

Ν. Ζανταρίδης
Π. Παντούλας

Β. Μαυροφρύδης
Κ. Τηλέγραφος

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Προσανατολισμός Θετικών Σπουδών
ε Σπουδών Οικονομίας
και Πληροφορικής

Επαναληπτικά θέματα στα πρότυπα του σχολικού βιβλίου

Θέματα Β
Θέματα Γ
Θέματα Δ
Διαγωνίσματα

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
Επαναληπτικά θέματα στα πρότυπα του σχολικού βιβλίου

Ζανταρίδης
Παντούλας
Μαυροφρύδης
Τηλέγραφος

Ζανταρίδης
Παντούλας

ΛΥΜΕΝΑ ΣΥΜΦΩΝΑ ΜΕ ΤΙΣ ΑΠΑΙΤΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΒΑΘΜΟΛΟΓΗΤΩΝ

Θέμα Β8

Δίνεται η περιττή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$x^2 \cdot f(x) \leq \eta\mu^3 x \quad (1), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- α.** Να δείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu^3 x}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$
- β.** Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} .
- γ.** Να βρείτε της ασύμπτωτες της C_f και να βρείτε τα σημεία τομής τους με τη C_f .
- δ.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi] \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Ενδεικτική λύση

- α.** Αφού η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι περιττή, ισχύει: $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Οπότε για $x = 0$ έχουμε $f(0) = -f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$.

Θέτοντας όπου x το $-x$ στη σχέση (1) έχουμε:

$$(-x)^2 f(-x) \leq \eta\mu^3(-x) \quad \begin{matrix} (f(-x) = -f(x)) \\ (\eta\mu(-x) = -\eta\mu x) \end{matrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x^2 f(x) \leq -\eta\mu^3 x$$

$$\Leftrightarrow x^2 f(x) \geq \eta\mu^3 x \quad (2) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\eta\mu^3 x \leq x^2 f(x) \leq \eta\mu^3 x$$

οπότε είναι: $x^2 f(x) = \eta\mu^3 x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως για κάθε $x \neq 0$ είναι $f(x) = \frac{\eta\mu^3 x}{x^2}$ και για $x = 0$ είναι $f(0) = 0$. Άρα,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu^3 x}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

- β.** Στα διαστήματα $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ είναι $f(x) = \frac{\eta\mu^3 x}{x^2}$, οπότε η f είναι συνεχής στα διαστήματα αυτά, ως πηλίκο των συνεχών συναρτήσεων $\eta\mu^3 x$ (σύνθεση της συνεχούς συνάρτησης $\eta\mu x$ με τη συνεχή συνάρτηση x^3) και x^2 (πολυωνυμική). Επιπλέον έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^3 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu^3 x}{x^3} x \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\left(\frac{\eta\mu x}{x} \right)^3 x \right) = 1^3 \cdot 0 = 0 \text{ και } f(0) = 0.$$

Δηλαδή είναι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, που σημαίνει ότι η f είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$. Τελικά η f είναι συνεχής στο $D_f = \mathbb{R}$.

- γ.** • Η f είναι συνεχής στο $D_f = \mathbb{R}$, οπότε η C_f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.
• Θα αναζητήσουμε πλάγιες-οριζόντιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

Για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$-1 \leq \eta\mu x \leq 1 \Rightarrow (-1)^3 \leq \eta\mu^3 x \leq 1^3 \Rightarrow \frac{-1}{x^2} \leq \frac{\eta\mu^3 x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} : (\alpha)$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = 0$, οπότε, λόγω της (α) και του κριτηρίου

παρεμβολής, προκύπτει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu^3 x}{x^2} = 0$ δηλαδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu^3 x}{x^2} = 0 \in \mathbb{R}$.

Συνεπώς η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$. Ομοίως αποδεικνύεται ότι είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \in \mathbb{R}$, οπότε η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f και στο $-\infty$.

Για τα σημεία τομής της C_f και της ασύμπτωτής της, $y = 0$, έχουμε:

- Ένα κοινό σημείο τους είναι το $(0, 0)$, αφού $f(0) = 0$.

➤ Για $x \neq 0$, είναι:

$$\left. \begin{matrix} y = f(x) \\ y = 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\eta\mu^3 x}{x^2} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \eta\mu^3 x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \eta\mu x = 0 \quad (x \neq 0) \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi, k \in \mathbb{Z}^* \\ y = 0 \end{cases}$$

Επομένως η C_f και η ασύμπτωτή της, $y = 0$, έχουν απείρου πλήθους κοινά σημεία, τα οποία είναι της μορφής: $(k\pi, 0)$ με $k \in \mathbb{Z}$.

