))$ είναι $\alpha=\alpha(t)$ μον., $t\geq 0$ και η γωνία ω που σχηματίζει η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο της $M(\alpha,f(\alpha))$ με τον άξονα $x'x$ είναι $\omega=\omega(t)$ rad, $t\geq 0$.

Για κάθε $t\geq 0$ ισχύει:

$$\varepsilon\varphi(\omega(t))=f'(\alpha(t))\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega(t)=3(\alpha(t)-1)^2 \quad :(\alpha)$$

Από την (α) παραγωγίζοντας τα μέλη της ως προς t έχουμε:

$$(\varepsilon\varphi\omega(t))'=\left(3(\alpha(t)-1)^2\right)'\Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega(t)}\cdot\omega'(t)=6(\alpha(t)-1)\cdot\alpha'(t)\Rightarrow$$

$$\left(\varepsilon\varphi^2\omega(t)+1\right)\cdot\omega'(t)=6(\alpha(t)-1)\cdot\alpha'(t)\overset{\left(\varepsilon\varphi\omega(t)=3(\alpha(t)-1)^2\right)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow\left(\left(3(\alpha(t)-1)^2\right)^2+1\right)\cdot\omega'(t)=6(\alpha(t)-1)\cdot\alpha'(t)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(9(\alpha(t)-1)^4+1\right)\cdot\omega'(t)=6(\alpha(t)-1)\cdot\alpha'(t)$$

Τη χρονική στιγμή $t=t_0$ που η ευθεία (ε) διέρχεται από το σημείο $B(1,3)$ έχουμε:

$$3=f'(\alpha)\cdot 1-\alpha f'(\alpha)+f(\alpha)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3=3(\alpha-1)^2-\alpha\cdot 3(\alpha-1)^2+(\alpha-1)^3+1$$

$$\Leftrightarrow 2=3(\alpha-1)^2(1-\alpha)+(\alpha-1)^3$$

$$\Leftrightarrow 2=-3(\alpha-1)^3+(\alpha-1)^3$$

$$\Leftrightarrow 2=-2(\alpha-1)^3$$

$$\Leftrightarrow(\alpha-1)^3=-1\Leftrightarrow\alpha-1=-\sqrt[3]{1}\Leftrightarrow\alpha=0$$

Επομένως είναι, $\alpha(t_0)=0$, $\alpha'(t_0)=1\,\mu o\nu./\sec$.

Έτσι για την χρονική στιγμή t_0 έχουμε:

$$\left(9(\alpha(t_0)-1)^4+1\right)\cdot\omega'(t_0)=6(\alpha(t_0)-1)\cdot\alpha'(t_0)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(9(0-1)^4+1\right)\cdot\omega'(t_0)=6(0-1)\cdot 1$$

$$\Leftrightarrow\omega'(t_0)=\frac{-6}{10}\Leftrightarrow\omega'(t_0)=-\frac{3}{5}\ \text{rad}/\sec$$

Άρα ο ρυθμός μεταβολής της γωνιάς ω που σχηματίζει η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο $M(\alpha,f(\alpha))$ με τον άξονα $x'x$ τη χρονική στιγμή t_0 που διέρχεται από το σημείο $B(1,3)$ είναι:

$$\omega'(t_0)=-\frac{3}{5}\ \text{rad}/\sec.$$