δ. Για $x \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi]$ έχουμε: $g(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{\eta\mu^3 x}{x^2} = \left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^3$, ενώ για $x = 0$ είναι $g(0) = 1$. Είναι, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^3 = 1^3 = g(0)$ και επομένως η g είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και επιπλέον η g είναι συνεχής στο $[-\pi, 0) \cup (0, \pi]$ ως πηλίκo συνεχών συναρτήσεων. Για $x \neq 0$ είναι:

$$g'(x) = \left[\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^3 \right]' = 3 \cdot \left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2 \cdot \frac{x \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x^2}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $A(x) = x \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$ στο $[-\pi, \pi]$

η οποία είναι παραγωγίσιμη με: $A'(x) = \cancel{\sigma\upsilon\nu x} - x\eta\mu x - \cancel{\sigma\upsilon\nu x} = -x\eta\mu x$

x	$-\pi$	0	π
$\eta\mu x$	-	○	+
$-x$	+	○	-
$A'(x)$	-	○	-
$A(x)$	↔		

Επειδή ισχύει:

$A'(x) > 0$ για κάθε $x \in [-\pi, \pi] - \{0\}$ και η $A(x)$ είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ έπεται ότι η $A(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-\pi, \pi]$.

Οπότε έχουμε:

- $\pi > x > 0 \xrightarrow{(A(x) \searrow)} \Rightarrow A(x) < A(0) = 0 \xrightarrow{\left(\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2 > 0\right)} \Rightarrow 3\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2 \frac{A(x)}{x^2} < 0 \Rightarrow g'(x) < 0$ και
- $-\pi < x < 0 \xrightarrow{(A(x) \searrow)} \Rightarrow A(x) > A(0) = 0 \xrightarrow{\left(\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2 > 0\right)} \Rightarrow 3\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2 \frac{A(x)}{x^2} > 0 \Rightarrow g'(x) > 0$

και η συνάρτηση g είναι συνεχής στα διαστήματα $[-\pi, 0]$ και $[0, \pi]$.

x	$-\pi$	0	π
$g'(x)$	/	+ \bigcirc -	/
$g(x)$	min	↗ max ↘	min

Επομένως, η συνάρτηση g

- ✓ είναι γνησίως αύξουσα στο $[-\pi, 0]$,
- ✓ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi]$,
- ✓ παρουσιάζει στο $x_1 = -\pi$ τοπικό ελάχιστο το $g(-\pi) = 0$,
- ✓ παρουσιάζει στο $x_0 = 0$ τοπικό μέγιστο το $g(0) = 1$,
- ✓ παρουσιάζει στο $x_0 = \pi$ τοπικό ελάχιστο το $g(\pi) = 0$.

Επειδή $g(\pi) = g(-\pi) = 0$ τα παραπάνω τοπικά ελάχιστα είναι ολικά.

Θέμα Γ19

Έστω η συνεχής στο \mathbb{R} συνάρτηση f για την οποία ισχύουν:

- $f^2(x) - e^{2x^2} = 2e^x(e^{x^2} - f(x))$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 - $f(0) = 1$.
- α.** Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- β.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .
- γ.** Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = \kappa^2 - 5\kappa + 7$ για τις διάφορες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$.
- δ.** Ένα σημείο $M(x, f(x))$, $x > 0$ κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f έτσι ώστε η τετμημένη του να αυξάνεται με ρυθμό 1 μον / sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου OMB , όπου $O(0,0)$ και $B(1,0)$, τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σημείο M διέρχεται από το $A(1, f(1))$.

Ενδεικτική λύση

α. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} f^2(x) - e^{2x^2} &= 2e^x(e^{x^2} - f(x)) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow f^2(x) - e^{2x^2} &= 2e^xe^{x^2} - 2e^xf(x) \\ \Leftrightarrow f^2(x) + 2e^xf(x) &= 2e^xe^{x^2} + e^{2x^2} \\ \Leftrightarrow f^2(x) + 2e^xf(x) + (e^x)^2 &= 2e^xe^{x^2} + e^{2x^2} + (e^x)^2 \\ \Leftrightarrow (f(x) + e^x)^2 &= (e^{x^2} + e^x)^2 \\ \Leftrightarrow |f(x) + e^x| &= |e^{x^2} + e^x| \\ \Leftrightarrow |g(x)| &= |e^{x^2} + e^x|, \text{ όπου } g(x) = f(x) + e^x, x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι: $e^{x^2} + e^x > 0$, οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $|g(x)| = e^{x^2} + e^x > 0 \Rightarrow |g(x)| \neq 0 \Rightarrow g(x) \neq 0$.

Η συνάρτηση $g(x) = f(x) + e^x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο \mathbb{R} (ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων) και $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως η g διατηρεί

σταθερό πρόσημο στο \mathbb{R} και επειδή $g(0) = f(0) + e^{f(0)=1} = 1 + 1 = 2 > 0$, έπεται ότι $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως $g(x) = e^{x^2} + e^x \Leftrightarrow f(x) + e^x = e^{x^2} + e^x \Leftrightarrow f(x) = e^{x^2}, x \in \mathbb{R}$.

β. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με:

$$f'(x) = (e^{x^2})' = e^{x^2} (x^2)' = 2xe^{x^2}$$

Είναι:

- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2xe^{x^2} > 0 \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$ ($e^{x^2} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$)
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2xe^{x^2} < 0 \Leftrightarrow 2x < 0 \Leftrightarrow x < 0$ και ($e^{x^2} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$)
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2xe^{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ($e^{x^2} \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	○	+
$f(x)$	↘	max	↗

Από το πρόσημο της $f'(x)$ που φαίνεται στον παραπάνω πίνακα, προκύπτει ότι:

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και
- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Έχουμε:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^2} \stackrel{(x^2=y)}{=} \lim_{\substack{y \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow -\infty}} e^y = +\infty$
- $f(0) = e^{0^2} = e^0 = 1$ και
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2} \stackrel{(x^2=t)}{=} \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow +\infty}} e^t = +\infty$

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ έπεται ότι:

$$f((-\infty, 0]) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = [1, +\infty)$$

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ έπεται ότι:

$$f([0, +\infty)) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [1, +\infty)$$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το

$$f(\mathbb{R}) = f((-\infty, 0]) \cup f([0, +\infty)) = [1, +\infty) \cup [1, +\infty) = [1, +\infty)$$

γ. Είναι

$$f((-\infty, 0)) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = (1, +\infty)$$

$$f((0, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (1, +\infty) \text{ και } f(0) = 1$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $\kappa^2 - 5\kappa + 7 < 1 \Leftrightarrow \kappa^2 - 5\kappa + 6 < 0 \Leftrightarrow \kappa \in (2, 3)$, τότε επειδή

$(\kappa^2 - 5\kappa + 7) \notin f(\mathbb{R})$, η εξίσωση $f(x) = \kappa^2 - 5\kappa + 7$ δεν έχει λύσεις στο \mathbb{R}

- Αν $\kappa^2 - 5\kappa + 7 = 1 \Leftrightarrow \kappa^2 - 5\kappa + 6 = 0 \Leftrightarrow \kappa = 2$ ή $\kappa = 3$, τότε έχουμε:

$$f(0) = \kappa^2 - 5\kappa + 7 = 1$$

$$\kappa^2 - 5\kappa + 7 = 1 \notin f((-\infty, 0)) = (1, +\infty) \text{ και}$$

$$\kappa^2 - 5\kappa + 7 = 1 \notin f((0, +\infty)) = (1, +\infty)$$

Επομένως για $\kappa \in \{2, 3\}$ η εξίσωση $f(x) = \kappa^2 - 5\kappa + 7 \Leftrightarrow f(x) = 1$ έχει μοναδική λύση, τον αριθμό $\rho = 0$.

- Αν $\kappa^2 - 5\kappa + 7 > 1 \Leftrightarrow \kappa^2 - 5\kappa + 6 > 0 \Leftrightarrow \kappa \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$, τότε επειδή,

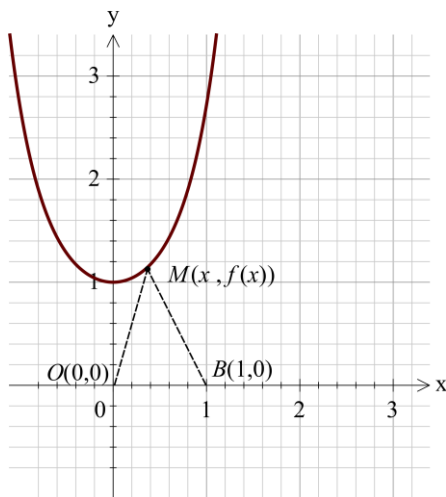
$$(\kappa^2 - 5\kappa + 7) \in f((-\infty, 0)) = (1, +\infty)$$

$$(\kappa^2 - 5\kappa + 7) \in f((0, +\infty)) = (1, +\infty)$$

$$f(0) = 1 \neq \kappa^2 - 5\kappa + 7$$

και η f είναι γνησίως μονότονη σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$, έπεται ότι η εξίσωση $f(x) = \kappa^2 - 5\kappa + 7$ έχει ακριβώς δύο λύσεις στο \mathbb{R} , μία στο $(-\infty, 0)$ και μία στο $(0, +\infty)$.

δ.



Την τυχαία χρονική στιγμή t είναι $x_M = x(t)$ και $y_M = f(x(t)) = e^{x^2(t)}$.

Το εμβαδόν του τριγώνου OBM είναι:

$$E = \frac{1}{2} \cdot (OB) \cdot d(M, x'x) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot f(x(t)) = \frac{1}{2} e^{x^2(t)}.$$

Δηλαδή είναι $E(t) = \frac{1}{2} e^{x^2(t)}$.

Παραγωγίζοντας ως προς t έχουμε:

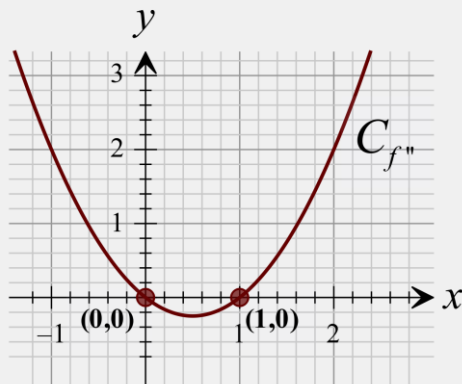
$$E'(t) = \left(\frac{1}{2} e^{x^2(t)} \right)' = \frac{1}{2} e^{x^2(t)} (x^2(t))' = \frac{1}{2} e^{x^2(t)} 2x(t)x'(t) = e^{x^2(t)} x(t)x'(t).$$

Τη χρονική στιγμή $t = t_0$ είναι $x(t_0) = 1$ μ.μ. και $x'(t_0) = 1 \frac{\mu.\mu.}{\text{sec}}$, οπότε

$E'(t_0) = e^{x^2(t_0)} x(t_0) x'(t_0) = e^1 \cdot 1 \cdot 1 = e$ τ.μ./sec, ο οποίος είναι ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής.

Θέμα Δ1

Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και η γραφική παράσταση της f'' φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Ακόμη δίνεται ότι:

- η ευθεία $\varepsilon_1: y=0$ εφάπτεται της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_1=0$,
- η ευθεία $\varepsilon_2: y=-8x+5$ είναι εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_2=1$,
- η ευθεία $\varepsilon_3: y=-27$ εφάπτεται της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_3=3$.

- α.** Να μελετηθεί η f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
β. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.
γ. Να βρείτε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 8x - 5}{(x-1)^2}$

- δ.** Να βρείτε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

- ε.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

- στ.** Να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ αν ισχύει $f(\alpha + \beta) + 2f(5\alpha - \beta) + 81 = 0$.

- ζ.** Να δειχθεί ότι $f\left(\frac{31}{10}\right)f\left(\frac{29}{10}\right) + 27\left(f\left(\frac{31}{10}\right) + f\left(\frac{29}{10}\right)\right) > -729$.

Ενδεικτική λύση

- α.** Επειδή η ευθεία $\varepsilon_1: y=0$ εφάπτεται της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_1=0$, έπεται ότι $f'(0)=0$ και $f(0)=0$.

Επειδή η ευθεία $\varepsilon_2 : y = -8x + 5$ εφάπτεται της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_2 = 1$, έπεται ότι $f'(1) = -8$ και $f(1) = -8 \cdot 1 + 5 \Leftrightarrow f(1) = -3$.

Επειδή η ευθεία $\varepsilon_3 : y = -27$ εφάπτεται της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_3 = 3$, έπεται ότι $f'(3) = 0$ και $f(3) = -27$.

Από τη γραφική παράσταση της f'' βρίσκουμε:

- το πρόσημο της f''
- τη μονοτονία της f'
- την κυρτότητα της f και τις θέσεις σημείων καμπής της C_f .

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$f''(x)$	+	○	-	○	+
$f'(x)$	↗		↘		↗
$f(x)$	↪	Σ.Κ.	↩	Σ.Κ.	↪

Όπως φαίνεται από τον παραπάνω πίνακα:

- Η f' είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$, $[1, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, 1]$.
- Η f είναι κυρτή στα διαστήματα $(-\infty, 0]$, $[1, +\infty)$ και κοίλη στο $[0, 1]$.
- Η f παρουσιάζει καμπή στα σημεία $x_1 = 0$ και $x_2 = 1$, αφού η f'' μηδενίζεται σε αυτά και αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν αυτών.

Είναι $f(0) = 0$ και $f(1) = -3$, οπότε τα σημεία καμπής είναι τα $M_1(0, 0)$ και $M_2(1, -3)$.

β. Έχουμε:

x	$-\infty$	0	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	-			+	
$f(x)$	↘			-27	↗

Επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$, έπεται ότι για κάθε $x \in (-\infty, 0)$

$$\text{ισχύει } f'(x) < f'(0) \stackrel{(f'(0)=0)}{\Rightarrow} f'(x) < 0.$$

Επειδή η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, 1]$, έπεται ότι για κάθε $x \in (0, 1]$

$$\text{ισχύει } f'(x) < f'(0) \stackrel{(f'(0)=0)}{\Rightarrow} f'(x) < 0.$$

Επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$, έπεται ότι:

- για κάθε $x \in [1, 3)$ ισχύει $f'(x) < f'(3) \stackrel{(f'(3)=0)}{\Rightarrow} f'(x) < 0.$
- για κάθε $x \in (3, +\infty)$ ισχύει $f'(x) > f'(3) \stackrel{(f'(3)=0)}{\Rightarrow} f'(x) > 0.$

Επομένως ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 3)$ και η f είναι συνεχής στα σημεία $x_1 = 0$ και $x_3 = 3$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 3]$.

Επίσης ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (3, +\infty)$ και η f είναι συνεχής στο $x_3 = 3$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[3, +\infty)$.

Άρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x_3 = 3$, το οποίο είναι το $\min f(x) = f(3) = -27.$

γ. Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$, αφού η f , ως παραγωγίσιμη, είναι και συνεχής στο

$x_1 = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = -3$, αφού η f είναι συνεχής στο $x_2 = 1.$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + 8x - 5) = -3 + 8 \cdot 1 - 5 = 0.$$

i. Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(f(x))'}{(x^2)'} \stackrel{\text{(D.L.H.)}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{2x} \stackrel{(f'(0)=0)}{=} \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \frac{1}{2} f''(0) = 0$$

ii. Είναι:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 8x - 5}{(x-1)^2} &\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(f(x) + 8x - 5)'}{((x-1)^2)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) + 8}{2(x-1)(x-1)'} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) - f'(1)}{x - 1} \stackrel{(f'(1)=-8)}{=} \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) - f'(1)}{x - 1} = \frac{1}{2} f''(1) = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

δ.

i. Η εξίσωση της εφαπτομένης (δ_1) της C_f στο σημείο της $(-1, f(-1))$ είναι $y - f(-1) = f'(-1)(x + 1) \Leftrightarrow y = f'(-1)(x + 1) + f(-1)$.

$$\text{Άρα } (\delta_1): y = f'(-1)(x + 1) + f(-1)$$

Επειδή η f είναι κυρτή στο $(-\infty, 0]$, έπεται ότι η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της ευθεία $(\delta_1): y = f'(-1)(x + 1) + f(-1)$, σε όλο το διάστημα $(-\infty, 0]$, με εξαίρεση το κοινό σημείο επαφής τους $(-1, f(-1))$.

Άρα για κάθε $x \in (-\infty, 0]$ ισχύει:

$$f(x) \geq f'(-1)(x + 1) + f(-1) \quad :(\alpha)$$

Έχουμε, $-1 < 0 \stackrel{(f' \nearrow (-\infty, 0])}{\Rightarrow} f'(-1) < f'(0) = 0 \Rightarrow f'(-1) < 0$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f'(-1)(x + 1) + f(-1)] \stackrel{(f'(-1) < 0)}{=} +\infty$ οπότε, λόγω της (α) , προκύπτει ότι

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty}.$$

- ii. Η εξίσωση της εφαπτομένης (δ_2) της C_f στο σημείο της $(4, f(4))$ είναι $y - f(4) = f'(4)(x - 4) \Leftrightarrow y = f'(4)(x - 4) + f(4)$.

$$\text{Άρα } (\delta_2): y = f'(4)(x - 4) + f(4)$$

Επειδή η f είναι κυρτή στο $[1, +\infty)$, έπεται ότι η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της ευθείας $(\delta_2): y = f'(4)(x - 4) + f(4)$ σε όλο το διάστημα $[1, +\infty)$, με εξαίρεση το κοινό σημείο επαφής τους $(4, f(4))$.

Άρα για κάθε $x \in [1, +\infty)$ ισχύει:

$$f(x) \geq f'(4)(x - 4) + f(4) \quad :(\beta)$$

Έχουμε $4 > 3 \stackrel{(f' \nearrow [1, +\infty))}{\Rightarrow} f'(4) > f'(3) = 0 \Rightarrow f'(4) > 0$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f'(4)(x - 4) + f(4)] \stackrel{(f'(4) > 0)}{=} +\infty$ οπότε, λόγω της (β) , προκύπτει ότι

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}.$$

- ε. Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 3]$, έπεται ότι $f((-\infty, 3]) = [f(3), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)] = [-27, +\infty)$.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[3, +\infty)$, έπεται ότι $f([3, +\infty)) = [f(3), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)] = [-27, +\infty)$.

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το:

$$f(\mathbb{R}) = f((-\infty, 3]) \cup f([3, +\infty)) = [-27, +\infty) \cup [-27, +\infty) = [-27, +\infty)$$

- στ. Επειδή η f έχει ελάχιστο το -27 και το παρουσιάζει μόνο στη θέση $x_3 = 3$, έπεται ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \geq -27$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 3$. Έτσι έχουμε:

- $f(\alpha + \beta) \geq -27$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $\alpha + \beta = 3$.
- $f(5\alpha - \beta) \geq -27$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $5\alpha - \beta = 3$.

Οπότε έχουμε:

$$\begin{cases} f(\alpha + \beta) \geq -27 \\ f(5\alpha - \beta) \geq -27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(\alpha + \beta) \geq -27 \\ 2f(5\alpha - \beta) \geq -54 \end{cases} \stackrel{(+)}{\Rightarrow} f(\alpha + \beta) + 2f(5\alpha - \beta) \geq -81 \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(\alpha + \beta) + 2f(5\alpha - \beta) + 81 \geq 0$, με την ισότητα να ισχύει μόνο αν $\alpha + \beta = 3$ και $5\alpha - \beta = 3$.

Επομένως για να ισχύει $f(\alpha + \beta) + 2f(5\alpha - \beta) + 81 = 0$ πρέπει και αρκεί:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 3 \\ 5\alpha - \beta = 3 \end{cases} \stackrel{(+)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 6\alpha = 6 \\ \beta = 5\alpha - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

Άρα $\alpha = 1$, $\beta = 2$ είναι οι ζητούμενες τιμές.

ζ. Για κάθε $x \neq 3$ ισχύει $f(x) > -27$, οπότε:

$$\begin{aligned} \begin{cases} f\left(\frac{31}{10}\right) > -27 \\ f\left(\frac{29}{10}\right) > -27 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} f\left(\frac{31}{10}\right) + 27 > 0 \\ f\left(\frac{29}{10}\right) + 27 > 0 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(f\left(\frac{31}{10}\right) + 27\right)\left(f\left(\frac{29}{10}\right) + 27\right) > 0 \\ &\Rightarrow f\left(\frac{31}{10}\right)f\left(\frac{29}{10}\right) + 27f\left(\frac{31}{10}\right) + 27f\left(\frac{29}{10}\right) + 729 > 0 \\ &\Rightarrow f\left(\frac{31}{10}\right)f\left(\frac{29}{10}\right) + 27\left(f\left(\frac{31}{10}\right) + f\left(\frac{29}{10}\right)\right) > -729 \end{aligned}$$

ΥΠΟ ΕΚΔΟΣΗ

Ν. Ζανταρίδης
Κ. Αθανασίου

Κ. Τηλεγραφός
Π. Παντούλας

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Προσανατολισμός Θετικών Σπουδών
& Σπουδών Οικονομίας
και Πληροφορικής

ΤΕΥΧΟΣ Α

- Συναρτήσεις
- Όρια
- Συνέχεια
- Διαφορικός Λογισμός
Μέρος Α

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

ZT